SERIE D'EXERCICES 3ieme Année LMD ACAD :B

1.1. Modélisation

Exercice 1. *Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».*

Solution : Côest un graphe orienté (X, U) tel que X ={1,2, .. 12 } et U= { (x, y)∈ U / x divise y }
U= { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9, (1,10), (1,11), (1,12)
(2,2) , (2,4) , (2,6) , (2,8) , (2,10) , (2,12) , (3,3) , (3,6) , (3,9) , (3,12) ; (4 ,4), (4 ,8), (4 ,12), (5 ,5), (5 ,10), (6 ,6), (6 ,12), (7 ,7), (8 ,8), (9 ,9), (10 ,10), (11 ,11), (12 ,12) }

Exercice 2. *Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?*

Solution : Représentons le problème sous forme dôun système à états finis. Chaque état décrit lôévolution du système de lôétat initial vers lôétat final.
On a 4 variables décrivant lôétat du système :
C : état de la chevre, O : état du chou L : état du loup P : état du passeur
Tel que que, C, O, L, P ∈ {0, 1, 2}
0 : décrit lôétat de lôélément positionné sur la rive de départ.
1 : décrit lôétat de lôelement positionné sur la barque.
2 : décrit lôétat de lôelement positionné sur la rive de dôarrivée.

Le graphe donc est un graphe orienté (X,U) tel que X représente les états possibles du système, et lôarc (x,y) ∈ U ssi il y a possibilité de passer de lôétat x à lôétat y en faisant évoluer lôétat dôune variable (+1, -1):
considérant les contraintes suivants :
Lôétat initial est I=(0,0,0,0).
Si lôétat (C,O,L P)=(?, ?, ?,1) alos soit C=1 soit L=1 soit O=1.
Si lôétat C=L ou C=O, alos P=C .
Lôétat final est (2,2,2,2).

Il y a une solution au problème s il y a un chemin qui mène de lôétat I à lôétat F tel que les nî uds composant le chemin satisfassent les contraintes précédentes.
(0,0,0,0) -->(1,0,0,0) --> (1,0,0,1) --> (1,0,0,2) -->(2,0,0,2) -->(2,0,0,1) -->(2,0,0,0) -->(2,1,0,0) -->(2,1,0,1) -->(2,1,0,2) -->(2,2,0,2) -->(1,2,0,2) -->(1,2,0,1) -->(1,2,0,0) -->(0,2,0,0) -->(0,2,1,0) -->(0,2,1,1) -->(0,2,1,2) -->(0,2,2,2) -->(0,2,2,1) -->(0,2,2,0) -->(1,2,2,0) -->(1,2,2,1) -->(1,2,2,2) -->(2,2,2,2)

Exercice 3. *Le jeu de la Tour de Hanoi est décrit comme suit :*
1. Trois (03) tours A, B et C permettent d'empiler des disques les uns sur les autres ;
2. au départ, n disques sont empilés sur la tour A;
3. les disques sont de tailles différentes, allant du plus petit (1) au plus grand (n).
4. sur une même tour, les disques ne peuvent être empilés de bas en haut que du plus grand au plus petit;
5. on ne peut déplacer qu'un disque à la fois.
Le jeu consiste à déplacer tous les disques de la tour A vers une autre tour. Modéliser ce jeu pour n = 3 à l 'aide d'un graphe

Solution :
Représentons le problème sous forme dôun système à états finis. Chaque état décrit lôévolution du système de lôétat initial vers lôétat final.
On a 3 variables décrivant lôétat du système :
A : état de la tour A, *B* : état de la tour B *C* : état de la tour C
Tel que, A, B, C ⊆ {1, ..n} donnent resp l »ensemble des numéros de disque empilés.

Le graphe donc est un graphe orienté (X,U) tel que X représente les états possibles du système, et lôarc (x,y) ∈ U ssi il y a possibilité de passer de lôétat x à lôétat y en faisant (dépilant empilant): considérant les contraintes suivants : A∩ B∩ C=∅
Lôétat initial est I=({1,..N}, ∅,∅).
Tete (A)= plus petit elt de A
Queue (A)= plus grand elt de A
Deux états finaux F1= (0,N,0) ou F2= (0,0,N)
(A,B ,C) →(Aô,Bô,C) si Aô=A- tete(A), Bô=B+ tete(A) et si B≠∅ tete(A) < tete(B)

Il y a une solution au problème s il y a un chemin qui mène de lôétat I à lôétat final tel que les nî uds composant le chemin satisfassent les contraintes précédentes.
({1,2.3},∅,∅) --> ({3,2},{1}, ∅) -->({3,},{1},{2}) →({3}, ∅, {1,2}) -->(∅, {3},{1,2}) -->({1},{3},{2}) -->
({1},{3,2},∅) -->(∅,{3,2,1},∅)

({1,2.3},∅,∅) --> ({3,2}, ∅,{1}) -->({3,}, {2},{1}) →({3}, {1,2},∅) -->(∅, {1,2}, {3}) -->({1},{2},{3}) -->
({1},∅,{3,2}) -->(∅,∅,{3,2,1})

Exercice 4. *On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... Comment doit-on faire ?*

Solution :
Représentons le problème sous forme dôun système à états finis. Chaque état décrit lôévolution du système de lôétat initial vers lôétat final.
On a 3 variables décrivant lôétat du système :
A : état du récipient A, *B* : état du récipient B
Tel que, A, B, C donnent resp la contenance de chaque récipient.
Le graphe donc est un graphe orienté (X,U) tel que X représente les états possibles du système, et lôarc (x,y) ∈ U ssi il y a possibilité de passer de lôétat x à lôétat y en faisant un transvasement (vider remplir et inversement) en considérant les contraintes suivants
Lôétat initial est I=(0, 0,0).
Lôétat final est de configuration F=(4, ?, ?).
(A,B ,C) →(Aô,Bô,C)
si Aô≠0 alors Aô=A-x, Bô=B+x = cont(B)
si Aô=0 alors Bô=B+A <= cont(B)

Il y a une solution au problème s il y a un chemin qui mène de lôétat I à lôétat final tel que les nî uds composant le chemin satisfassent les contraintes précédentes.
(0,0,0) -->(0,0,3) -->(0,3,0) -->(0,3,3) -->(0,5,1) -->(1,5,0) -->(1,5,3) -->(4,5,0)

***Exercice 5*:**: *Soit G un graphe simple dont tous les sommets sont tous des entiers strictement positifs, les sommets a et b sont relies si et seulement si a+b est un nombre premier . Quel type de graphe obtient-on ? Déterminer le nombre chromatique du graphe G ?*

Solution :
On prend le cas de n=10.
Le graphe est simple multiparititionné hierarchique, chaque partition forme un stable contenant soit des nombres pairs ou impairs
Le nombre chromatique est le nombre minimal de couleurs qu'on doit utiliser pour colorer tous les sommets d'un graphe en s'assurant que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.
Deux couleurs suffisent pour colorier le graphe en alternance pour chaque partition

Exercice 6 *Soit G=(V,E) un graphe biparti avec bipartition V = X U Y de sommets. Le graphe G est régulier de degré d > 0, c.à.d. chaque sommet a le même degré d > 0.*

1) *Montrer que : Les ensembles X et Y ont la même cardinalité*
2) *Prouver qu`un graphe biparti ne contient pas de cycle de longueur impaire*

Solution :
On suppose que $|X|= p$ et donc $|Y|=n-p$
Somm $degV(x) =d*n=2m$.
Somm $degX(x)$+ Somm $degY(x) =d*n=2m$;
comme Somm $degX(x)$= Somm $degY(x)$
Somm $degX(x)$= Somm $degY(x) =m$
Par lôabsurde
Supposons le cycle $C= x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \quad x_k\ u_k\ x_1$ telque $x_i \in V$ et $u_i \in E$
Soit $x_1 \in X$, puisque G est biparti si i est impair alors $x_i \in X$ sinon $x_i \in Y$.
Si k est impair donc x et k $\in$ tous les deux à X, mais on aura $(x_k, x_1) \in E$ (contradiction).

