

Chapitre 5

Série d'exercices de TD

2020/2021

Présenté par :

H. BENKAOUHA

Bureau 222, Département Informatique, USTHB

hbenkaouha@usthb.dz

haroun.benkaouha@gmail.com

H. BENKAOUHA

1

Exercice 1

• Soit un projet constitué des huit (8) tâches décrites dans le tableau ci-dessous :

N° Tâche	Durée en jours	Tâches précédentes
1	2	-
2	3	-
3	7	-
4	4	2
5	10	1
6	6	1, 4
7	5	1, 3
8	2	5, 6, 7

H. BENKAOUHA

2

Exercice 1 - Suite

1. Modéliser le problème sous forme d'un graphe potentiel tâches (MPM).
2. Calculer les dates au plus tôt et les dates au plus tard de chaque tâche.
3. Calculer la marge totale pour chaque tâche et déduire les tâches critiques ainsi que le chemin critique.

H. BENKAOUHA

3

Exercice 1 - Solution

$t_4 - t_2 \geq 3$

$t_5 - t_1 \geq 2$

$t_6 - t_1 \geq 2$

$t_6 - t_4 \geq 4$

$t_7 - t_1 \geq 2$

$t_7 - t_3 \geq 7$

$t_8 - t_5 \geq 10$

$t_8 - t_6 \geq 6$

$t_8 - t_7 \geq 5$

