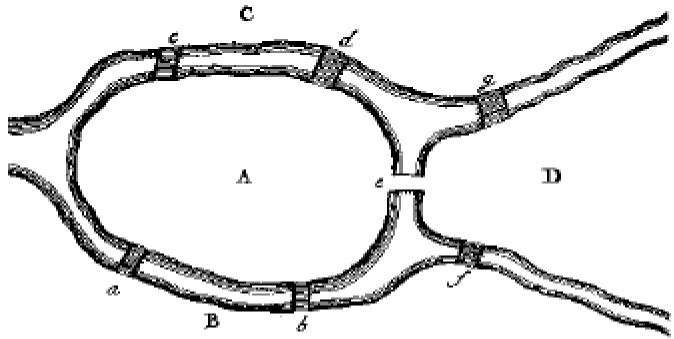
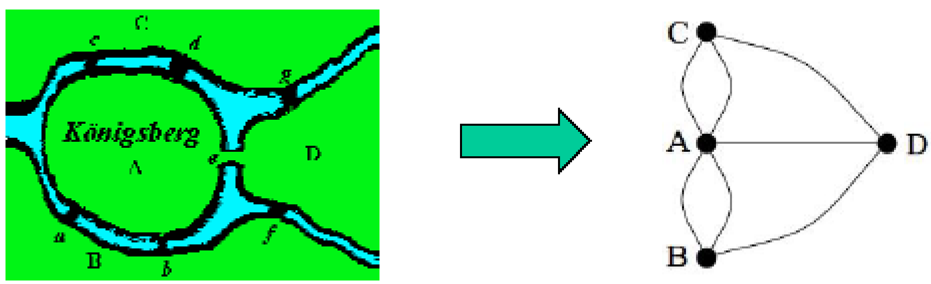
Eléments de Théorie des Graphes

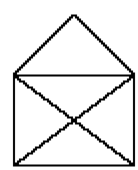


Bref historique de la théorie des graphes

- Naissance en 1736, communication d'Euler où il propose une solution au problème des ponts de Königsberg

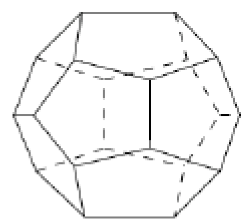


Dessin comportant des sommets (points) et des arêtes reliant ces sommets



Bref historique de la théorie des graphes

- 1847 Kirchhoff
  théorie des arbres (analyse de circuits électriques)
- 1860 Cayley
  énumération des isomères saturés des hydrocarbures C_nH_{2n+2}
- A la même époque, énoncé de problèmes importants
  - Conjecture des quatre couleurs (1879)
    (Möbius, De Morgan, Cayley, solution trouvée en 1976)
  - Existence de chemins Hamiltoniens (1859)
- 1936 König
  premier ouvrage sur les graphes
- 1946 → Kuhn, Ford, Fulkerson, Roy
  Berge



Introduction

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Définition 1

- On appelle graphe $G=(X, A)$ la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A symétrique $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$ dont les éléments sont appelés arêtes.
- En présence d'une arête $a=(x,y)$ qui peut être notée simplement xy, on dit que x et y sont les extrémités de a, que a est incidente en x et en y, et que y est un successeur ou voisin de x (et vice versa).
- On dit qu'un graphe est sans boucle si A ne contient pas d'arête de la forme (x, x), c'est-à-dire joignant un sommet à lui-même.
- Le nombre de sommets est appelé ordre du graphe.
- Un graphe ne possédant pas de boucle ni d'arêtes parallèles (deux arêtes distinctes joignant la même paire de sommets) est appelé graphe simple ou 1-graphe.

Définition 2

- On appelle graphe orienté ou digraphe $G=(X, A)$ la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie de A de $X \times X$ dont les éléments sont appelés arcs ou arêtes.
- En présence d'une arc $a=(x, y)$ qui peut être noté simplement xy, on dit que x est l'origine (ou extrémité initiale) et y l'extrémité (terminale) de a, que a est sortant en x et incident en y. On dit aussi que x et y sont adjacents.

Graphes et applications multivoques

- L'ensemble des successeurs d'un sommet $x \in X$ est noté $\Gamma(x)$.