Exercice 7. *Chaque jour, un groupe de 12 enfants fait une promenade, par rang de deux. Combien de jours peuvent-ils se promener si l'on souhaite qu'un enfant n'ait jamais deux fois le même voisin ? Et si maintenant la promenade se fait par rang de trois ?*

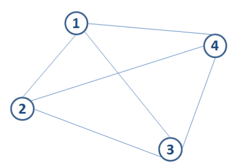
Solution : On considère le graphe suivant G(X,E)
X : Ensemble des sommets un sommet représente un enfant.
E : $(x,y) \in E$, ssi x peut se promener avec y.
On a n=12 le nombre dôaretes possible pour G, m=66 =12.11/2.
Une promenade correspond à un ensemble de 6 aretes (rangs) dans G non incidentes : chaque enfant ne peut appartenir quôà un seul rang lors dôune promenade.
Combien de jeux de 6 aretes différentes on peut trouver.
66/6/11 jours (promenades).
Pour les rangs de 3 : ça correspond à un triangle dans G et chaque promenades contient 4 triangles disjoints donc12 aretes, le nombre de promenades = 66/12= 5 jours.

Exercice 8. *Soit X un ensemble de lapins, et G un graphe orienté ayant X pour ensemble de sommets. On dit que G est un « graphe de parenté » si les arcs de G codent la relation « être l'enfant de »… Quelles conditions doit nécessairement vérifier G pour pouvoir être un graphe de parenté ?*

Solution : Chaque lapin doit avoir un degré entrant = 2 (chaque lapin à deux parents) à lôexception du premier couple de lapins (degre 0).
Le graphe doit etre sans cricuit (acyclique), un lapin ne peut avoir comme parent un ascendant.
On doit pouvoir colorier les sommets de ce graphe en deux couleurs (male, femelle) de telle façon que tout noeud x de $deg(x)\neq 0$ possede un père et une mere.

Exercice 9. *On s'intéresse aux graphes dont tous les sommets sont de degré trois.*
- *Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets, 7 sommets.*
- *Qu'en déduisez-vous ?*
- *Prouvez-le !*

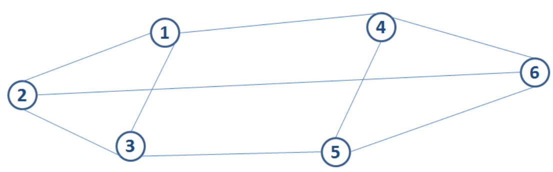
Solution :
Exemple dôun graphe 3-régulier avec 4 sommets :



Remarque : Ceci nôest pas la seule possibilité. On peut obtenir plusieurs autres graphes 3-réguliers dôordre 4.

Exemple dôun graphe 3-régulier avec 5 sommets : Remarque : Impossible

Exemple dôun graphe 3-régulier avec 6 sommets : Remarque : Même chose que pour 4 sommets, ce nôest pas la seule solution possible.



Exemple dùun graphe 3-régulier avec 7 sommets :
Remarque : Impossible

Déduction :
- Lorsque le nombre de sommets (Ordre du graphe) est pair, on peut avoir des graphes 3-réguliers.
-Lorsque le nombre de sommets est impair, on ne peut pas avoir des graphes 3-réguliers.

Preuve : Le nombre de sommets de degrés impairs est toujours pair dans un graphe.
D * N = 2 M, si on pose D=3 N doit forcement être pair.

Exercice 10. *La situation est-elle identique pour les graphes dont tous les sommets sont de degré 4 ?*

Solution :
En appliquant le même principe : 4* N = 2M ➔ M=N*2 il faut que le nombre dùaretes soit egal au double des sommets.
4 sommets : impossible pour graphe simple.
5 sommets : oui graphe complet (10 aretes)
6 sommets : Oui possible (12 aretes)
7 sommets : Oui possible (14 aretes)

Exercice 11. *Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est graphique s'il existe un graphe dont les degrés des sommets correspondent à cette suite (par exemple, le triangle à trois sommets correspond à la suite 2,2,2). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?*

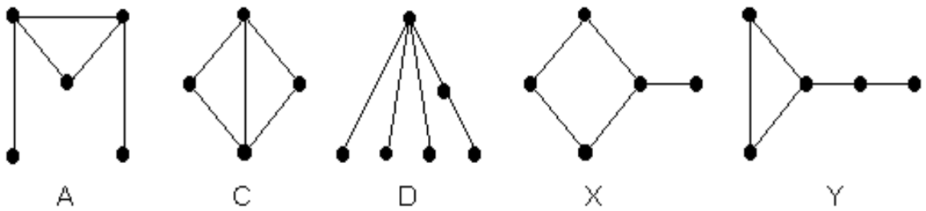
- 3, 3, 2, 1, 1
- 3, 3, 1, 1
- 3, 3, 2, 2
- 4, 2, 1, 1, 1, 1
- 5, 3, 2, 1, 1, 1
- 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1

Trouvez deux graphes distincts (cùest-à-dire non isomorphes[1]*) correspondant à la suite 3, 2, 2, 2, 1.*

Rmq : *Deux graphes G1 et G2 sont isomorphes s'il existe une bijection f entre leurs ensembles de sommets qui préserve les arêtes (f(x)f(y) est une arête de G2 si et seulement si xy est une arête de G1)*

Solution : Il faut que la somme des degrés soit un nombre pair. Les suites (3,3,2,1,1), (3,3,2,2) et (4,2,1,1,1,1) sont graphiques, comme le montrent les graphes A, C et D de la figure ci-dessous. La suite (5, 3, 2, 1, 1, 1) est non graphique car somme des degrés est impaire. Les suites (3, 3, 1, 1) (5, 4, 3, 1, 1, 1,1) sont non graphiques car le nombre dùarete insuffisant (4, et 8)

Les graphes X et Y sont distincts et correspondent tous deux à la suite (3,2,2,2,1).



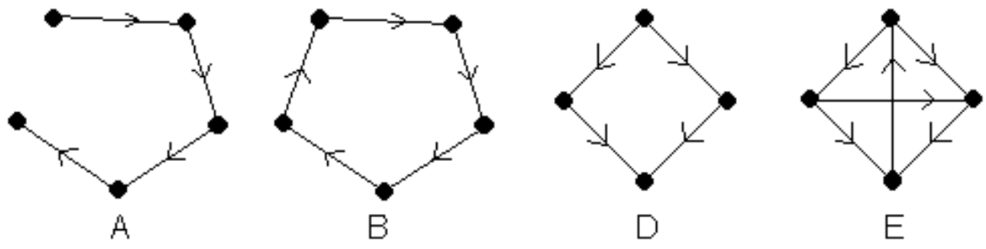
Exercice 12. *Pour les graphes orientés, il faut considérer des suites de couples d'entiers (le premier élément d'un couple correspond au degré entrant, le second au degré sortant). Les suites suivantes sont-elles des suites graphiques ?*

(0,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,0)

- *(1,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,1)*
- *(0,2), (1,1), (1,1), (1,1)*
- *(0,2), (1,1), (1,1), (2,0)*
- *(1,2), (1,2), (2,1), (2,1)*
- *(1,2), (1,2), (2,1), (2,2), (1,1)*

Solution : Nous savons que la somme des degrés entrants doit être égale à la somme des degrés sortants. Nous pouvons ainsi déjà éliminer les suites [(0,2),(1,1),(1,1),(1,1)] et [(1,2),(1,2),(2,1),(2,2),(1,1)].

Les suites [0,1),(1,1),(1,1),(1,1),(1,0)], [(1,1),(1,1),(1,1),(1,1),(1,1)], [(0,2),(1,1),(1,1),(2,0)] et [(1,2),(1,2),(2,1),(2,1)] sont graphiques, comme le montrent respectivement les graphes A, B, D et E ci-dessous.



