

附录 A 微积分初步

物理学研究的是物质的运动规律,因此我们经常遇到的物理量大多数是变量,而我们要研究的正是一些变量彼此间的联系。这样,微积分这个数学工具就成为必要的了。我们考虑到,读者在学习基础物理课时若能较早地掌握一些微积分的初步知识,对于物理学的一些基本概念和规律的深入理解是很有好处的。所以我们在这里先简单地介绍一下微积分中最基本的概念和简单的计算方法,在讲述方法上不求严格和完整,而是较多地借助于直观并密切地结合物理课的需要。至于更系统和更深入地掌握微积分的知识和方法,读者将通过高等数学课程的学习去完成。

§ 1. 函数及其图形

本节中的不少内容读者在初等数学及中学物理课中已学过了,现在我们只是把它们联系起来复习一下。

1.1 函数 自变量和因变量 绝对常量和任意常量

在数学中函数的功能是这样定义的:有两个互相联系的变量 x 和 y ,如果每当变量 x 取定了某个数值后,按照一定的规律就可以确定 y 的对应值,我们就称 y 是 x 的函数,并记作

$$y = f(x), \quad (\text{A. 1})$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量, f 是一个函数记号,它表示 y 和 x 数值的对应关系。有时把 $y = f(x)$ 也记作 $y = y(x)$ 。如果在同一个问题中遇到几个不同形式的函数,我们也可以用其它字母作为函数记号,如 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 等等。^①

常见的函数可以用公式来表达,例如

$$y = f(x) = 3 + 2x, \quad ax + \frac{1}{2}bx^2, \quad \frac{c}{x}, \quad \cos 2\pi x, \quad \ln x, \quad e^x \text{ 等等。}$$

在函数的表达式中,除变量外,还往往包含一些不变的量,如上面出现的 3、2、 $\frac{1}{2}$ 、 π 、 e 和 a 、 b 、 c 等,它们叫做常量。常量有两类:一类如 3、2、 $\frac{1}{2}$ 、 π 、 e 等,它们在一切问题中出现时数值都是确定不变的,这类常量叫做绝对常

^① 一般地说,函数中自变量的数目可能不止一个。多个自变量的函数叫做多元函数。下面我们只讨论一个变量的函数,即一元函数。

量；另一类如 a 、 b 、 c 等，它们的数值需要在具体问题中具体给定，这类常量叫做任意常量。在数学中经常用拉丁字母中最前面几个（如 a 、 b 、 c ）代表任意常量，最后面几个（ x 、 y 、 z ）代表变量。

当 $y = f(x)$ 的具体形式给定后，我们就可以确定与自变量的任一特定值 x_0 相对应的函数值 $f(x_0)$ 。例如：

(1) 若 $y = f(x) = 3 + 2x$ ，则当 $x = -2$ 时

$$y = f(-2) = 3 + 2 \times (-2) = -1.$$

一般地说，当 $x = x_0$ 时，

$$y = f(x_0) = 3 + 2x_0.$$

(2) 若 $y = f(x) = \frac{c}{x}$ ，则当 $x = x_0$ 时，

$$y = f(x_0) = \frac{c}{x_0}.$$

1.2 函数的图形

在解析几何学和物理学中经常用平面上的曲线来表示两个变量之间的函数关系，这种方法对于我们直观地了解一个函数的特征是很有帮助的。作图的办法是先在平面上取一直角坐标系，横轴代表自变量 x ，纵轴代表因变量（函数值） $y = f(x)$ 。这样一来，把坐标为 (x, y) 且满足函数关系 $y =$