- L'application Γ qui, à tout élément de X, fait correspondre une partie de X (un élément de P(X)) est appelée une application multivoque.

- L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet $x \in X$ peut alors être noté $\Gamma^{-1}(x)$ où Γ^{-1} est l'application (multivoque) réciproque de Γ.

- Si le graphe G est un 1-graphe, on constate qu'il est parfaitement déterminé par la donnée de l'ensemble X et de l'application multivoque Γ de $X \rightarrow$ P(X). Un tel graphe peut donc aussi être noté : G=(X, Γ).

Principales définitions (contexte graphes orientés)

Définition 3

- On appelle degré sortant ou demi-degré extérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(x, y)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma(x) \setminus \{x\}$. On note $d_s(x)$ ce degré.
- On appelle degré entrant ou demi-degré intérieur d'un sommet x le nombre d'arcs de la forme $a=(y, x)$ avec $y \neq x$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\Gamma^{-1}(x) \setminus \{x\}$. On note $d_e(x)$ ce degré.
- On appelle degré de x (ou valence) la somme du degré entrant et du degré sortant.
- Un sommet de degré entrant non nul et de degré sortant nul est appelé puits, tandis qu'un sommet de degré entrant nul et de degré sortant non nul est appelé source.
- Un sommet n'ayant pas d'arcs incidents est appelé sommet isolé ; ces sommets ont un degré nul

Définition 4

- On appelle graphe réflexif un graphe possédant une boucle sur chaque sommet

- Un graphe est symétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ appartient également à A.

- Un graphe est antisymétrique si, pour tout arc $a_1=(x, y)$ appartenant à A, l'arc $a_2=(y, x)$ n'appartient pas à A.

- Enfin, un graphe est transitif si, quelque soit deux arcs adjacents $a_1=(x, y)$ et $a_2=(y, z)$ appartenant à A, alors l'arc $a_3=(x, z)$ appartient également à A.

Le concept de graphe symétrique est très proche de celui des graphes non orientés. En fait, à tout graphe symétrique, on peut associer un graphe non orienté en substituant aux arcs $a_1=(x, y)$ et $a_2=(y, x)$, une arête $a=(y, x)$.

Définition 5

- Un graphe $G=(X, A)$ est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (x, y).
- Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n. Un sous-ensemble de sommets $C \subset X$ tel que deux sommets quelconques de C sont reliés par une arête est appelé une clique.

Définition 6

- Soit un graphe $G=(X, A)$ et $X' \subset X$. Le sous-graphe engendré par X' est $G'=(X', A')$, A' étant formé des arêtes dont les deux extrémités sont dans X'.
- Si l'on se donne un sous-ensemble A_1 de A, le graphe partiel engendré par A_1 est $G_1=(X, A_1)$.

D'après la définition précédente, une clique d'un graphe G est donc un sous-graphe complet de G.

Modes de représentation d'un graphe

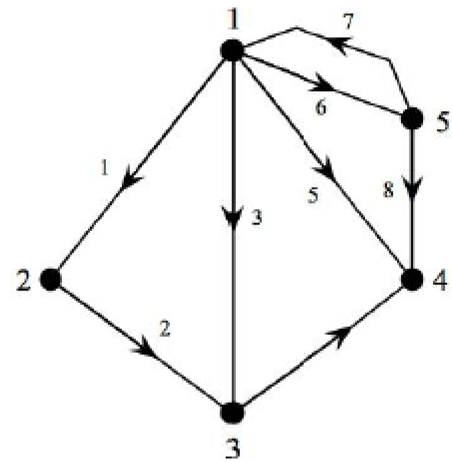
Listes de succession

1	2, 3, 4, 5
2	3
3	4
4	-
5	1, 4

Successeurs

1	5
2	1
3	1, 2
4	1, 3, 5
5	1

Prédécesseurs



Modes de représentation d'un graphe

Matrice d'adjacence

Utilisation des outils d'algèbre linéaire

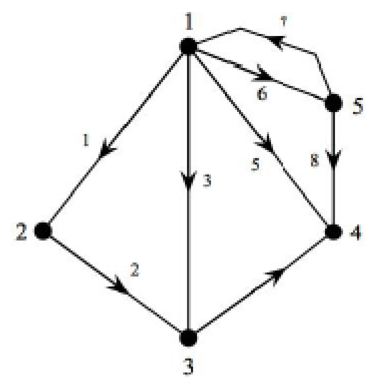
Définition 7

Considérons un graphe G=(X, A) comportant n sommets. La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice U=(u_{ij}) de dimension $n \times n$ telle que :