Tâche fictive de début : 0

$t_1 - t_0 \geq 0$

$t_2 - t_0 \geq 0$

$t_3 - t_0 \geq 0$

Tâche fictive de fin : 9

$t_9 - t_i \geq d_i \quad \forall i \text{ de } 1 \text{ à } 8$

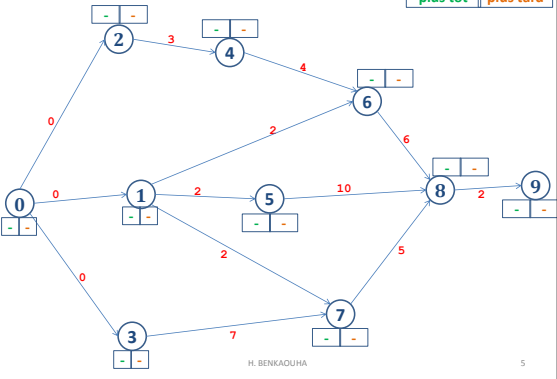
H. BENKAOUHA

4

Exercice 1 – Solution

Date au plus tôt

Date au plus tard



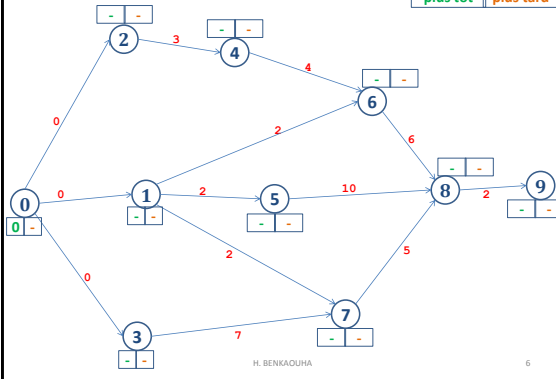
H. BENKAOUHA

5

Exercice 1 – Solution

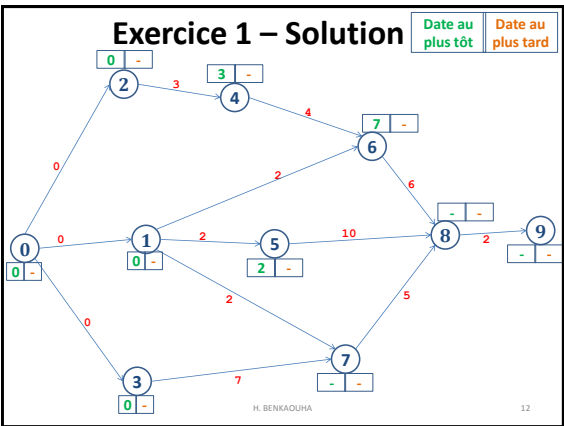
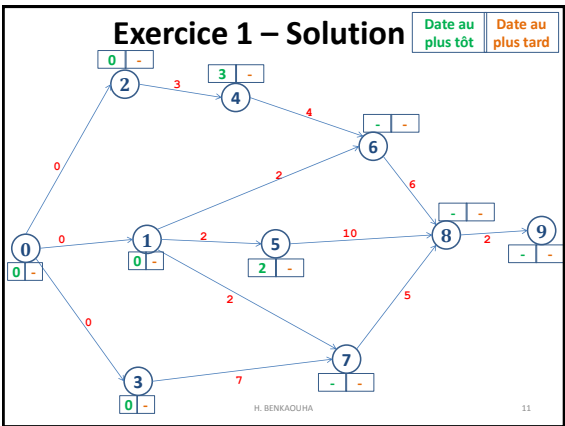
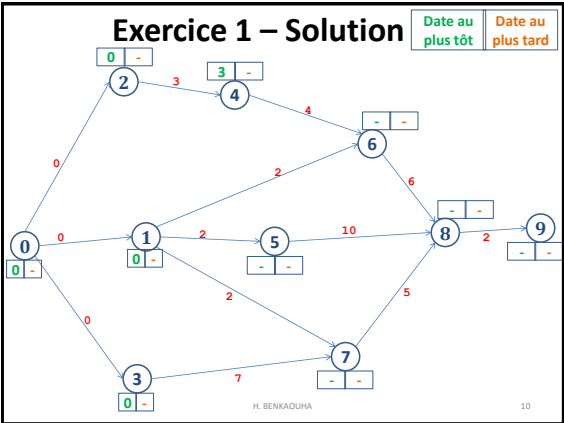
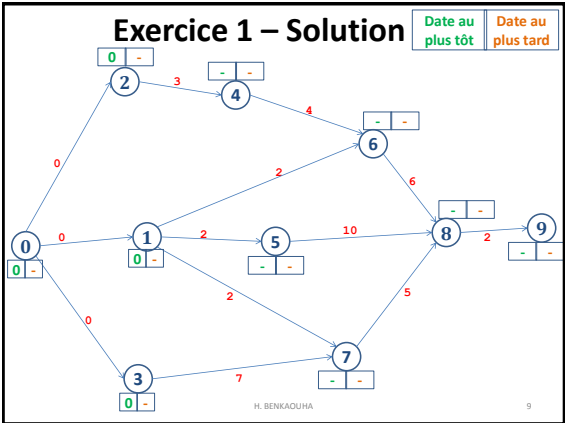
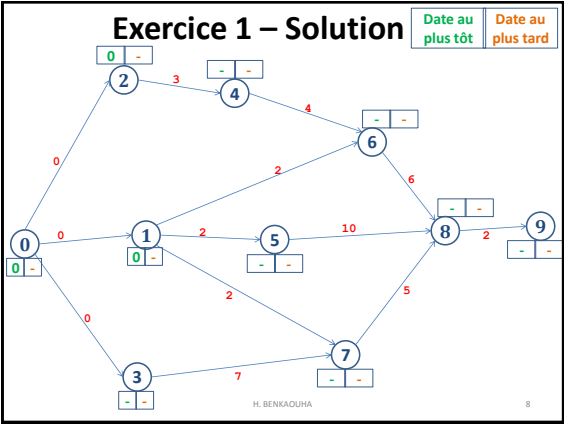
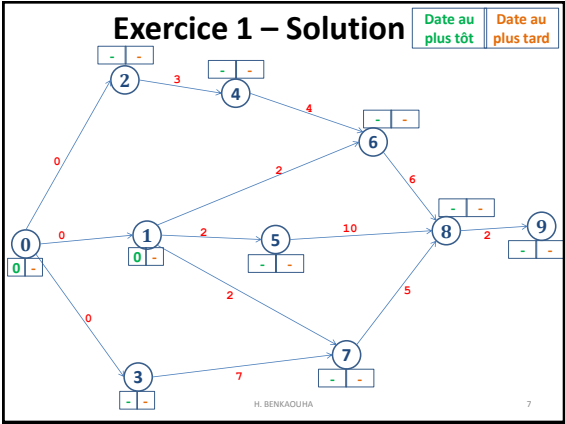
Date au plus tôt

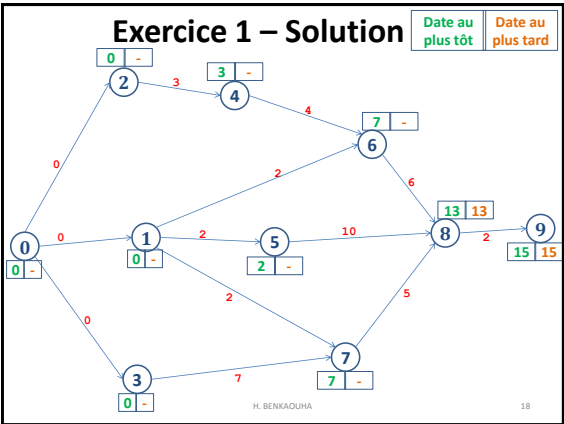
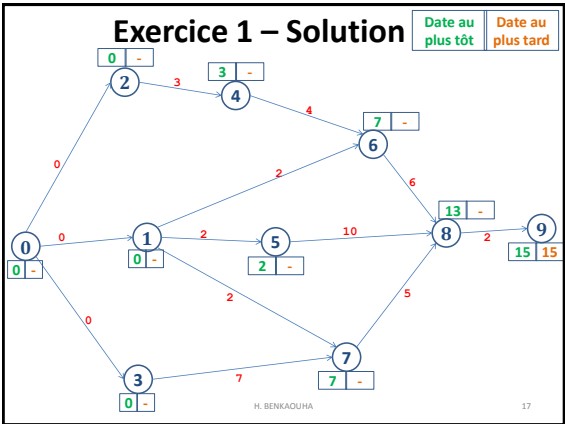
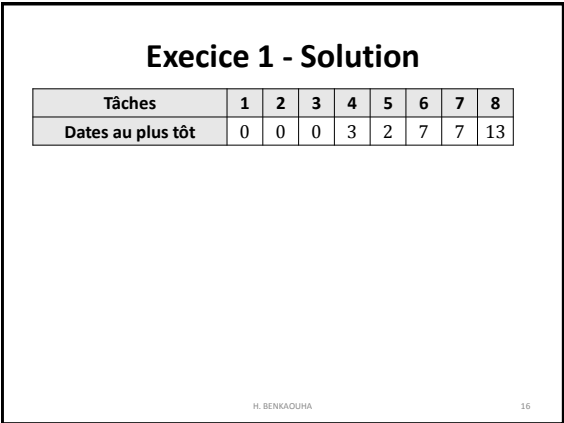
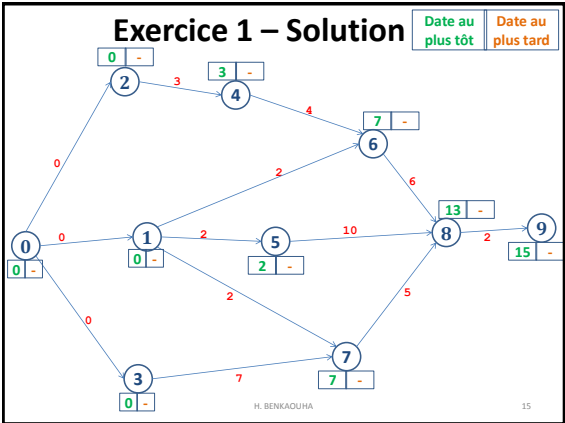
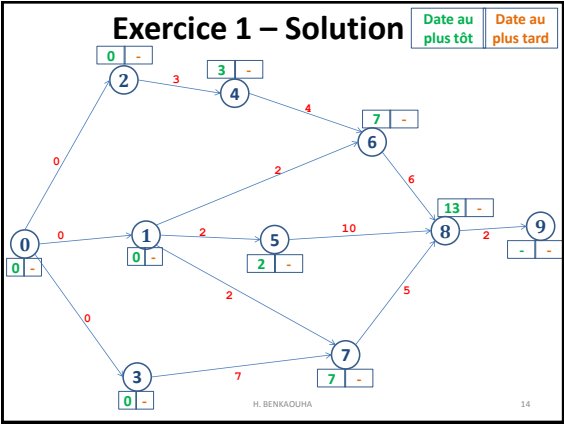
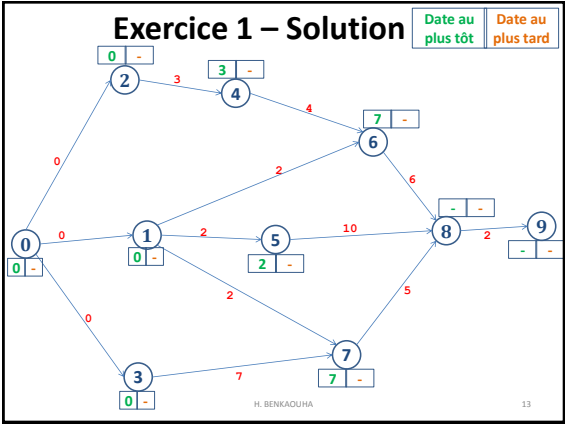
Date au plus tard

