

Chapitre 2

Série d'exercices de TD

2020/2021

Présenté par :

H. BENKAOUHA

Bureau 222, Département Informatique, USTHB

hbenkaouha@usthb.dz

haroun.benkaouha@gmail.com

H. BENKAOUHA

1

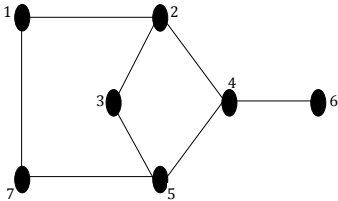
Exercice 1

- Soit  $G = (X, E)$  un graphe non orienté, simple et connexe sur  $n$  sommets.
  - On note la **longueur** d'une chaîne  $\mu(x, y)$  joignant  $x$  et  $y$ ,  $|\mu(x, y)|$ .
  - L'**écart** entre  $x$  et  $y$  :  $e(x, y)$  est la longueur d'une plus courte chaîne joignant  $x$  et  $y$  :
$$e(x, y) = \min_{\mu(x, y) \in G} \{ |\mu(x, y)| \};$$
$$e(x, x) = 0.$$
  - **Ecartement** d'un sommet  $x$ , le nombre  $E(x) = \max_{y \in X} \{ e(x, y) \}$
  - **Diamètre** de  $G$ , le nombre  $e(G) = \max_{x, y \in X} \{ e(x, y) \}$
  - **Rayon** de  $G$ , le nombre  $r(G) = \min_{x \in X} \{ E(x) \}$
  - **Centre** de  $G$ , un sommet  $s \in X$  tel que :  $E(s) = r(G)$
- Déterminer le diamètre, le rayon et le ou les centres du graphe suivant.

H. BENKAOUHA

2

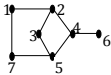
Exercice 1 - Suite



H. BENKAOUHA

3

Exercice 1 - Solution



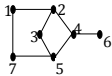
- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1		0					
2			0				
3				0			
4					0		
5						0	
6							0
7							

H. BENKAOUHA

4

Exercice 1 - Solution



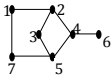
- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1		0	1				1
2	1		0	1			
3		1		0	1		
4		1			0	1	
5			1	1		0	1
6				1			0
7	1				1		

H. BENKAOUHA

5

Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1		0	1	2	2	2	1
2	1		0	1	1		
3	2	1		0		1	
4	2	1			0	1	1
5	2		1	1		0	1
6				1			0
7	1				1		

H. BENKAOUHA

6

Exercise 1 - Solution

L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0		1		
4	2	1		0	1	1	
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2			1		0

H. BENKAOUHA

7

Exercise 1 - Solution

L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2	2		1		0

H. BENKAOUHA

8

Exercise 1 - Solution

L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2	2	2	1		0

H. BENKAOUHA

9

Exercise 1 - Solution

L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6		2		1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

H. BENKAOUHA

10

Exercise 1 - Solution

L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2		1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

H. BENKAOUHA

11

Exercise 1 - Solution

L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

H. BENKAOUHA

12

Exercise 1 - Solution

- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	3
7	1	2	2	2	1	3	0

H. BENKAOUHA

13

Exercise 1 - Solution

- L'écartement d'un sommet : max ligne ou colonne

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	3
7	1	2	2	2	1	3	0

$E(x)$  :

3	2	3	2	2	3	3
---	---	---	---	---	---	---

H. BENKAOUHA

14

Exercise 1 - Solution

$E(x)$  :

3	2	3	2	2	3	3
---	---	---	---	---	---	---

- Le diamètre  
 $e(G) = 3$
- Le rayon  
 $r(G) = 2$
- Les centres  
2, 4 et 5

H. BENKAOUHA

15

Exercise 2

- Dans un réseau téléphonique constitué de  $2n$  centraux téléphoniques
- Disposés de telle façon que chaque central est relié par une ligne téléphonique directe avec au moins  $n$  autres centraux.
- Montrez qu'il est toujours possible d'établir une liaison entre deux centraux quelconques.