Exercice 13. *Essayez de construire un graphe non orienté ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des degrés distincts. Qu'en déduisez-vous ?*

Solution : *(Voir solution Exo 16)*

Exercice 14. *Montrez que dans un groupe de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).*
Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

Solution :
On modélise par un graphe social G(X,E) ; il n y a pas de sommet isolé
tel que :
X : $x \in X$ si x est une personne (n=6)
$(x, y) \in E$ ssi x connait y.
Il suffit de démontrer que la cardinalité de la pus grande clique est 3 ou que la cardinalité du plus grand stable est égal à 3.
Par lôabsurde : On suppose la plus grande clique <3. Et le plus grand stable < 3.
On considère des clique à deux si (x,y) et $(y,z) \in E \Rightarrow (x,z) \notin E$.
On obtient 3 cliques à deux éléments ex : {1,2}, {3,4} et {5,6} ce qui correspond à la cardinalité du plus grand stable = 3 (la cardinalité du plus grand stable ≤ nombre de clique dans un graphe) le plus grand stable {1,3,5} sa cardinalité est égal à 3. Contradiction
Cas n=5 :
Il suffit de trouver un contre exemple considérons le graphe (1.2), (2.3) (3.4)(4.5)
le nombre de clique est égal à 3 pour des cliques de cardinalité 2 : {1,2}, {3,4} et {5}
Par contre le plus grand stable est de degré 3 : {1,3, 5}

Exercice 16. *Montrez que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.*

Solution :

Construisons un graphe dont les sommets représentent les personnes et plaçons une arête entre deux sommets lorsque les personnes correspondantes sont amies. Dire que deux personnes ont le même nombre dôamis revient à dire que deux sommets dans le graphe ont le même degréé

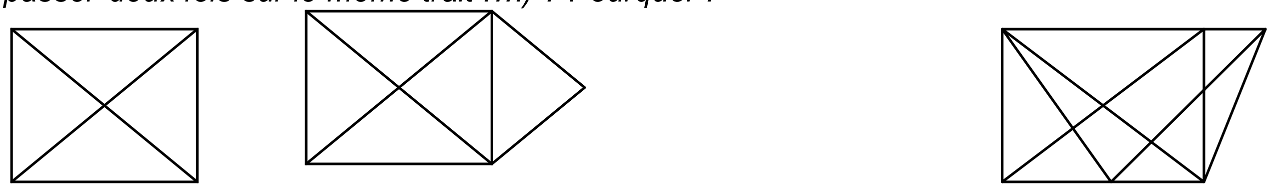
Par lôabsurde : Nous allons montrer quôil nôexiste aucun graphe dont tous les sommets ont des degrés distincts. Supposons quôun tel graphe existe et quôil possède n sommets. Le degré maximal dôun sommet est donc n-1. Si tous les degrés des sommets sont distincts, on a donc nécessairement un sommet de degré 0, un sommet de degré 1, é , un sommet de degré n-1. Du fait de la présence dôun sommet de degré 0, disons x_0, il est impossible dôavoir un sommet de degré n-1 ! (en effet, celui-ci devrait être relié à tous les autres, y compris x_0). On obtient ainsi une contradiction.

Exercice 17. *Un groupe de personnes est tel que*
(i) chaque personne est membre d'exactement deux associations,
(ii) chaque association comprend exactement trois membres,
(iii) deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun.
Combien y a-t-il de personnes ? d'associations ?

Solution :
Il faut considérer le graphe G(X,E)
Chaque sommet représente une association
$(x,y) \in E$ ssi x et y ont un membre en commun.
N est le nombre dôassociations (nombre de nî uds).
A partir de (iii) le graphe est forcement complet.
A partir de (i) et (iii), le nombre de personnes est le nombre dôaretes =m. Chaque personne représente une arete.
A partir de (ii), le graphe est 3 régulier.
On a donc : $3n = 2m$, et $dg(x)=n-1$ ➔ $n=4$ (4 associations) et $m=6$ (6 membres)
Ex : {1,2,3} {3,4,5} {4,2,6} {1,5,6}

1.3. Graphes eulériens

Exercice 18. *Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !…) ? Pourquoi ?*

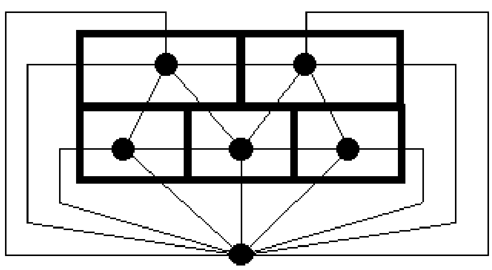


SOLUTION
Le graphe G représentant chaque schéma est donné comme suit G (X E) tel que :
X : x représente une intersection entre deux traits
E : $(x,y) \in E$ ssi il y a un trait entre x et y.
De tels tracés sont possibles si le graphe admet un parcours eulérien (passe par toutes les arêtes une fois), c'est-à-dire qu'il contient 0 ou 2 sommets de degrés impair. Seul le second schéma répond à la condition.

Exercice 19. *Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante ?*

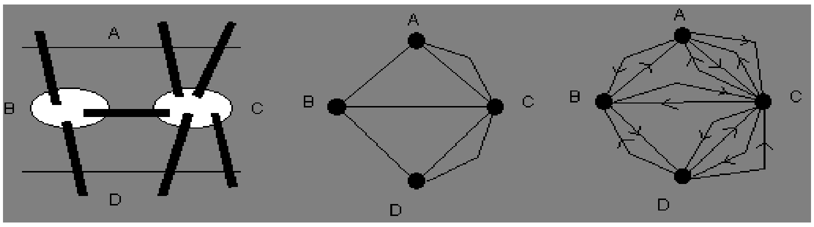
SOLUTION : On peut associer un graphe à cette figure (en réalité un multigraphe car nous aurons des arêtes multiples) de la façon suivante : les sommets représentent les régions (y compris la région extérieure) et deux sommets sont reliés par autant dôarêtes que le nombre de segments communs de leurs régions (voir ci-dessous).

Le problème revient alors à effectuer un chemin eulérien dans ce graphe. Or, ce graphe contient 4 sommets de degré impairé côest donc impossible.



Exercice 20. *Est-il possible de traverser les sept ponts de la ville de Königsberg en empruntant deux fois chaque pont, dans un sens puis dans l'autre ?*

SOLUTION La figure suivante représente les ponts de Koenigsberg et le graphe non orienté associé au problème classique. Le problème consistant à emprunter deux fois chaque pont, dans un sens puis dans lôautre, revient à chercher un cycle eulérien dans le graphe orienté obtenu en modélisant chaque pont par deux arcs de directions opposées. On peut observer que le graphe orienté ainsi obtenu est tel que tout sommet possède un degré entrant égal à son degré sortant (cela est vrai pour tout graphe orienté obtenu à partir dôun graphe non orienté en remplaçant chaque arête par deux arcs de directions opposéesé). Le graphe orienté est donc eulérien et le parcours suivant le prouve (les ponts, ou arcs, sont désignés par AB, BC, BD, AC1, AC2, CD1, CD2 dans un sens puis BA, DB, CD1, etc. dans lôautre sens) : AB, BD, DC1, CA1, AC1, CD1, DB, BA, AC2, CB, BC, CD2, DC2, CA2



__Exercice 21.__ Soit G un graphe non Eulérien. Est-il toujours possible de rendre G Eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Solution :
Pour quôun graphe soit eulérien, il faut et il suffit que tous ses sommets soient de degré pair. Si un graphe contient k sommets impairs, il est possible de rajouter un nouveau sommet x, relié à ces k sommets. Dans le graphe obtenu, les k sommets considérés sont devenus pairsé Cependant, le degré de x étant k, le graphe nôest toujours pas eulérien si k était impairé Remarquons quôil est possible de rajouter des arêtes entre les sommets de degré impair dans le graphe dôorigineé Mais lôajout dôune telle arête, entre deux sommets impairs a et b par exemple, fait que le nombre de sommets impairs devient k-2, qui a la même parité que ké *La réponse est donc : ce n'est possible que si le nombre de sommets de degré impair est pair* **…**

