Chapitre 1 : TD1

Concepts fondamentaux des graphes

Exercice 1 :

- La representatio de la matrice d'adjacence :

$$M = \begin{array}{c|cccccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ \hline X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ X_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ X_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- La matrice d'incidence :

$$M = \begin{array}{c|ccccccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ \hline X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ X_2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ X_3 & 1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ X_4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ X_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

- La representation par listes :

	1	2	3	4	5	6	7
LP	1	1	3	6	6	6	8

→ pour le prochaine arc si on veut ajouter

	1	2	3	4	5	6	7
LS	X_4	X_5	X_2	X_4	X_6	X_1	X_2

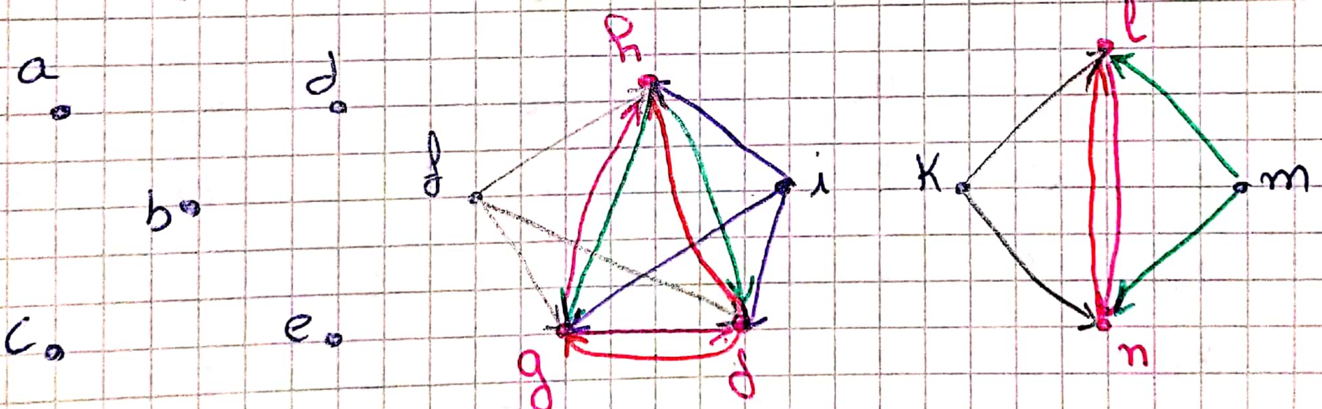
- Les degrés des sommets :

$d_-(x_1) = 1$	$d_+(x_1) = 0$	$d(x_1) = 1$
$d_-(x_2) = 2$	$d_+(x_2) = 2$	$d(x_2) = 4$
$d_-(x_3) = 0$	$d_+(x_3) = 3$	$d(x_3) = 3$
$d_-(x_4) = 2$	$d_+(x_4) = 0$	$d(x_4) = 2$
$d_-(x_5) = 1$	$d_+(x_5) = 0$	$d(x_5) = 1$
$d_-(x_6) = 1$	$d_+(x_6) = 2$	$d(x_6) = 3$

Exercice 2 :

1) - Le graphe de la relation R' : $aR'b \Leftrightarrow b$ est le frère de a :

Les garçon : g, d, h, l, n.



2) - Ce qu'on peut dire de G^* :

- G^* est symetrique :
- Constitué de cliques (sous graphes complet) pour chaque famille.
- On peut aussi le representer par un graphe non orienté.

3)- Caractérisation de G par rapport à G* :

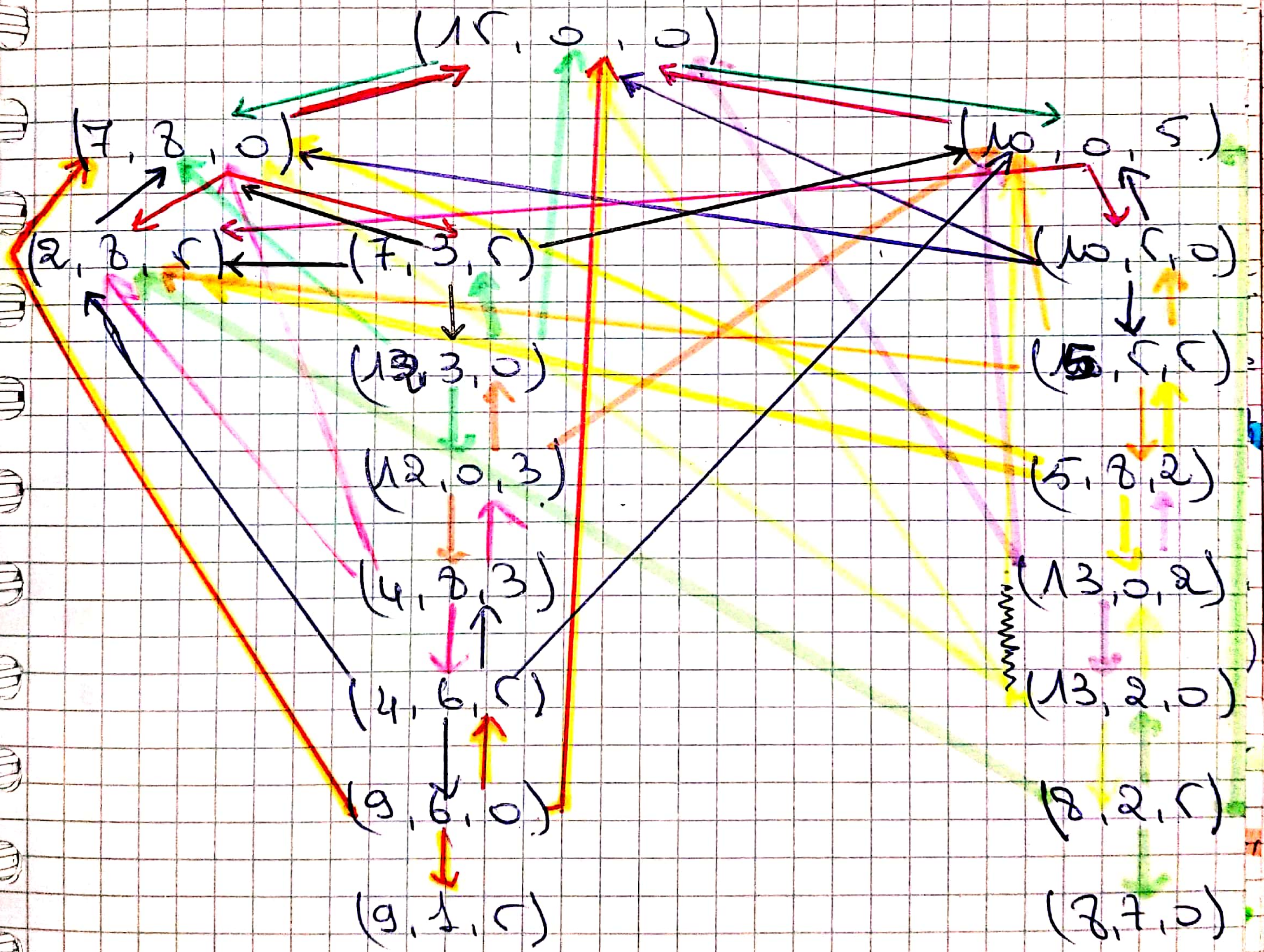
G est un graphe partiel de G*.

