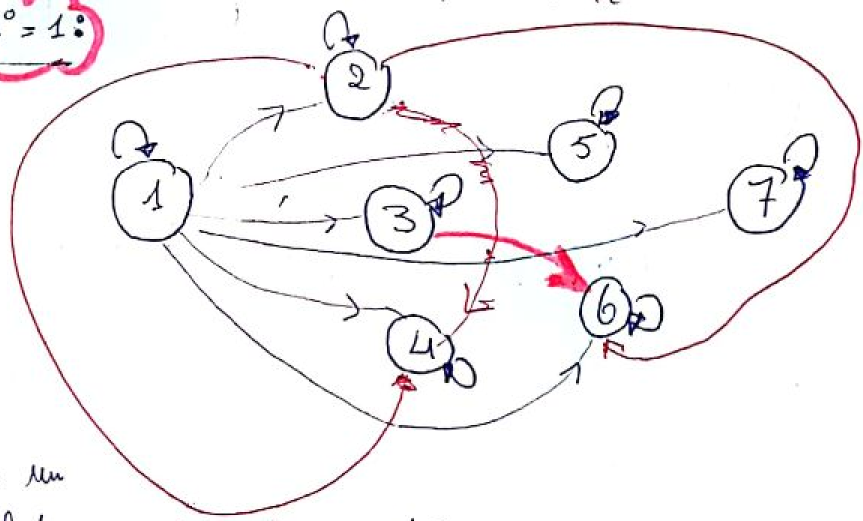
#THG

TD n°= 1 :

=> • Graphe discret reflexif.
• " sans boucle => simple ce n'est pas un graphe
→ ¬orienté

• Exercice n° = 1 :



* Ce n'est pas un graphe complet car il est orienté.

* il est transitive, (1 ÷ 2 , 2 ÷ 4 => 1 ÷ 4)

si 8 ∃ :

* clique = Graphe $\underbrace{\text{simple \& complet}}_{}$
Seulement dans un cnxt ¬ orienté

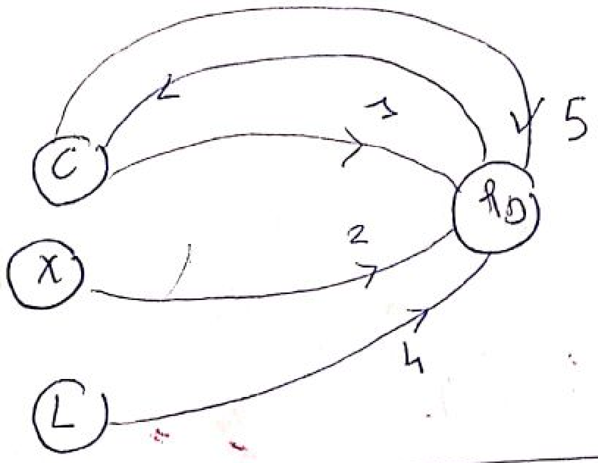
* c'est un graphe qui ~~n'est pas~~ ∃ anti symétrique.
x ÷ y mais y ≠ x pas de flèche dans les 2 sens.

*

Exercice n° = 2 :

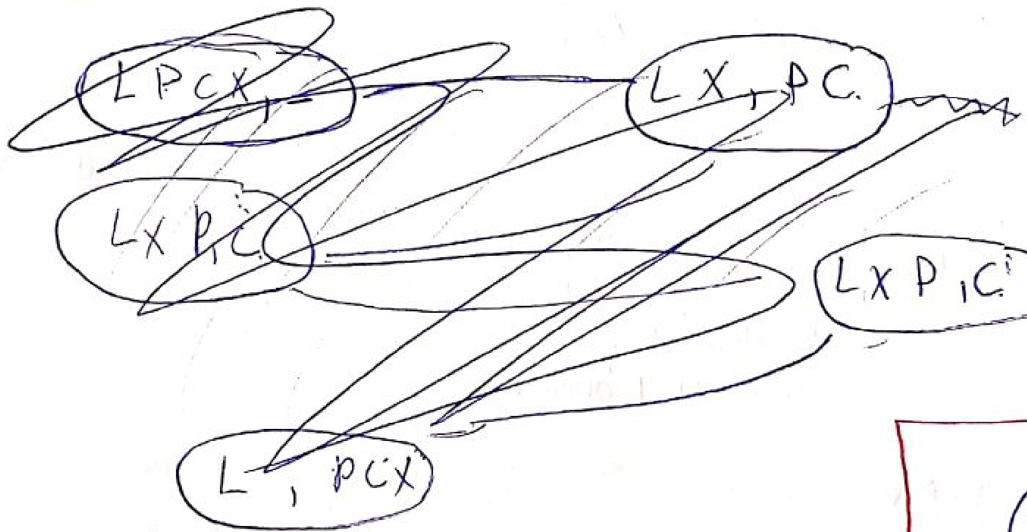
*

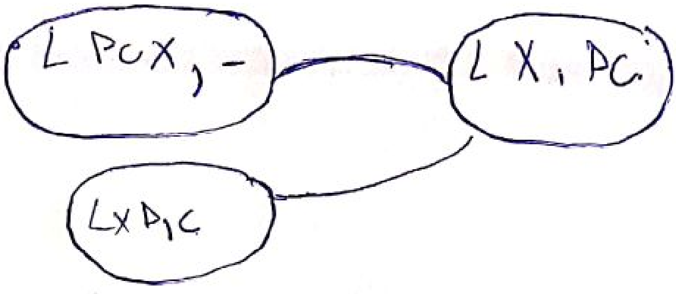
Scanned by CamScanner

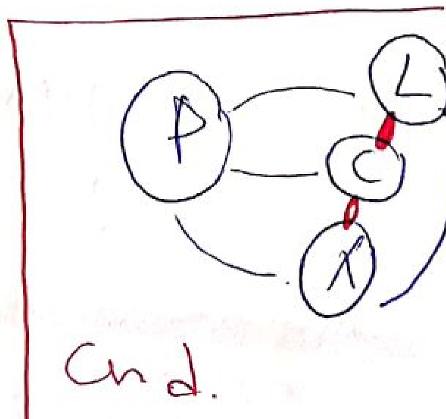


c : chèvre
x : chou
l : Loup
R_D : Rive droite.

- sommet = couple dont la première composante ce qui ∃ sur la R_G.
- 2ème composante : les elements qui sont sur la rive droite