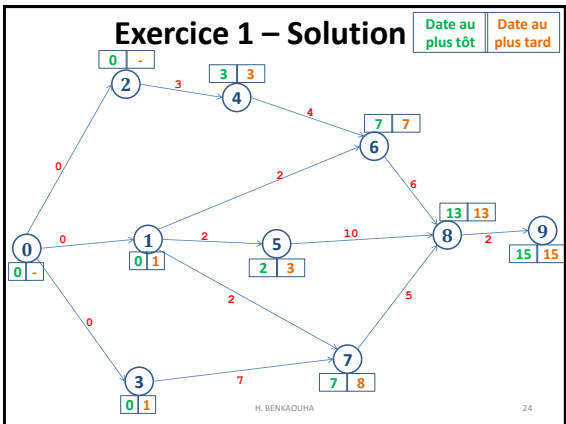
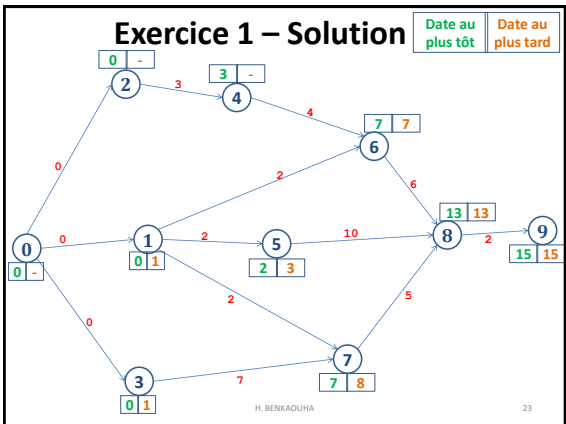
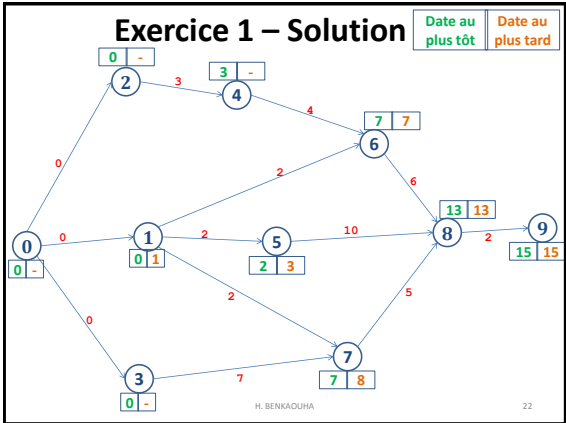
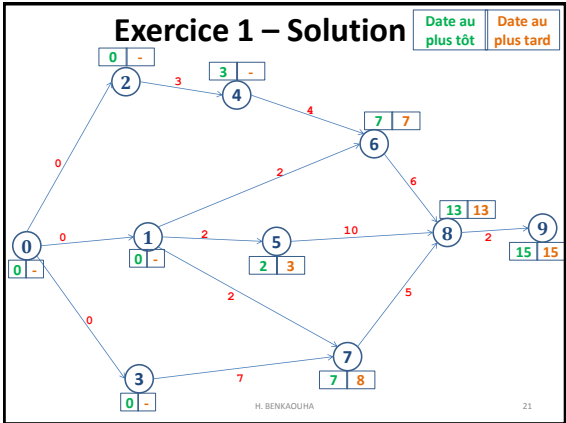
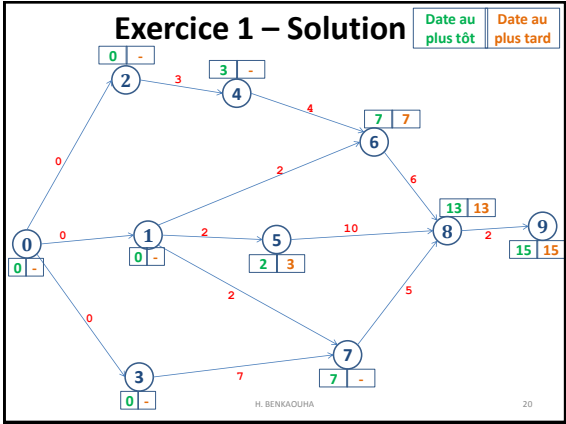
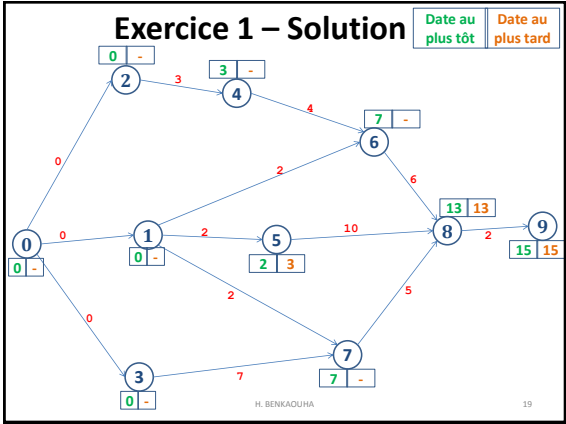