H. BENKAOUHA

16

Exercise 2 - solution

- Modélisation : Par un Graphe  $G=(X, E)$ 
  - Chaque central téléphonique  $i$  représentée par un sommet  $i$
  - Il y a  $2n$  centraux téléphoniques  $\Rightarrow$  Il y a  $2n$  sommets  $\Rightarrow$  Graphe d'ordre  $2n$
  - Une arête  $\{i,j\}$  « Les centraux  $i$  et  $j$  sont reliés par une ligne directe »
  - Chaque central est relié par une ligne téléphonique directe avec au moins  $n$  autres centraux
  - $\Rightarrow \forall x \in X, d_G(x) \geq n$

H. BENKAOUHA

17

Exercise 2 - solution

- Identification du problème
  - Toujours possible d'établir une liaison entre deux centraux quelconques.
  - $\Rightarrow$  Il y a une chaîne reliant les sommets correspondants
  - $\Rightarrow G$  doit être connexe

H. BENKAOUHA

18

**Exercice 2 - solution**

- Identification du problème
  - Revient à montrer que
  - Si un graphe  $G=(X, E)$  d'ordre  $2n$  tel que  $\forall i \in X, d_G(x) \geq n$
  - Alors  $G$  est connexe

H. BENKAOUHA

19

**Exercice 2 - solution**

- On démontre par l'absurde
  - On suppose qu'il existe un graphe  $G=(X, E)$  d'ordre  $2n$  tel que  $\forall i \in X, d_G(x) \geq n$  et  $G$  n'est pas connexe.

H. BENKAOUHA

20

**Exercice 2 - solution**

$\Rightarrow$  Il y a au moins 2 CC dans  $G$   
 $\Rightarrow X = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$  ( $k \geq 2$ ) et  $\forall p \neq q, C_p \cap C_q = \emptyset$  où chaque  $C_l$  ( $\forall 1 \leq l \leq k$ ) est une CC dans  $G$   
 $\forall x \in X, d_G(x) \geq n$  et  $G$  simple  
 $\Rightarrow$  dans une CC  $(C_l \mid \forall 1 \leq l \leq k)$ , nous avons au moins  $n+1$  sommets, c'est-à-dire le sommet  $x$  et tous ses voisins.

H. BENKAOUHA

21

**Exercice 2 - solution**

$\Rightarrow \forall 1 \leq l \leq k, |C_l| \geq n+1$   
 $\Rightarrow |C_1| + |C_2| + \dots + |C_k| \geq k(n+1)$   
 Sachant que  $k \geq 2$  alors  $k(n+1) \geq 2(n+1) = 2n+2 > 2n$   
 $\Rightarrow |C_1| + |C_2| + \dots + |C_k| > 2n = |X|$

H. BENKAOUHA

22

**Exercice 2 - solution**

Or, nous avons :  
 $\Rightarrow \forall 1 \leq l \leq k, |C_l| \leq |X|$   
 et  $|C_1| + |C_2| + \dots + |C_k| = |X| = 2n$   
 Car  $X = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$  ( $k \geq 2$ ) et  $\forall p \neq q, C_p \cap C_q = \emptyset$   
 • **Contradiction**

H. BENKAOUHA

23

**Exercice 3**

- Soit  $G=(X, E)$  un graphe connexe d'ordre  $n \geq 2$ .
  - Montrons qu'il existe un sommet  $x$
  - tel que :
  - le sous-graphe de  $G$  engendré par le sous ensemble de sommets  $X - \{x\}$  est toujours connexe.