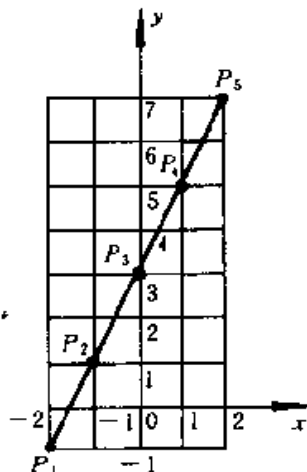


图 A-1

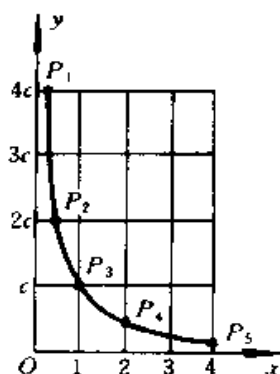


图 A-2

$f(x)$ 的那些点连接起来的轨迹就构成一条曲线，它描绘出函数的面貌。图 A-1 便是上面举的第一个例子 $y = f(x) = 3 + 2x$ 的图形，其中 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 各点的坐标分别为 $(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (1, 5), (2, 7)$ ，各点连接成一根直线。图 A-2 是第二个例子 $y = f(x) = \frac{c}{x}$ 的图形，其中 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 各点的坐标分别为 $\left(\frac{1}{4}, 4c\right), \left(\frac{1}{2}, 2c\right), (1, c), \left(2, \frac{c}{2}\right), \left(4, \frac{c}{4}\right)$ ，各点连接成双曲线的一支。

1.3 物理学中函数的实例

反映任何一个物理规律的公式都是表达变量与变量之间的函数关系的。下面我们举几个例子。

(1) 匀速直线运动公式

$$s = s_0 + vt, \quad (\text{A. 2})$$

此式表达了物体作匀速直线运动时的位置 s 随时间 t 变化的规律, 在这里 t 相当于自变量 x , s 相当于因变量 y , s 是 t 的函数。因此我们记作

$$s = s(t) = s_0 + vt, \quad (\text{A. 3})$$

式中初始位置 s_0 和速度 v 是任意常量, s_0 与坐标原点的选择有关, v 对于每个匀速直线运动有一定的值, 但对于不同的匀速直线运动可以取不同的值。图 A-3 是这个函数的图形, 它是一根倾斜的直线。下面我们将看到, 它的斜率等于 v 。

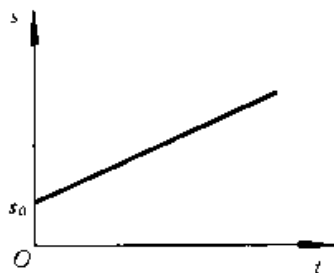


图 A-3

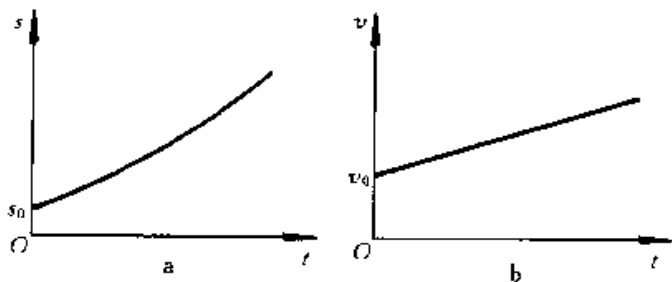


图 A-4

(2) 匀变速直线运动公式

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (\text{A. 4})$$

$$v = v_0 + at, \quad (\text{A. 5})$$

两式中 s 和 v 是因变量, 它们都是自变量 t 的函数, 因此我们记作

$$s = s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (\text{A. 6})$$

$$v = v(t) = v_0 + at. \quad (\text{A. 7})$$

图 A-4a、4b 分别是两个函数的图形, 其中一个为抛物线, 一个是直线。(A. 6) 和 (A. 7) 式是匀变速直线运动的普遍公式, 式中初始位置 s_0 、初速 v_0 和加速度 a 都是任意常量, 它们的数值要根据讨论的问题来具体化。例如在讨论自由落体问题时, 如果把坐标原点选择在开始运动的地方, 则 $s_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a = g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$, 这时 (A. 6) 和 (A. 7) 式具有如下形式:

$$s = s(t) = \frac{1}{2}gt^2, \quad (\text{A. 8})$$

$$v = v(t) = gt. \quad (\text{A. 9})$$

这里的 g 可看作是绝对常量, 式中不再有任何常量了。

(3) 玻意耳定律

$$PV = C. \quad (\text{A. 10})$$

上式表达了一定质量的气体, 在温度不变的条件下, 压强 P 和体积 V 之间的函数关系, 式中的 C 是任意常量。我们可以选择 V 为自变量, P 为因变量, 这样, (A. 10) 式就可写作