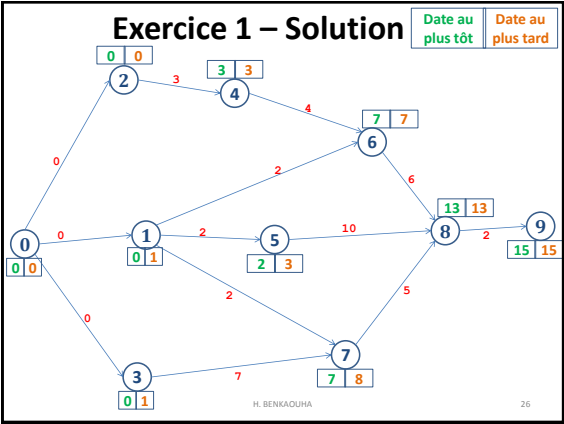
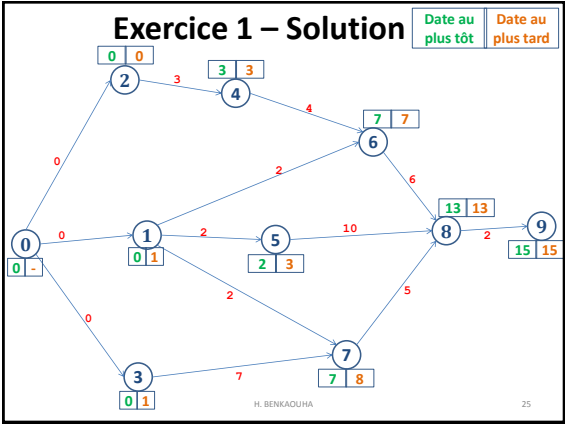
H. BENKAOUHA

6









Exeice 1 - Solution

Tâches	1	2	3	4	5	6	7	8
Dates au plus tard	1	0	1	3	3	7	8	13

H. BENKAOUHA 27

Exeice 1 - Solution

Tâches	1	2	3	4	5	6	7	8
Dates au plus tôt	0	0	0	3	2	7	7	13
Dates au plus tard	1	0	1	3	3	7	8	13
Marge totale	1	0	1	0	1	0	1	0

• Les tâches critiques : 2, 4, 6 et 8

• Le chemin critique : 0 2 4 6 8 9

H. BENKAOUHA 28

Exercise 2

• Un projet requiert la réalisation de huit (08) activités, le tableau suivant donne pour chaque activité, le temps (en jours) requis et les activités pré-requises.

Activité	A	B	C	D	E	F	G	H
Durée	7	4	4	5	6	8	4	6
Activités requises			B	A, C	B	D, E	B	D, E, G

H. BENKAOUHA 29

Exercise 2 - Suite

1. Donner la représentation du problème en graphe MPM (Potentiel-tâches).

2. Donner les dates de début au plus tôt de chaque tâche et la durée optimale du projet.

3. Donner les dates au plus tard, et déduire les taches critiques.

4. Si la tâche E commence avec 03 jours de retard et elle dure une journée de plus que prévu, quel est alors l'impact sur la durée optimale du projet ?

H. BENKAOUHA 30

Exercice 2 - Solution

$$t_C - t_B \geq 4$$
$$t_D - t_A \geq 7$$
$$t_D - t_B \geq 4$$
$$t_E - t_B \geq 4$$
$$t_F - t_D \geq 5$$
$$t_F - t_E \geq 6$$
$$t_G - t_B \geq 4$$
$$t_H - t_D \geq 5$$
$$t_H - t_E \geq 6$$
$$t_H - t_G \geq 6$$

Tâche fictive de début :  $\alpha$

$$t_A - t_\alpha \geq 0$$
$$t_B - t_\alpha \geq 0$$

Tâche fictive de fin :  $\varphi$

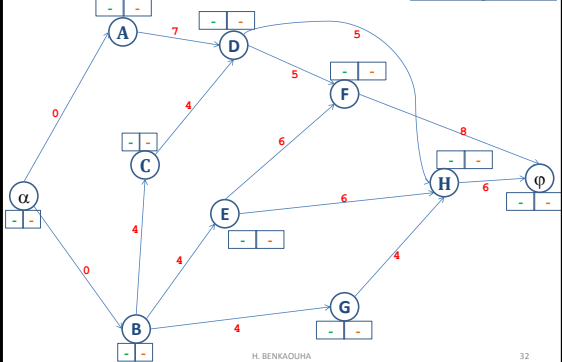
$$t_\varphi - t_i \geq d_i \quad \forall i \text{ de A à H}$$