4)- Caractérisation de G' par rapport à G* :

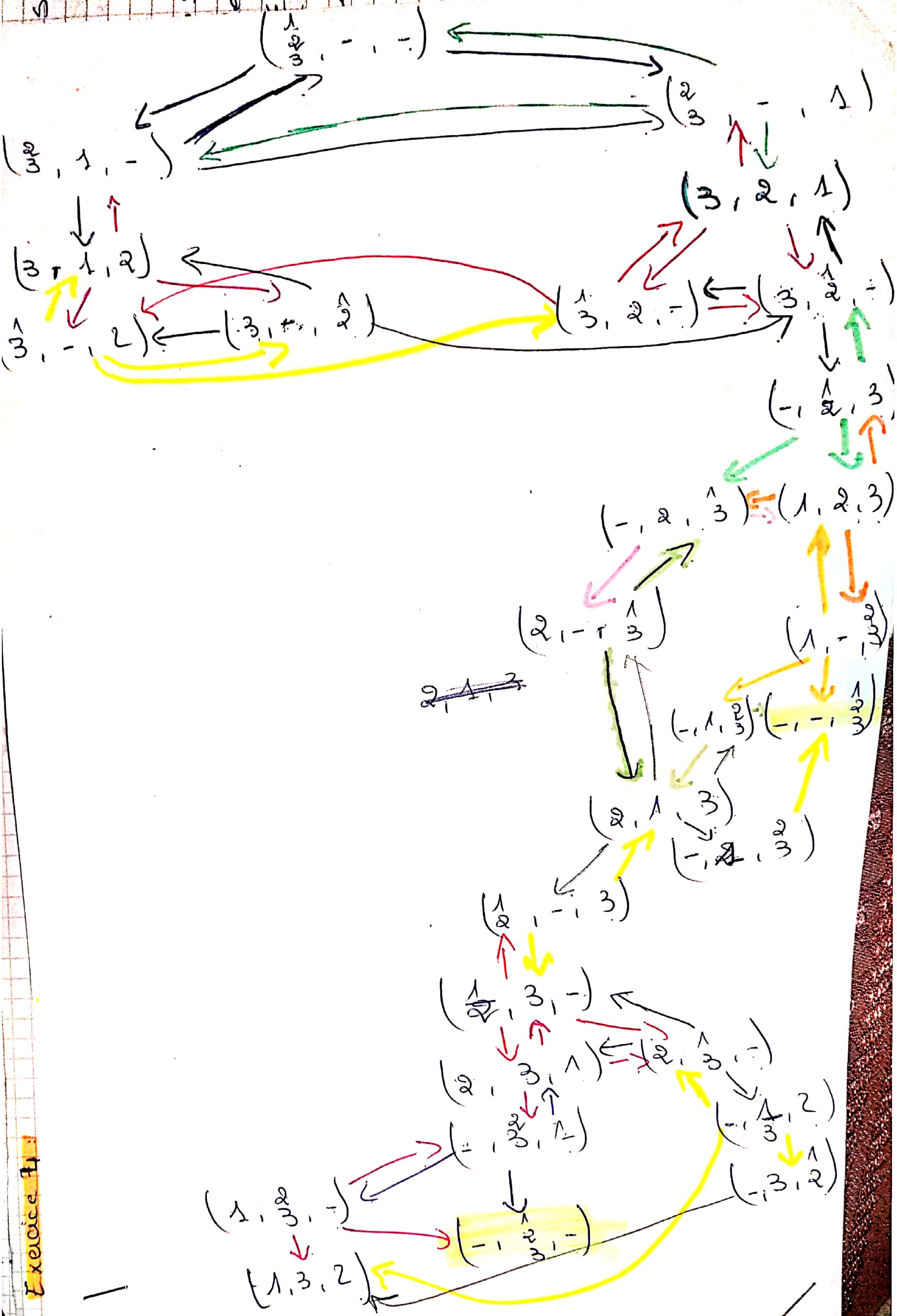
G' est un sous graphe de G.

TD2

Exercice 3 : 15L 8L 5L (15, 0, 0) → (x', 7, 3')



Exercice 4 :



Exercice 7 :

TD3

Supposons que un graphe simple de sommet impaire est de degré impaire

On sait que : $\sum_{x \text{ dans } X} d(x) = 2|E|$

Soit : $X_1 \subset X$ avec X_1 ensemble de sommet de d imp

$X_2 \subset X$ avec X_2 ensemble de somme de d pai

Alors : $\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x)$

$d(x)_{x \in X_1} = 2K + 1 \Rightarrow \sum_{x \in X_1} d(x) = 2 \sum K_i + |X_1|$

$d(x)_{x \in X_2} = 2K \Rightarrow \sum_{x \in X_2} d(x) = 2 \sum K_j$

$\sum_{x \in X} d(x) = 2 \sum K_i + 2 \sum K_j + |X_1| \Rightarrow$ impaire.

Contradiction

car $|X|$ est supposé impaire.

Exercice 9 :

$\forall x \in X$: $\delta(G) \leq d(x) \leq \Delta(G)$

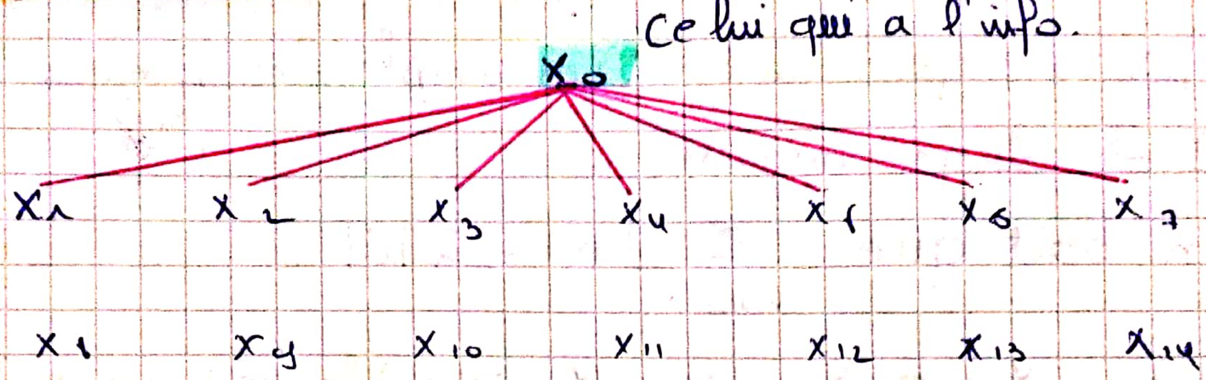
$\sum \delta(G) \leq \sum d(x) \leq \sum \Delta(G)$

$n\,\delta(G) \leq 2m \leq n\,\Delta(G)$

$\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$

Scanné avec CamScanner

Exercice 6 :

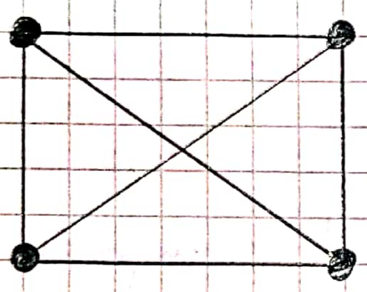


Si on concidère que chaque $x \in \{x_8, x_9, x_{10} \ldots x_{14}\}$

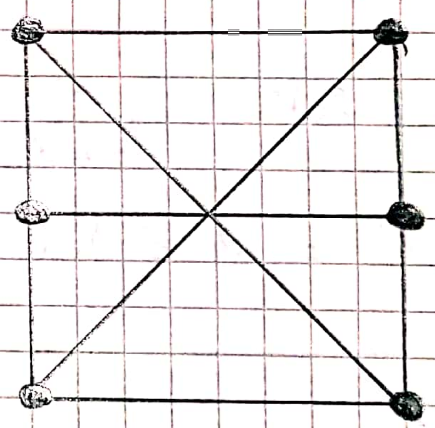
x doit connaitre au moins $y \in \{x_1, x_2, \ldots x_7\}$

Alors : la durée ne dépasse pas 2 mins

Exercice 5 :



4 sommets



6 sommets.

Pour :

5, 7 sommets : c'est pas possible d'avoir un graphe 3-régulier.

Déduction :

On peut pas avoir un graphe 3 régulier ayant un nombre impaire de sommets.

Preuve : exo 7.