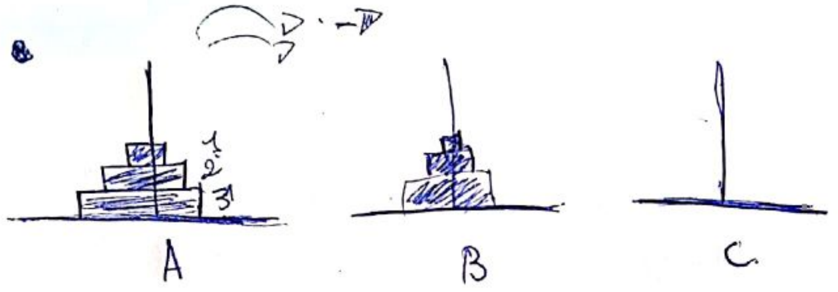




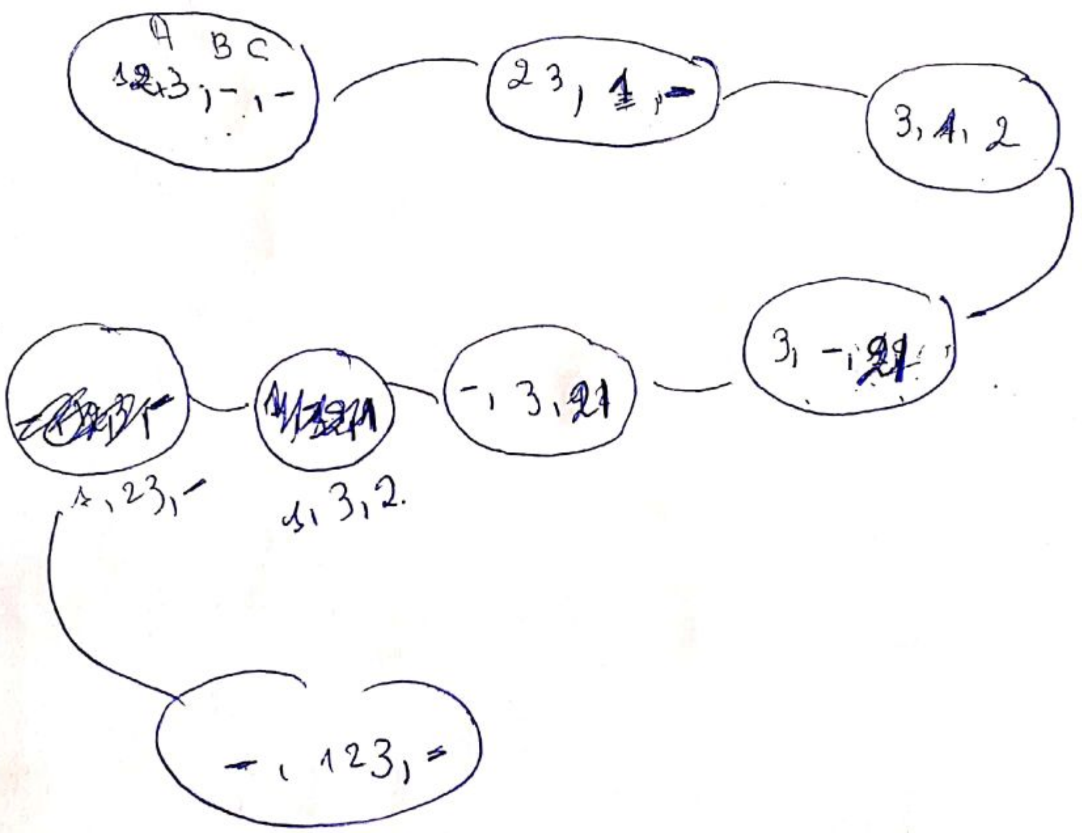


=> un graphe d'etat.

Exercice n° : 3 : Tour de Hanoi



Sommet :



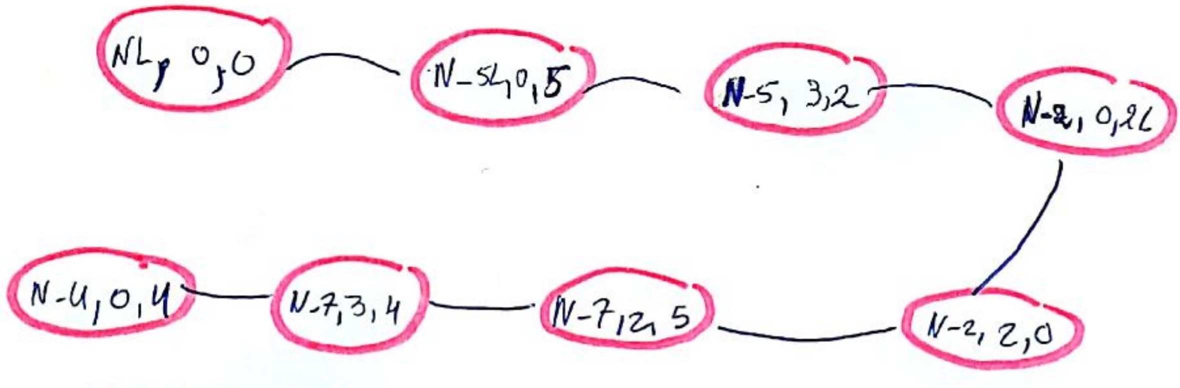
TD n°2

Exercice n° 4

- NL : nombre de litres dans un récipient tel que $n \in \mathbb{N}$.
- N : Volume dans le tonneau, $N \geq 10$

- le sommet : un triplet :
  - 1ère composante : Volume du liquide dans le tonneau
  - 2ème // : // // // // seau de 3L
  - 3ème // : // // // // seau 5L.

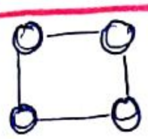
- arrête : Transversement d'un récipient à un autre.



* **Exercice n° = 6**

- un graphe est dit K régulier si : ∀ le sommet pris.
  - son degré = K, avec $K \in \mathbb{N}$.

Ex :

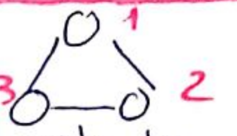


c'est un 2 régulier,

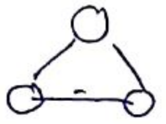
c'est un 1 régulier.

*

* **La longeur d'un cycle** = la longeur d'aretes qui le composent.



* Un cycle d'ordre K est : K coloriable.



$\gamma(\sigma) = 3.$

4

27 - 10 - 2019

TD n° 3 :

Exercice n° 6

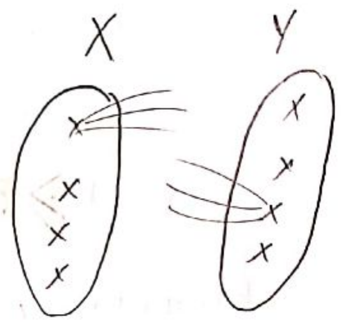
1- • $G = (V, E)$ un graphe biparti , V = l'ensemble de sommet.
E = l'ensemble d'arrêts.

• $V = X \cup Y$ de sommets.

• $d > 0$

• puisqu'il est biparti $\Rightarrow$ • $\nexists$ aucune relation entre les elements de X.
& • $\nexists$ aucune relation entre les elements de Y.

• et on a $\forall x \in V$, $d(x) = d > 0$.



• $|E| = m = d \cdot |X|$ ... ①

• $|E| = m = d \cdot |Y|$ ... ②

· De ① et ② on a :

$d|X| = d|Y| \Rightarrow$

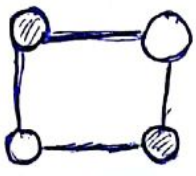
$|X| = |Y|$

2- **Montrer qu'un graphe biparti ne contient pas de cycle de longeur impaire :**

* cycle de longeur impaire : le nombre d'arrêts est impaire.
* Un cycle est une chaine fermée.

Scanned by CamScanner

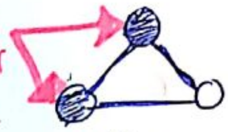
- **Une clique**, un sous graphe simple et complet qu'on peut extraire d'un graphe.



K_2.

$\gamma(K_2) = 2$

- cycle paire -



K_3 $\quad \gamma(K_3) = 3$

- cycle impaire -

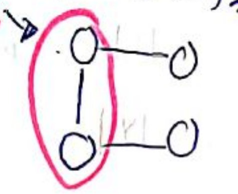
- **K_n** => graphe qui a n sommets et qui est simple et complet.

