Graphe :

donné de 2 ensemble (X, U)

$\begin{cases} X : \text{ensemble sommet} & |X| = n \text{ ordre} \\ U : \text{ensemble arc} & |U| = m \text{ taille} \end{cases}$

$\begin{cases} x : \text{extrimité initial } I(U) = x \\ y : \text{extrimité Terminal } T(U) = y \end{cases}$

$\begin{cases} \Gamma^+(x) = \text{ensemble des successeur} = \{ y \in X / (x, y) \in U \} \\ \Gamma^-(x) = \text{ensemble des prédécesseur} = \{ y \in X / (y, x) \in U \} \end{cases}$

- 2 sommet adjacent s'ils ont arc commun.
- 2 arc adjacent s'ils ont une extrimité commune.
- arc incident à un sommet si le sommet est une extrimité d'arc.

$d(x) = |\Gamma^+(x)| + |\Gamma^-(x)| = d^+(x) + d^-(x)$.

$\begin{cases} d^+(x) : \text{demi degré exterieur} \\ d^-(x) : \text{demi degré interieur} \end{cases}$

$d(x) \leq n - 1$

formule Taylor :

orienté : $\sum d^-(x) = \sum d^+(x) = m$.

non orienté : $\sum d(x) = 2m$. (la boucle est compter 2 fois)

2 arc parallèle (multiple) : (m̂ sens)

sommet isolé $d(x) = 0$.

sommet pendant $d(x) = 1$.

graphe simple :

Pas boucle, pas arc multiple.

$d(x) \leq n-1$

graphe complet K_n :

non orienté : chaque 2 sommet forme une arête
orienté : tt les sommet sont adjacent

Pas de boucle.

$m(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$

graphe biparti :

$G = (X \cup Y, U)$

2 ensemble X, Y tq : $\begin{cases} X \cap Y = \phi \\ X \cup Y = \text{tt les sommets} \\ X, Y \text{ pas adjacent} \end{cases}$

$\begin{cases} \sum_{x \in X} d(x) = m \\ \sum_{y \in X} d(x) = m \end{cases} \Rightarrow \sum_{x \cup y \in X} d(x) = 2m$.

graphe biparti complet $K_{|x|.|y|}$

chaque sommet de x est relié à chaque sommet de y.

$\begin{cases} |X| = p \\ |Y| = q \end{cases} \Rightarrow$ nbre de sommet $p+q$. nbre d'arêt $p.q$

un graphe biparti-k régulier $\Rightarrow |x| = |y|$

graphe partiel :

$G = (X, U) \qquad G' = (X', U')$.

G' est partiel ssi : $\begin{cases} X = X' \\ U' \subset U \end{cases}$

Sous graphe :

$\begin{cases} X' \subset X \\ U' \subset U \end{cases}$

graphe complémentaire :

$\overline{G} = (\overline{X}, \overline{U})$

une arêt $\in$ à $\overline{G}$ si elle appartient à G.

$\overline{U} \cup U = U(K_n)$.

réunion de G et $\overline{G}$ forme un complet (K_n).

graphe autocomplémentaire.

graphe régulier

graphe plannaire :

G est plannaire si il admet une representation sur le plan { sans que les arc se croisent }.

face :

région maximale du plan, délimité par les arêts de G.

deg(F) : nbre d'arêts de G qui bordent F

$$\sum_{F = face} \deg(F) = 2 \cdot m$$

. si G est plannaire alors : Thm (formule eulers)
et simple
$n - m + f = 2$.

- si G simple et plannaire alors : $\begin{cases} 3f \leq 2m \\ m \leq 3n - 6 \end{cases}$.

. si G simple et plannaire et sans C_3 (triangle) alors :

$\begin{cases} 4f \leq 2m \\ m \leq 2n - 4 \end{cases}$

Thm Kura Touski :

G plannaire $\Leftrightarrow$ G ne contient pas de subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$

Matrice d'incidence Sommet-arc :

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } u_j \text{ incident intérieur à } x_j & \text{arc sortant de } x_j \\ -1 \text{ si } u_j \text{ incident extérieur à } x_j & \text{arc entrant de } x_j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Matrice d'incidence Sommet arêt :

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si arêt incident à } x_i \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Matrice d'adjacence :

cas orienté : m_{ij} = nbre d'arc ayant x_i extrémité initial et x_j extrémité final.

cas non orienté : m_{ij} = nbre d'arêt relie x_i à x_j.