__Exercice 22.__ On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.
1. *En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?*
2. *Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).*
3. *Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?*
4. *Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?*

SOLUTION :

1- On modélise le pbm par un graphe G non orienté (X, E), X : x représente le numéro de la face E : (x,y) est un domino tel que $x \neq y$. G est complet et simple K_5. Le nombre de dominos revient à calculer le nombre dôaretes : m=5*4/2=10

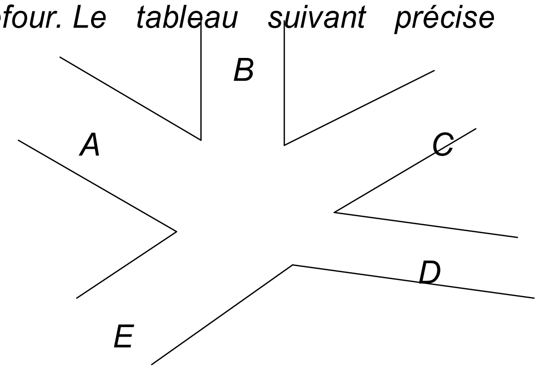
2- Considérons maintenant le graphe complet K_5 à 5 sommets. Ce graphe possède 10 arêtes, chaque arête correspondant à une paire de sommets distinctsé côest-à-dire à un domino. Former une boucle fermée avec ces dominos revient donc à trouver un cycle eulérien (passant par toutes les arêtes, donc utilisant tous les dominos) dans K_5. Ce cycle existe puisque tous les sommets sont de degrés pairs (=4). Une solution possible est la suivante :
1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1, 1-3, 3-5, 5-2, 2-4, 4-1.

3- Les dominos doubles peuvent être insérés sans difficulté dans cette suite. Lôexistence du cycle nôest pas remis en cause car le Dg des sommets (=6). En terme de graphes, les dominos doubles correspondent à une boucle sur un sommet et cette boucle peut être « parcourue » lorsquôon atteint le sommet en question pour la première fois par exempleé
1-1, 1-2, **2-2,** 2-3, **3-3,** 3-4, **4-4,** 4-5, **5-5,** 5-1, 1-3, 3-5, 5-2, 2-4, 4-1.

4- Si lôon considère le même problème avec des faces numérotées de 1 à n, on doit raisonner sur le graphe complet à n sommets. Or, nous savons quôun graphe admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et ne possède que des sommets de degré pair. *Dans le cas des graphes complets, cela n'est vrai que si le nombre de sommets est impair…(N doit être impair).*

PROBLÈMES DE COLORATION

Exercice 23. *Le schéma ci-contre représente un carrefour. Le tableau suivant précise les « franchissements » possibles de ce carrefour.*

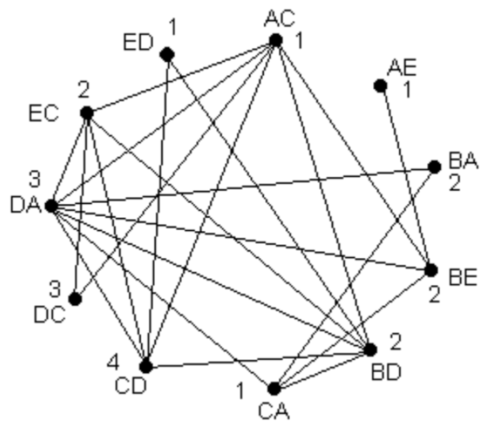


En arrivant par…	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Il est possible d'aller vers	*C,E*	*A,E,D*	*A,D*	*C,A*	*C,D*

Les franchissements A-C et B-E ne peuvent naturellement pas être autorisés simultanément…

1. *Modélisez ces incompatibilités à l'aide d'un graphe dont les sommets représentent les franchissements possibles et les arêtes les incompatibilités entre franchissements.*
2. *Proposez une coloration du graphe ainsi obtenu.*
3. *Que peut-on dire d'un ensemble de sommets ayant même couleur ?*
4. *À quoi peut correspondre le nombre chromatique de ce graphe ?*

SOLUTION :
Le graphe modélisant le carrefour est représenté ci-dessous. G (X,E)
X : x représente un franchissement.
E ; (x, y) $\in$E ssi x et incompatible avec y.
Son nombre chromatique est égal à 5 (*il est 5-coloriable et contient un K_5 regroupant les sommets (AC, BD, CD EC et DA*). Un ensemble de sommets de même couleur, par exemple ED, AC, AE et CA regroupe un ensemble de trajets pouvant sœffectuer en même temps (aucune incompatibilité). Le nombre chromatique correspond alors *au nombre minimum de « cycles » que doivent respecter les feux de signalisation de ce carrefour.* Pour notre exemple, nous aurons :
1. DA, AE, DC et ED 2. BA, BE, BD 3. AC et CA 4. CD 5. EC



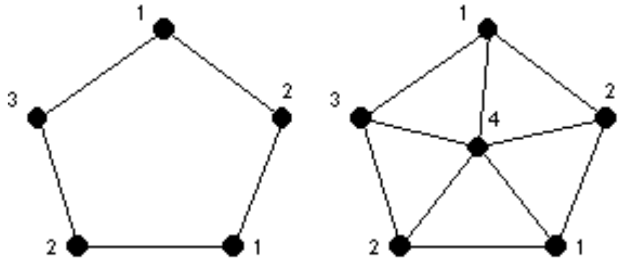
Exercice 24. *Tout graphe contenant un triangle (K_3) ne peut être colorié en moins de trois couleurs.*

1. *Construire un graphe sans triangle qui nécessite également trois couleurs.*
2. *Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans K_4 nécessitant 4 couleurs ?*
3. *un graphe sans K_5 nécessitant 5 couleurs ?*

SOLUTION :

1- Il suffit de considérer par exemple un cycle ayant un nombre impair de sommets. Si lœon rajoute à ce graphe un sommet relié à tous les sommets du cycle, on obtient un graphe de nombre chromatique 4 ne contenant pas de K_4.

2- On peut itérer cette construction de façon à obtenir, pour tout k, un graphe de nombre chromatique k ne contenant pas de K_k. Un résultat plus puissant, dû à Erdös, montre que pour tout k, il existe un graphe de nombre chromatique k sans triangle, et même sans cycle de longueur inférieure à un entier p donné, quel que soit pé



Exercice 26 *Soit le graphe simple G=(X,E) d'ordre |X| = n et de taille |E| = m*

1. Soient x un sommet de X et e une arête de E. Que représente chacun des graphes suivants et quel est l'ordre et quelle est la taille de chacun :

~~G~~

G – x

G – e

2. Si G est eulérien dans quelles conditions G est aussi eulérien ?

3. Montrer que le complémentaire d'un graphe non connexe est connexe.

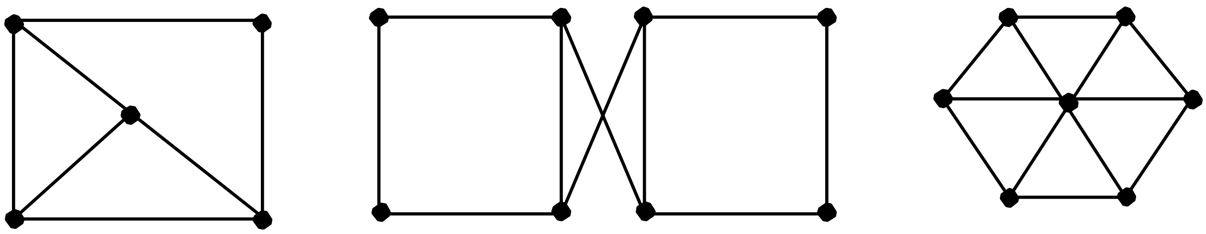
SOLUTION :

1) ~~G~~ est le complement de G (n, $(n-1)n/2 - m$)
   G ï x : sous graphe de taille (n-1, m-dg(x))
   G ï e : graphe partiel de taille (n, m-1)

2) Si G est eulerien ➔ tous les sommets sont de degré pair. Si x est de degré impair ds G cela correspond au nombre de sommets auquel il est connecté dans G. Donc x est connecté dans ~~G~~ au reste des sommets auxquels il nôest pas relié dans G. Pour que $Dg^{\overline{G}}$ (x) soit pair il faut que *n* soit impair.