$\gamma(K_n) = n$

- **C_n** (cycle de longeur n) = $\begin{cases} \gamma(C_n) = 2 & \text{si } n \text{ est paire.} \\ \gamma(G) = 3 & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$

nombre chromatique = nombre minimum de couleurs avec lequel on peut colorier notre graphe.

* Si G contient un C_n ou n est impaire (cycle de longeur n) => $\gamma(G) \geq 3$ or notre graphe est biparti => $\gamma(G) = 2$ donc G ne peut contenir un cycle de longeur impaire. K_2 => $\gamma(G) \geq 2$



Exercice n° = 7 :

$$n \leq \gamma(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

- L'ordre de la plus grande clique qu'on peut extraire du graphe. (pour n)

- Max des degrés. (pour $\Delta(G)$)

Scanned by CamScanner

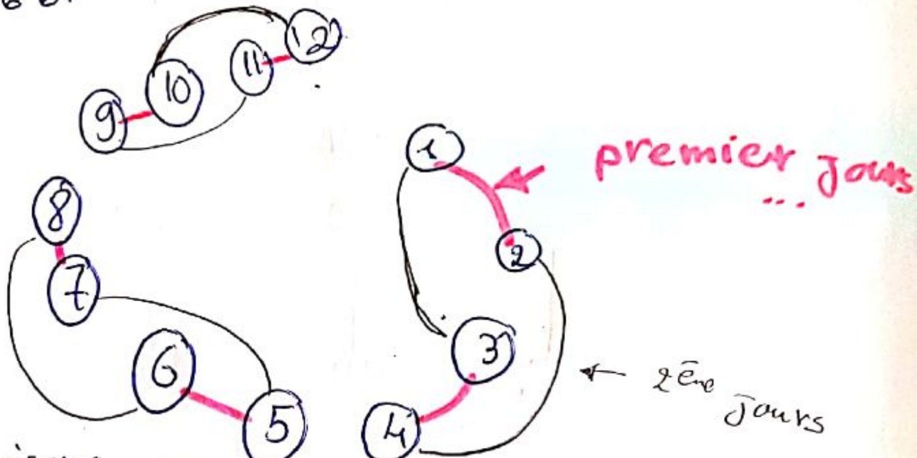
* 17 => cours THG.
* ce jeudi => systère

* le nombre de couples qu'on peut former :

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2! \times 10!} = 66.$$

$$\frac{66}{6} = 11 \text{ jours}$$

→ 6 binômes par jours.



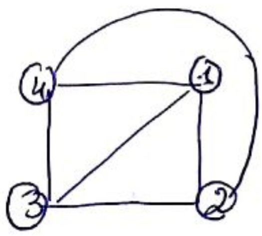
=> Et completer toutes les liaisons possibles jusqu'à ce qu'on obtient un graphe complet.

Exercice n° = 8 :

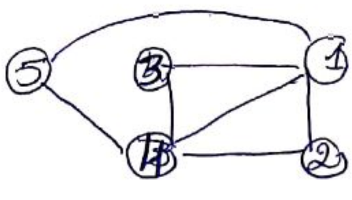
1 - Construire les graphes :

- $G = (X, E)$
- $|X| = n$
- $|E| = m$

- D'ordre 4 :



- D'ordre 5 :

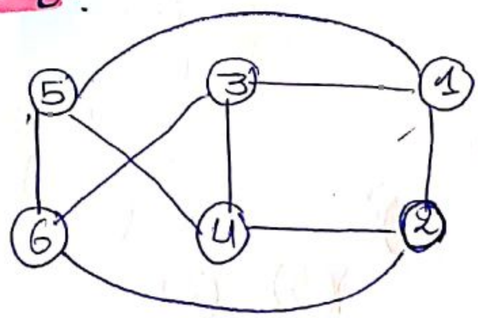


Scanned by CamScanner

- $3n = \sum d(x) = 2m$ (lemme des $\not{p}m$).
(3 régulier)

$\Rightarrow 3n = 2m \Rightarrow 3n$ paire $\Rightarrow n$ paire.

* D'ordre 6 :



* 4 régulier :

$4n = \sum d(x) = 2m.$

$4n = 2m \Rightarrow 2n = m$ (le nombre d'arc est pair)

Scanned by CamScanner

TD n° = 4

- ~~Exercice n°=~~

Ex. :

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline a & \\ b & \\ c & \\ d & \\ e & \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$G = (X, U)$, $|X| = n$, $|U| = m$

$\xrightarrow{\text{arcs}}$; $\downarrow$ Sommets.

* Matrice d'incidence sommets_arcs.

Arc rentrant , Arc sortant

- $\deg(a) = d^+ + d^-$ (ensemble des arcs rentrant +
  $= 2 + 1 = 3$ " " " sortants)

- $|X| = n = 5$ (ordre du graphe)
- $|U| = m = 6$ (Taille du graphe).

- La matrice d'adjacence :

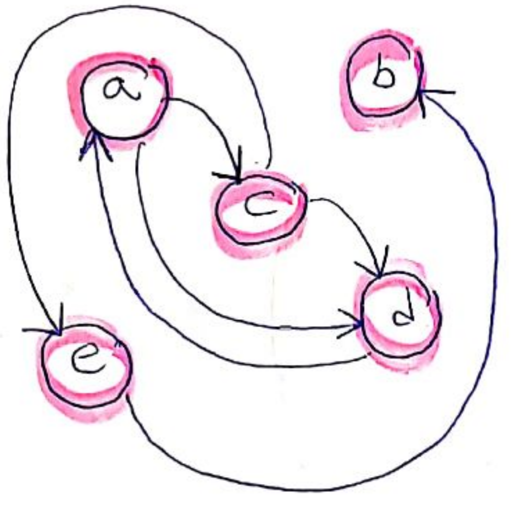
$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Arc qui sort de c vers e.

- Arc qui va de X vers Y on met 1 sinon 0. (Un arc qui sort de X vers Y) (Avec x, y 2 sommets)

Scanned by CamScanner

- Le nombre de 1 dans la matrice adjacent = Le nombre d'arc.



Γ = application: a un element on peut associer un ensemble d'éléments.

X	Γ^+	Γ^-
a	c, d	d
b	-	e
c	d, e	a
d	a	c, a.
e	b	c

successeurs
+ predecesseurs

ce tableau est appelé
=> "la version dictionnaire"

- un graphe reflexif : chaque sommet possède une boucle.
(ce graphe ne l'est pas)

- Il n'est pas symetrique.

* Un graphe reflexive : $G = (X, U)$

$n \swarrow \quad \searrow m$

* on a $(c,e) \in U$, $(c,b) \in U$ et $(c,b) \notin U$

=> ce graphe n'est pas transitive.

* G est sysmétrique si : $(X,y) \in U$ alors : $(y,x) \in U$

on a : - $(e,b) \in U$ et $(b,e) \notin U$ il n'est pas symétrique.

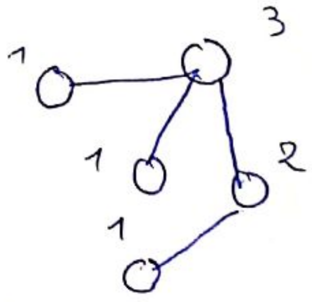
* Antisymétrique :

si $(x,y) \in$ alors $(y,x) \notin U$

- on a $(a,d) \in U$ et $(d,a) \in U$.

Exercice n° = 11

- Une suite graphique :



a) Dans un contexte $\neg$ orienté :

. La suite sera un vecteur de 5 composante.
• Les placer dans un ordre decroissant de leurs sommet.