Exercice 8 :

1) Montrons que $\forall x \in X$, $d_G(x) \leq n-1$:

G : un graphe simple, donc il ne contient ni boucle ni aretes parallèles.

Si : $d_G(x) \geq n-1$, Alors : x a une boucle, ou il est reliés 2 fois à un autre sommet ⇒ n'est pas simple Contradiction.

2) Demonstration :

Par l'absurde :

Supposon : $\exists x \in X : d_G(x) = 0$.

$\exists y \in X : d_G(x) = n-1$

Soit : $G'(X', E)$, avec : $X' = X \setminus \{x\}$.

$d_G(x) = d_{G'}(x)$.

$\underset{x \in X'}{d_G(x)} \leq n-2 < n-1$ ⇒ Contradiction.

3) Montrons qu'$\exists$ au moins 2 sommets ayant le m d_G :

On a : n sommets.

$d_G \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ ou $\{1, 2, \ldots, n-1\}$

Si : les degrés de sommets sont tous distincts, il nous faudra n valeurs de degré.

Donc : il y a au moins 2 sommets ayant le même degré.

4) - Le nombre d'arêtes quand G est complet :

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2m = 2|E|$$

$d(x) = n - 1 \Rightarrow \sum d(x) = n(n-1)$

$2|E| = n(n-1) \Rightarrow |E| = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 10 :

TD Fac

1) - Montrons qu'un graphe regulier d'ordre n ne peut pas être bipartie :

Dans un graphe bipartie $G = (X_1 \cup X_2, E)$

$|X_1| = K \qquad |X_2| = n - K$

$\sum_{x \in X} d(x) = 2m \Rightarrow \sum_{x \in X_2} (n-K) + \sum_{x \in X_1} K = 2m$

$\Rightarrow K(n-K) + (n-K)K = 2m$

$\Rightarrow m = K(n-K)$

2) - Montrons que $m \leqslant \frac{n^2}{4}$:

On raisonne par l'absurde.

On a : $m = K(n-K$

On suppose que : $m > \frac{n^2}{4}$

$\Rightarrow (n-K)K > \frac{n^2}{4} \Rightarrow Kn - K^2 > \frac{n^2}{4}$

$\Rightarrow 4Kn - 4K^2 \geqslant n^2 \Rightarrow -n^2 - 4K^2 + 4Kn > 0$

$\Rightarrow -(n-2K)^2 > 0$ contradiction.

- Deduire que : $\exists x \in X$, $d_G(x) \leq n/2$

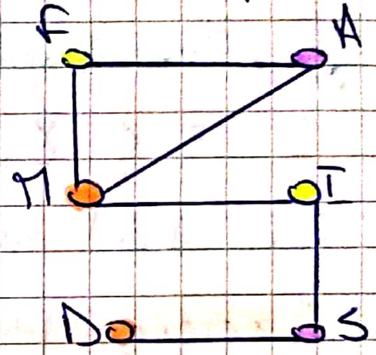
On a : $m \leq \frac{n^2}{4}$

$$n\,\delta(G) \leq \sum_{x \in X} d_G(x) = 2m \leq \frac{n^2}{2}$$

$$n\,\delta(G) \leq \frac{n^2}{2} \Rightarrow \delta(G) \leq \frac{n}{2}$$

Execice 11 :

1) - Le nombre maximum d'epreuve en même temps :



- Les sommets : matieres d'examen

- Un sommet x est relié a y si l'examen x ne peut pas se derouler en même temps que y.

- Les sommets qui represent un stable representent un ensemble d'examen qui peuvent se derouler en même temps.

- Les sommets pourtant les même couleurs peuvent se derouler en même temps.

- On applique l'algorithme de couloration.

- On a pu colorer le graphe avec 3 couleurs

Comme $\gamma(G) \geq 3 \Rightarrow \gamma(G) = 3$.

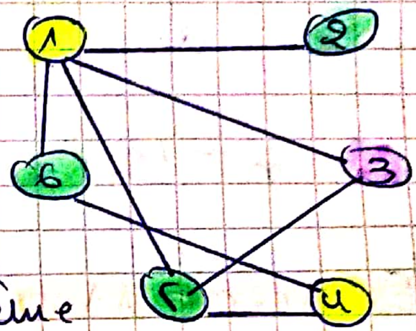
2) - Le nombre de demi journée necessaire est 3 demi journée.

Scanné avec CamScanner

Exercice 12 :

1) - Le graphe du problème :

- Les sommets : les wagons.
- Les aretes : les voies.



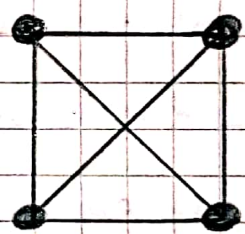
Deux sommets x et y sont relié ssi : il ne peuvent pas etre sur la même voie, x et devant y à l'arivé, il faut que $x \geq y$.

2) - Le nombre minimal :

$3 \leq \delta(G) \leq 5$.

On doit metre en place 3 voies de triage.

Exercice 13 :



→ Chaque association comporte 3 membres
→ Chaque membre appartient a 2 association
→ 2 associations ont 1 membre en commun.
→ Les sommet : Les associations.
→ Les aretes : Les membres.
⇒ de degre : 3.
⇒ graphe complet.

1) - Nombre de personnes : 6.

2) - Nombre d'associations : 4.

Scanné avec CamScanner

Exercice 14 : Fac 2

1) On modelise par un graphe $G = (X, E)$, avec $|X| = 6$

X : l'ensemble de sommets, chaque sommet represente une personne.

On relie deux sommet x et y, ssi : les personnes se connaisent mutuelement.

Le graphe de 6 sommets, contient soit une clique ~~des 3 personnes qui se connai~~ de 3 sommets ou un stable de 3 sommets.

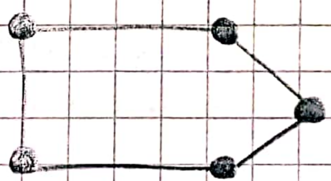
→ Une personne connait 3 ou plus (au moins 3) $d_G \geq 3$

ou :

→ Une personne ne connait pas 3, ou plus (au moins 3) $d_G < 3$

2) Cela n'est pas necessairement vrai dans un groupe de 5 personnes.

Contre exemple :



1) Considerons un sommet x dans un $G = (X, E)$, $|X| = 6$

① Soit : $d_G(x) \geq 3$: x connait au moins 3 personnes.

② Soit : $d_G(x) < 3$: x ne connait pas au moins 3

$\Leftrightarrow d_{\bar{G}}(x) \geq 2$

x a au moins 3 sommets voisin, soit x_1, x_2, x_3 les voisins de x

si entre x_1, x_2, x_3 il y'a une arete, soit $\{x_1, x_2\}$ cet arete sans perdre de generalité

⇒ On a une clique $\{x_1, x_2, x\}$

Soit il ya pas d'arete entre les sommets $\{x_1, x_2, x_3\}$ ⇒ un stable

Exercice 11 :

→ Pour que le graphe complementaire d'un graphe K-regulier soit isomorphe au graphe initial, il faut que lui aussi soit K-regulier.

→ Le graphe complementaire d'un graphe K-regulier est ~~K~~ $n-K-1$-regulier.

$\Rightarrow n - K - 1 = K \Rightarrow n = 2K + 1$

- $K = 0 \Rightarrow n = 1$: verifier
- $K = 1 \Rightarrow n = 3$: impossible.
- $K = 2 \Rightarrow n = 5$: verifier. nb sommets impair ⇒ d(·) impair
- $K = 3 \Rightarrow n = 7$: impossible.

Pour tout K impaire : impossible.

$\Rightarrow K = 2l \Rightarrow n = 4l + 1$

Scanné avec CamScanner

Chapitre 2 : Cheminement dans les graphes.

Exercice 1 :

$2n$ centraux telephoniques.