H. BENKAOUHA

24

**Exercice 3 - Solution**

- On démontre par récurrence sur l'ordre du graphe  $n$ .
- Cas de base :
  - $n=2$  : On a 2 sommets reliés entre eux car  $G$  est connexe
  - On supprime l'un d'eux, on obtient un graphe avec un seul sommet
  - Ce genre de graphe est considéré comme connexe
  - C'est vérifié

H. BENKAOUHA

25

**Exercice 3 - Solution**

- On démontre par récurrence sur l'ordre du graphe  $n$ .
- Hypothèse de récurrence :
  - On suppose que pour un graphe d'ordre  $n \leq p$  connexe, il existe un sommet  $x$  que si on le supprime le graphe reste connexe.
- Pas de récurrence
  - Démontrons pour  $n=p+1$

H. BENKAOUHA

26

**Exercice 3 - Solution**

- Il s'agit d'un graphe d'ordre  $p$  auquel on a rajouté un sommet.
- On a 2 cas, soit le graphe d'ordre  $p$  est connexe, soit le graphe d'ordre  $p$  n'est pas connexe.
- Si le graphe d'ordre  $p$  est connexe, il suffit de supprimer le sommet qu'on a rajouté.

H. BENKAOUHA

27

**Exercice 3 - Solution**

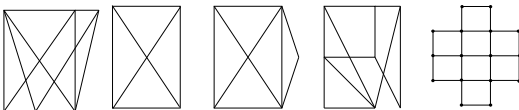
- Si le graphe d'ordre  $p$  n'est pas connexe, alors le sommet qui a été rajouté permet de relier les différentes CC
- Dans ce cas, chaque sous graphe engendré par une CC vérifie l'hypothèse de récurrence car il est connexe et d'ordre  $< p$
- Donc il existe un sommet qu'on eut supprimer sans déconnecter le graphe.

H. BENKAOUHA

28

**Exercice 4**

- *Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !...) ? Pourquoi ?*



H. BENKAOUHA

29

**Exercice 4 - Solution**

- Modélisation
  - On représente chacune des 5 figures par un graphe  $G_i = (X_i, E_i)$  tel que  $i=1$  à 5
  - Chaque point extrémité d'un trait est représenté par un sommet.
  - Chaque trait ou segment de trait reliant 2 points d'extrémités est représenté par une arête.

H. BENKAOUHA

30

### Exercice 4 - Solution

- Identification du problème
  - Tracer une figure sans lever le crayon : parcourir tout le graphe (toutes les arêtes) en passant d'une arête à une autre qui lui est adjacente.
  - C'est-à-dire tracer une chaîne qui passe par toutes les arêtes du graphe.

H. BENKAOUHA

31

### Exercice 4 - Solution

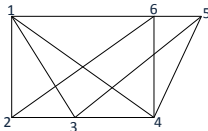
- Identification du problème
  - Sans passer deux fois sur le même trait  $\Rightarrow$  Ne pas passer par la même arête plus d'une fois  $\Rightarrow$  Chaîne simple
  - Chaîne simple qui passe par toutes les arêtes  $\Rightarrow$  Chaîne Eulérienne
  - Le problème revient à vérifier pour chacun des graphes  $G_i$  s'il admet une chaîne Eulérienne.

H. BENKAOUHA

32

### Exercice 4 - Solution

- Résolution
  - Selon le théorème d'Euler,  $G_i$  doit être connexe (à des sommets isolés près) et doit avoir 0 ou 2 sommets de degrés impairs.

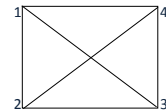


- $d_G(1), d_G(3), d_G(4), d_G(6)$  sont pairs et  $d_G(2), d_G(5)$  sont impairs
- $\Rightarrow$  2 sommets de degrés impairs  $\Rightarrow$  Possible

H. BENKAOUHA

33

### Exercice 4 - Solution

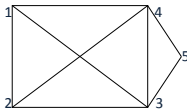


- $d_G(1), d_G(2), d_G(3), d_G(4)$  sont impairs
- $\Rightarrow$  Plus de 2 sommets de degrés impairs
- $\Rightarrow$  Impossible

H. BENKAOUHA

34

### Exercice 4 - Solution

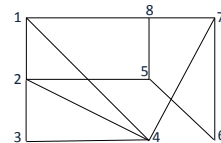


- $d_G(3), d_G(4), d_G(5)$  sont pairs et  $d_G(1), d_G(2)$  sont impairs
- $\Rightarrow$  2 sommets de degrés impairs
- $\Rightarrow$  Possible