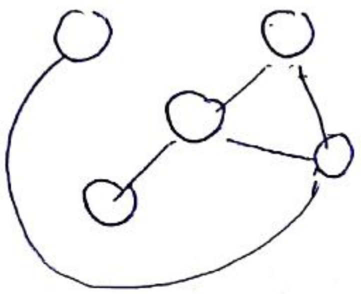
=> $(3, 2, 1, 1, 1)$

Scanned by CamScanner

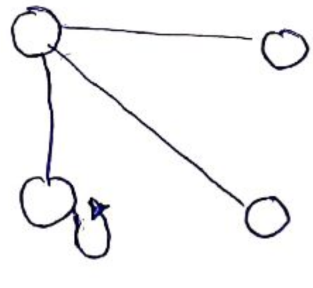
- (3, 3, 2, 1, 1) ... ①
- (3, 3, 1, 1) ... ② ⟹ It means: 1er sommet de degré 3
  2ème " " " 3
  3ème " " " 1
  4ème " " " 1
- (3, 3, 2, 2) ... ③
- (4, 2, 1, 1, 1, 1) ... ④
= (5, 3, 2, 1, 1, 1) ... ⑤
  (5, 4, 3, 1, 1, 1, 1) ... 6

1/ Les graphes:

1er graphe:

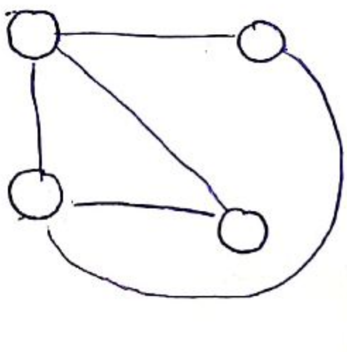


2ème graphe:



(on pourra pas le faire avec un graphe simple.)

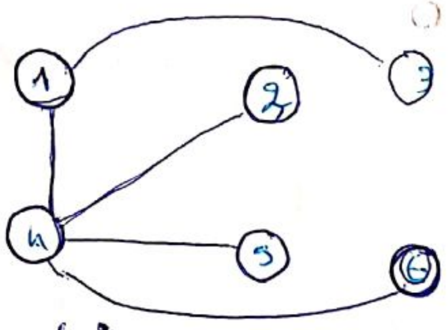
3ème graphe:



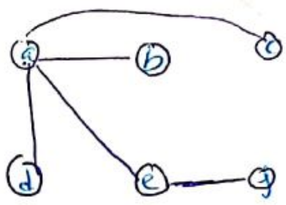
Scanned by CamScanner

4ème graphe : 4,2,1,1,1,1.

autre représentation.



(G)



(G')

- Ces 2 graphes sont isomorphes. -

5

- 2 graphes sont isomorphes s'il ∃ une app bijective
- qui va de. G dans G' qui conserve les degrés. et les arets, arcs les cycles, l'ordres des cycles.
- $f : G \longrightarrow G'$

$$\begin{cases} 4 \rightsquigarrow a \\ 1 \rightsquigarrow e \\ 3 \rightsquigarrow f \\ 5 \rightsquigarrow d \\ 6 \rightsquigarrow c \\ 2 \rightsquigarrow b \end{cases}$$

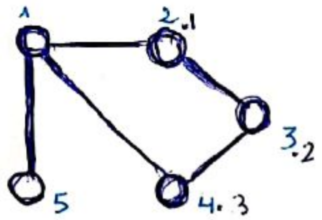
- $(4,1) \rightsquigarrow (f(4), f(1)) = (a, e)$
- $(4,6) \rightsquigarrow (f(4), f(6)) = (a, c)$

~~Exercice n°~~

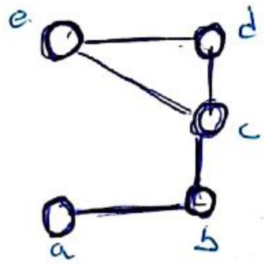
2/

Scanned by CamScanner

* 3, 2, 2, 2, 1.



et



$$f \begin{cases} 1 \to c \\ 5 \to a \\ 2.1 \to d \\ 3.2 \to e \\ 4.3 \to b \end{cases}$$

- y'a pas de bijection qui conserve les cycles.....

Exo supplementaire:

* on considère un graphe ~~non~~ orienté d'ordre 2 P
$G = (X, E)$

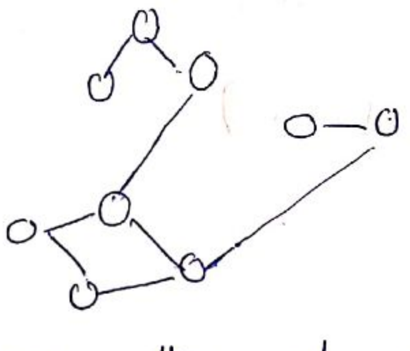
* on suppose que le degré de chaque sommet soit au moins = à P, $\forall x \in X,\ d(x) \geq P$.

=> Montrer que ce graphe est connexe.

* un graphe connexe:

- Un graphe qui est fait en un seul bloc.
- on peut le soulever par n'importe quel
- $\forall$ le couple, qu'on prend, $\exists$ une chaine reliant les 2 de sommets.

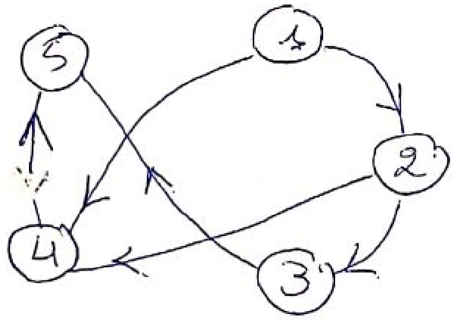
Ex.



=> un graphe connexe.

- un isme = une arret, une fois qu'on l'enlève, le graphe devient connexe. (La suppression de cette arrêt deconnecte le graphe)

TD n° = 5 — G —



	1	2	3	4	5
1		1		1	
2			1	1	
3					1
4					1
5					

1) Trouver la matrice d'adjacence :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cancel{1} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2/ Version dictionnaire des predecesseurs :

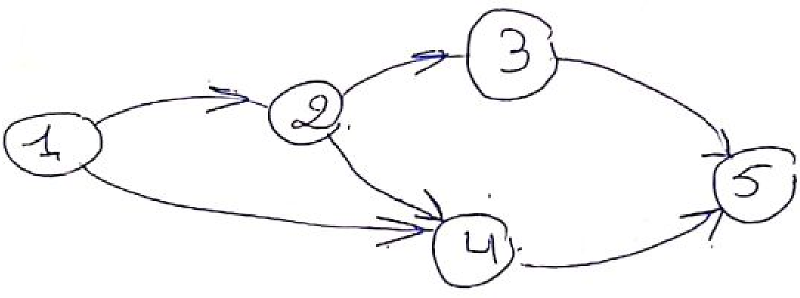
si y'a pas de sommets qui n'ont pa de predecesseurs $\Rightarrow$ ∃ un circuit q'q part