Chaque central est relié a au moins n autres centraux

Si : $d_G(x) \geq n$ ⇒ Alors le graphe est connexe.

_ x est relié a au moins n autres sommets $\{x_1 \text{---} x_n\}$

_ Soit : $\{x_1', x_2' \text{---} x_k'\}$ les sommets auquels x n'est pas relié , $k \leq n-1$.

$\forall x_i' \in \{x_1', x_2', \text{———} x_k'\}$, il doit etre relié à au moins deux sommets de $\{x_1, x_2, \text{———} x_n\}$.

⇒ x est relié ā x_i' par une chaine de longeur 2.

Exercice 2 :

• Montrons que tout graphe admet un sommet qui n'est pas un point d'articulation :

Considerons la chaine elementaire la plus longue dans ce graphe.

Soit : $\mathcal{C} = x_1 x_2 \text{---} x_k$ cette chaine.

Montrons que x_1 et x_k ne sont pas des points d'articulation :

Supposons que x_1 est un point d'articulation

⇒ sa suppression deconnecte le graphe

Lorceque on supprime x_1, on aura au moins 2 composante connexe

l'une comporte $\{x_2, \ldots x_k\}$
Une autre composante C qui ne comporte pas de sommets de $\{x_2, \ldots x_k\}$
Cette composante comporte au moins un sommet y relie ~~reliée~~ par une arete x_1 dans le graphe initial
$\Rightarrow y\, x_1\, x_2 \ldots x_k$ est plus longue que C
$\Rightarrow$ Contradiction.

Exercice 5 :

TD 1.

1) L'interpretation des elements $M^{[k]}$:

$\rightarrow m_{ij}^{[1]} = m_{ij}$, $m_{ij}^{[1]} = 1$ ssi : $\exists u$ reliant i à j

$\rightarrow m_{ij}^{[2]} = \underset{l=1}{\overset{n}{ou}} (m_{il}^{[1]} \text{ et } m_{lj})$

$= (m_{i1}^{[1]} \text{ et } m_{1j}) \text{ ou } (m_{i2}^{[1]} \text{ et } m_{2j}) \ldots \text{ ou } (m_{in}^{[1]} \text{ et } m_{nj})$

$m_{ij}^{[2]} = 1$ ssi : $\exists$ un chemin de longeur 2 reliant i à j.

$\rightarrow$ On peut generalisé :

$m_{ij}^{[k]} = 1$, ssi : $\exists$ un chemin de longeur K reliant i à j

On fait une démonstration par récurrence :

- C'est vrai pour $K = 1$.
- On suppose que c'est vrai pour $K-1$ et on prouvent que c'est vrai pour K.

$$m_{ij}^{[k]} = \underset{l=1}{\text{ou}} \left(m_{il}^{[k-1]} \text{ et } m_{lj} \right)$$

$$= \left(m_{i1}^{[k-1]} \text{ et } m_{1j}\right) \text{ ou } \left(m_{i2}^{[k-1]} \text{ et } m_{2j}\right) \ldots \text{ ou } \left(m_{in}^{[k-1]} \text{ et } m_{nj}\right)$$

$m_{ij}^{[k]} = 1$, ssi : $\exists$ un chemin de longeur k reliant i à j

2) - Interpretation des element de $\hat{M}$:

$$\hat{m}_{ij} = m_{ij}^{[1]} \text{ ou } m_{ij}^{[2]} \text{ ou } \ldots \text{ ou } m_{ij}^{[n]}.$$

$$= 1, \text{ ssi : } \exists\, 1 \leq k \leq n \text{ tel que : } m_{ij}^{[k]} = 1.$$

Cela veut dire qu'il existe un chemin reliant i à j.

RQ :

S'il existe un chemin de longeur $> n$ (non elementaire) reliant i à j. Alors : il existe forcement un chemin elementaire reliant i à j.

3) - Montrons que : $I \vee \hat{M} = (I \vee M)^{[n]} = (I \vee M)^{[p]}, \forall p \geq n$

$$I \vee \hat{M} = I \vee \left(M^{[1]} \vee M^{[2]} \vee \ldots \vee M^{[n]}\right)$$

- Pour $n = 1$: l'egalité est vraie

- Supposons que cette egalité est vraie pour $n-1$, et montrons qu'elle est vraie pour n :

$$I \vee \left(M^{[1]} \vee M^{[2]} \vee M^{[3]} \vee \ldots M^{[n-1]}\right) = (I \vee M)^{n-1}$$

Montrons que :

$$I \vee \left(M^{[1]} \vee M^{[2]} \vee \ldots \vee M^{[n]}\right) = (I \vee M)^{n}.$$

$$(I \vee M)^{n-1} \wedge (I \vee M) = I \vee \left(M^{[1]} \vee M^{[2]} \ldots M^{[n-1]}\right) \wedge (I \vee M)$$

$$= I \vee \left(M^{[1]} \wedge (I \vee M) \vee M^{[2]} \wedge (I \vee M) \ldots \vee M^{[n-1]} \wedge (I \vee M)\right)$$

$= I \vee (M^{[1]} \vee M^{[2]} \_\_\_\_ \vee M^{[n-1]} \vee M^{[n]})$

$= I \vee (M^{[1]} \vee M^{[2]} \_\_\_\_ \vee M^{[n]}) = (I \vee \hat{M})$

$I \vee (M^{[1]} \vee M^{[2]} \vee \_\_\_\_ \vee M^{[n]} M^{[n+1]} \vee \_\_\_ \vee M^{[p]})$

$= I \vee (M^{[1]} \vee M^{[2]} \vee \_\_\_\_ \vee M^{[n]})$

Car : s'il y'a un chemin reliant i à j de longeur $>n$ il y a forcement un chemin de longeur $\leq n$ reliant i à j.

TD 2 :

4) _ Déduction du procédé de calcul.

$I \vee \hat{M} = (I \vee M)^n = (I \vee M)^p \quad p \geq n$.

$(I \vee M)^2$

$(I \vee M)^4$

$(I \vee M)^8$

$(I \vee M)^{16}$

$\vdots$

$(I \vee M)^{2^k}$: On s'arrête quand $2^k \geq n$ et $2^{k-1} < n$

On aura fait exactement k multiplications tel que $2^k \geq n \Rightarrow \log_2(2^k) \geq \log_2(n)$.

$\Rightarrow k \geq \log_2(n)$.

$2^{k-1} < n \Rightarrow \log_2(2^{k-1}) < \log_2(n)$

$\Rightarrow k-1 < \log_2(n)$

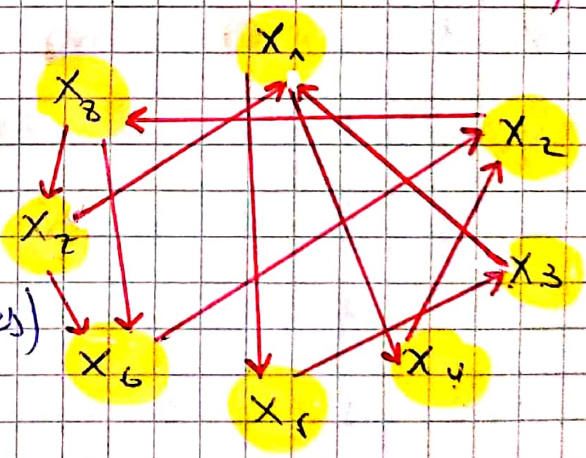
$\Rightarrow k < \log_2(n) + 1$

Exercice 6 :

1) - La matrice d'adjacence M de G :

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\
\hline
X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
X_2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
X_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
X_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
X_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

2) - Si G est connexe :



Le graphe est connexe (on le rend non orienté, on remplace les arcs par des arêtes) ∃ une chaîne reliant tout couple de sommets.

