

Chapitre 3

Série d'exercices de TD

2020/2021

Présenté par :

H. BENKAOUHA

Bureau 222, Département Informatique, USTHB

hbenkaouha@usthb.dz

haroun.benkaouha@gmail.com

H. BENKAOUHA

1

Exercice 1

- Montrer que :
 - la moyenne des degrés des sommets d'un arbre
 - est strictement inférieure à 2.

H. BENKAOUHA

2

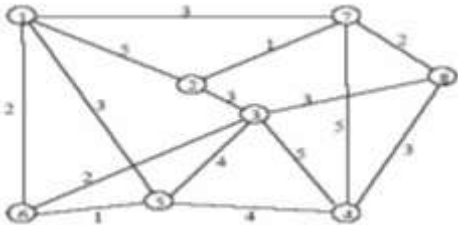
Exercice 1 – Solution

- Par définition, dans un graphe d'ordre n et de taille m qui est un arbre, on a $m=n-1$
- D'un autre coté on a la somme des degrés est $2m$
- Donc la moyenne est $2m/n$
- On remplace m par $n-1$
- Moyenne_degrés = $2(n-1)/n = 2n/n - 2/n$
 $= 2 - 2/n < 2$

H. BENKAOUHA

3

Exercice 2

- Trouver l'arbre de poids minimum puis l'arbre de poids maximum.
- 
- Donner le codage de Prufer correspondant à l'arbre trouvé

H. BENKAOUHA

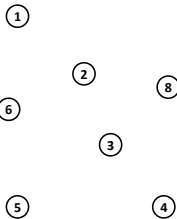
4

Exercice 2 – Solution

- On applique l'algorithme de Kruskal pour trouver l'arbre de couverture de poids min.
- Tri par ordre croissant des arêtes ⑦

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	
{5,6}	1	
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



H. BENKAOUHA

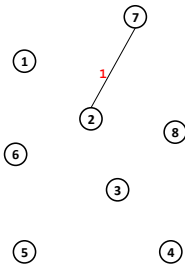
5

Exercice 2 – Solution

- Algo. de Kruskal (1/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	



H. BENKAOUHA

6

Exercice 2 – Solution

• Algo. de Kruksal (2/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

7

Exercice 2 – Solution

• Algo. de Kruksal (3/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

8

Exercice 2 – Solution

• Algo. de Kruksal (4/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

9

Exercice 2 – Solution

• Algo. de Kruksal (5/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Oui
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

10

Exercice 2 – Solution

• Algo. de Kruksal (6/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Oui
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Oui
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

11

Exercice 2 – Solution

• Algo. de Kruksal (7/7)

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Oui
{5,6}	1	Oui
{1,6}	2	Oui
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Oui
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Oui
{2,3}	3	Non

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	Oui
{3,5}	4	Non
{4,5}	4	Non
{1,2}	5	Non
{3,4}	5	Non
{4,7}	5	Non

– Poids de l'arbre de couverture de poids minimal : 14

H. BENKAOUHA

12

Exercice 2

- Trouver l'arbre de poids minimum puis l'arbre de poids maximum.
- Donner le codage de Prufer correspondant à l'arbre trouvé

H. BENKAOUHA

13

Exercice 2 – Solution

- On applique l'algorithme de Kruksal pour trouver l'arbre de couverture de poids max.
- Tri par ordre croissant des arêtes

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	
{5,6}	1	
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

14

Exercice 2 – Solution

- Algo. de Kruksal 1

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

15

Exercice 2 – Solution

- Algo. de Kruksal 2

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

16

Exercice 2 – Solution

- Algo. de Kruksal 3

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

17

Exercice 2 – Solution

- Algo. de Kruksal 4

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA

18

Exercise 2 – Solution

• Algo. de Kruksal 5

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA19

Exercise 2 – Solution

• Algo. de Kruksal 6

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA20

Exercise 2 – Solution

• Algo. de Kruksal 7

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA21

Exercise 2 – Solution

• Algo. de Kruksal 8

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA22

Exercise 2 – Solution

• Algo. de Kruksal 9

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA23

Exercise 2 – Solution

• Algo. de Kruksal 10

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	Oui
{3,5}	4	
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

H. BENKAOUHA24

Exercise 2 – Solution

• Algo. de Kruksal 11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	Oui
{3,5}	4	Non
{4,5}	4	
{1,2}	5	
{3,4}	5	
{4,7}	5	