X =	$\Gamma(a)$	
1	—	*
2	~~1~~	o
3	~~2~~	Δ
4	~~1~~, ~~2~~	Δ
5	~~3~~, ~~4~~	

Scanned by CamScanner

La mise à niveau de G

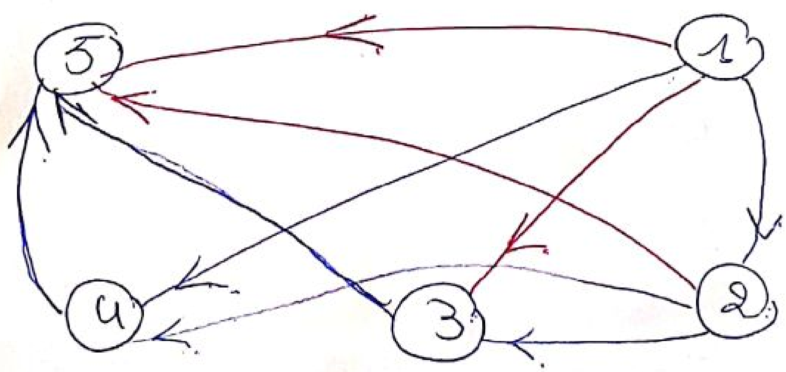
$N_0 = \{1\}$
$N_1 = \{2\}$
$N_2 = \{3, 4\}$
$N_3 = \{5\}$



* on commence par les sommet qui n'a pas de predecesseurs, il sera au niveau 0, puis on barre toutes les apparitions de ce sommet dans le dictionnaire (vesion dictionnaire) ensuite là ou ∄ de predecesseurs non barré c'est les sommets du graph du niveau 1 ainsi de suite les circuits apparaissent en forme d'erreurs.

4) Fermiture Transitive du graphe G :

- si <u>1 va vers 2</u>, et 2 <u>va vers 3</u> donc on metteras un arc de <u>1 ves 3</u>, et c'est recursif.



Scanned by CamScanner

(5) Matrice d'adjacence du graphe après la fermeture

* on prend la Mat d'adjac initiale (avant la fermeture)
* on prend la ligne 1 on ~~...~~ l'a rajoute (selon un ou booléen) à toutes les lignes qui on un 1 dans leurs colonne 1 et ainsi de suite.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 1 \\
 & & & &
\end{array}\right)
\end{array}
$$

ou logique :

$1 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus 0 = 1$

$0 \oplus 1 = 1$

$0 \oplus 0 = 0$

- $M_1 = e\, M = M$
- $M_2 = e_2 M_1 = e_2 M_1$
- $M_3 = e_3 M_2$
- $M_4 = e_4 M_3$
- $M_5 = M_4$.

* Exemple de fermeture transitive.

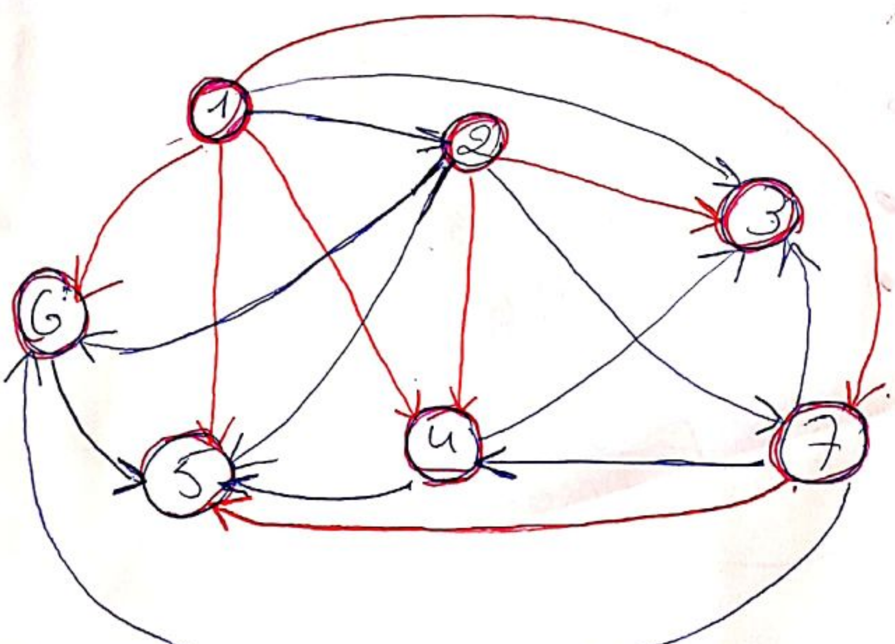
Scanned by CamScanner

	1	2	3	4	5	6	7
1		1	1	1	1	1	1
2			1	1			
3					1	1	1
4			1		1		
5							
6							
7			1	1	1 1	1	

- $M_1 = M$
- $M_2 = e_2 M$.
- $M_3 = e_3 M_2 = M_2$

$M_4 = e_4 M_2$
$M_5 = M_4$
$M_6 = M_4$

$M_7 = e_7 M_4$



$x =$	$\Gamma(x)$
1	—
2	$\cancel{1}$
3	$\cancel{1}, \cancel{4}, \cancel{7}$
4	$\cancel{7}$
5	$\cancel{4}, \cancel{6}$
6	$\cancel{2}, \cancel{7}$
7	$\cancel{2}$

$N_0 = \{1\}$
$N_1 = \{2\}$
$N_2 = \{7\}$

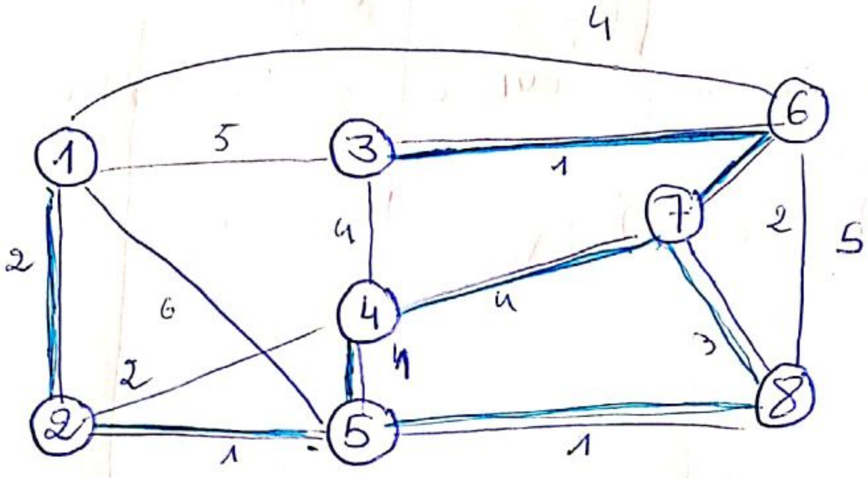
$N_3 = \{4, 6\}$
$N_4 = \{3, 5\}$

Scanned by CamScanner

* TD n° 6 :

But du TD.

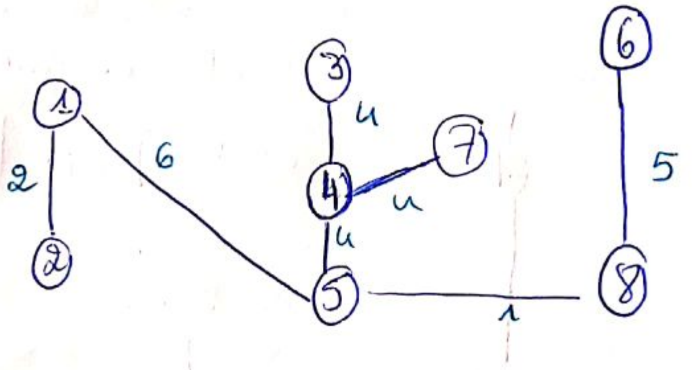
- Arbre de poids minimum (APM)
- Codage.
- Decodage.



