SERIE D'EXERCICES 3ieme Année LMD ACAD :B

1.1. Modélisation

Exercice 1. Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».

Exercice 2. Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Exercice 3. Le jeu de la Tour de Hanoi est décrit comme suit :
1. Trois (03) tours A, B et C permettent d'empiler des disques les uns sur les autres ;
2. au départ, n disques sont empilés sur la tour A;
3. les disques sont de tailles différentes, allant du plus petit (1) au plus grand (n).
4. sur une même tour, les disques ne peuvent être empilés de bas en haut que du plus grand au plus petit;
5. on ne peut déplacer qu'un disque à la fois.

Le jeu consiste à déplacer tous les disques de la tour A vers une autre tour. Modéliser ce jeu pour n = 3 à l 'aide d'un graphe

Exercice 4. On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... Comment doit-on faire ?

Exercice 5. **:** Soit G un graphe simple dont tous les sommets sont tous des entiers strictement positifs, les sommets a et b sont relies si et seulement si a+b est un nombre premier .quel type de graphe obtient-on ? Déterminer le nombre chromatique du graphe G ?

Exercice 6 Soit G=(V,E) un graphe biparti avec bipartition V = XUY de sommets. Le graphe G est régulier de degré d > 0, c.à.d. chaque sommet a le même degré d > 0.

1) Montrer que : Les ensembles X et Y ont la même cardinalité
2) Prouver qu`un graphe biparti ne contient pas de cycle de longueur impaire

Exercice 7. Chaque jour, un groupe de 12 enfants fait une promenade, par rang de deux. Combien de jours peuvent-ils se promener si l'on souhaite qu'un enfant n'ait jamais deux fois le même voisin ? Et si maintenant la promenade se fait par rang de trois ?

Exercice 8. Soit X un ensemble de lapins, et G un graphe orienté ayant X pour ensemble de sommets. On dit que G est un « graphe de parenté » si les arcs de G codent la relation « être l'enfant de »… Quelles conditions doit nécessairement vérifier G pour pouvoir être un graphe de parenté ?

Exercice 9. On s'intéresse aux graphes dont tous les sommets sont de degré trois.

- Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets, 7 sommets.
- Qu'en déduisez-vous ?
- Prouvez-le !

Exercice 10. La situation est-elle identique pour les graphes dont tous les sommets sont de degré 4 ?

Exercice 11. Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est *graphique* s'il existe un graphe dont les degrés des sommets correspondent à cette suite (par exemple, le triangle à trois sommets correspond à la suite 2,2,2). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

- 3, 3, 2, 1, 1
- 3, 3, 2, 2
- 5, 3, 2, 1, 1, 1
- 3, 3, 1, 1
- 4, 2, 1, 1, 1, 1
- 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1

Trouvez deux graphes *distincts* (c'est-à-dire non isomorphes[1]) correspondant à la suite 3, 2, 2, 2, 1.

Exercice 12. Pour les graphes orientés, il faut considérer des suites de couples d'entiers (le premier élément d'un couple correspond au degré entrant, le second au degré sortant). Les suites suivantes sont-elles des suites graphiques ?

- (0,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,0)
- (1,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,1)
- (0,2), (1,1), (1,1), (1,1)
- (0,2), (1,1), (1,1), (2,0)
- (1,2), (1,2), (2,1), (2,1)
- (1,2), (1,2), (2,1), (2,2), (1,1)

Exercice 13. Essayez de construire un graphe non orienté ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des degrés distincts. Qu'en déduisez-vous ?

Rmq :deux graphes G1 et G2 sont isomorphes s'il existe une bijection f entre leurs ensembles de sommets qui préserve les arêtes
(f(x)f(y) est une arête de G2 si et seulement si xy est une arête de G1)

Exercice 14. Montrez que dans un groupe de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).

Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

Exercice 15. Montrez que dans un groupe de 9 personnes, 4 se connaissent mutuellement ou 3 ne se connaissent pas.

Cela est-il toujours vrai dans un groupe de 8 personnes ?

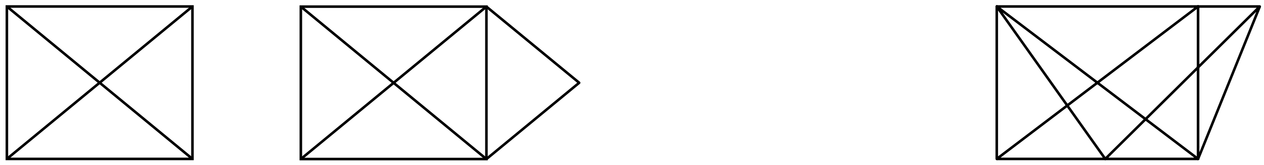
Exercice 16. Montrez que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

Exercice 17. Un groupe de personnes est tel que

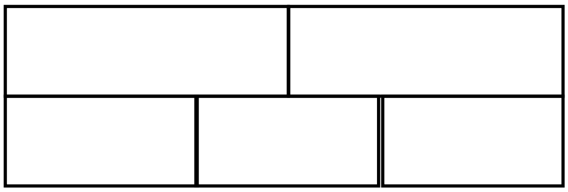
(i) chaque personne est membre d'exactement deux associations,
(ii) chaque association comprend exactement trois membres,
(iii) deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun. Combien y a-t-il de personnes ? d'associations ?