On prend toutes les arêtes restantes

H. BENKAOUHA

25

Exercise 2 – Solution

• Algo. de Kruksal 11

Arête	Poids	Décision
{2,7}	1	Non
{5,6}	1	Non
{1,6}	2	Non
{3,6}	2	Oui
{7,8}	2	Non
{1,5}	3	Non
{1,7}	3	Non
{2,3}	3	Oui

Arête	Poids	Décision
{3,8}	3	Non
{4,8}	3	Oui
{3,5}	4	Non
{4,5}	4	Oui
{1,2}	5	Oui
{3,4}	5	Oui
{4,7}	5	Oui

Poids de l'arbre de couverture de poids max : 27

H. BENKAOUHA

26

Exercise 2 – Solution

• Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal

– Sommets de degré 1 :

– 2, 3, 4, 5

– Le min : 2

– 2 est relié à 7

– P=7

H. BENKAOUHA

27

Exercise 2 – Solution

• Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal

– Supprimer 2 et l'arête incidente

– Sommets de degré 1 :

– 3, 4, 5

– Le min : 3

– 3 est relié à 6

– P=7 6

H. BENKAOUHA

28

Exercise 2 – Solution

• Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal

– Supprimer 3 et l'arête incidente

– Sommets de degré 1 :

– 4, 5

– Le min : 4

– 4 est relié à 8

– P=7 6 8

H. BENKAOUHA

29

Exercise 2 – Solution

• Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal

– Supprimer 4 et l'arête incidente

– Sommets de degré 1 :

– 5, 8

– Le min : 5

– 5 est relié à 6

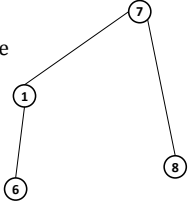
– P=7 6 8 6

H. BENKAOUHA

30

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 5 et l'arête incidente
 - Sommets de degré 1 :
 - 6, 8
 - Le min : 6
 - 6 est relié à 1
 - P=7 6 8 6 1



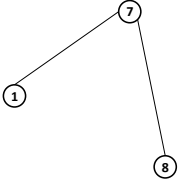
```
graph TD; 1 --- 6; 1 --- 7; 7 --- 8;
```

H. BENKAOUHA

31

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 6 et l'arête incidente
 - Sommets de degré 1 :
 - 1, 8
 - Le min : 1
 - 1 est relié à 7
 - P=7 6 8 6 1 7




```
graph TD; 1 --- 7; 7 --- 8;
```

H. BENKAOUHA

32

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 1 et l'arête incidente
 - Il ne reste que 2 sommet
 - Fin
 - P=7 6 8 6 1 7



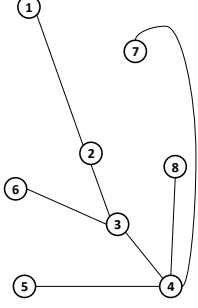
```
graph TD; 7 --- 8;
```

H. BENKAOUHA

33

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Sommets de degré 1 :
 - 1, 5, 6, 7, 8
 - Le min : 1
 - 1 est relié à 2
 - P=2



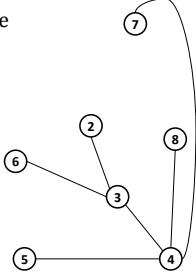
```
graph TD; 1 --- 2; 2 --- 3; 3 --- 4; 4 --- 5; 4 --- 6; 4 --- 7; 4 --- 8;
```

H. BENKAOUHA

34

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 1 et l'arête incidente
 - Sommets de degré 1 :
 - 2, 5, 6, 7, 8
 - Le min : 2
 - 2 est relié à 3
 - P=2 3



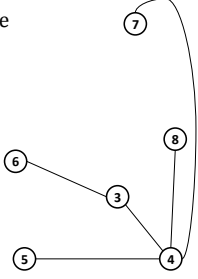
```
graph TD; 2 --- 3; 3 --- 4; 4 --- 5; 4 --- 6; 4 --- 7; 4 --- 8;
```

H. BENKAOUHA

35

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 2 et l'arête incidente
 - Sommets de degré 1 :
 - 5, 6, 7, 8
 - Le min : 5
 - 5 est relié à 4
 - P=2 3 4



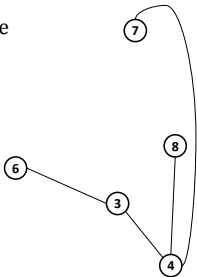
```
graph TD; 3 --- 4; 4 --- 5; 4 --- 6; 4 --- 7; 4 --- 8;
```

H. BENKAOUHA

36

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 5 et l'arête incidente
 - Sommets de degré 1 :
 - 6, 7, 8
 - Le min : 6
 - 6 est relié à 3
 - P=2 3 4 3