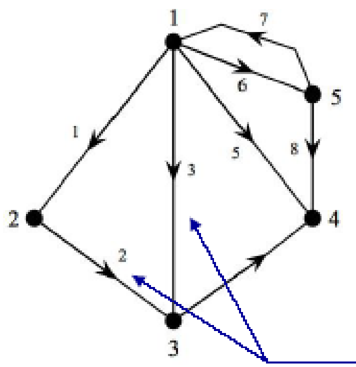
$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in A \text{ (c'est-à-dire } (i,j) \text{ est une arête)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle matrice, ne contenant que des « 0 » et des « 1 » est appelée matrice booléenne.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Modes de représentation d'un graphe



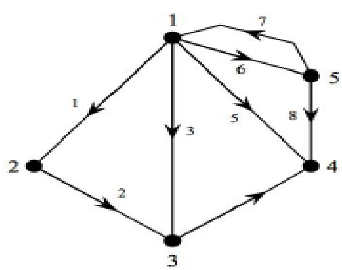
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2

Propriétés

- la somme des éléments de la $i^{ème}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.
- la somme des éléments de la $j^{ème}$ colonne de U est égale au degré entrant $d_e(x_j)$ du sommet x_j de G.
- U est symétrique si, et seulement si, le graphe G est symétrique.

Modes de représentation d'un graphe



$$\begin{array}{rc l}
 & \text{Arc}\quad 1 \quad\; 2 \quad\; 3 \quad\; 4 \quad\; 5 \quad\; 6 \quad\; 7 \quad\; 8 & \\
M = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\
 & & \text{Sommet}
\end{array}$$

<u>Rmq</u> : Les coefficients de la matrice ci-dessus doivent etre multiplier par -1

Etude de la connexité

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- ***Définition* 9**
  - Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadre dans la séquence.
  - Le premier et le dernier sommet sont appelés (sommets) extrémités de la chaîne.
  - La longueur de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne élémentaire.
  - Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne simple.

Chaînes et cycles, élémentaires et simples

- Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident.
- Un cycle élémentaire (tel que l'on ne rencontre pas deux fois le même sommet en le parcourant) est un cycle minimal pour l'inclusion, c'est-à-dire ne contenant strictement aucun autre cycle.

Chemins et circuits, élémentaires et simples

- ***Définition* 10**
  - Un chemin est une séquence finie et alternée de sommets et d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est sortant d'un sommet et incident au sommet suivant dans la la séquence (cela correspond à la notion de chaîne « orientée »).
  - Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin élémentaire.
  - Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin simple.
  - Un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident.
  - En parcourant un circuit élémentaire, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Graphes et sous-graphes connexes

- ***Définition* 11**

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G.

La relation :

$$x_i \;\mathrm{R}\; x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } x_i = x_j \\ \text{soit il existe une chaîne joignant } x_i \text{ à } x_j \end{cases}$$

est une relation d'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité). Les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en X_1, X_2, … X_p.

Le nombre p de classes d'équivalence distinctes est appelé nombre de connexité du graphe.

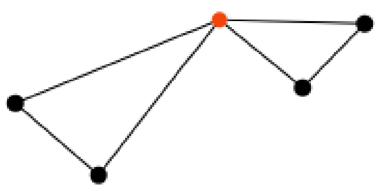
Un graphe est dit connexe si et seulement si son nombre de connexité est égal à 1.

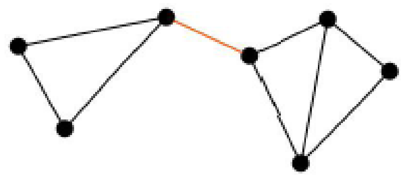
Les sous-graphes G_i engendrés par les sous-ensembles X_i sont appelés les composantes connexes du graphe. Chaque composante connexe est un graphe connexe.