3) Par lôabsurde
   Soit G est non connexe, $X_1, X_2 \subset X$ $\forall x \in X_1$, $\forall y \in X_2$ $(x\ y) \notin E$
   Si ~~G~~ est non connexe alors nous avons aussi $\forall x \in X_1$, $\forall y \in X_2$ $(x\ y) \notin \overline{E}$
   Mais comme ~~G~~ est le complément de G, $(x\ y) \in \overline{E}$ puisque $(x\ y) \notin E$ (Contradiction)

Exercice 28. *Déterminer le nombre chromatique des graphes suivant*

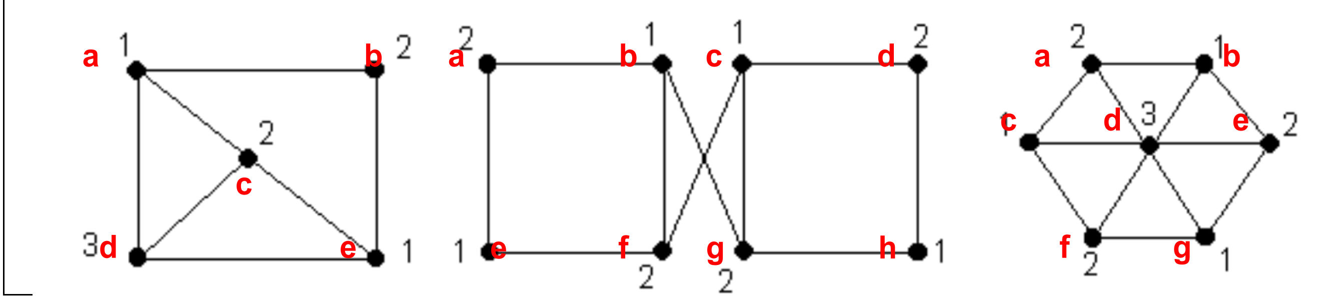


SOLUTION : Une k-coloration partitionne X en k stables où tous les sommets du même stable ont la même couleur. On utilise lôalgorithme de Welsh & Powell

Algorithme de coloration de Welsh et Powell

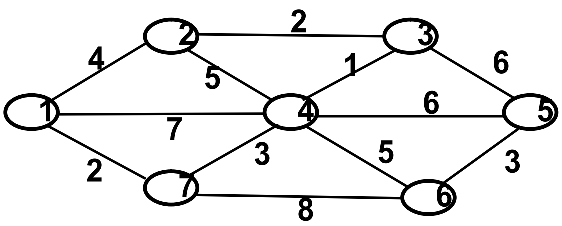
Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

- **Étape 1 :** Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.
- **Étape 2 :** En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur
- **Étape 3 :** S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée.



Dg(a)=Dg(c)=Dg(d)=Dg(d)=3 Dg(b)=2. a→ 1, e→ 1 c→ 2, d→ 3	Dg(b)=Dg(c)=Dg(f)=Dg(g)=3 Dg(a)= Dg(d)= Dg(e)= Dg(h)=2. b→ 1, e→ 1, h→ 1,c→ 1, f→ 2, a→ 2, g→ 2, d→ 2	Dg(d)=,6 Dg(a)=Dg(b)=Dg(c)=Dg(e)=Dg(f)= Dg(g)=3. d→ 1, a→ 2, f→ 2, e→ 2 b→ 3, c→ 3, g→ 3, d→ 2

Exercice 27 : *Le schéma ci-dessous représente la carte d'un groupe de villages. Les sommets sont les villages et le poids sur les arêtes représente les distances entre les différents villages. On projette de construire les routes entre ces villages, le budget nécessaire à la construction d'une route est proportionnel à la distance.*
Quel est le tracé optimal permettant de relier tous les villages (directement ou indirectement) ?



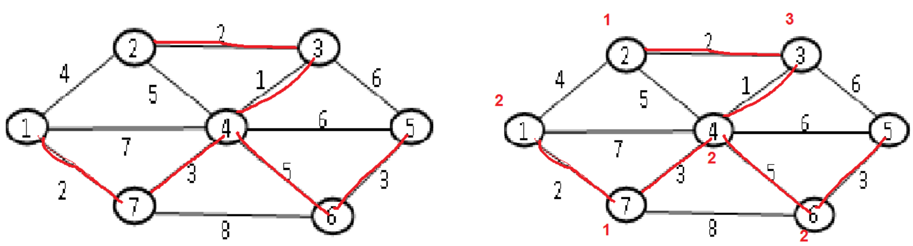
On veut construire une école dans l'un des villages. Le nombre d'élèves dans chaque village nécessite un certain nombre de bus, donné par le tableau suivant :

Village	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Nb de bus	*2*	*1*	*3*	*2*	*1*	*2*	*1*

On veut minimiser le coût de transport des élèves vers cette école (en utilisant le tracé trouvé à la question précédente), ce coût est lié à la fois à la distance et au nombre de bus utilisés. Quel est l'emplacement optimal de cette école ?

SOLUTION :

1 ï Il faut calculer lôarbre couvrant de poids minimum, on applique lôalgorithme de Prim



T={} W= {1}

Etape 1 : T={(1,7)} W= {1,7}
Etape 2 : T={(1,7),(7,4)} W= {1,7,4}
Etape 3 : T={(1,7),(7,4), (4,3)} W= {1,7,4,3}
Etape 4 : T={(1,7),(7,4), (4,3), (3,2)} W= {1,7,4,3,2}
Etape 5 : T={(1,7),(7,4), (4,3), (3,2),(4.6)} W= {1,7,4,3,2,6}
Etape 6 : T={(1,7),(7,4), (4,3), (3,2),(4.6),(6.5)} W= {1,7,4,3,2,6,5} FIN

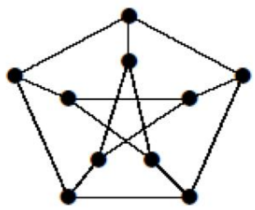
On calcule une matrice de coûts

0	16	12	10	26	20	4
8	0	2	3	11	8	6
18	6	0	3	24	18	12
10	10	2	0	16	10	6
13	11	9	8	0	3	11
20	16	12	10	6	0	16
2	6	4	3	11	8	0
71	65	41	37	94	67	55

Il faut trouver la colonne à cout minimum : le Village 4 est lœmplacement optimal

EXO :1

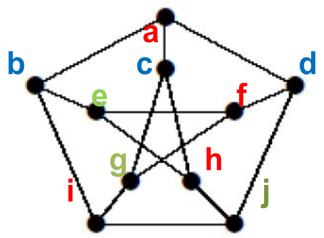
1. Quels sont les graphes de nombre chromatique égal à 1 ? et égal à 2 ?
2. Trouvez le nombre chromatique du graphe de Petersen (ci-dessous) et du graphe biparti complet $K_{5,3}$.

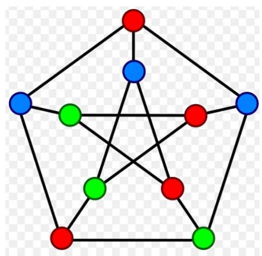


Solution :

Propriétés :
- Nb chroma de G ≤ Δ(G)+1
- n ≤ Nb chroma de G, yel que Kn est sous graphe de G.
- Le nombre chromatique dŏun graphe complet est égal à son rang.

1. Graphe qui ne contient que des sommets isolés.
2. Graphe en partition (Arbre, etc)





Dg(a)=Dg(b)= Dg(c)= Dg(d)= Dg(e) Dg(f)=Dg(g)=Dg(h)=Dg(i)=Dg(j)=3.
Graphe 3 regulier.