3) - Si G admet un parcours Eulerien :

→ G orienté

- G n'admet pas de circuit eulerien, car : $d^- \neq d^+$
- G n'admet pas de chemin eulerien, car : on n'a pas $a, b \in X$, tq : $d(a) = d^-(b)+1$ et $d^-(b) = d^+(a)+1$

Scanné avec CamScanner

et $\forall x \in X$ et $x \neq a \neq b$, $d^+(x) = d^-(x)$.

→ G non orienté :

• G n'admet pas de cycle eulerien, car : $\exists x \in X$ tel que : $d(x) = 2K+1$.

• G n'admet pas de chaine eulerienne, car : $\exists$ plus de deux sommets ayant un degré impair.

→ Alors : G n'admet aucun parcour eulerien.

4) - La matrice de fermiture transitive de G :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2		1				1		1
x_3	1	1	1	1	1	1	1	1
x_4		1				1		1
x_5	1	1	1	1	1	1	1	1
x_6		1				1		1
x_7	1	1	1	1	1	1	1	1
x_8		1				1		1

→ Les elements de la matrice de fermiture transitive ne sont pas tous égaux à 1, donc le graphe n'est pas fortement connexe.

5) - Les composantes fortement connexe de G :

$C_1 = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$

$C_2 = \{x_2, x_6, x_8\}$

$C_3 = \{x_4\}$.

Exercice 1 :

1) _ L'algorithme qui permet d'obtenir les CFC de G :

```
Algorithme CalculeCFC (E: M , S: Les CFC)
Début
    K = 1 ;                                  } initialisation
    marque [xi] = faux , ∀i < n              }
    Pour (i ← 1 à n) Faire :                 on ne l'a pas encore
        Si (marque [xi] = faux) Alors :   →  traitée.
            Ck = Ck U [xi] ;              →  on l'ajoute à Ck
            marque [xi] = vrai ;          →  on marque son traitement
            Si (Mii != 0) Alors :         →  si son élément diagonal ≠ 0.
                Pour (j ← i+1 à n) Faire :
                    Si (Mij = 1 et Mji = 1) Alors :
                        Ck = Ck U [xj] ;
                        marque [xj] = vrai ;
                    F. Si
                Fait
            F. Si
            K ++ ;
        F. Si
    Fait
Fin
```

2) - Définition de la matrice de $\tilde{G}r$:

- A chaque cfc C_i de G, on associe un sommet $\tilde{x}_i$
- Deux sommet $\tilde{x}_i$ et $\tilde{x}_j$ sont reliés par un arc dans $\tilde{G}r$, ssi : $\exists x \in C_i$ et $y \in C_j$ telque : $(x, y) \in U$.

$$\tilde{m}_{ij} = \begin{cases} 1 : s'\exists \text{ un arc reliant } \tilde{x}_i \text{ à } \tilde{x}_j \\ 0 : \text{sinon} \end{cases}$$

- Si on a les $C_i = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$

On considere 1 element $x_k \in C_i$, et 1 element $x_l \in C_j$

$\exists$ un arc reliant $\tilde{x}_i$ à $\tilde{x}_j$, ssi : $\hat{m}_{kl} = 1$.

$\rightarrow \tilde{m}_{ij} = 1$ ssi : $\hat{m}_{kl} = 1$, pour $x_k \in C_i$ et $x_l \in C_j$.

3) - L'application de l'algorithme :

$C_1 = \{x_1, x_2, x_{12}\}$

$C_2 = \{x_3\}$

$C_3 = \{x_4, x_5\}$

$C_4 = \{x_6\}$

$C_5 = \{x_7\}$

$C_6 = \{x_8\}$

$C_7 = \{x_9, x_{10}\}$

$C_8 = \{x_{11}\}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 8 :

Montrons que si $x, y \in C_i$, alors ∀ chemin de x à y est ⊂ dans C_i :

Par l'absurde :

Supposons que le chemin reliant x à y n'est pas entièrement inclus dans C_i

Cela veut dire qu'∃ au moins un sommet $z \notin C_i$ et par lequel passe le chemin reliant x à y.

Cela veut dire : ∃ un chemin de x à z (1) et un chemin de z à y (2).

x et $y \in C_i$, donc ∃ un chemin reliant x à y (3).

De (2) et (3) : ∃ un chemin de z à x (4) par transitivité.

De (4) et (1) : On déduit que x et $z \in C_i$

Contradiction.

Exercice 9 :

Figure 1 : non, car : ∃ plus de 2 sommets de $d_G = 2k+1$

Figure 2 : oui, car : ∃ exactement 2 sommets de $d_G = 2k$.

Figure 3 : non, car : comme figure 1.

Figure 4 : oui, car : comme figure 2.

Figure 5 : non, car : comme figure 1.

Scanné avec CamScanner

Exercice 10 :

1) - Le nombre de dominos :

On modelise se la par un graphe $G = (X, E)$.

-> $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$: les numéros.

-> E : une arete $e(x_i, j)$ represente un domino qui a la face i et j.

-> Le graphe obtenu est complet

- Chaque arete correspond à une piéce de domino

Donc : $Nbpièces = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} \Rightarrow Nb = 10$

2) - L'arangement pour avoir une boucle fermée :

Cela correspond à construire un cycle eulerien dans le graphe G.

- Le $d_G = 4$ pair $\forall x \in X$, donc le graphe admet un cycle eulerien.

3) - Dominos double non necessaire :

Le d_G reste paire si on les ajoute $(4 \to 6)$ et donc le graphe admet aussi un cycle eulerien.

4) - L'arangement de n chiffres :

On doit prendre $n = 2k$ (Pair).

Exercice 11:

- On a : un graphe non eulerien $\Rightarrow \exists$ des sommet $d = 2k+1$
- On sait que le nbr de sommet ~~de~~ de degré impair est pair.
- Si on suppose qu'on a $2k$ sommet de degré impair, on peut alors ajouter k aretes entre des couples de ses sommets, le degré de ces sommets devient alors pair.

Tous les sommets seront de degré pair

$\Rightarrow$ Le graphe devient alors eulerien

Exercice 12:

Montrons que G admet un circuit Hamiltonien:

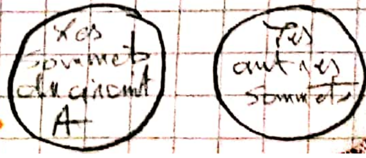
$\rightarrow$ Par l'absurde :

- On suppose que G n'admet pas de circuit Hamiltonien
- Concidérons le circuit elementaire le plus long de ce graphe, et supposons qu'il n'est pas Hamiltonien il est donc de longeur $< n$ (n = nbr sommets).

Le graphe étant complet, il y'a donc des arcs reliant aussi les sommets de A et les sommet de B

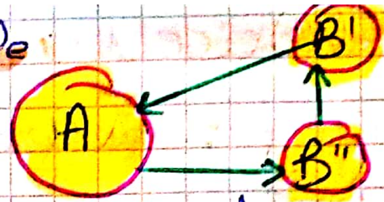
Ces arcs ne peuvent pas être orientés tous dans le même sens.

Il y'a forcement des arcs dans les 2 sens



Scanné avec CamScanner

B est devisé en deux sous ensemble de sommets B' et B'', ceux ayant des arcs sortant vers A ($B' \to A$) et ceux ayant des arcs rentrant de A ($A \to B''$).



On peut atteindre les sommets de B'' à partir des sommets de B' en passant éventuellement par A, mais on ne peut pas sortir de B'' vers A, comme le graphe est fortement connexe, il doit forcement y a avoir au moins un arc de A vers B'.

Soit (xy) cet arc $(x \in B'', y \in B')$.

On prend un arc particulier de circuit élémentaire le plus long (A), soit $u = (x'y')$ cet arc, le circuit passant par $x'xyy'$ est plus long contradiction.