- Arbre :

- connexe et n-1 arete.
- " " sans cycle.
- chaque arête est un isthme.
- ∀ le couple de sommet ∃ une chaine unique relie
- quand on ajoute une arrête il devient un cycle unique.

Ex d'un arbre qui verifie toutes les propriété



poids de l'arbre = $\sum$ des arr

$P(A) = 2 + 6 + 4 + 4 + 4 + 1 + 5 = 26$

Scanned by CamScanner

- Mais on veut trouver l'arbre de poids minimum :

⇒ vc l'algorithme de Kruskal.

① Mettre les poids des arêtes dans un ordre ↗

(2;5) ⩽ (5;8) ⩽ (3;6)) ⩽ ......

Sommet
①

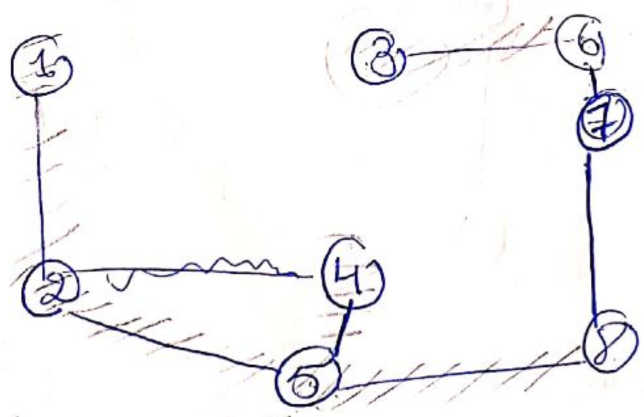
- si ∀ l'arrete, son poinds est unique.

(poids des arêtes sont distincts)

- Si un arbre est unique ssi :

• quand on prend un de ses sommets,

codifier un arbre



S=[2,2,6,5,8,7]

- Les sommets doivent avoir une appellation numérique.

- $G(X, E)$ et $|X|=n$

- on aura un vecteur

$S = [\underbrace{\ \cdots\ }_{}]$

avec $n-1$ composante.

1 - prendre le sommet dont le n° est le plus petit.
2 - Quel est son voisin
3 - le barrer.

S = [2, 5, 6, 5, 8, 7]

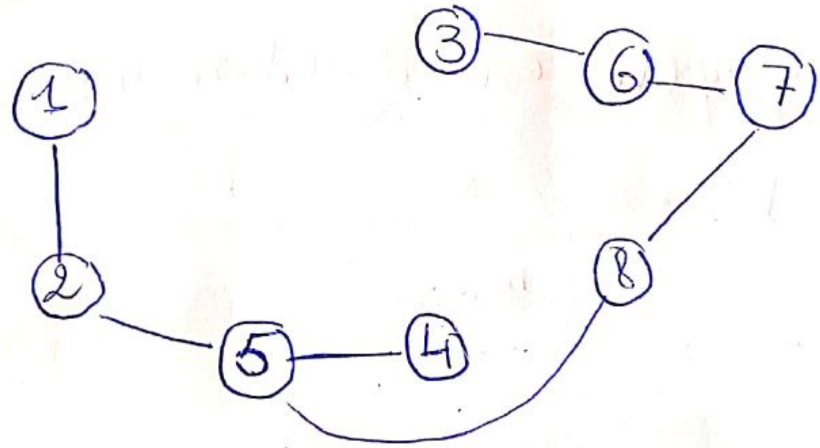
I = [~~1~~, ~~2~~, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

* Théorème

Tout arbre possède au moin 2 sommets pendant.

Decodage => Redesiner l'arbre.

① prendre le + petit element qui ∄ dans S, c'est 1 Donc ....
il nous restent 2 sommets 1 reliés à la fin => on va les relier.



✳ soit G = (X , E) graphe simple et complet. d'ordre n. Quel est le nombre d'arbre qu'on peut extraire de ce graphe?

Scanned by CamScanner

* $n = 4$:

- Graphe d'ordre n :

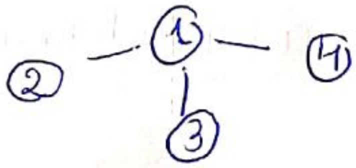
$S = [\quad \ldots \quad]$

n-2 composante.

- $N = 4$:

[1, 2, 3, 4] [1, 2, 3, 4]

chaque composante
$S = (1, 1)$
= arbre



si ~~tarbon~~ le graphe est d'ordre n :

$\underbrace{[\ldots] \; x \ldots x \ldots [\ldots]}_{n-2}$

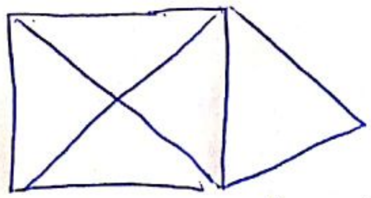
=> c'est n^{n-2}

---

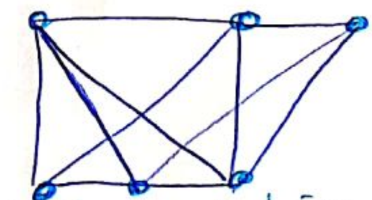
* Graphe eulérien.

- si tous ses sommets sont de degré paire.

-



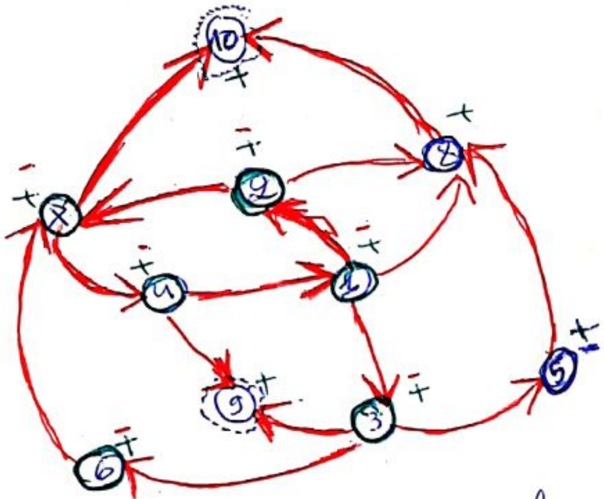
Il est eulerien



n'est pas eulérien.

TD n° 7

_Graphe 1 -



+ —> successeur

− —> prédécesseur

les ~~le~~ sommet qui ont + et − au même temps => font partie de la " composante fortement connexe.

Graphe (1)

- ∃ il un graphe dont les degrés de ses sommets sont egaux respectivement à 1, 4, 7, 8, 9, 2, 3, 5

- ~~Le nombre de sommet impair est impair~~

. ~~La~~ somme des degré des sommet est impair, ce n'est pas une suite graphique; on doit avoir ($\Sigma\, d(n) = 2m$)

- si c'etait : 1 4 7 8 9 2 4 5 => Le graphe sera comme suit:

- n - graphe : ~~Le nom~~ ∀ les 2 sommets qu'on prend

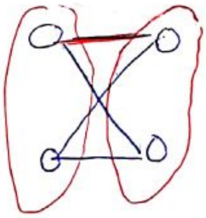
Scanned by CamScanner

* Le graphe 1 est-il :

- biparti ?
- possède une racine.
- Le graphe réduit.
- Composantes fortement connexes.

* biparti : – 1ère partie : pas de sommet adjacents.
  – 2ème partie : pas de sommet adjacents
  – y a pas !

Ex : d'un graphe biparti



* Un graphe biparti ne contient pas des cycle. d'ordre impair.