Dg(a)→1, Dg(i)→1, Dg(h)→1, Dg(f)→1
Dg(b)→2, Dg(c)→2, Dg(d)→2,
Dg(e)→3, Dg(g)→3, Dg(j)→4,
Nb chroma= 3

Supposons le graphe biparti $K_{5.3}$ Nb chrom =2 par définition.

EXO:2 Vrai ou Faux (Justifier votre réponse)

(a) Un graphe de degré maximum 3 peut être colorié avec 4 couleurs.

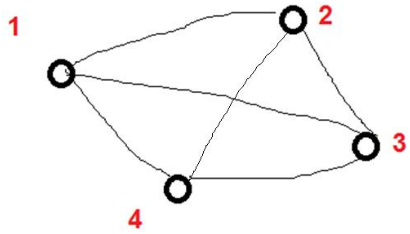
(b) Un graphe de degré maximum 4 peut être colorié avec 4 couleurs.

(c) Si G contient K_n comme sous-graphe, alors son nombre chromatique est supérieur ou égal à n.

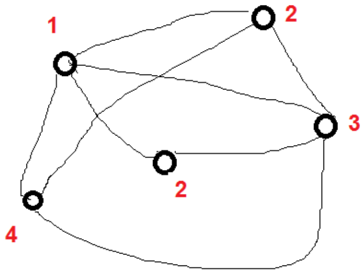
(d) Si G est de nombre chromatique égal à n, alors G contient K_n comme sous-graphe.

Solution :

a) Oui puisque Nb chroma de G ≤ $\Delta(G)+1$



b) Oui Exemple

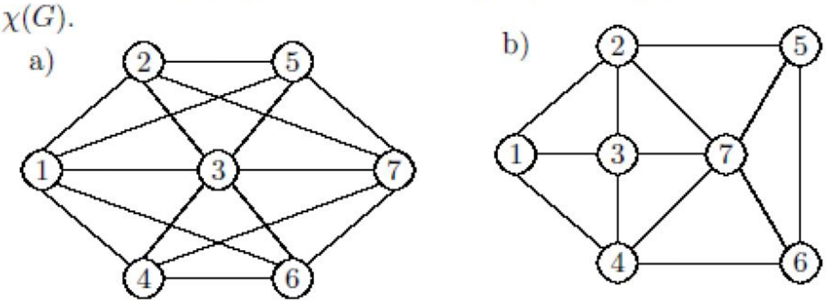


c) Oui puisque que le Nb chromatique dôun Graphe est superieur ou egal au nombre chromatique de son sous graphe. Comme le nombre Chromatique de Kn =n.

d) Non Exemple de graphe de Pettersen ou le chroma = 3 mais ne contient pas de triangle

EXO :3

Pour les deux graphes ci-dessous appliquez l'algorithme de coloration glouton et trouvez $\chi(G)$.



Solution :

Dans un algorithme glouton il n y a pas forcemment dôordre établi.

EXO :4

On doit réaliser 10 tâches sur des machines identiques. Chaque tâche peut être réalisée sur chaque machine et chaque machine ne peut exécuter qu'une seule tâche à la fois. Les temps de début et de fin des tâches sont les suivants : $(13,18), (8,14), (2,7), (0,12), (10,16), (5,25), (2,5), (18,21), (13,29), (24,27)$. On souhaite utiliser un nombre minimum de machines pour réaliser les tâches. Formulez ce problème comme un problème de graphes. Résolvez le problème pour les données fournies.

Solution :

Il suffit de de représenter par un graphe tel que :
X : x $\in$X représente une tâches {t_1,é t_{10}}
E : (x,y) $\in$E x se chevauche avec y.

Trouver le nombre de machines minimal revient à trouver le nombre chromatique de G. Les tâches pouvant sôexécuter sur une même machine représentent les sommets coloriés avec une même couleur.

EXO :5

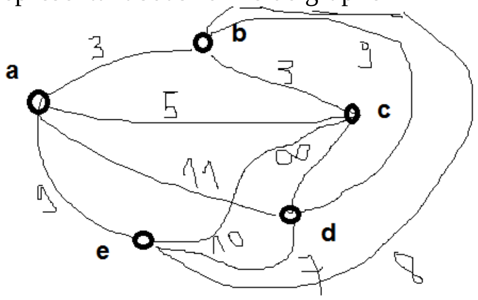
On considère un réseau de 5 villes. Le coût de la construction d'une route directe entre i et j est de a_{ij}. Trouvez le coét minimum d'un réseau liant les villes entre elles.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & +\infty & 10 \\ 11 & 9 & +\infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Appliquer l'algorithme de Prim et Kruskal .

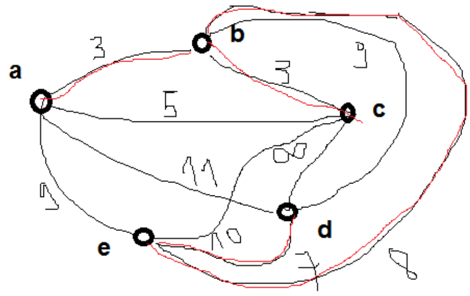
Solution :

Représentant sous forme de graphe

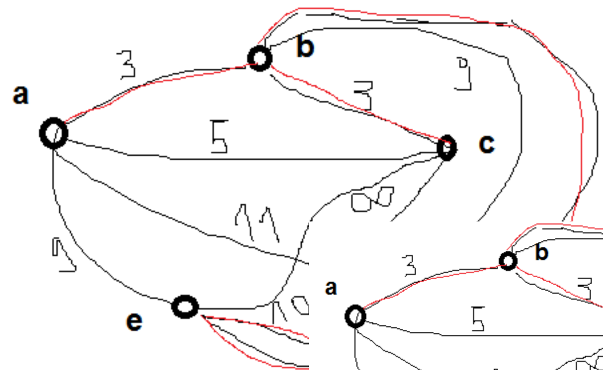


Il faut trouver un graphe couvrant minimal : un arbre couvrant a n-1 aretes et est connexe
Trouvons un cocycle

Algorithme
Soit T lœnsemble des aretes formant lœarbre couvrant
T= ∅. W={a}
Tant que |T| ≤n-1 faire
Soit S le cocycle de (W, E-W) ;
Soit (u,v) une arete de poids minimal ds S.
T= T +(u,v),   W= W+{v}
Fait
n=5
Etape 1 T={(a,b)}   W= {a,b}
Etape 2 T={(a,b), (b,c))}   W= {a,b,c}
Etape 3 T={(a,b), (b,c), (b,e)}   W= {a,b,c,e}
Etape 4 T={(a,b), (b,c), (b,e), (e,d)}   W= {a,b,c,e,d} FIN

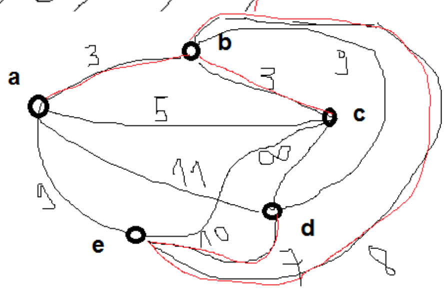


POIDS= 30



'=∅

tel que (u,v) ne crée par de cycle ds T.



EXO::6

Construisez l'arbre numéroté qui correspond à la séquence de Prüfer suivante : 41132. Combien de sommets de degré 3 cet arbre contient-il ? Utilisez la correspondance de Prüfer pour compter le nombre d'arbres numérotés de 7 sommets qui possèdent un sommet de degré 4.

Solution

Codage de Prufer – algorithme de codage

```
P ← vide;
Tant que |X|>2
 Faire
  Choisir x dans X tel que dG(x)=1 et
  x minimal; // feuille de numéro minimal
  P ← P . Adjacent(x);
  // Rajouter le sommet adjacent à x dans la liste ordonnée
  P
  X ← X - {x}; // Supprimer le sommet x
  E ← E - {x, Adjacent(x)}; // Supprimer
  l'arête incidente à x
Fait
```

Codage de Prufer – algorithme de décodage

```
n ← longueur(P)+ 2; X ← ∅; E ← ∅;
Pour i de 1 à n
 X ← X ∪ {i}; D[i] ← 1;
Pour chaque valeur j de P
 D[i] ← D[i] + 1;
Pour chaque valeur j de P
  Chercher k tel que D[k]=1 et k minimal;
  E ← E ∪ {j,k};
  D[j] ← D[j]-1;
  D[k] ← 0;
Relier les deux sommets ayant D[i]=1;
```

P= 41132

Long (P)= 5+2=7, X→∅, E→ ∅

le graphe content 7 sommets X→{1.2.3.4.5.6.7},

On initialise les degrés de tous les sommets à 1.

