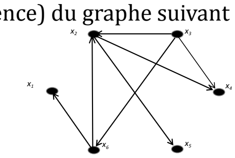
Chapitre 1
Série d’exercices de TD

Présenté par :
H. BENKAOUHA
Bureau 222, Département Informatique, USTHB
hbenkaouha@usthb.dz
haroun.benkaouha@gmail.com

Exercice 1

- Donner la représentation matricielle (matrice d’adjacence) du graphe suivant :



- Trouvez les degrés extérieurs et intérieurs et degrés de chacun des sommets.
- Donner le représentation sous forme de listes *LS* et *PS*.

Exercice 2

- La direction d'une entreprise est composée de 7 personnes : *Ahmed, Ali, Bachir, Djamel, Kamel, Youcef* et *Zoheir*. Chacune de ces personnes influence un certain nombre de ses collègues dans la direction selon le tableau :
  - *Ahmed* influence *Ali, Bachir, Djamel, Kamel, Youcef*
  - *Ali* „ *personne*
  - *Bachir* „ *Ali*
  - *Djamel* „ *Ali, Bachir, Kamel, Zoheir*
  - *Kamel* „ *Ali, Bachir*
  - *Youcef* „ *Ali, Bachir, Djamel, Kamel, Zoheir*
  - *Zoheir* „ *Ali, Bachir, Kamel*

1. Donner la matrice d'adjacence correspondante, ainsi que les demi-degrés intérieurs et extérieurs des sommets.
2. Etudier les propriétés suivantes du graphe : simple, complet, régulier, symétrique, antisymétrique, transitif, biparti.

Exercice 3

- Soit $G = (X,E)$ un graphe non-orienté tel que $|X| = n$.

1. Montrez que le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.

- On suppose que G est simple. Sachant que : $\forall x \in X,\ d_G(x) \leq n\text{-}1$,

2. Montrer qu'il ne peut y avoir dans *G* à la fois un sommet de degré 0 et un sommet de *degré* n-1,
3. Montrer qu'il existe *deux* (2) sommets ayant le même degré dans *G.*

Exercice 4

- Soit le graphe simple $G=(X,E)$ d’ordre $|X| = n$ et de taille $|E| = m$
- Soient x un sommet de X et $\boldsymbol{e}$ une arrête de E. Que représente chacun des graphes suivants et quel est l’ordre et quelle est la taille de chacun :
- G $\quad$ $G - \{x\}$ $\quad$ $G - \{e\}$ $\quad$ $\overline{G}$

Exercice 5

- On s'intéresse aux graphes 3-réguliers.
- Construisez de tels graphes ayant :
  - 4 sommets,
  - 5 sommets,
  - 6 sommets,
  - 7 sommets.
- Qu'en déduisez-vous? Prouvez-le!

Exercice 6

- Un *n-cube (hypercube* de dimension *n)* est un graphe dont :
  - les sommets représentent les éléments de $\{0,1\}^n$
  - *deux sommets sont adjacents* ***ssi*** les *n-uples* correspondants diffèrent d'exactement une composante.

1. Donner le nombre de sommets.
2. Donner le nombre d'arêtes.

H. BENKAOUHA 7

Exercice 7

- Soit $G=(X,U)$ un graphe d'ordre n, le nombre d'arcs est désigné par m.
- Soient $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement les degrés minimum et maximum du graphe G
- Montrer que :

$$\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$$

H. BENKAOUHA 8

Exercice 7 – Solution (1/2)

- Par défintion, on a $\forall x \in X$:

$d_G(x) \leq \Delta(G)$ et $d_G(x) \geq \delta(G)$

$\Rightarrow \delta(G) \leq d_G(x) \leq \Delta(G)$

$\Rightarrow$Ceci est valable pour :

$$\begin{cases} \delta(G) \leq d_G(x_1) \leq \Delta(G) \\ \dots \\ \delta(G) \leq d_G(x_n) \leq \Delta(G) \end{cases}$$

$\Rightarrow$On additionne les n double-inégalités :

$$\underbrace{\delta(G) + \dots + \delta(G)}_{n \text{ fois}} \leq d_G(x_1) + \dots + d_G(x_n) \leq \underbrace{\Delta(G) + \dots + \Delta(G)}_{n \text{ fois}}$$

H. BENKAOUHA 9

Exercice 7 –Solution (2/2)

$\Rightarrow n.\delta(G) \leq 2m \leq n.\ \Delta(G)$ (formule des degrés)