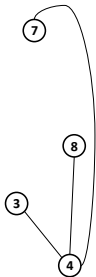


H. BENKAOUHA

37

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 6 et l'arête incidente
 - Sommets de degré 1 :
 - 3, 7, 8
 - Le min : 3
 - 3 est relié à 4
 - P=2 3 4 3 4

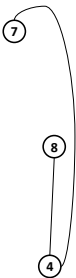


H. BENKAOUHA

38

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 3 et l'arête incidente
 - Sommets de degré 1 :
 - 7, 8
 - Le min : 7
 - 7 est relié à 4
 - P=2 3 4 3 4 4



H. BENKAOUHA

39

Exercice 2 – Solution

- Codage de Prufer de l'arbre de couverture de poids minimal
 - Supprimer 7 et l'arête incidente
 - Il ne reste que 2 sommet
 - Fin
 - P=2 3 4 3 4 4



H. BENKAOUHA

40

Exercice 3

- On désire installer au moindre coût un réseau de communication entre divers sites.
- Les coûts des connexions intersites sont les suivants (symétriques) :

	B	C	D	E	F	G	H
A	5	18	9	13	7	38	22
B		17	11	7	10	38	15
C			27	23	15	20	25
D				20	15	40	25
E					15	40	30
F						35	10
G							45

H. BENKAOUHA

41

Exercice 3 - Suite

- Identifier le problème associé.
- Déterminer la solution optimale.

H. BENKAOUHA

42

Exercice 3 – Solution

1. Identifier le problème associé.
- Modélisation
 - Chaque sommet x représente un site x , x de A à H .
 - Chaque arête $\{i, j\}$ représente une connexion intersites.
 - Le coût de la connexion intersites est représenté par le poids de l'arête correspondante.

H. BENKAOUHA

43

Exercice 3 – Solution

1. Identifier le problème associé.
- Identification
 - Tous les sites connectés : graphe connexe
 - Coût minimal : graphe connexe minimal avec somme de poids des arêtes minimal
 - Revient à trouver l'arbre de couverture maximal de poids minimal.

H. BENKAOUHA

44

Exercice 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.
- On applique l'algorithme de Kruskal
 - Tri par ordre croissant des arêtes

Arête	Poids	Décision	Arête	Poids	Décision	Arête	Poids	Décision
{A,B}	5		{D,F}	15		{D,H}	25	
{A,F}	7		{E,F}	15		{C,D}	27	
{B,E}	7		{B,C}	17		{E,H}	30	
{A,D}	9		{A,C}	18		{F,G}	35	
{D,F}	10		{C,G}	20		{A,G}	38	
{F,H}	10		{D,E}	20		{B,G}	38	
{B,D}	11		{A,H}	22		{D,G}	40	
{A,E}	13		{C,E}	23		{E,G}	40	
{B,H}	15		{C,H}	25		{G,H}	45	
{C,F}	15							

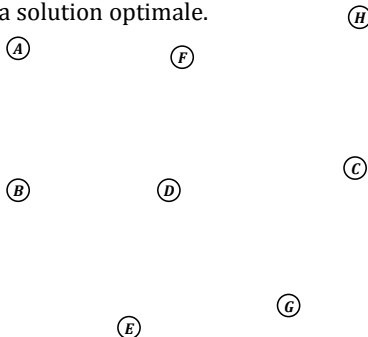
H. BENKAOUHA

45

Exercice 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	
{A,F}	7	
{B,E}	7	
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	



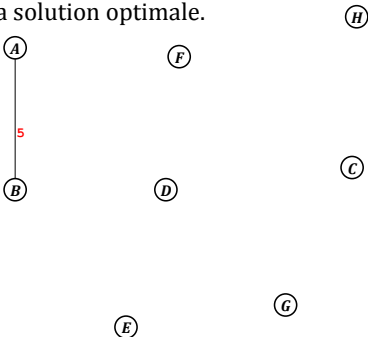
H. BENKAOUHA

46

Exercice 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	
{B,E}	7	
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	



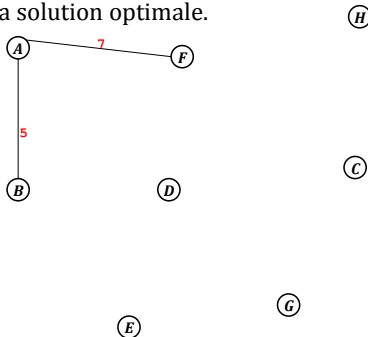
H. BENKAOUHA

47

Exercice 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	



H. BENKAOUHA

48

Exercise 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	Oui
{A,D}	9	
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	

H. BENKAOUHA49

Exercise 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	Oui
{A,D}	9	Oui
{D,F}	10	
{F,H}	10	
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	

H. BENKAOUHA50

Exercise 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	Oui
{A,D}	9	Non
{D,F}	10	Non
{F,H}	10	Oui
{B,D}	11	
{A,E}	13	
{B,H}	15	
{C,F}	15	

H. BENKAOUHA51

Exercise 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.