H. BENKAOUHA

35

### Exercice 4 - Solution

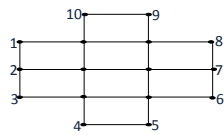


- $d_G(1), d_G(5), d_G(7), d_G(8)$  sont impairs
- $\Rightarrow$  Plus de 2 sommets de degrés impairs
- $\Rightarrow$  Impossible

H. BENKAOUHA

36

Exercice 4 - Solution



–  $d_G(2), d_G(7)$  sont impairs et les autres sont tous pairs  
⇒ 2 sommets de degrés impairs  
⇒ Possible

H. BENKAOUHA

37

Exercice 4 - Solution

- Remarque:
  - Les points d’intersection entre deux ou plusieurs traits, peut-on les prendre comme sommets? Si oui, qu’est ce qui va changer?
  - Oui, on peut les prendre comme sommets
  - Ça ne change rien à ce problème, car leurs degrés seront pairs.

H. BENKAOUHA

38

Exercice 5

- Soit  $G$  un graphe non eulérien.
- Est-il toujours possible de rendre  $G$  eulérien en lui rajoutant une ou plusieurs arêtes ?

H. BENKAOUHA

39

Exercice 5 - Solution

- Oui, il est possible de rendre  $G$  eulérien en lui rajoutant une ou plusieurs arêtes comme suit :
- S’assurer que tous les degrés deviennent pairs car un graphe est Eulérien Ssi il admet un cycle Eulérien.
- Pour toute paire de sommets de degrés impairs on les relie avec une arête.
- C’est-à-dire si on a  $k$  (qui est pair) sommets de degrés impairs, on va rajouter  $k/2$  arêtes.

H. BENKAOUHA

40

Exercice 5 - Solution

```
i ← 1
Répéter
  Tant Que (i ≤ N) et (dG(i) pair)
    Faire i ← i+1 Fait
  Si (i < N) Alors
    x ← i
    i ← i+1
    Tant Que (i ≤ N) et (dG(i) pair)
      Faire i ← i+1 Fait
    y ← i; i ← i+1
    Créer_arête({x,y})
  fSi
Jusqu’à (i=N);
```

H. BENKAOUHA

41

Exercice 6

- Soit le graphe orienté  $G=(X,U)$  représenté dans le tableau ci-dessous par le dictionnaire des prédécesseurs :

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
Prédécesseurs de $x$	3, 7	4, 6	5	1	1	7, 8	5	2

1. Donner la matrice d’adjacence  $M$  du graphe  $G$ . Représenter sous forme de listes  $LS$  et  $PS$ .
2.  $G$  est-il connexe. Justifier.
3.  $G$  admet-il un parcours Eulerien ? Pourquoi ?
4. Donner la matrice de fermeture transitive du graphe  $G$ .  $G$  admet-il un circuit ?
5. Trouver les cfc de  $G$ . Donner le graphe réduit.

H. BENKAOUHA

42

Exercice 6 - Solution

- Matrice d'adjacence :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0

Remarque : Attention, liste prédécesseurs et non successeurs

H. BENKAOUHA

43

Exercice 6 - Solution

- Représentation par listes :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PS	1	3	4	5	6	8	9	11	12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
LS	4	5	8	1	2	3	7	2	1	6	6

H. BENKAOUHA

44

Exercice 6 - Solution

- Connexité :
  - Algorithme de connexité :  
Sommet de départ : 1  
 $C=\{1\}$   
  
On rajoute les voisins de 1  
 $V(1)=\{3, 4, 5, 7\}$   
 $C=\{1, 3, 4, 5, 7\}$ . On marque le sommet 1.

H. BENKAOUHA

45

Exercice 6 - Solution

$C=\{1, 3, 4, 5, 7\}$   
On choisit un sommet non marqué de  $C$  : 7  
  
On rajoute les voisins de 7  
 $V(7)=\{1, 5, 6\}$   
 $C=\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . On marque le sommet 7.