Graphes et sous-graphes connexes

➢ *Définition* 12

- Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.
- Un isthme est une arête dont la suppression a le même effet.
- Un ensemble d'articulation d'un graphe connexe G est un ensemble de sommets tel que le sous-graphe G' déduit de G par suppression des sommets de E, ne soit plus connexe.





Graphes et sous-graphes fortement connexes

➢ *Définition* 13

Un graphe orienté est fortement connexe s'il existe un chemin joignant deux sommets quelconque.

La relation :

$$x_i \;\mathrm{R}\; x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } \; x_i = x_j \\ \text{soit il existe à la fois un chemin joignant } x_i \text{ à } x_j \text{ et un chemin joignant } x_j \text{ à } x_i \end{cases}$$

est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en $X_1, X_2, \ldots X_q$.

Les sous-graphes engendrés par les sous-ensembles $G_1, G_2, \ldots G_q$ sont appelés les composantes fortement connexes du graphe.

Graphes et sous-graphes fortement connexes

➢ ***Définition* 13**

Un graphe orienté est fortement connexe s'il existe un chemin joignant deux sommets quelconque.

La relation :

$$x_i \;\mathrm{R}\; x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } x_i = x_j \\ \text{soit il existe à la fois un chemin joignant } x_i \text{ à } x_j \text{ et un chemin joignant } x_j \text{ à } x_i \end{cases}$$

est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en $X_1, X_2, \ldots X_q$.

Les sous-graphes engendrés par les sous-ensembles $G_1, G_2, \ldots G_q$ sont appelés les composantes fortement connexes du graphe.

Graphes et sous-graphes fortement connexes

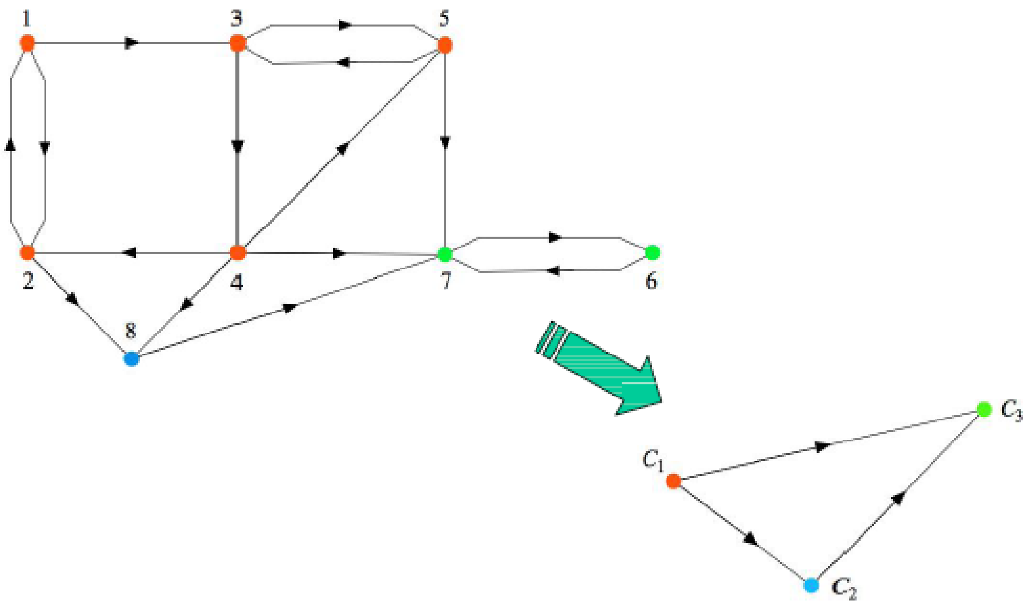
➢ ***Définition* 14**

On appelle graphe réduit le quotient du graphe G par la relation de forte connexité $G_r = G/R$

Les sommets de G_r sont donc les composantes fortement connexes et il existe un arc entre deux composantes fortement connexes si et seulement s'il existe au moins un arc entre un sommet de la première composante et un sommet de la seconde.

On vérifie que le graphe G_r est sans circuit.