Arête	Poids	Décision
{A,B}	5	Oui
{A,F}	7	Oui
{B,E}	7	Oui
{A,D}	9	Non
{D,F}	10	Non
{F,H}	10	Oui
{B,D}	11	Non
{A,E}	13	Non
{B,H}	15	Non
{C,F}	15	Oui

H. BENKAOUHA52

Exercise 3 – Solution

2. Déterminer la solution optimale.

Arête	Poids	Décision
{D,F}	15	Non
{E,F}	15	Non
{B,C}	17	Non
{A,C}	18	Non
{C,G}	20	Oui
{D,E}	20	
{A,H}	22	
{C,E}	23	
{C,H}	25	

H. BENKAOUHA53

Arbre de poids = 73

Exercise 4

- Un arbre est dit binaire, s’il est constitué :
 - d’un unique sommet de degré 2 (appelé racine de l’arbre)
 - et tout autre sommet est soit de degré 3, soit de degré 1.
- Les sommets de degré 1 sont appelés les feuilles de l’arbre.
- Exemple de 9 sommets et 5 feuilles

Exercice 4 - Suite

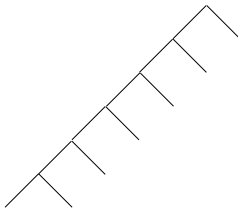
- 1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.
- 2. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement 7 feuilles.
- 3. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement k feuilles (avec $k \geq 2$).

H. BENKAOUHA

55

Exercice 4 – Solution

- 1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.

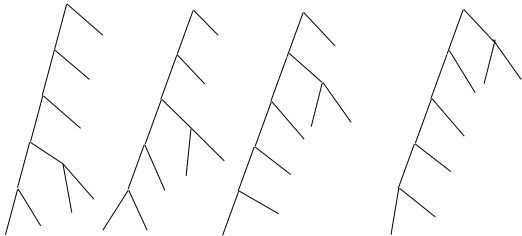


H. BENKAOUHA

56

Exercice 4 – Solution

- 1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.

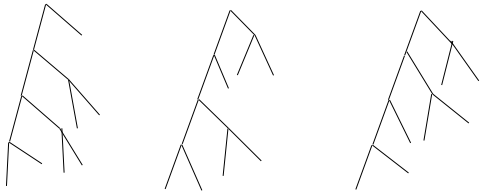


H. BENKAOUHA

57

Exercice 4 – Solution

- 1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.



H. BENKAOUHA

58

Exercice 4 – Solution

- 1. Énumérez (à isomorphisme près) tous les arbres binaires ayant exactement 7 feuilles.



H. BENKAOUHA

59

Exercice 4 – Solution

- 2. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement 7 feuilles.
- Il y a 13 sommets selon la question précédente.

H. BENKAOUHA

60

Exercice 4 – Solution

3. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement k feuilles (avec $k \geq 2$).
- On pose n le nombre de sommets et m le nombre d'arêtes
 - On a k feuilles (degré 1), 1 racine (degré 2) et p autres sommets (degré 3)
 - $n = k + p + 1$
 - $2 \cdot 1 + 1 \cdot k + 3 \cdot p = 2m$ (formule des degrés)
 - $m = n - 1$ (propriété d'un arbre)

H. BENKAOUHA

61

Exercice 4 – Solution

3. Combien de sommets peut avoir un arbre binaire ayant exactement k feuilles (avec $k \geq 2$).
- $n = k + p + 1 \dots (1)$
 - $k + 3p + 2 = 2m \dots (2)$
 - $m = n - 1 \dots (3)$
 - De (2) et (3) $\Rightarrow k + 3p + 2 = 2(n - 1) \dots (4)$
 - De (1) $\Rightarrow p = n - k - 1$
 - On remplace dans (4) $\Rightarrow k + 3(n - k - 1) + 2 = 2(n - 1)$
 - $\Rightarrow k + 3n - 3k - 3 + 2 = 2n - 2 \Rightarrow n - 2k = -1 \Rightarrow n = 2k - 1$

H. BENKAOUHA

62