$\Rightarrow \delta(G) \leq 2m\ /n \leq \Delta(G)$ (On a divisé par n, car $n>0$)

$$\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$$

H. BENKAOUHA 10

Exercice 8

- Une société doit transporter par camions les animaux $A_1, \dots, A_6$, depuis un entrepôt vers un zoo.
- Pour des raisons de sécurité, certains animaux ne peuvent pas être transportés ensemble :
- A_1 et A_2, A_1 et A_4, A_2 et A_3, A_2 et A_5, A_3 et A_4, A_5 et A_6.
- Modéliser le problème, en définissant les sommets et les arêtes du graphe et déterminer le nombre minimum de camions nécessaires.

H. BENKAOUHA 11

Exercice 8 – Solution (1/3)

- On modélise le problème par un graphe non orienté $G=(X, E)$
- Chaque animal A_i sera représenté par un sommet $i \in X$.
- Les arêtes vont représenter la relation « *ne peuvent pas être mis ensemble* ».
- $\{i, j\} \in E$ correspond à les animaux A_i et A_j « *ne peuvent pas être mis ensemble* ».

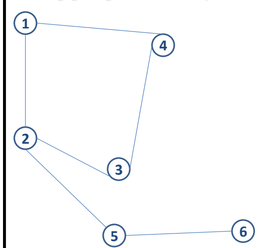
H. BENKAOUHA 12

Exercice 8 – Solution (2/3)

- 2 animaux ne pouvant pas être mis ensemble, sont reliés dans G et donc auront 2 couleurs différentes et nécessitent 2 camions
- k animaux ne pouvant pas être mis ensemble, sont reliés dans G et donc auront k couleurs différentes et nécessitent k camions
- Donc il s'agit d'un problème de coloration et le nombre minimal de camions correspond au nombre chromatique

Exercice 8 – Solution (3/3)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell



Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
1	2	
2	3	
3	2	
4	2	
5	2	
6	1	

Exercice 8 – Solution (3/3)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
1	2	
2	3	1
3	2	
4	2	
5	2	
6	1	

- Nous avons besoin de 2 camions au minimum

Exercice 8 – Solution (3/3)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
1	2	2
2	3	1
3	2	
4	2	
5	2	
6	1	

- Nous avons besoin de 2 camions au minimum

Exercice 8 – Solution (3/3)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
1	2	2
2	3	1
3	2	2
4	2	
5	2	
6	1	

- Nous avons besoin de 2 camions au minimum

Exercice 8 – Solution (3/3)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
1	2	2
2	3	1
3	2	2
4	2	1
5	2	
6	1	

- Nous avons besoin de 2 camions au minimum

Exercice 8 – Solution (3/3)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
1	2	**2**
2	3	**1**
3	2	**2**
4	2	**1**
5	2	**2**
6	1	

- Nous avons besoin de 2 camions au minimum

Exercice 8 – Solution (3/3)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
1	2	**2**
2	3	**1**
3	2	**2**
4	2	**1**
5	2	**2**
6	1	**1**

- Nous avons besoin de 2 camions au minimum

Exercice 9

- On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, 6 matières d'options :
  - Français (*F*),
  - Anglais (*A*),
  - Mécanique (*M*),
  - Dessin industriel (*D*),
  - Internet (*I*),
  - Sport (*S*) ;
- Les profils des candidats à options multiples sont : *F,A,M* *D,S* *I,S* *I,M*

1. Quel est le nombre maximum d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle ?
2. Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

Exercice 9 – Solution (1/5)

- On modélise le problème sous forme d'un graphe non orienté $G=(X, E)$
- Chaque sommet représente une matière.
- Chaque arête représente la relation « *ne peuvent pas être mises en parallèle* » c'est-à-dire « *ont des étudiants en commun* »

Comment trouver les stables ?
nbr de sommet d'un stable = nbr chromatique ?

Exercice 9 – Solution (2/5)

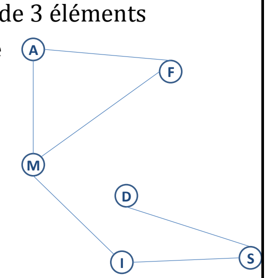
- Nombre maximal de matières qu'on eut mettre en parallèle :
- 2 matières en parallèle $\Rightarrow$ 2 sommets non reliés $\Rightarrow$ Stable de 2 éléments
- k matières en parallèle $\Rightarrow$ k sommets non reliés $\Rightarrow$ Stable de k éléments
- Revient à chercher le plus grand stable dans G.