Graphes et sous-graphes fortement connexes



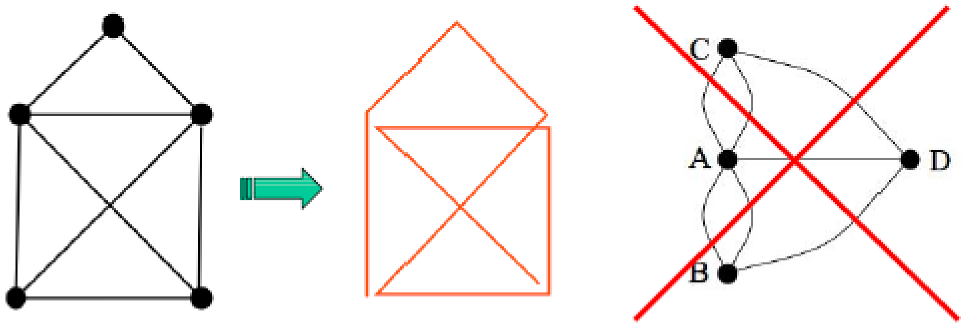
Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

➢ ***Définition* 16**

Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

- Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
- Un graphe possédant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Parcours eulériens et hamiltoniens

Chaînes et cycles eulériens

➢ ***Théorème* 1**

- Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
- Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Condition nécessaire

En chaque sommet, le nombre d'arcs incidents doit être égal au nombre d'arcs sortants, les sommets doivent donc être de degré pair.

Dans le cas d'une chaîne, les deux extrémités font exception ; on part ou on arrive une fois de plus, d'où un degré impair pour ces deux sommets extrémités.

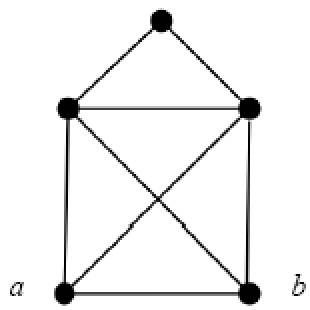
Chaînes et cycles eulériens

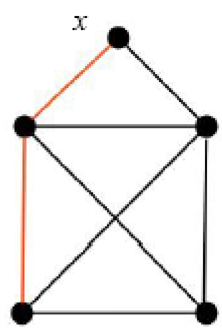
Condition nécessaire

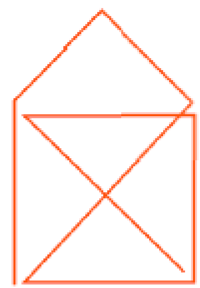
Soit a et b deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).
Soit L la chaîne parcourue en partant de a (avec l'interdiction d'emprunter deux fois la même arête).

Si l'on arrive à un sommet $x \neq b$, on a utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à x. On peut donc « repartir » par une arête non déjà utilisée.

Quand on ne peut plus bouger, c'est qu'on est en b. Si toutes les arêtes ont été utilisées, on a parcouru une chaîne eulérienne.







Chemins et circuits eulériens

- ***Définition*** 17

Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

- Un chemin dans un graphe orienté est dit eulérien s'il passe exactement une fois par chaque arête.
- Un graphe orienté est dit eulérien s'il admet un circuit eulérien.

- ***Théorème*** 2

- Un graphe orienté connexe admet un chemin eulérien (mais pas de circuit eulérien) si, et seulement si, pour tout sommet sauf deux (a et b), le degré entrant est égal au degré sortant et

$$d_e(a)=d_s(a)-1 \qquad \text{et} \qquad d_e(b)=d_s(b)+1$$

- Un graphe orienté connexe admet un circuit eulérien si, et seulement si, pour tout sommet, le degré entrant est égal au degré sortant.

Problèmes « prototypes » classiques : problème du postier chinois

parcourir les rues d'une ville en passant au moins une fois dans chaque rue, le graphe n'étant pas nécessairement eulérien ; on cherche bien sûr à minimiser la longueur totale du parcours.

Application : tournées de distribution de courrier, de ramassage d'ordures, d'inspection de réseaux de distribution.

Dans le cas orienté où chaque arc doit être emprunté dans un sens privilégié, le problème se ramène à la recherche d'un flot à coût minimum.

Théorème 3

- Un graphe non orienté admet un cycle chinois si, et seulement si, il est connexe.
- Un graphe orienté admet un circuit chinois si, et seulement si, il est fortement connexe.

Chaînes et cycles hamiltoniens

Définition 18

Soit G=(X, A) un graphe connexe d 'ordre n.