* Son nombre chromatique doit être = à 2.

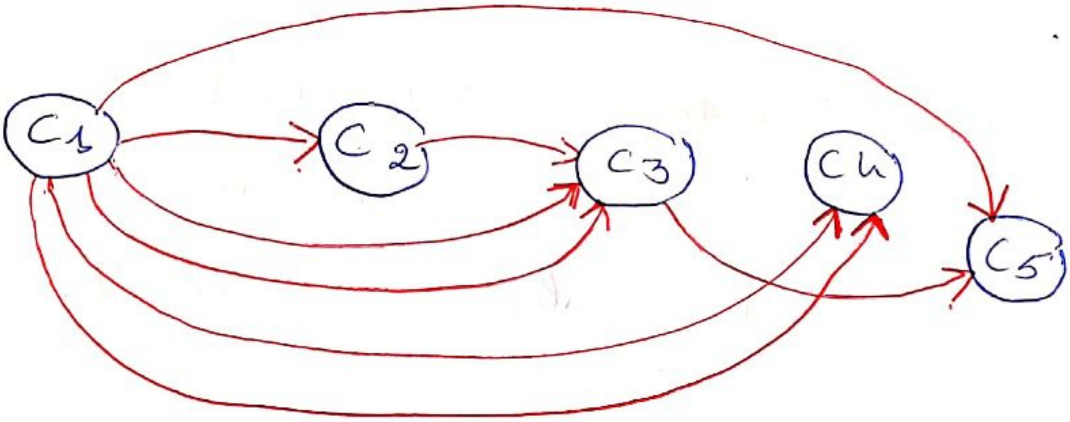
* Une racine : si de ce sommet, on peut aller. vers tous les autres sommets (∃ au moin un chemin).

* première composante connexe :

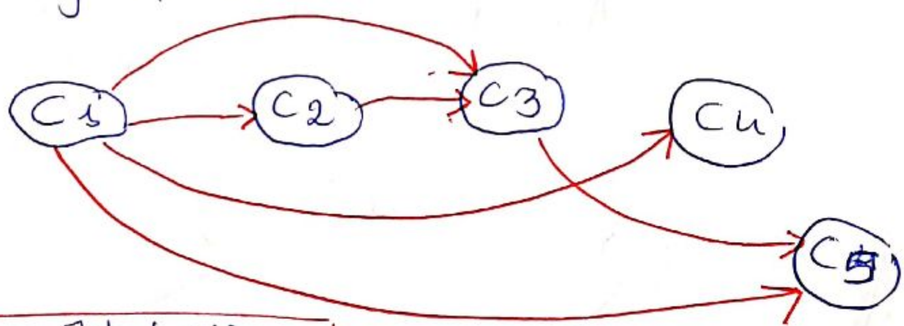
$$Cfc1 = \{7, 4, 1, 2, 3, 6\}$$

* le 10 tout seul est une composante fortement connexe, car il n'a pas de successeur (∄ aucun. + tout seul)

* $Cfc\ 2 = \{10\}$
* $Cfc\ 3 = \{9\}$
* $Cfc\ 4 = \{5\}$
* $Cfc\ 5 = \{8\}$



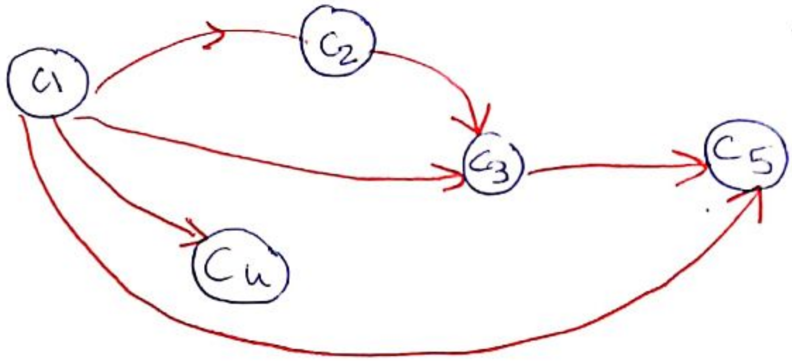
* Le graphe réduit mais il n'est pas mis à niveau :



	$\Gamma^+(ci)$
C_1	~~$\Gamma^+(ci)$~~ —
C_2	C_1, —
C_3	C_1, C_2.
C_4	C_1
C_5	C_1, C_3

- $N_0 = \{C_1\}$.
- $N_1 = \{C_2, C_4\}$.
- $N_2 = \{C_3\}$.
- $N_3 = \{C_5\}$

Scanned by CamScanner

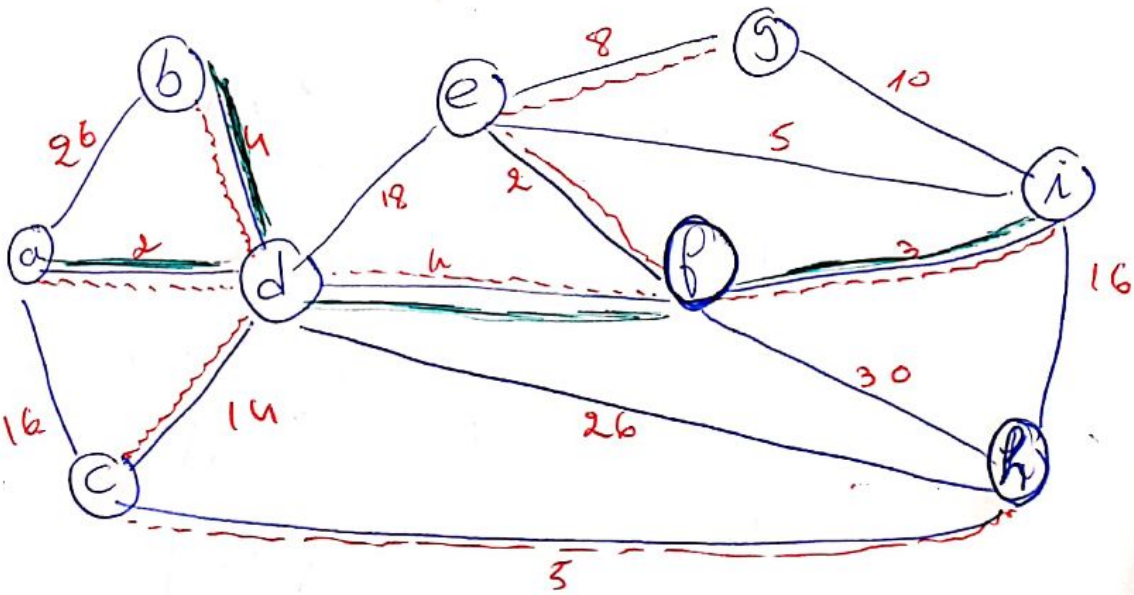


- prendre le dernier niveau.
- quels sont les predecesseurs
- Mettre des arcs

- C1 est une racine.
- C1 est composé de 6 ~~sommets~~ sommets (qui sont fortement connexe) ⇒ Le graphe 1 possède 6 racines qui sont les sommets de C1.

Exercice

APM
ACM, Arbre de cout minimum.