Exercice 9 – Solution (3/5)

- Soit $S=\{A, I, D\}$ un stable de 3 éléments
- C'est le plus grand stable
- Donc, on peut mettre

Au maximum 3 matières

En parallèle.



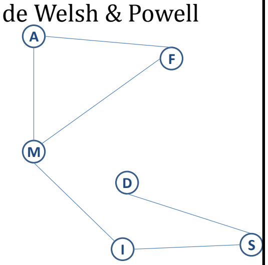
Exercice 9 – Solution (4/5)

- La durée minimal des examens :
- 2 créneaux $\Rightarrow$ 2 matières qui ont des candidats en commun $\Rightarrow$ 2 sommets reliés $\Rightarrow$ 2 couleurs
- k créneaux $\Rightarrow$ k matières qui ont des candidats en commun $\Rightarrow$ k sommets reliés $\Rightarrow$ k couleurs
- Revient à chercher le nombre chromatique de G.

Exercice 8 – Solution (5/5)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

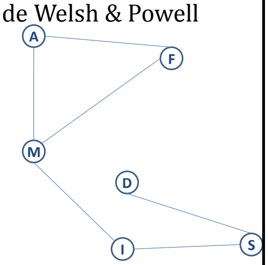
Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
A	2	
D	1	
F	2	
I	2	
M	3	
S	2	



Exercice 8 – Solution (5/5)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

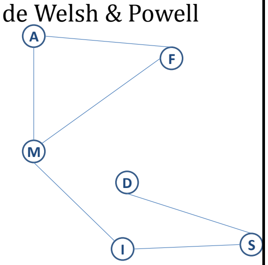
Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
A	2	
D	1	
F	2	
I	2	
M	3	1
S	2	



Exercice 8 – Solution (5/5)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

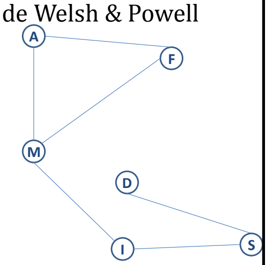
Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
A	2	2
D	1	
F	2	
I	2	
M	3	1
S	2	



Exercice 8 – Solution (5/5)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

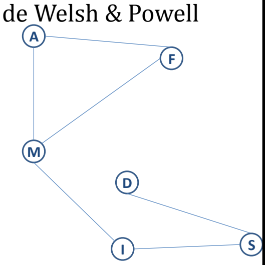
Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
A	2	2
D	1	
F	2	3
I	2	
M	3	1
S	2	



Exercice 8 – Solution (5/5)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

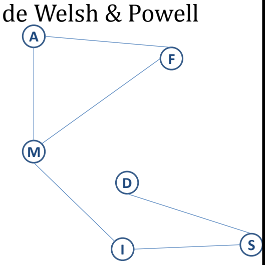
Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
A	2	2
D	1	
F	2	3
I	2	2
M	3	1
S	2	



Exercice 8 – Solution (5/5)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

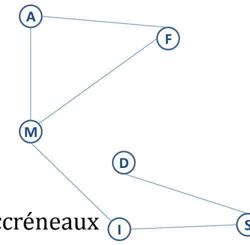
Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
A	2	2
D	1	
F	2	3
I	2	2
M	3	1
S	2	1



Exercice 8 – Solution (5/5)

- Appliquons l'algorithme de Welsh & Powell

Sommet $x \in X$	$d_G(x)$	Couleur $\varphi(x)$
A	2	2
D	1	2
F	2	3
I	2	2
M	3	1
S	2	



- Nous avons besoin de 3 ccréneaux
- =3 demi-journées = 1.5 journées

Exercice 10

- Dans un groupe de personnes est tel que :
  - Chaque personne est membre d'exactement deux (2) associations,
  - Chaque association comprend exactement trois (3) membres
  - Deux (2) associations quelconques ont toujours exactement un (1) membre en commun.