- On appelle chemin hamiltonien (chaîne hamiltonienne) un chemin (une chaîne) passant une fois, et une fois seulement, par chacun des sommets de G.
- Un chemin hamiltonien (une chaîne hamiltonienne) est donc un chemin (une chaîne) élémentaire de longueur $n-1$.
- Un circuit hamiltonien (un cycle hamiltonien) est un circuit (un cycle) qui passe une fois, et une seule fois, par chacun des sommets de G.
- On dit qu'un graphe G est hamiltonien s'il contient un cycle hamiltonien (cas non orienté) ou un circuit hamiltonien (cas orienté).

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Problème du voyageur de commerce**
  - Un représentant de commerce doit rendre visite à n clients $x_1, x_2, \ldots x_n$ en partant d'une ville x_0 et revenir à son point de départ. Il connaît des distances d_{0j} qui séparent le dépôt x_0 de chacun de ses clients, ainsi que la distance d_{ij} entre deux clients quelconques x_i et x_j.
  - Dans quel ordre doit-il rendre visiste à ses clients pour que la distance totale parcourue soit minimale ?
  - Ce problème revient à chercher un cycle hamiltonien de longueur totale minimale dans le graphe complet G construit sur l'ensemble des sommets, les arêtes étant munies des longueurs d_{ij}.
  - Lorsque le point d'arrivée est différent du point de départ, le problème revient à rechercher une chaîne hamiltonienne de longueur totale minimale.

Chaînes et cycles hamiltoniens : exemples classiques

- **Ordonnancement de tâches**
  - On cherche un ordre dans lequel on peut effectuer n tâches données (deux tâches quelconques ne pouvant être effectuées simultanément) tout en respectant un certain nombre de contraintes d'antériorité.
  - Si l'on construit le graphe G dont l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble des tâches, et où il existe un arc (i, j) si la tâche i peut être effectuée avant la tâche j, le problème revient à déterminer un chemin hamiltonien de G.

Chaînes et cycles hamiltoniens : extension

On appelle cycle (circuit) préhamiltonien d'un graphe G, un cycle (un circuit) passant au moins une fois par chaque sommet de G. Un graphe G qui admet un tel cycle (ou circuit) est appelé graphe préhamiltonien et une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que G soit connexe (fortement connexe).

Méthodes de recherche de chemins

Le problème du plus court chemin

- **Nombreuses applications**
  - les problèmes de tournées,
  - certains problèmes d'investissement et de gestion de stocks,
  - les problèmes de programmation dynamique à états discrets et temps discret,
  - les problèmes d'optimisation de réseaux (routiers, télécommunications),
  - certaines méthodes de traitement numérique du signal, de codage et de décodage de l'information
  - les problèmes de labyrinthe et de récréations mathématiques.

Arbres et arborescences

Définitions et propriétés

- ***Définition* 19**
  - Un arbre est un graphe connexe sans cycles.
  - Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé une forêt (chaque composante connexe est un arbre).

    Un arbre est donc un graphe simple.
    $\mathcal{T} = (X,T)$ est un arbre si et seulement s'il existe une chaîne et une seule entre deux sommets quelconques.
  - Un arbre incluant tous les sommets du graphe G est appelé arbre maximum ou arbre couvrant.
  - Une forêt maximale *de* G est une forêt de G maximale pour l'inclusion (l'ajout d'une seule arête supplémentaire du graphe à cette forêt crée un cycle)..