H. BENKAOUHA

46

Exercice 6 - Solution

$C=\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$   
On choisit un sommet non marqué de  $C$  : 6  
  
On rajoute les voisins de 6  
 $V(6)=\{2, 7, 8\}$   
 $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . On marque le sommet 6.  
  
 $C=X \Rightarrow$  Fin Algo.  
 $G$  est connexe.

H. BENKAOUHA

47

Exercice 6 - Solution

- On vérifie si  $G$  admet un parcours Eulérien :
  - Calculons les degrés :

	1	2	3	4	5	6	7	8	$d_v$
1	0	0	0	1	1	0	0	0	2
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0	1	0	2
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1
7	1	0	0	0	0	1	0	0	2
8	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$d_v$	2	2	1	1	1	2	1	1	

H. BENKAOUHA

48



Exercice 6 - Solution

- $d_G(2)=1+2=3$
- $d_G(5)=2+1=3$
- $d_G(6)=1+2=3$
- Plus de deux (2) sommets de degrés impairs
- $\Rightarrow G$  n'admet pas de chaine Eulérienne
- $\Rightarrow G$  n'admet aucun parcours Eulérien

H. BENKAOUHA

49

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :  
– Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1							
4		1						
5			1				1	
6		1						
7	1						1	
8						1		

H. BENKAOUHA

50

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :  
– Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						
5			1				1	
6		1						
7	1			1	1	1		
8						1		

H. BENKAOUHA

51

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :  
– Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						1
5			1				1	
6		1						1
7	1			1	1	1		
8						1		

H. BENKAOUHA

52

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :  
– Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						1
5	1		1	1	1		1	
6		1						1
7	1			1	1	1		
8						1		

H. BENKAOUHA

53

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :  
– Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1		1	1			1
2		1		1				1
3	1	1		1	1			1
4		1						1
5	1	1	1	1	1		1	1
6		1		1				1
7	1	1		1	1	1		1
8						1		

H. BENKAOUHA

54

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2					1			1
3	1	1	1	1	1		1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1		1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8						1		

H. BENKAOUHA

55

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2						1		1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

H. BENKAOUHA

56

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2							1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

H. BENKAOUHA

57

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2						1		1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1				1		1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1				1		1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

H. BENKAOUHA

58

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	1	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	1	0	0	0	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	1	0	0	0	1	0	1

– Oui, G admet un circuit car il y a des 1 sur la diagonale.

H. BENKAOUHA

59

Exercice 6 - Solution

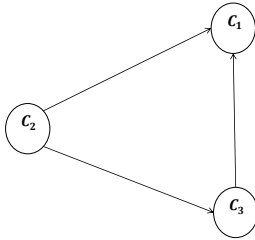
- Les CFCs :
  - $C_1 = \{4\}$  car 0 sur la diagonale
  - Lignes identiques (sauf 4) :
    - $Lg_1 = \{1, 3, 5, 7\}$
    - $Lg_2 = \{2, 6, 8\}$
  - Colonnes identiques (sauf 4) :
    - $Cl_1 = \{2, 6, 8\}$
    - $Cl_2 = \{1, 3, 5, 7\}$
  - $\Rightarrow$
  - $C_2 = \{1, 3, 5, 7\}$  et  $C_3 = \{2, 6, 8\}$

H. BENKAOUHA

60

### Exercice 6 - Solution

- Le graphe réduit :



H. BENKAOUHA

61

### Exercice 7

- On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.
- En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
  - Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
  - Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
  - Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à  $n$ , est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

H. BENKAOUHA

62

### Exercice 7 - Solution

- Modélisation :
  - Graphe non orienté  $G=(X, E)$  d'ordre  $n$  et de taille  $m$
  - Chaque face (chaque numéro)  $i$  par un sommet  $i$
  - Chaque domino (pièce) qui est constitué de deux faces  $\{i, j\}$  par une arête  $\{i, j\}$
  - $n=5$