H. BENKAOUHA

31

Exercice 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard

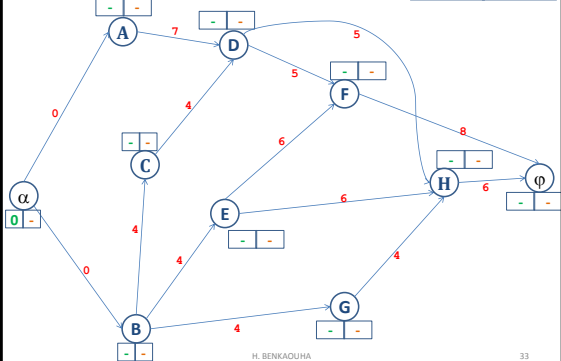


H. BENKAOUHA

32

Exercice 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard

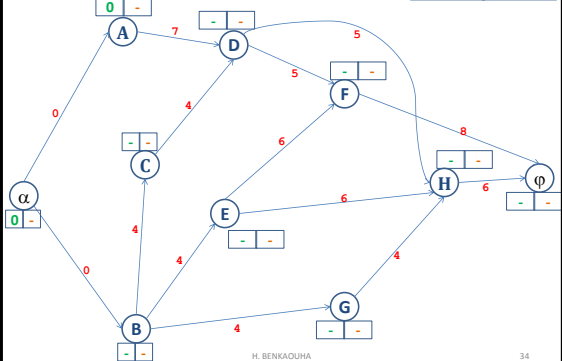


H. BENKAOUHA

33

Exercice 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard

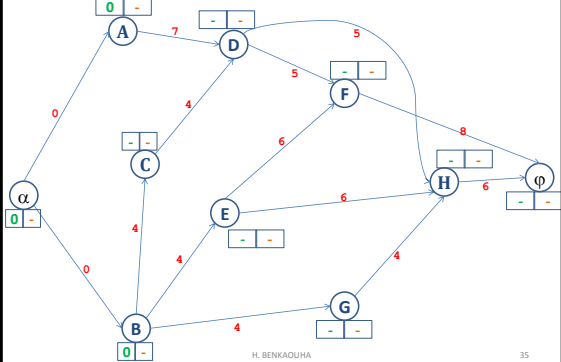


H. BENKAOUHA

34

Exercice 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard

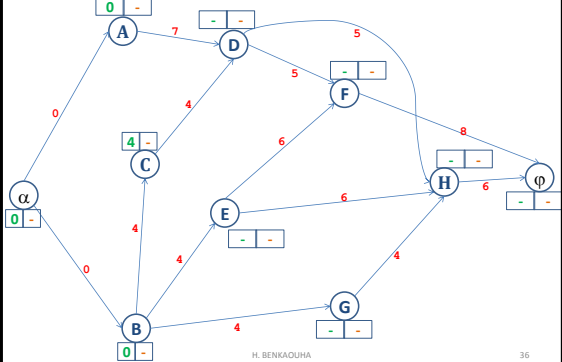


H. BENKAOUHA

35

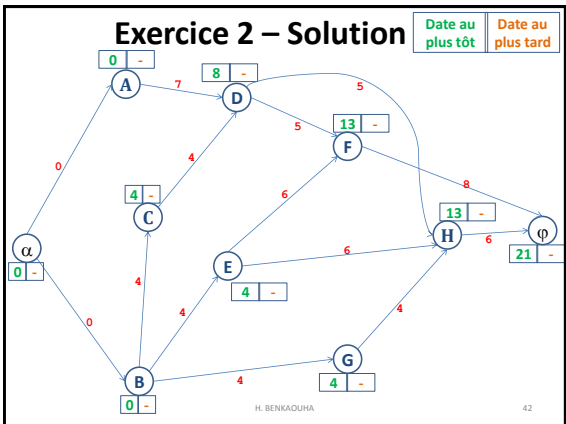
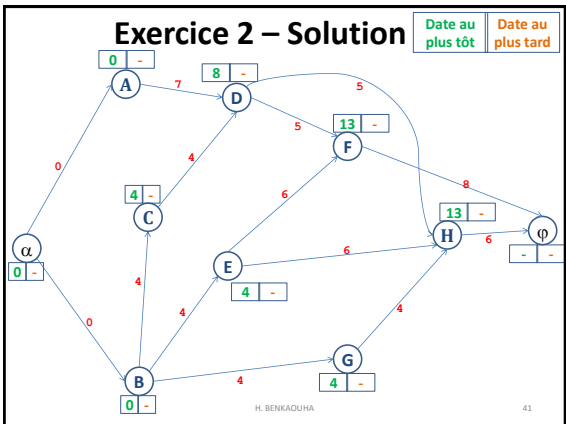
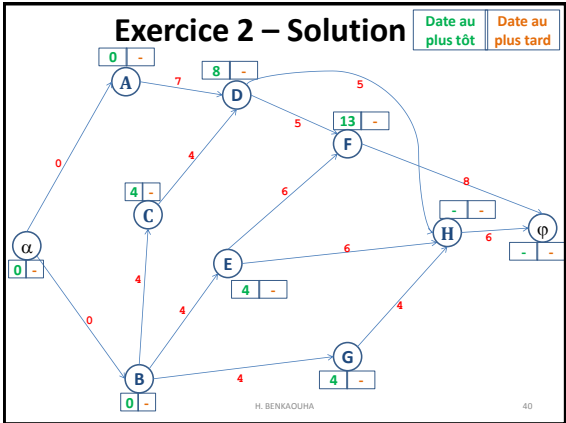
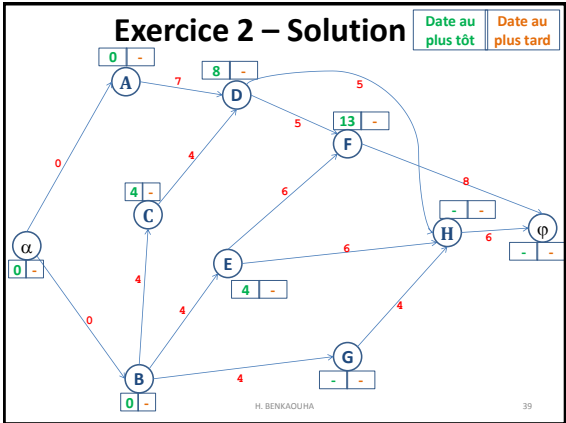
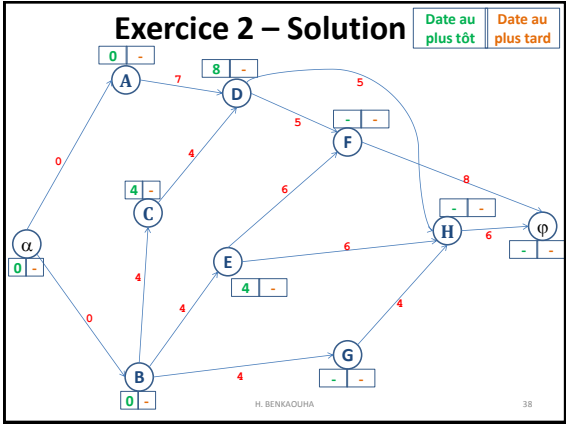
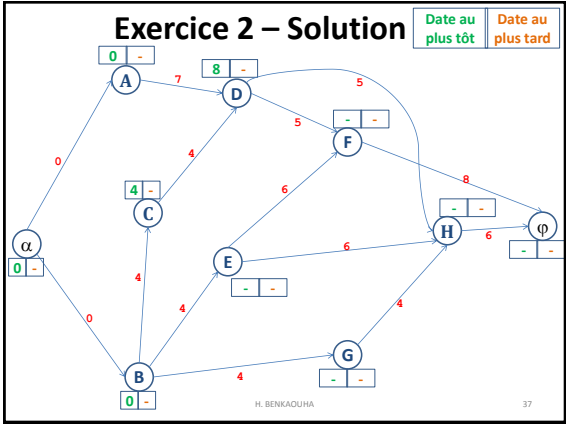
Exercice 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard



H. BENKAOUHA

36



Execice 2 - Solution

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
Dates au plus tôt	0	0	4	8	4	13	4	13