Scanné avec CamScanner

Chapitre 3 : Problémes de cheminement dans les graphes

Exercice 1 :

1) - Les niveaux du graphe :

$N_0 = \{a, i\}$ $N_2 = \{e, f\}$ $N_4 = \{b\}$

$N_1 = \{g, h\}$ $N_3 = \{c, d\}$

2) - Les chemins optimaux allant de a :

$\pi(a) = 0$

$\pi(b) = \pi(c) = \pi(d) = \pi(e) = \pi(f) = \pi(g) = \pi(h) = \pi(i) = +\infty$

$\pi(g) = \min\{\pi(i) + 1\} = +\infty$

$\pi(h) = \min\{\pi(a) + 1, \pi(i) + 2\} = 1 \Rightarrow pred = a$

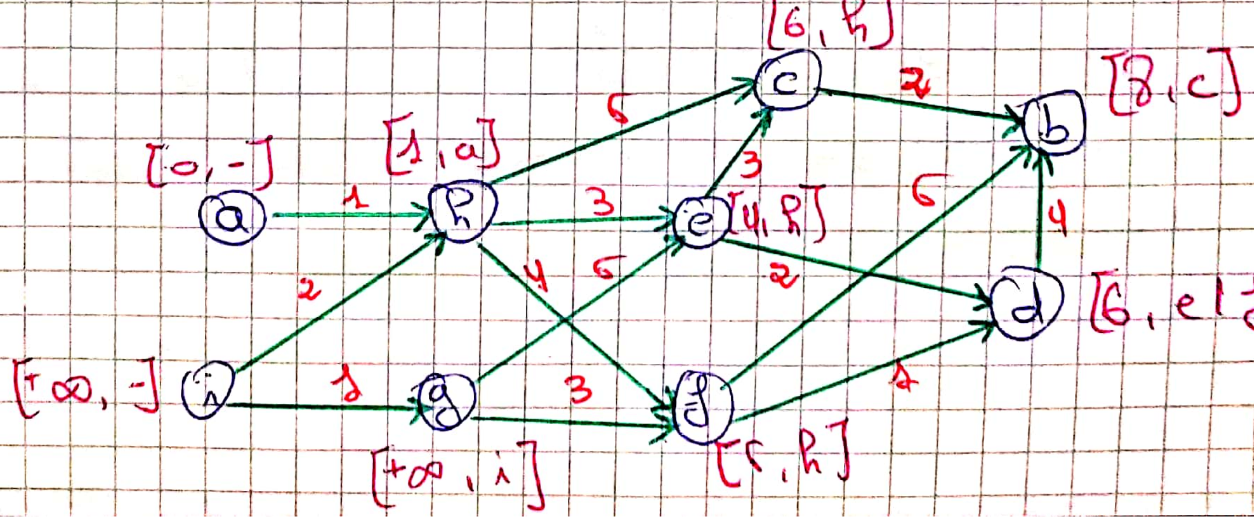
$\pi(e) = \min\{\pi(g) + 5, \pi(h) + 3\} = 4 \Rightarrow pred = h$

$\pi(f) = \min\{\pi(h) + 4, \pi(g) + 3\} = 5 \Rightarrow pred = h$

$\pi(c) = \min\{\pi(h) + 5, \pi(e) + 3\} = 6 \Rightarrow pred = h$

$\pi(d) = \min\{\pi(e) + 2, \pi(f) + 1\} = 6 \Rightarrow pred = e | f$

$\pi(b) = \min\{\pi(d) + 4, \pi(f) + 5, \pi(c) + 2\} = 8 \Rightarrow pred = c$



Scanné avec CamScanner

Exercice 2 :

1) - La modification du programme :

Algorithme Djikstra.

Début :

$S := \{x_1\}$; $D[s] := 1$; $Opt[s] := \{\}$;

Pour tout $i \in X$ et $i \neq s$

Faire :

$D[i] := 0$;

Fait

Tantque ($|S| < n$)

Faire :

Choisir un sommet $i \notin S$ / $D[i] = \max\{D[j], j \notin S\}$;

$S := S \cup \{i\}$;

Pour tout $j \in Succ(i)$

Faire :

Si ($D[j] < D[i] \cdot c_{ij}$) Alors :

$D[j] := D[i] \cdot c_{ij}$;

$Opt[j] = i$;

FSi

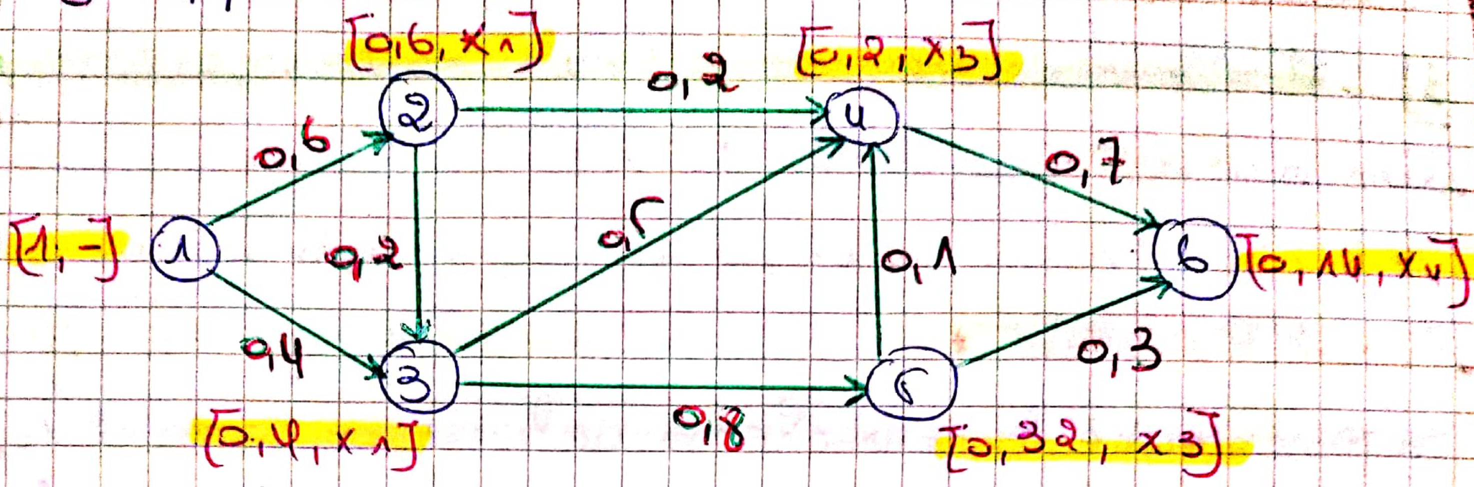
Fait

Fait

Fin

Scanné avec CamScanner

2) - Application :



3) - Application des logarithmes :

- Si on remplace chaque poids r_{ij} par $\log(r_{ij})$, on obtient des valeurs négatives.
- La somme des logarithmes = logarithme du produit ①
- Au lieu d'effectuer des produit des r_{ij}, on effectue la somme des $\log(r_{ij})$ pour chaque chemin = logarithme du produit (d'après ①)
- Pour obtenir la fiabilité du chemin, on applique :

$\log(a_1) + \log(a_2) + \_\_\_ + \log(a_n) = \log(a_1 \cdot a_2 \cdot \_\_\_ a_n)$

$\Rightarrow e^{\log(a_1 \_\_\_ a_n)} = \underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdot \_\_\_ \cdot a_n}_{\text{la fiabilité}}$

- Si on multiplie aussi les poids obtenus (apré log) x-1, pour avoir des poids positifs, la recherche du chemin de fiabilité max revient à la recherche du chemin de poids min.

Exercice 4:

1) - Montrons que les sous chemins sont de poids min:

- On a un chemin de poids min :

$\Psi(i,j) = (i = i_0) \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_k \to (i_{k+1} = j)$

- Par l'absurde :

Supposons que le sous chemin reliant un sommet i_l, $0 \leq l \leq k$, au sommet i_m, $l+1 \leq m \leq k+1$ n'est pas optimal.