H. BENKAOUHA

63

### Exercice 7 - Solution

- Nombre de dominos
  - Correspond au nombre d'arêtes dans le graphe
  - Pas de dominos doubles  $\Rightarrow$  Pas de boucles
  - Chaque pièce est unique (combinaison unique de deux numéros)  $\Rightarrow$  Pas d'arêtes parallèles $\Rightarrow G$  est simple
  - Dans un jeu de dominos, nous avons toutes les combinaisons de faces possibles
  - Tous les sommets sont reliés entre eux $\Rightarrow G$  est complet

H. BENKAOUHA

64

### Exercice 7 - Solution

- Nombre de dominos
  - $G$  simple et complet,  $\forall i \in x, d_G(x)=n-1$
  - $\Rightarrow n(n-1) = 2m$
  - $\Rightarrow m = n(n-1)/2$
  - $\Rightarrow m = 5(5-1)/2$
  - $\Rightarrow m = 10$
  - $\Rightarrow$  Il y a 10 dominos

H. BENKAOUHA

65

### Exercice 7 - Solution

- On montre que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée.
  - Règle de contact des dominos : contacter 2 dominos à travers les faces ayant le même numéro.
  - 2 arêtes adjacentes  $\Rightarrow$  former une chaîne
  - Les arranger en boucle fermée  $\Rightarrow$  chaîne fermée
  - Vu qu'on utilise chaque domino une seule fois  $\Rightarrow$  Chaque arête est utilisée une seule fois dans la chaîne  $\Rightarrow$  Chaîne fermée et simple  $\Rightarrow$  cycle
  - Utiliser tous les dominos  $\Rightarrow$  cycle Eulérien

H. BENKAOUHA

66

**Exercice 7 - Solution**

2. On montre que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée.
- Revient à montrer que  $G$  admet un cycle Eulerien
  - Chaque sommet est de degré  $n-1 = 5-1 = 4$
  - Tous les sommets sont de degrés pairs  $\Rightarrow$  Pas de sommets de degrés impairs, de plus le graphe est connexe (car il est complet)  $\Rightarrow G$  admet une chaîne Eulerienne selon le théorème d'Euler et cette chaîne est un cycle (0 sommets de degrés impairs).

H. BENKAOUHA

67

**Exercice 7 - Solution**

3. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
- Les dominos doubles sont représentés par des boucles.
  - Une boucle fait augmenter le degré d'un sommet de 2, ce qui ne change pas la parité de son degré.
  - De ce fait, le nombre de sommets de degrés impairs ne change pas.

H. BENKAOUHA

68

**Exercice 7 - Solution**

4. Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à  $n$ , est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?
- Chaque sommet est de degré  $n-1$
  - Il faut que  $n-1$  soit pair
  - C'à.d.  $n-1=2k$  où  $k$  est un entier  $\geq 0$   
 $\Rightarrow n=2k+1$   
 $\Rightarrow n$  doit être impair  
 $\Rightarrow$  Le plus grand numéro des faces doit être impair

H. BENKAOUHA

69

**Exercice 8**

- Soit un tournoi de volley-ball regroupant  $n$  clubs.
  - Chaque club affronte un autre exactement une (1) seule fois.
  - On veut représenter à travers un graphe les résultats de ce tournoi.
  - Sachez qu'en volley-ball il n'y a pas de score d'égalité.
- 1. Modéliser (sans dessiner) le problème. Puis dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.
- 2. Est-il possible de trouver une situation où le club  $C_1$  a gagné contre  $C_2$  et  $C_2$  a battu  $C_3$  et ainsi de suite jusqu'à  $C_{n-1}$  a gagné contre  $C_n$  ? Justifier. ( $C_i$  est un club quelconque)
- 3. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus  $C_n$  a gagné contre  $C_1$ .