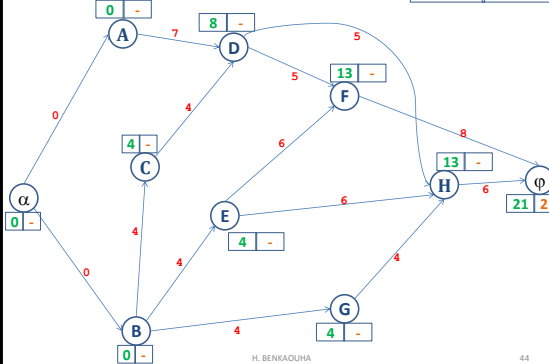
- Durée optimale du projet : 13 jours

H. BENKAOUHA

43

Exercise 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard

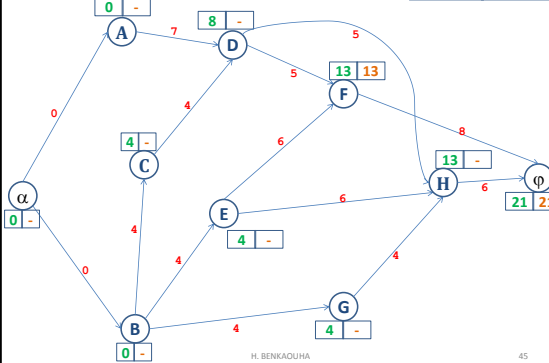


H. BENKAOUHA

44

Exercise 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard

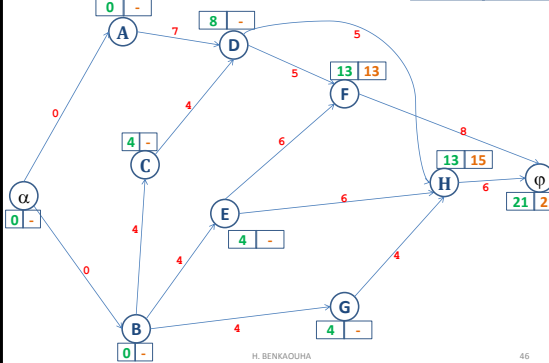


H. BENKAOUHA

45

Exercise 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard

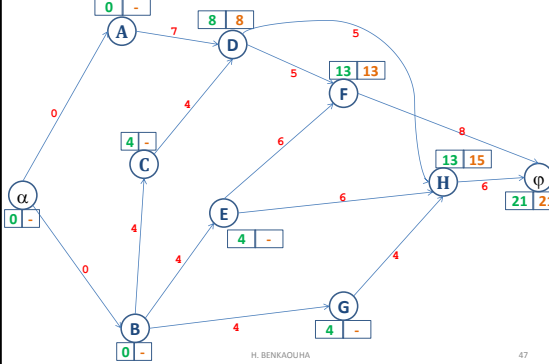


H. BENKAOUHA

46

Exercise 2 – Solution

Date au plus tôt  
Date au plus tard

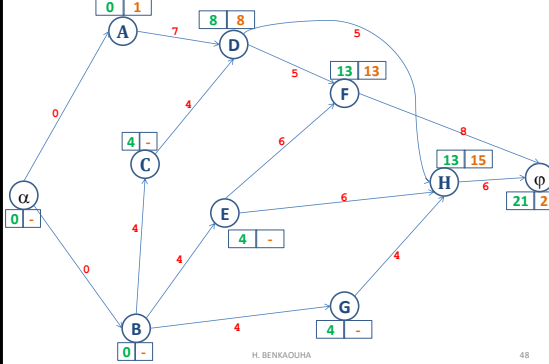


H. BENKAOUHA

47

Exercise 2 – Solution

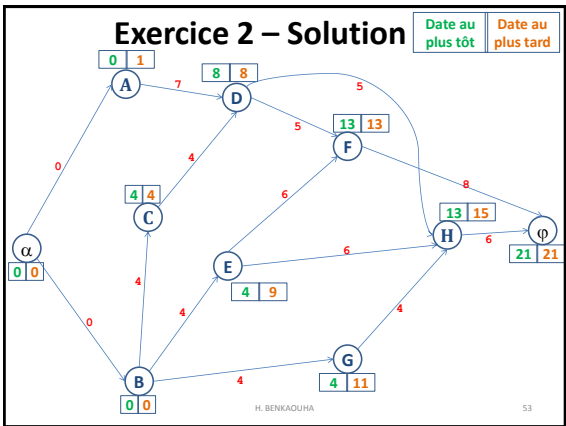
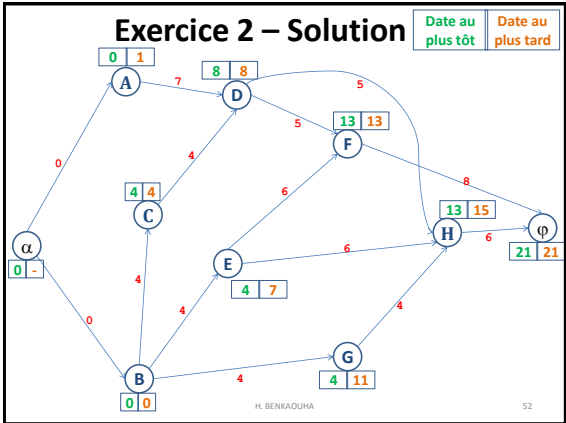
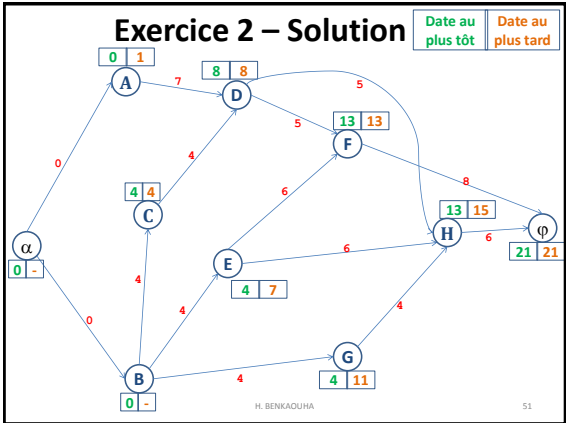
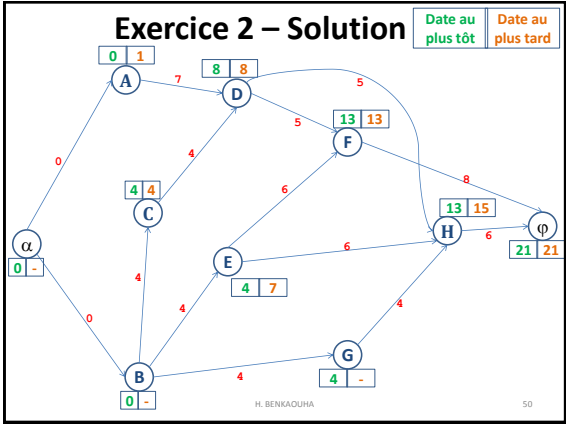