Matrice Totalement unimodulaire TU :

ssi matrice carré extraite : det = ±1 ou 0.

Rq :
matrice incidence sommet arc est T.U
matrice incidence sommet arêt pas TU

chemin :

suite de sommet relie par des arc (m̂ sens)

chaîne : P

suite de sommet relie par des arêts (relie x à y), (pas orienté)

simple : passe une seule fois par le m̂ arc.
élémentaire : passe une seule fois par le m̂ sommet

circuit :

suite d'arc où 2 sommet coïncide ($x_0 \dots x_0$). (m̂ sens)

cycle : C

suite d'arc où 2 sommet coïncide ($x_0 \dots x_0$). (pas orienté).

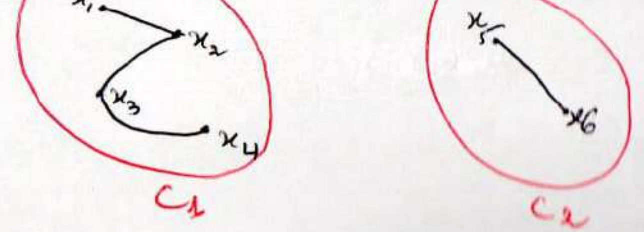
la notion de connexité :

$$x \mathring{R} y \Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ chaîne de } x \text{ à } y. \\ \text{ou} \\ x = y \end{cases}$$

càd pas de sommet iso

composante connexe : C.C.

- un ensemble de sommets qui ont 2 à 2 relation connexi
+ pas de relation avec les sommets de la composante.



graphe connexe :

si G contient une seule composante connexe.

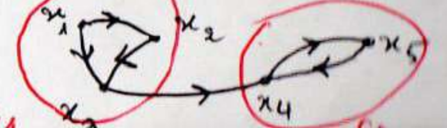
forte connexité :

$$x \overset{*}{R} y \Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ chemin } x \text{ à } y \\ \text{et} \\ \exists \text{ chemin } y \text{ à } x \end{cases}$$

(graphe orienté)

Composante fortement connexe C.f.C

- ensemble de sommet qui ont 2 à 2 relation forte connexité
+ pas de relation forte connexité avec les autres de composan



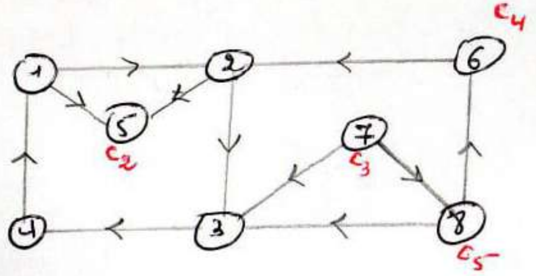
graphe fortement connexe

G f.c $\Leftrightarrow$ G a une seule c.f.c.

Rq: dans un graphe f.c. il $\exists$ au moins un circuit

graphe réduit

ex:

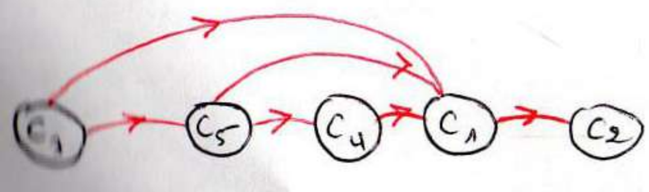


$C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ $C_3 = \{7\}$

$C_2 = \{5\}$ $\quad$ $C_4 = \{6\}$

$C_5 = \{8\}$.

le graphe réduit est:



Rq: si $\exists$ chaîne eulérienne entre 2 à 2 sommet alors G connexe.

chaîne eulérienne:

chaîne qui doit passer par tt les arêtes du graphe. une et une seule fois.

cycle eulerien:

chaîne fermé qui passe par tt les arêts une et une seule fois.

- cycle eulerien $\Leftrightarrow$ { . G connexe. . tt les sommet deg pair.

- chaîne eulerien $\Leftrightarrow$ { . G connexe. . si deux sommet de deg impair. $d^+(a) = d^-(a) - 1$. $d^-(b) = d^+(b) + 1$.

- G connexe et a plus de 2 sommet de deg impair alors graphe pas eulerien.

G eulerien ssi G possède un cycle eulerien.

chemin hamiltonien:

chemin qui passe par tt les sommet une et une seule fois.

cycle hamitonien:

cycle élémentaire càd passe par tt les sommets une seul fois

G est hamiltonien $\Leftrightarrow$ G a un cycle hamiltonien