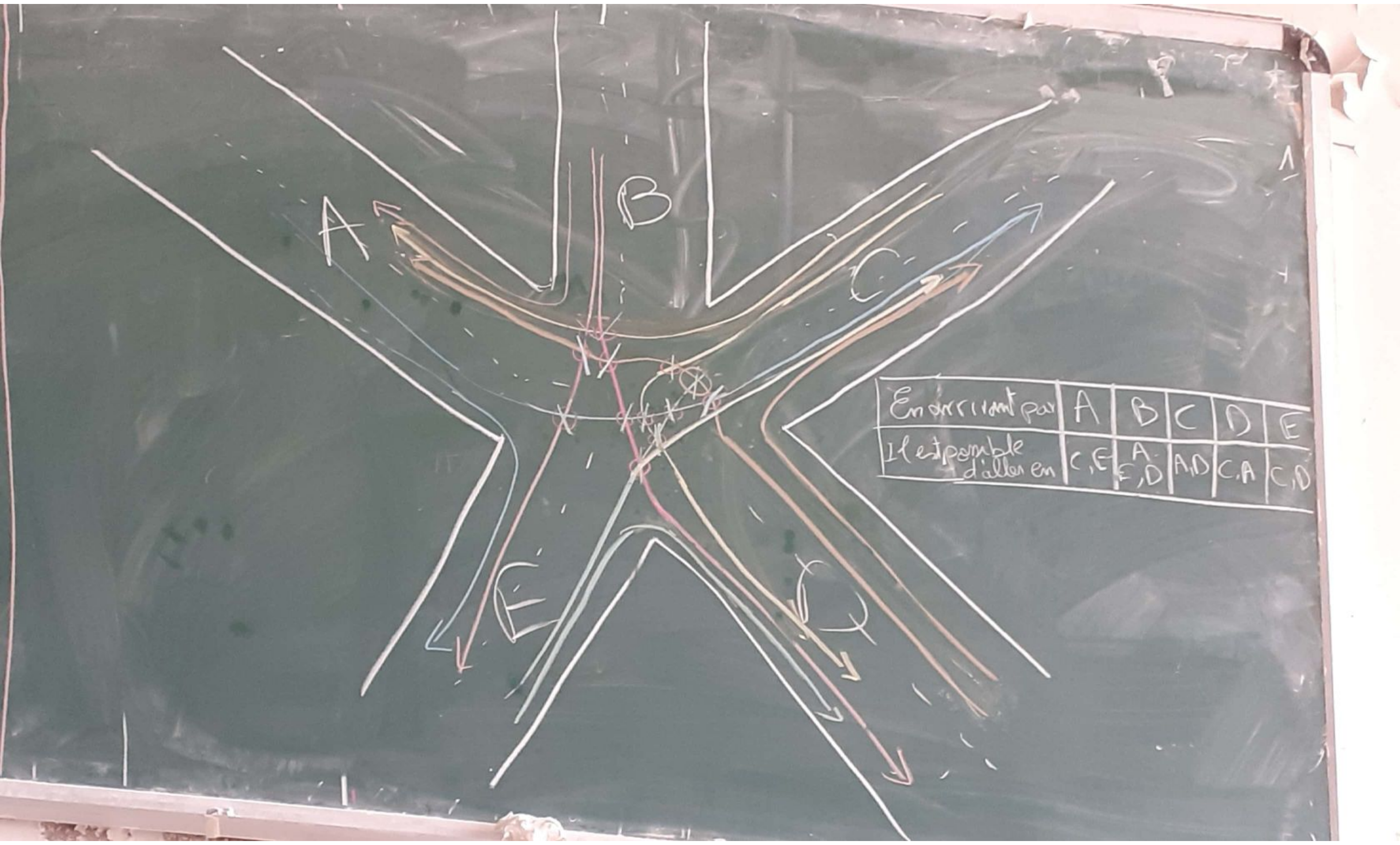
- Le poids de l'arbre est: 42
- L'arbre ~~obtenu~~ de poids min n'est pas unique

* numéroter les sommet : {1 .... 9}, chercher les sommets pendants
(pendant = de degré 1).

* $S = \{ \overset{d}{4}, \overset{d}{4}, \overset{e}{5}, \overset{f}{6}, \overset{c}{3}, \overset{d}{4}, \overset{g}{6} \}$

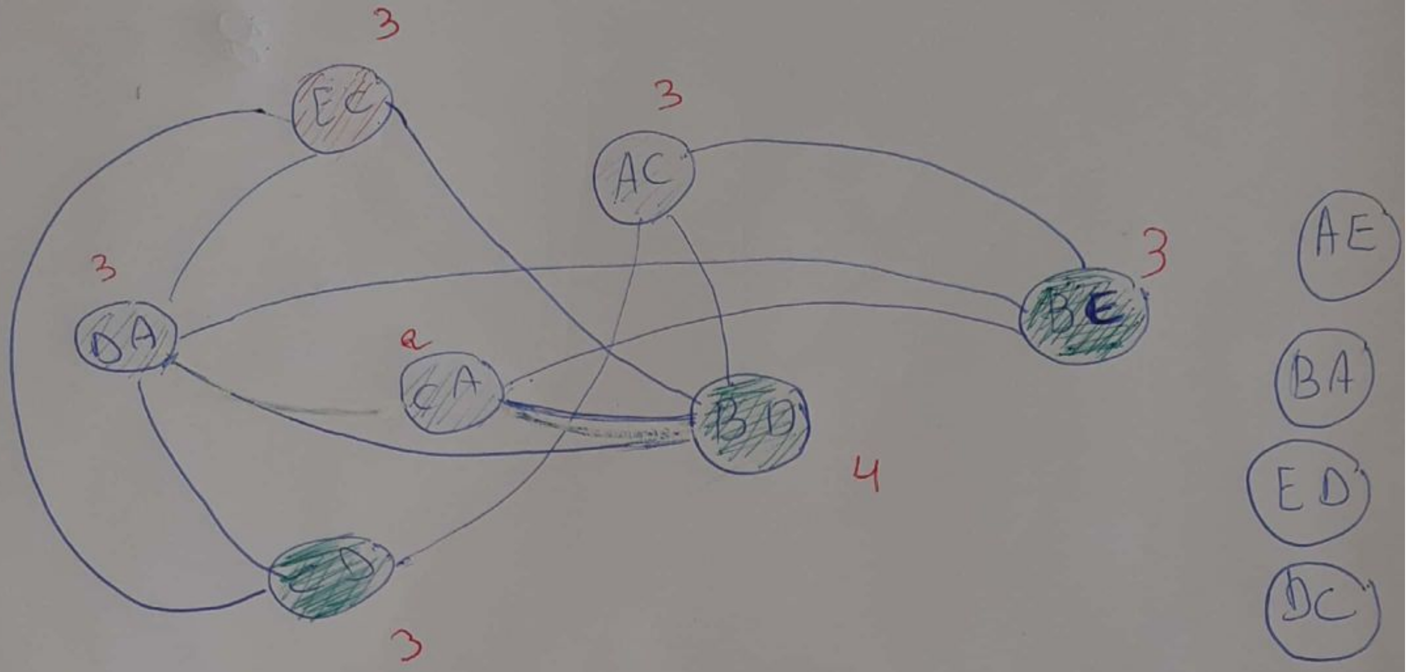
$n-2$

Scanned by CamScanner



En arrivant par	A	B	C	D	E
Il est possible d'aller en	C, E	A, E, D	A, D	C, A	C, D

Scanned by CamScanner



Ce graphe est 3 coloriable.

$$n \leqslant \gamma(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

$$3 \leqslant \gamma(G) \leqslant 5$$

$\square$	V	RR
Δ	R	VR
$\bigcirc$	R	RV.

EC

$\bigcirc$

DA
CA
AC

$\square$

CD
BD
BE

Δ

Scanned by CamScanner