Dans ce cas, il existe un autre chemin reliant i_l à i_m et qui de poids inferieur, soit σ ce chemin si on remplace dans $\Psi(i,j)$ le sous chemin reliant i_l à i_m par σ, on obtient un chemin de poids inferieur $\Rightarrow$ Contradiction.

$I \to j' \; j$: chemin optimal $\Rightarrow I \to j'$: optimal

2) - Le methodes pour les itinéraires:

La matrice de routage basée sur les prédécesseurs.

- $r_{ij} = pred(j)$: dans le chemin reliant i à j
- $r_{ij} = succ(i)$: si on veut garder les successeur.

3) - Les matrices de routage:

- Pour la matrice de routage défini par $r_{ij} = pred(j)$ dans le chemin optimal reliant i à j.

- Lorsqu'on s'interesse aux chemins issus d'un sommet donné i_0, on ne prend que la ligne i_0.
- Si on s'interesse aux chemins aboutissant à un sommet donné j_0, on prend la colonne j_0.

4]- Application :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	–	x_1	x_4	x_1	x_3	x_5
x_2	–	–	x_2	x_2	x_3	x_5
x_3	–	–	–	–	x_3	x_5
x_4	–	–	x_4	–	x_3	x_5
x_5	–	–	–	–	–	x_5
x_6	–	–	–	–	–	–

Chapitre 4 : Problèmes d'ordonnancement

Exercice 1 :

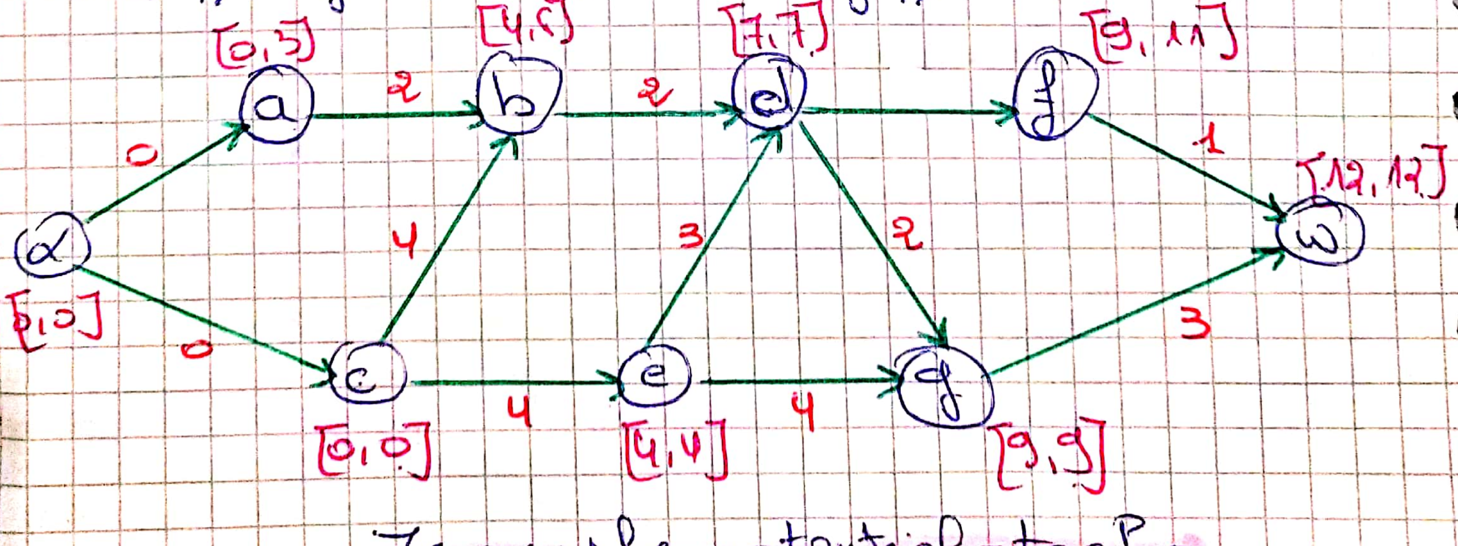
- $t_a \geq t_\alpha \Rightarrow t_a - t_\alpha \geq 0$
- $t_c \geq t_\alpha \Rightarrow t_a - t_\alpha \geq 0$.
- $t_b \geq t_a + 2 \Rightarrow t_b - t_a \geq 2$.

  $t_b \geq t_c + 4 \Rightarrow t_b - t_a \geq 4$.
- $t_e \geq t_c + 4 \Rightarrow t_e - t_c \geq 4$
- $t_d \geq t_b + 2 \Rightarrow t_d - t_b \geq 2$.

  $t_d \geq t_e + 4 \times \frac{3}{4} \Rightarrow t_d - t_e \geq 3$.
- $t_f \geq t_d + 2 \Rightarrow t_f - t_d \geq 2$.
- $t_g \geq t_d + 2 \Rightarrow t_g - t_d \geq 2$.

  $t_g \geq t_e + 4 \Rightarrow t_g - t_e \geq 4$
- $t_\omega \geq t_f + 1 \Rightarrow t_\omega - t_f \geq 1$

  $t_\omega \geq t_g + 3 \Rightarrow t_\omega - t_g \geq 3$



Le graphe potentiel-tache

→ Les dates de début au plus tôt

• $t_a = t_c = 0$ • $t_b = t_e = 4$ • $t_d = 7$ • $t_g = t_f = 9$

→ La durée minimal du projet $= 12$.

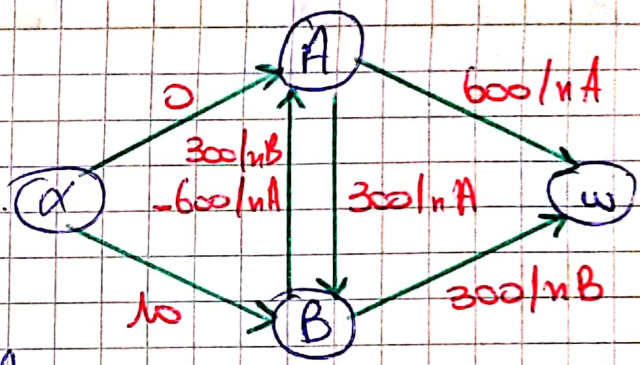
→ Les dates de debut au plus tard :

• $t_a = 3$ • $t_b = 6$ • $t_c = 0$ • $t_d = 7$ • $t_e = 4$ • $t_f = 11$

• $t_g = 9$

→ Les taches critique sont : c, d, e, g.

Exercice 2 :



• $t_b \geq t_a + 300/nA$

$\Rightarrow t_b - t_a \geq 300/nA$

• $t_b + d_b \leq t_a + d_a$

$t_b + 300/nA \leq t_a + 600/nA$

$\Rightarrow t_b - t_a \geq 300/nB - 600/nA$

1) - La condition pour realisé le probleme :

Il ne doit y avoir de circuit absorbants

• La somme des poids du circuit ≤ 0 :

$300/nB - 600/nA + 300/nA \leq 0 \Rightarrow 1/nB - 1/nA \leq 0$

$(nA - nB)/nA \cdot nB \leq 0 \Rightarrow nA \leq nB$: tjr vrai

2) - L'influence de n sur la durée minimal :

La durée du projet $= \text{Max}(0 + 600/nA,\ 10 + 300/nB,$
$0 + 300/nA + 300/nB)$.

Scanné avec CamScanner

$\text{Max}\ \{600\ln A,\ 10+300\ln B,\ 300\ln A+300\ln B\}$

$100 \leq 600\ln A \leq 200$

$30 \leq 10+300\ln B \leq 60$

$70 \leq 300\ln A + 300\ln B \leq 150$

Si on prend le minimum d'ouvrier, durée min = 100

Si $nA = 6$ et $nB = 6$, on a : durée = 100

La diminution de ces effectif entraînera une augmentation de la durée.