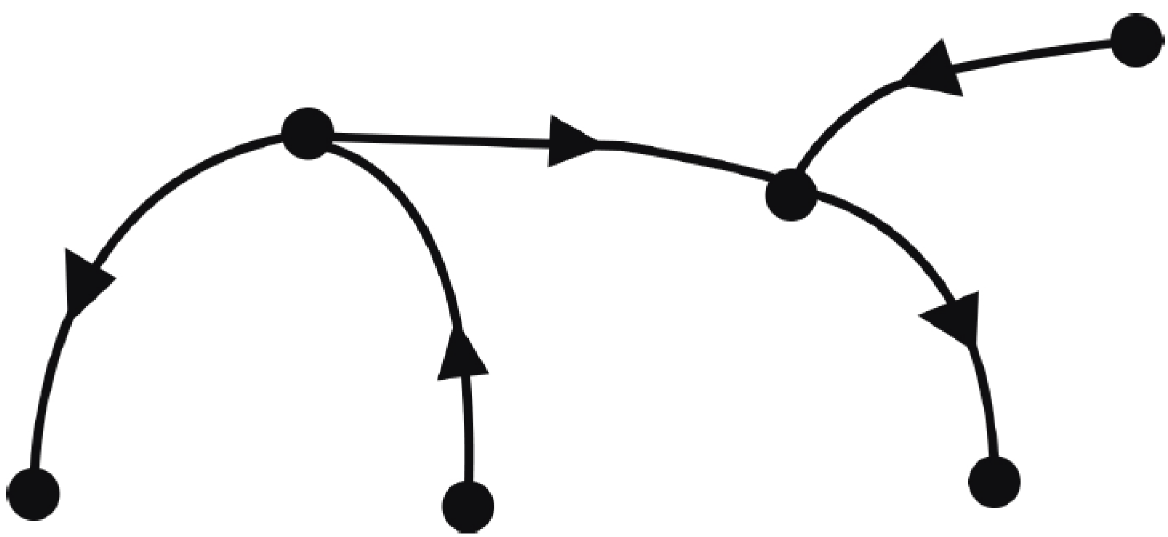
1. Définitions

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Un arbre est donc nécessairement un 1-graphe. Une *forêt* est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

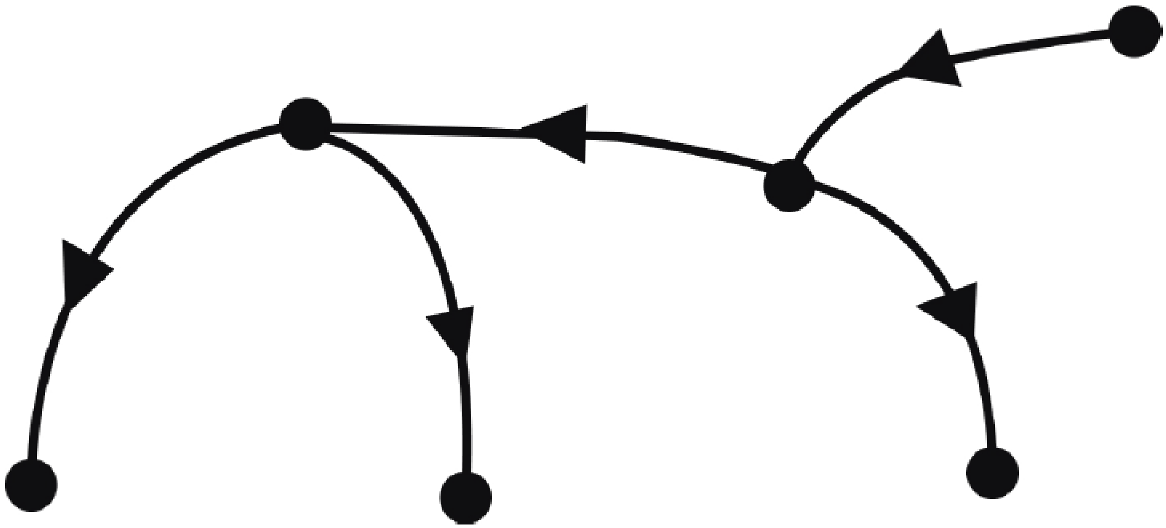
Dans un graphe, le sommet x est une *racine* si pour tout autre sommet y , il existe un chemin $\mu(\ x\ ,\ y\ )$. Une *arborescence* est un arbre muni d'une racine.

Notation

Un arbre est souvent noté $\mathrm{H}(\ \mathrm{X}\ ,\ \mathrm{U}\ )$ en hommage à Hamilton.