1.3. Graphes eulériens

Exercice 18. Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !…) ? Pourquoi ?



Exercice 19. Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante ?



Exercice 20. Est-il possible de traverser les sept ponts de la ville de Königsberg en empruntant deux fois chaque pont, dans un sens puis dans l'autre ?

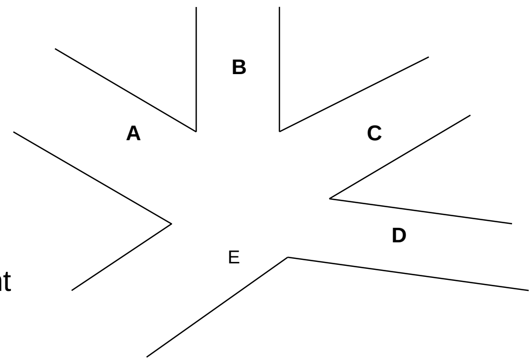
Exercice 21. Soit *G* un graphe non Eulérien. Est-il toujours possible de rendre *G* Eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Exercice 22. On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

- En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
- Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
- Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
- Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à *n*, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

2. PROBLÈMES DE COLORATION

Exercice 23. Le schéma ci-contre représente un carrefour. Le tableau suivant précise les « franchissements » possibles de ce carrefour.



En arrivant par…	A	B	C	D	E
Il est possible d'aller e	C,E	A,E,D	A,D	C,A	C,D

Les franchissements A-C et B-E ne peuvent naturellement pas être autorisés simultanément…

- Modélisez ces incompatibilités à l'aide d'un graphe dont les sommets représentent les franchissements possibles et les arêtes les incompatibilités entre franchissements.
- Proposez une coloration du graphe ainsi obtenu.
- Que peut-on dire d'un ensemble de sommets ayant même couleur ?
- À quoi peut correspondre le nombre chromatique de ce graphe ?

Exercice 24. Tout graphe contenant un triangle (K_3) ne peut être colorié en moins de trois couleurs.

- Construire un graphe sans triangle qui nécessite également trois couleurs.
- Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans K_4 nécessitant 4 couleurs ?
- un graphe sans K_5 nécessitant 5 couleurs ?

Exercice 25

Un projet requiert la réalisation de six (06) tâches, le tableau suivant donne pour chaque tâche, le temps (en jours) requis et les contraintes de précédence entre les tâches.

Tâche	1	2	3	4	5	6
Durée	7	8	2	4	3	1
Tâche antérieure	-	-	1	1, 3	3, 4	3, 4

1. Donner la représentation du problème en graphe MPM (Potentiel-tâches).
2. Donner les dates de début au plus tôt de chaque tâche et la durée optimale du projet.

Donner les dates au plus tard, et déduire les taches critiques

Exercice 26

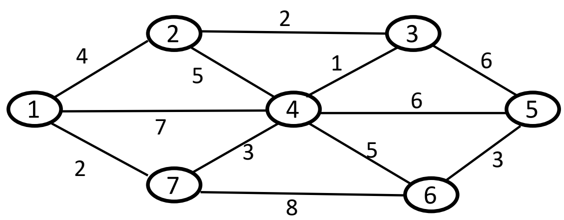
Soit le graphe simple *G=(X,E)* d'ordre *|X| = n* et de taille *|E| = m*

1. Soient *x* un sommet de *X* et ***e*** une arrête de *E.* Que représente chacun des graphes suivants et quel est l'ordre et quelle est la taille de chacun :
   a) G
   b) G – x
   c) G – e
2. Si G est eulérien dans quelles conditions G est aussi eulérien ?
3. Montrer que le complémentaire d'un graphe non connexe est connexe.

Exercice 27

Le schéma ci-dessous représente la carte d'un groupe de villages. Les sommets sont les villages et le poids sur les arêtes représente les distances entre les différents villages. On projette de construire les routes entre ces villages, le budget nécessaire à la construction d'une route est proportionnel à la distance.

Quel est le tracé optimal permettant de relier tous les villages (directement ou indirectement) ?



On veut construire une école dans l'un des villages. Le nombre d'élèves dans chaque village nécessite un certain nombre de bus, donné par le tableau suivant :

Village	1	2	3	4	5	6	7
Nb de bus	2	1	3	2	1	2	1

On veut minimiser le coût de transport des élèves vers cette école (en utilisant le tracé trouvé à la question précédente), ce coût est lié à la fois à la distance et au nombre de bus utilisés.

Quel est l'emplacement optimal de cette école ?

Exercice 25. Déterminer le nombre chromatique des graphes suivants :