H. BENKAOUHA

70

**Exercice 8 - Solution**

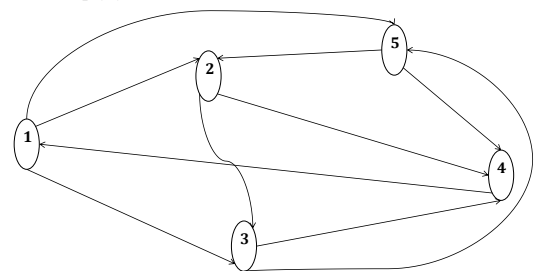
1. Modéliser (sans dessiner) le problème.
- Par un graphe orienté  $G=(X, U)$
  - Chaque sommet représente un club
  - Chaque arc  $(i, j)$  représente le résultat du match entre les clubs  $i$  et  $j$  :  $i$  « a gagné contre »  $j$ .
  - Le graphe est complet car tous les clubs s'affrontent entre eux.
  - Le graphe est simple car tous les clubs s'affrontent une seule fois (pas d'arêtes parallèles) et un club ne peut pas affronter lui-même (pas de boucles).

H. BENKAOUHA

71

**Exercice 8 - Solution**

1. Dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.



H. BENKAOUHA

72

**Exercice 8 - Solution**

2. Est-il possible de trouver une situation où le club  $C_1$  a gagné contre  $C_2$  et  $C_2$  a battu  $C_3$  et ainsi de suite jusqu'à  $C_{n-1}$  a gagné contre  $C_n$  ? Justifier. ( $C_i$  est un club quelconque)
- Ceci revient à avoir des arcs :
    - $(1, 2), (2, 3) \dots (n-1, n)$

H. BENKAOUHA

73

**Exercice 8 - Solution**

- En d'autres termes avoir un chemin dans  $G$ 
    - $\gamma = 1 \ 2 \ 3 \dots n-1 \ n$  : élémentaire de longueur  $n-1$  (passant par tous les sommets)  $\Rightarrow$  Chemin Hamiltonien
    - On sait que  $G$  est un graphe simple et complet d'ordre  $n \Rightarrow G$  est un tournoi  $T_n$ .
    - On sait que tout tournoi admet un chemin Hamiltonien
- $\Rightarrow C$  est possible

H. BENKAOUHA

74

**Exercice 8 - Solution**

3. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus  $C_n$  a gagné contre  $C_1$ .
- Cette situation correspond à un circuit Hamiltonien dans  $G$
  - On sait qu'un tournoi  $T_n$  fortement connexe admet un circuit Hamiltonien.
  - Il faut que le graphe associé soit fortement connexe

H. BENKAOUHA

75

**Exercice 9**

- Démontrer que si deux sommets  $x$  et  $y \in$  à une même composante fortement connexe  $C$ , alors tout chemin de  $x$  à  $y$  est entièrement inclus dans  $C$ .

H. BENKAOUHA

76

**Exercice 9 - Solution**

- On démontre par l'absurde
  - On suppose qu'on a un graphe  $G$  qui admet au moins 2 CFCs  $C$  et  $C'$
  - $x$  et  $y \in C$  et  $z \in C'$
  - Tel qu'on a un chemin de  $x$  vers  $y$  qui passe par  $z$
  - $\gamma = x \dots z \dots y$
- $\Rightarrow xaz \dots (1)$  et  $zay \dots (2)$
- $x$  et  $y$  dans la même CFC
- $\Rightarrow xay \dots (3)$  et  $yax \dots (4)$

H. BENKAOUHA

77

**Exercice 9 - Solution**

- $xaz \dots (1)$
  - $zay \dots (2)$
  - $xay \dots (3)$
  - $yax \dots (4)$
  - De (2) et (4) et par transitivité  $\Rightarrow zax \dots (5)$
  - De 1 et 5, on a  $z$  dans la même CFC que  $x$
- $\Rightarrow z \in C$  et sachant que  $z \in C'$
- $\Rightarrow z \in C \cap C' \Rightarrow C \cap C' \neq \emptyset$
- $\Rightarrow$  Contradiction

H. BENKAOUHA

78