1. Combien y a-t-il de personnes ?
2. Combien y a-t-il d'associations ?

Exercice 10 - Solution

- On modélise le problème sous forme d'un graphe non orienté G=(X, E)
- Chaque sommet $x \in X$ représente une association
- Chaque arête $e=\{x, y\} \in E$ représente une personne qui est membre des deux association x et y.
- Chaque association comprend exactement 3 personnes $\Rightarrow \forall x \in X, d_G(x)=3$

Exercice 10 - Solution

- Deux associations quelconques ont exactement un membre commun $\Rightarrow$ n'importe quels 2 sommets sont reliés par exactement une arête $\Rightarrow$ G complet est simple
- G complet simple 3-régulier $\Rightarrow K_4$
- Il y a 4 sommets et 6 arêtes
- Il y a 6 personnes et 4 associations

Exercice 11

- Montrez que dans un groupe de six (6) personnes, il y en a nécessairement :
  - trois (3) qui se connaissent mutuellement

  ou
  - trois (3) qui ne se connaissent pas.
- On suppose que si A connaît B, B connaît également A.
- Cela est-il nécessairement vrai dans un groupe de cinq (5) personnes.

Exercice 11 – Solution (1/5)

- On modélise le problème par un graphe non orienté $G=(X, E)$
- Chaque personne i sera représentée par un sommet $i \in X$.
- Les arêtes vont représenter la relation « *se connaissent* ».
- $\{i, j\} \in E$ correspond à : les personnes i et j « *se connaissent* ».

Exercice 11 – Solution (2/5)

- Il consiste à montrer que contient une clique de 3 éléments ou un stable de 3 éléments.
- Le graphe G est simple car :
  - la relation i et i se connaissent n'a pas de sens (Pas de boucles)
  - Si i et j se connaissent, ça sera représenté par une seule arête (Pas d'arêtes parallèles)
- G simple $\Rightarrow 0 \leq d_G(x) \leq 5$
- Pour un sommet quelconque, nous avons deux cas :
  - $d_G(x) \in \{0, 1, 2\}$
  - $d_G(x) \in \{3, 4, 5\}$

Exercice 11 – Solution (3/5)

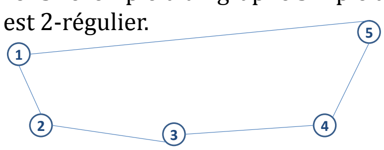
- 1er cas ($d_G(x) \in \{0, 1, 2\}$)
- Il y a au moins 3 sommets qui ne sont pas reliés avec x.
- On a 2 possibilités :
  - Soit ces 3 sommets sont reliés complètement entre eux et ils forment une clique de 3 éléments.
  - Soit il y a au moins deux sommets non reliés entre eux et ils forment avec x un stable de 3 éléments.

Exercice 11 – Solution (4/5)

- 2ème cas ($d_G(x) \in \{3, 4, 5\}$)
- Il y a au moins 3 sommets qui sont reliés avec x.
- On a 2 possibilités :
  - Soit ces 3 sommets ne sont pas du tout reliés entre eux et ils forment une stable de 3 éléments.
  - Soit il y a au moins deux sommets reliés entre eux et ils forment avec x une clique de 3 éléments.

Exercice 11 – Solution (5/5)

- Pour 5 sommets, ça ne marche pas toujours.
- Prenons l'exemple d'un graphe simple d'ordre 5 qui est 2-régulier.



- Plus grande clique : 2 éléments
- Plus grand stable : 2 éléments

Exercice 12

- Soit $G = (X, E)$ un graphe :
  - non orienté simple,
  - d'ordre n,
  - k-régulier.
- Dans quelles conditions G est *isomorphe* à son *complémentaire* $\overline{G}$.

Exercice 12 - Solution (1/3)

- G et $\overline{G}$ isomorphes Alors :
- $G = (X, E)$
  - non orienté simple,
  - d'ordre n,
  - k-régulier.
- $\overline{G} = (X, E')$
  - non orienté simple,
  - d'ordre n,
  - k-régulier.

Exercice 12 – Solution (2/3)

- $\Rightarrow \forall\ x \in X,$
  - $d_G(x)=k$
  - $d_{\overline{G}}(x)=k$
- Vu que G est simple, on sait que chaque sommet x dans le complément est relié à tous les sommets (n) sauf lui-même (-1) et les sommets auxquels il était relié dans G ($-d_G(x)$)
  - $d_{\overline{G}}(x)=n-1-d_G(x)$.

Exercice 12 – Solution (3/3)

- $\Rightarrow$

  $k=n-1-k$.

  $\Rightarrow n=2k+1$, c'est-à-dire le graphe doit être d'ordre impair

  $\Rightarrow k=(n-1)/2$, c'est-à-dire les degrés des sommets doivent être égaux à la partie entière de la moitié de n.