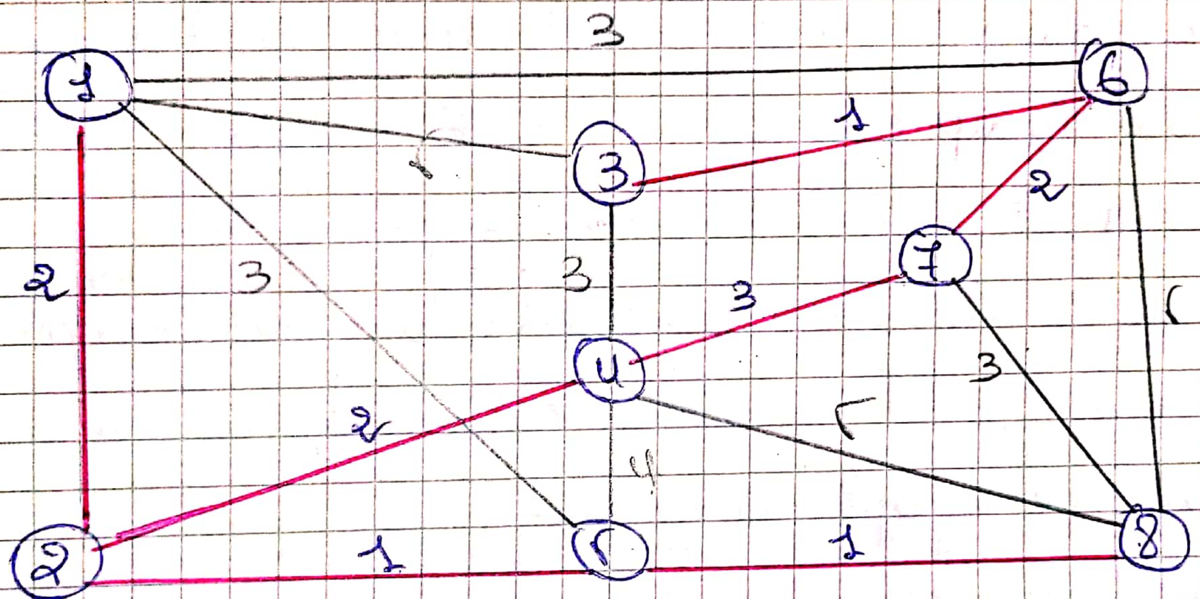
Chapitre 5 : Arbres et arborescences.

Exercice 1 :

L'arbre de poids minimum :

-> Les poids triés dans l'ordre croissants :

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5



Exercice 2 :

Montrons que la moyenne des degrés dans un arbre est < 2.

$\rightarrow m = (n-1)$

$\Downarrow$

Arbre.

La moy des $d_G = \frac{\sum d(x)}{n} = \frac{2m}{n}$

$\rightarrow n = \frac{2(n-1)}{n} < 2$

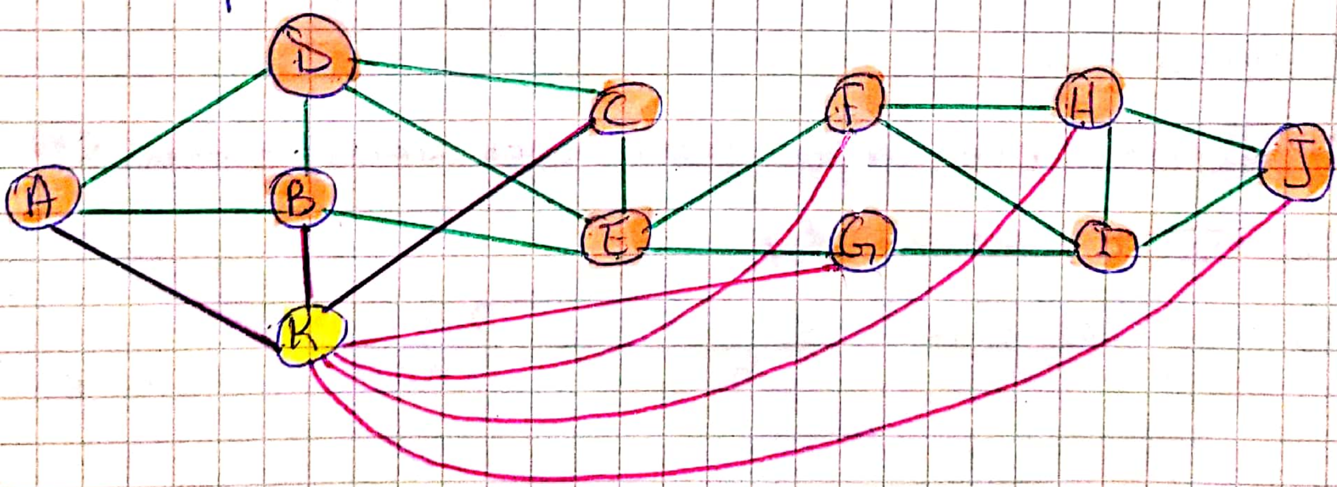
Car : $(n-1) < n$

Exercice 3 :

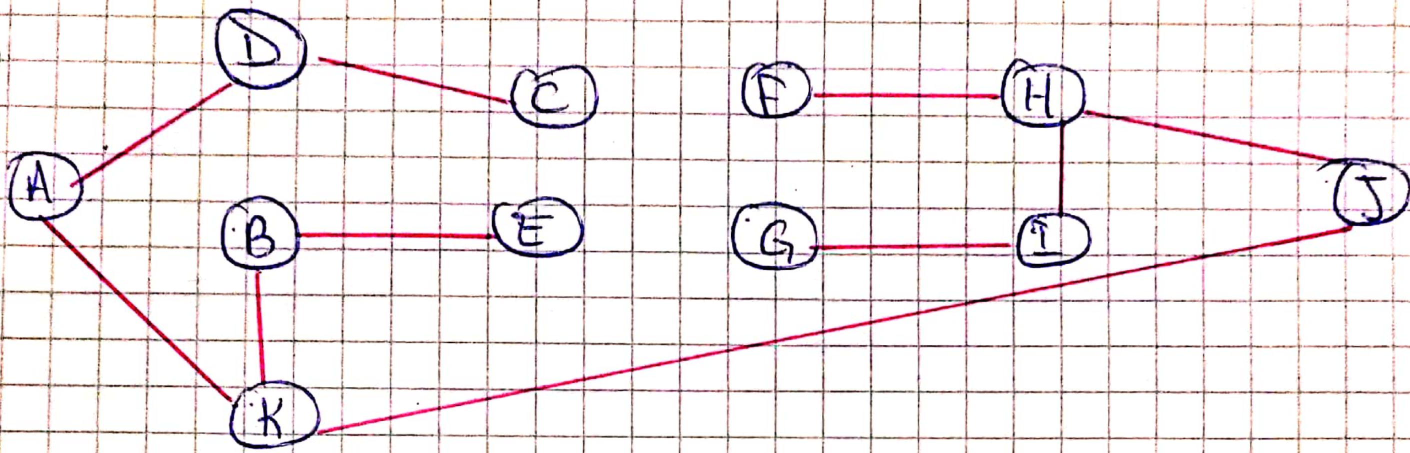
- On doit relier toutes les parcelles entres elles ainsi qu'avec la rivière.
- On represente chaque parcelle par un sommet.
- On represente aussi la rivière par un sommet.
- On relie deux sommets par une arete, ssi les parcelles qui represente sont limitrophes.
- Aussi pour la rivière, on relie son sommet au autre, ssi : la rivière borde la parcelle.

-> Il s'agit alors de construire un graphe connexe et minimal, cela revient à construire un arbre couvrant du graphe connexe.

• Graphe connexe :



• L'arbre couvrante minimum :



- On peut placer des vannes entres les parcelles qui sont reliés par une arête dans l'arbre.

→ Le nombre de vannes = nombre d'arêtes = 10.

$n - 1$