On rajoute +1 au degre de chaque instance du sommet i dans P.

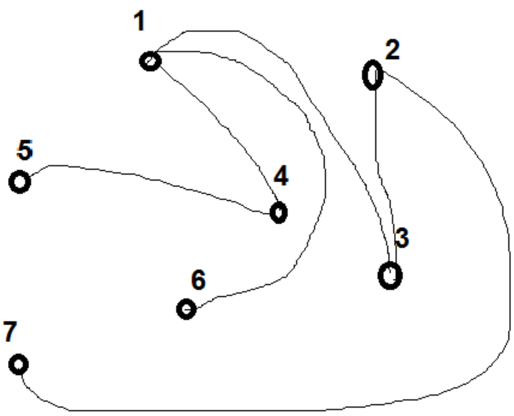
1	2	3	4	5	6	7
3	2	2	2	1	1	1

Etape1: E→{(4,5)}, **P= 41132**

1	2	3	4	5	6	7
3	2	2	1	0	1	1

Etape2: E→{(4,5),(1.4) } **P= 1132**

1	2	3	4	5	6	7
2	2	2	0	0	1	1



Etape3: E→{(4,5),(1.4),(1.6) }, **P= 132**

1	2	3	4	5	6	7
1	2	2	0	0	0	1

Etape4: E→{(4,5),(1.4), (1.6),(3.1)}, **P= 32**

1	2	3	4	5	6	7
0	2	1	0	0	0	1

Etape5: E→{(4,5),(1.4), (1.6),(3.1),(2,3)}, **P= 2**

1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	1

Etape6:
On relie les sommets de degrés 1
E→{(4,5),(1.4), (1.6),(3.1),(2,3), (2.7)}

Question 2 : un seul sommet 1.

Question 3 : Un arbre à 7 sommet est encodé avec une séquence de Prufer de longueur 5.
Un sommet de degre 4, va se repeter 3 fois dans P.
Le nombre de séquences cœst le nombre combinatoire n C5,3,= 7 10=70 arbres. Dont seulement 2 arbres sont non isomorphes.

Série 3

Exo :11

Un programme d'ordinateur conserve des variables en mémoire. Si deux variables ne sont pas utilisées en même temps, nous pouvons les conserver dans un même registre. Pour chaque variable xi, nous connaissons l'intervalle de temps durant lequel la variable est active. Combien de registres sont nécessaires pour que les variables actives soient conservées dans des registres distincts ?

Solution : (voir solution Exo 4 sur les tâches)
Tache → variable   Registre → machine

Exo : 8

1. Donner les degrés des différents sommets de l'arbre dont le code Prufer est :(32533)
2 .Trouver l'arbre correspondant à la séquence de Prufer de la question 1

Solution :

1	2	3	4	5	6	7
1	2	4	1	2	1	1

Etape1: E→{(3,1)}, **P= 32533**

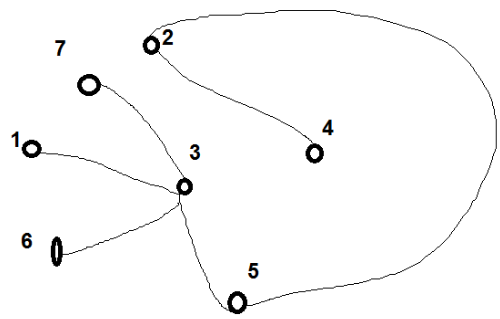
1	2	3	4	5	6	7
0	2	3	1	2	1	1

Etape2: E→{(3,1), (2,4)}, **P= 2533**

1	2	3	4	5	6	7
0	1	3	0	2	1	1

Etape3: E→{(3,1), (2,4) , (5,2)}, **P= 533**

1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	0	1	1	1



Etape4: E→{(3,1), (2,4) , (5,2), (3,5)}, **P= 33**

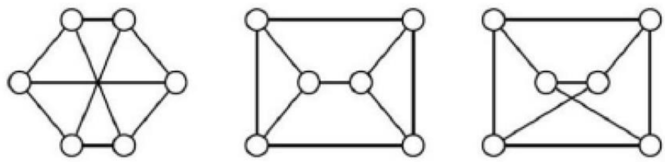
1	2	3	4	5	6	7
0	0	2	0	0	1	1

Etape4: E→{(3,1), (2,4) , (5,2), (3,5), (3,6)}, **P= 3**

1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	0	0	0	1

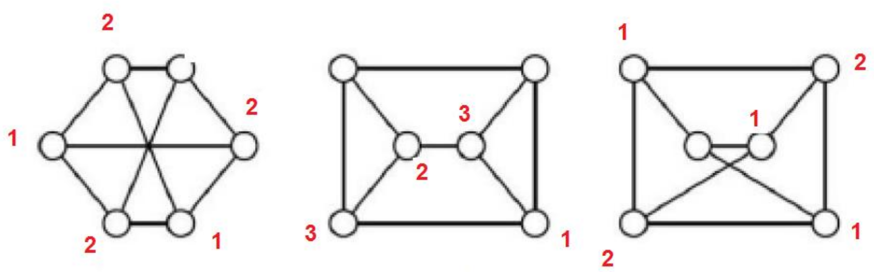
On rajoute lôarete (3.7) : E→{(3,1), (2,4) , (5,2), (3,5), (3,6) (3,7)}

Exo : 10



- Donnez le nombre chromatique de chacun de ces graphes
- En déduire lesquels sont bipartis.

Solution :



Les graphes consommant deux couleurs sont bipartis.

Exercice 5 *Soit G un graphe. Montrer que le nombre de sommets de G de degré impair est pair.*

Solution :

Nous avons

$\Sigma_{x\in X}$ (Dg (x))=2m
Soi X1 ensemble des sommets de degre impair
Soi X2 ensemble des sommets de degre pair

$\Sigma_{x\in X1}$ (Dg(x))+ $\Sigma_{x\in X2}$ (Dg(x))=2m
$\Sigma_{x\in X1}$ (Dg(x)) =2m- $\Sigma_{x\in X2}$ (Dg(x))
$\Sigma_{x\in X1}$ (Dg(x)) =2k → $|X_1|$=p est un nombre pair.

EXO 3 : Soit le réseau ci-dessous, représentant les routes à sens unique reliant des villes . Les valeurs indiquées sur chaque arc sont des distances kilométriques

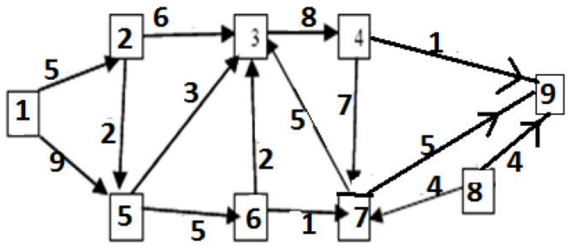
1) Faire si c'est possible la mise en ordre du graphe ci-dessous .

2) Trouver l'arbre de poids minimum . Donner son poids de cet arbre ainsi le code de Prufer lui correspondant .

3) Trouver le nombre chromatique de ce graphe.

4) Si on vous demande de trouver l'arborescence des plus courts chemins du sommet **1** aux autres sommets du réseau suivant , citer le nom de l'algorithme que vous allez appliquer tout en argumentant votre choix .

5) Existe-il un plus long chemin du sommet 1 au sommet 9 ? Justifier votre réponse .