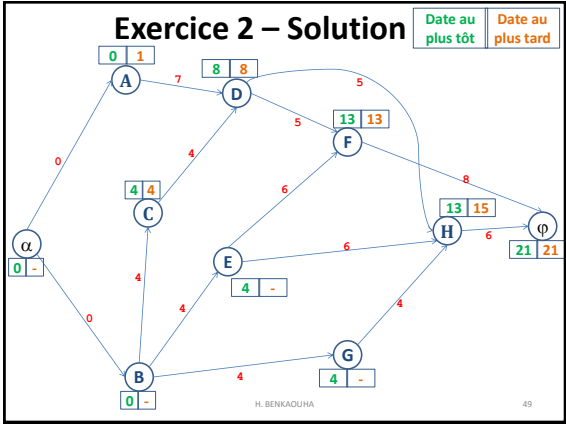
Date au plus tôt  
Date au plus tard



H. BENKAOUHA

48





Exeice 2 - Solution

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
Dates au plus tard	1	0	4	8	9	13	11	15

H. BENKAOUHA 54

### Exercice 2 - Solution

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
Dates au plus tôt	0	0	4	8	4	13	4	13
Dates au plus tard	1	0	4	8	9	13	11	15
Marge totale	1	0	0	0	5	0	7	2

- Les tâches critiques : **B, C, D et F**
- Le chemin critique :  **$\alpha$ BCDF $\phi$**

H. BENKAOUHA

55

### Exercice 2 - Solution

Tâches	E
Dates au plus tôt	4
Dates au plus tard	9
Marge totale	5

- $E$  démarre 3 jours en retard.
- $E$  dure 1 jour de plus.
- Retard au total de 4 jours pour  $E$
- Marge totale = 5
- Retard < Marge totale  $\Rightarrow$  Pas d'effet sur la durée optimale du projet.