▲ SCH. 19 : UN EXEMPLE D'ARBRE



SCH. 20 : UN EXEMPLE D'ARBORESCENCE

Théorème :

Soit $H(X, U)$ *un graphe d'ordre* $|X| = n \geq 2$ *; les six propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :*

1. H *est connexe et sans cycle ;*

2. H *est sans cycle et admet* $n-1$ *arcs ;*

3. H *est connexe et admet* $n-1$ *arcs ;*

4. H *est sans cycle et en ajoutant un arc, on crée un cycle (et un seul) ;*

5. H *est connexe, et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe ;*

6. *Tout couple de sommets est reliés par une chaîne et une seule.*

Théorème :

un arbre d'ordre $n \geq 2$ *admet au moins deux sommets pendants*

Théorème :

un graphe G *admet un arbre comme graphe partiel si et seulement si* G *est connexe.*

La notion d'arborescense est l'adaptation de la structure d'arbre aux 1-graphes orientés.

- ***Définition* 20**
  - Un graphe G est une arborescence s'il existe un sommet R appelé racine de G tel que, pour tout sommet S de G, il existe un chemin et un seul de R vers S.
  - La notion d'arborescence couvrante se définit comme celle d'arbre couvrant, mais elle est plus délicate car il faut trouver une racine (qui n'existe pas toujours).

Arbre couvrant de poids minimal

- Problème : relier n villes par un réseau cablé de la manière la plus économique possible.
  - On suppose connue la longueur la longueur de câble nécessaire pour relier les villes i et j.
  - Le réseau doit évidemment être connexe et il ne doit pas admettre de cycles pour être de coût minimal
  - $\Rightarrow$ c'est donc un arbre et ce doit être l'arbre maximum le plus économique.
- ***Définition* 21**

Soit un graphe non orienté G, connexe, pondéré par une fonction positive l attachée aux arêtes. Soit un arbre couvrant T=(X, B) défini comme graphe partiel de G avec un ensemble d'arêtes B.

Son poids (ou coût) total est : $l(T)= \sum l(a)$, pour a $\in B$

- On dit que T est un arbre couvrant de poids minimal de G si $l(T)$ est minimal parmi les poids de tous les arbres couvrants possibles de G.

Coloration d'un graphe

- On définit deux types de coloration pour un graphe G=(X, A) ; la coloration des arêtes et la coloration des sommets.
- La coloration des sommets (resp. des arêtes) d'un graphe G correspond à l'affectation d'une couleur à chacun des sommets (resp. des arêtes) de telle sorte que deux sommets (resp. arêtes) adjacents ne soient pas porteur de la même couleur.
- Un graphe est dit p-chromatique si ses sommets admettent une coloration en p couleurs.
- On appelle nombre chromatique $\gamma(G)$ (resp. indice chromatique $q(G)$) le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires pour effectuer une coloration des sommets (resp. des arêtes) de G.

Coloration d'un graphe

Coloration des sommets

- ***Définition* 34**
  - Un sous-ensemble de sommets $I \subset X$ est un ensemble stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux.
  - Les sommets coloriés de la même couleur dans une coloration des sommets forment donc un ensemble stable.
  - Une coloration des sommets est donc une partition des sommets en ensembles stables.
  - Soit $\alpha(G)$ le nombre de stabilité, c'est-à-dire le cardinal maximum d'un ensemble stable, alors si $\gamma(G)$ est le nombre chromatique, puisque chaque ensemble de sommets de même couleur a un cardinal inférieur ou égal à $\alpha(G)$, on a :

$$\alpha(G)\,\gamma(G) \geq N(G)$$

Coloration des sommets

- La détermination du nombre chromatique d'un graphe ainsi que l'obtention d'une coloration minimale des sommets constituent un problème assez complexe..
- En pratique, on utilise souvent des algorithmes de coloration heuristiques.
- Le nombre chromatique $\gamma(G)$ possède des bornes inférieures et supérieures
  Pour un graphe à n sommets et m arêtes, on a :

  $\gamma(G) \geq n / (n - d_{min})$ avec d_{min} degré minimum des sommets de G
  $\gamma(G) \geq$ cardinal de la plus grande clique de G
  $\gamma(G) \geq n^2 / (n^2 - 2m)$

  $\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$ avec $\alpha(G)$ nombre de stabilité du graphe G
  $\gamma(G) \leq d_{max} + 1$ avec d_{max} degré maximum des sommets de G

$\alpha(G)$ nombre de stabilité : maximum des cardinals des ensembles stables d'un graphe
un sous-ensemble S de sommets est stable si deux sommets quelconques de S ne sont pas adjacents