N.B :Pour les questions 2 et 3 (Omettre l'orientation des arcs)

Solution :

1) On ne peut mettre en ordre ce graphe car contient des circuits.

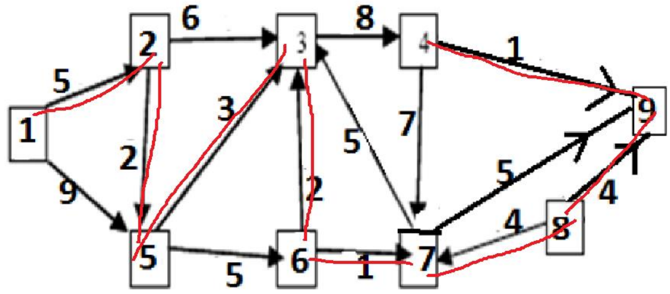
2)

Dg(3)= Dg(7)=5

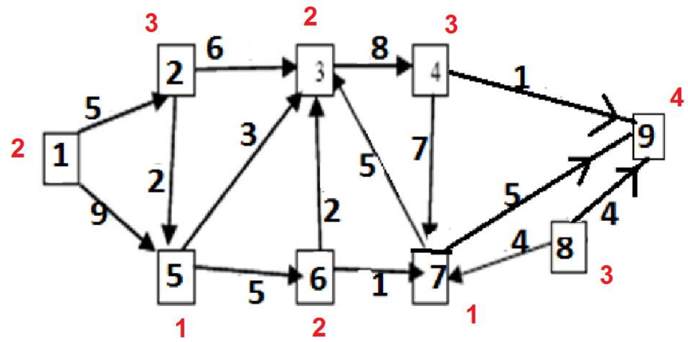
Dg(5)= 4

Dg(6)=Dg(9)=Dg(2)= Dg(4)=3

Dg(1)=Dg(8)=2



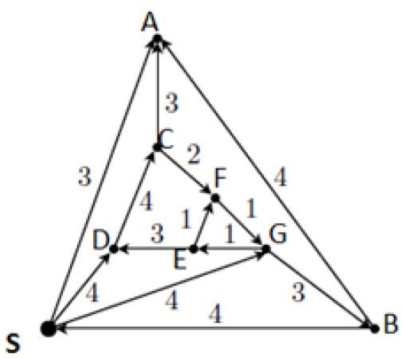
2)Le nombre chromatique =4



3)on appliqué lôalgorithme de Dijkstra car le graphe contient des circuits et il est sans poids négatifs.

4)Oui côest le chemin infini qui boucle on niveau du circuit (7,3 47) devient absorbant en négativant les poids.

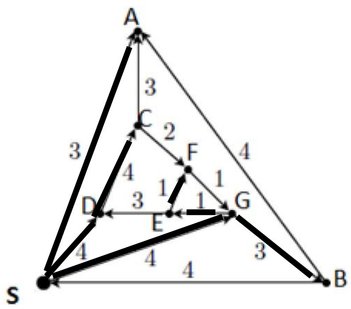
EXO 1: Soit le réseau ci-dessous



Solution :

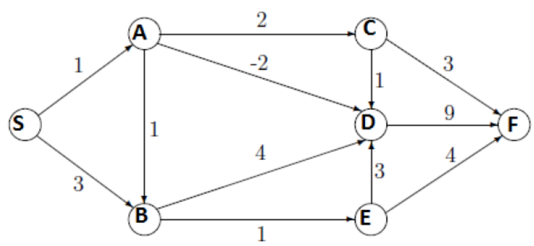
1) S est la source du graphe,
2) Il existe un cycle SGB non absorbant et les poids sont positifs donc on peut appliquer lôalgorithme de DIJSKTRA

```
s←{r};      k←1;      f[k]←r;
Pour tout x∈X faire π[x]← +∞ ; fait
π[r]←0 ;
Tant que (k<n) et (π[x]<+∞)
  Faire
  Pour tout u∈U / (I(u)=f[k]) et (T(u)∉S)
      Faire
      x = T(u);
      Si (π[x] > π[f[k]]+p[u]])
             Alors π(x) ← π[f[k]]+p[u]; Pré[
  f[k];
      fSi
      Fait
  x ← y / y ∈ X-S et π[y] minimal;
  k ← k+1; f[k] ← x; S ←S {x};
  Fait
```



k	x	(x,y)	π								PRE							
			S	A	B	C	D	E	F	G	S	A	B	C	D	E	F	G
			0	∝	∝	∝	∝	∝	∝	∝	-	-	-	-	-	-	-	-
1	S	(S,D) (S,A) (S,G)		3			4			4		S			S			S
2	A																	
3	D	(D,C)				8								D				
4	G	(G,B) (G,E)			7			5						G		G		
5	E	(E,F) ~~(E,D)~~							6							E		
6	F	~~(F,G)~~																
7	B	~~(B, A)~~ ~~(B,S)~~																

EXO 2 : Soit le réseau suivant:



1) Vérifier les conditions d'existence de chemins de S à tous les autres sommets du Réseau

2) Appliquer l'algorithme adéquat pour trouver l'arborescence des plus cours chemins

Solution :

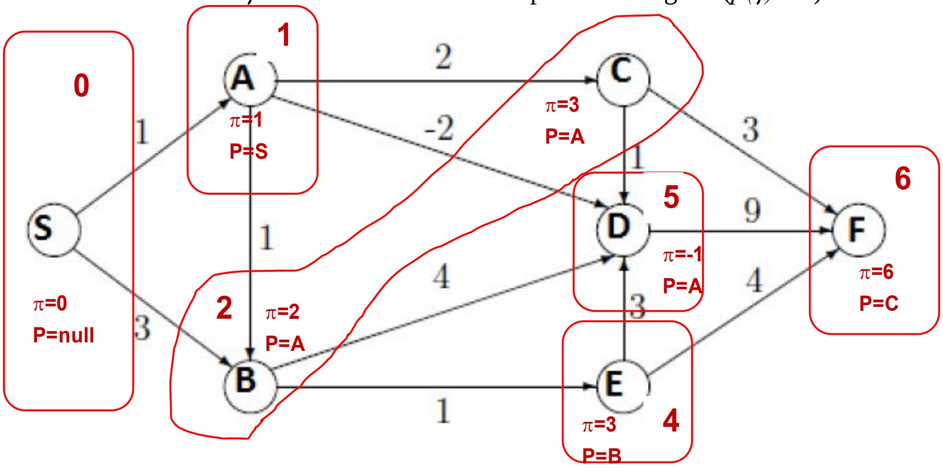
Partitionnement en nivaux

Å Soit $G=(X, U)$, un graphe orienté sans circuits. A tout $x \in X$, on associe un entier :

ï $v(x)$: niveau de x = la longueur max. dôun chemin élémentaire se terminant à x.

- On affecte par convention à une source s la valeur $v(s)=0$.
- On note par $\lambda(G)$ le plus grand niveau dans G.
- $\lambda(G)$ correspond au niveau d'un puits.
- L'ensemble des sommets X peut être partitionné au maximum en $\lambda(G)+1$ stables. Où chaque sommet de niveau i sera placé dans le stable N_i.
- Chaque stable N_i représente un niveau de G.
- $G=(X,U)$ est S.C. Ssi X admet une partition $\{N_0 \cup N_1 \cup \ldots \ldots \cup N_p\}$ / $x \in N_i \Leftrightarrow v(x)=i$

Définition : Un circuit γ est dit absorbant si son poids est négatif ($p(\gamma) < 0$).



Bellman ford

```
S←{r};
Pour tout x∈X
   Faire
   π[x]← +∞ ;   Pré[x] ←NULL ;
   Fait
π[r]← 0;
Pour tout (x∈X-S) tel que (∀u∈U si T(u)=x on a I(u)∈S)
   Faire
   Pour tout ((y, x) ∈ U)
        Faire
        Si π[x] > π[y]+p[(y,x)]
                Alors π[x] ← π[y]+p[(y,x)]; Pré[x] ← y;
        fSi
        Fait
   S ← S ∪{x} ;
   Fait
```