H. BENKAOUHA

56

### Exercice 3

- Un laboratoire doit effectuer une étude comprenant deux (02) groupes de travaux distincts  $A$  et  $B$ .  $A$  désigne les travaux de recherche et d'études préliminaires et  $B$  les travaux d'exécution. On se propose de minimiser la durée totale de cette étude.
- Les effectifs  $nA$  et  $nB$  affectés respectivement à  $A$  et  $B$  sont compris entre les limites :
- $3 \leq nA \leq 6$
- $6 \leq nB \leq 15$

H. BENKAOUHA

57

### Exercice 3 – Suite

- Par ailleurs, les durées de  $A$  et  $B$  sont respectivement estimées, en jours, à  $600/nA$  et  $300/nB$ .
  - Il faut aussi signaler que  $B$  doit débiter au plus tôt à la date 10, et après que la moitié des travaux  $A$  soit accomplie. Il faut aussi s'assurer que la tâche  $B$  soit terminée avant que la tâche  $A$  ne soit accomplie.
- Quelle est la condition pour que le problème soit réalisable ?
  - Quelle est l'influence de  $n$  sur la durée minimale de réalisation de l'étude ?

H. BENKAOUHA

58

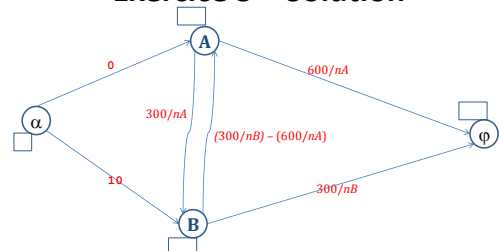
### Exercice 3 – Solution

- Modélisation :
- Tâche fictive de début :  $\alpha$
- $$t_A - t_\alpha \geq 0$$
- $$t_B - t_\alpha \geq 10$$
- $$t_B \geq t_A + (600/nA)/2$$
- $$\Rightarrow t_B - t_A \geq 300/nA$$
- $$t_B + (300/nB) \leq t_A + (600/nA)$$
- $$\Rightarrow t_A - t_B \geq (300/nB) - (600/nA)$$
- Tâche fictive de fin :  $\phi$
- $$t_\phi - t_A \geq 600/nA$$
- $$t_\phi - t_B \geq 300/nB$$

H. BENKAOUHA

59

### Exercice 3 – Solution

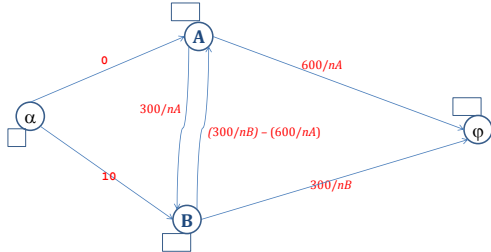


- Pour que ça soit réalisable, le graphe ne doit pas contenir de circuit absorbant
- Ici, le circuit absorbant est un circuit de poids  $>0$

H. BENKAOUHA

60

### Exercice 3 – Solution

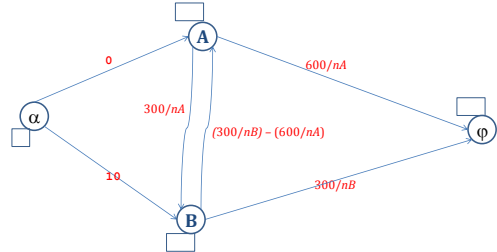


- Le seul circuit dans ce graphe est  $A B A$   
 $p(A B A) = 300/nA + (300/nB) - (600/nA) \geq 0$   
 $\Rightarrow (300/nB) - (300/nA) \geq 0 \Rightarrow nB \geq nA$

H. BENKAOUHA

61

### Exercice 3 – Solution

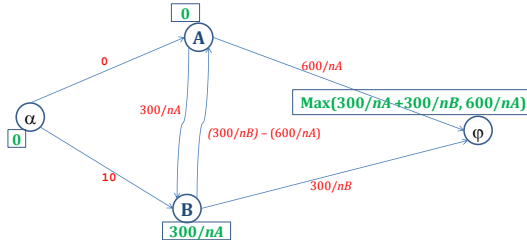


- Ceci est vérifié selon l'énoncé.
- Donc le problème est réalisable.

H. BENKAOUHA

62

### Exercice 3 – Solution



- En vert, les dates au plus tôt
- Pour la tâche A c'est 0 car  $(300/nB) - (600/nA) < 0$
- Pour la tâche B c'est  $300/nA$  car  $300/nA > 10$
- $nA \leq 6 \Rightarrow 1/nA \geq 1/6 \Rightarrow 300/nA \geq 300/6 = 50 > 10$

H. BENKAOUHA

63

### Exercice 3 – Solution

- La durée optimale du projet correspond à la date au plus tôt de la tâche fictive de fin de projet =  $\text{Max}(300/nA + 300/nB, 600/nA)$
- Comparons ces 2 valeurs
- $600/nA > 300/nA + 300/nB$   
 $\Rightarrow 300/nA > 300/nB \Rightarrow 1/nA > 1/nB$   
 $\Rightarrow nA < nB$
- Or on a (selon l'énoncé)  $3 \leq nA \leq 6$  et  $6 \leq nB \leq 15 \Rightarrow nA \leq nB$
- Donc la durée du projet est  $600/nA$  sauf si  $nA = nB$  on aura  $600/nA = 300/nA + 300/nB$
- Conclusion :**  $nB$  n'a pas d'effet sur la durée optimale du projet et  $nA$  doit être maximal c'est-à-dire  $nA=6$ .

H. BENKAOUHA

64