$$P = P(V) = \frac{C}{V}. \quad (\text{A. 11})$$

它的图形和图 A - 2 是一样的, 只不过图中的 x 、 y 应换成 V 、 P 。

在 (A. 10) 式中我们也可以选择 P 为自变量, V 为因变量, 这样它就应写成

$$V = V(P) = \frac{C}{P}. \quad (\text{A. 12})$$

由此可见, 在一个公式中自变量和因变量往往是相对的。

(4) 欧姆定律

$$U = IR. \quad (\text{A. 13})$$

当我们讨论一段导线中的电流 I 这样随着外加电压 U 而改变的问题时, U 是自变量, I 是因变量, R 是常量。这时, (A. 13) 式应写作

$$I = I(U) = \frac{U}{R}, \quad (\text{A. 14})$$

即 I 与 U 成正比。

应当指出, 任意常量与变量之间的界限也不是绝对的。例如, 当我们讨论串联电路中电压在各电阻元件上分配问题时, 由于通过各元件的电流是一样的, (A. 13) 式中的电流 I 成了常量, 而 R 是自变量, U 是因变量, 于是

$$U = U(R) = IR, \quad (\text{A. 15})$$

即 U 与 R 成正比。但是, 当我们讨论并联电路中电流在各分支里的分配问题时, 由于各分支两端具有共同的电压, (A. 13) 式中的 U 就成了常量, 而 R 为自变量, I 是因变量, 于是

$$I = I(R) = \frac{U}{R}, \quad (\text{A. 16})$$

即 I 与 R 成反比。

总之, 每个物理公式都反映了一些物理量之间的函数关系, 但是其中哪个是自变量, 哪个是因变量, 哪些是常量, 有时公式本身反映不出来, 需要根

据我们所要讨论的问题来具体分析。

§ 2. 导数

2.1 极限

如果当自变量 x 无限趋近某一数值 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 的数值无限趋近某一确定的数值 a , 则 a 叫做 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限值, 并记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a. \quad (\text{A. 17})$$

(A. 17) 式中的“lim”是英语“limit(极限)”一词的缩写, (A. 17) 式读作“当 x 趋近 x_0 时, $f(x)$ 的极限值等于 a ”。

极限是微积分中的一个最基本的概念, 它涉及的问题面很广。这里我们不企图给“极限”这个概念下一个普遍而严格的定义, 只通过一个特例来说明它的意义。

考虑下面这个函数:

$$y = f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}. \quad (\text{A. 18})$$

这里除 $x = 1$ 外, 计算任何其它地方的函数值都是没有困难的。例如当 $x = 0$ 时, $f(0) = \frac{-2}{-1} = 2$; 当 $x = 2$ 时, $f(2) = \frac{8}{1} = 8$, 等等。但是若问 $x = 1$ 时函数值 $f(1) = ?$ 我们就会发现, 这时 (A. 18) 式的分子和分母都等于 0, 即 $f(1) = \frac{0}{0}$! 用 0 去除 0, 一般地说是没有意义的。所以表达式 (A. 18) 没有直接给出 $f(1)$, 但给出了 x 无论如何接近 1 时的函数值来。下表列出了当 x 的值从小于 1 和大于 1 两方面趋于 1 时 $f(x)$ 值的变化情况:

表 A - 1 x 与 $f(x)$ 的变化值

x	$3x^2 - x - 2$	$x - 1$	$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$
0.9	-0.47	-0.1	4.7
0.99	-0.0497	-0.01	4.97
0.999	-0.004997	-0.001	4.997
0.9999	-0.00049997	-0.0001	4.9997
1.1	0.53	0.1	5.3
1.01	0.503	0.01	5.03
1.001	0.005003	0.001	5.003
1.0001	0.00050003	0.0001	5.0003

从上表可以看出, x 值无论从哪边趋近 1 时, 分子分母的比值都趋于一个确定的数值——5, 这便是 $x \rightarrow 1$ 时 $f(x)$ 的极限值。

其实计算 $f(x)$ 值的极限无需这样麻烦, 我们只要将 (A. 18) 式的分子作因式分解:

$$3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1),$$

并在 $x \neq 1$ 的情况下从分子和分母中将因式 $(x - 1)$ 消去:

$$y = f(x) = \frac{(3x + 2)(x - 1)}{x - 1} = 3x + 2. \quad (x \neq 1)$$

即可看出, x 趋于 1 时函数 $f(x)$ 的数值趋于 $3 \times 1 + 2 = 5$ 。所以根据函数极限的定义,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = 5.$$

2.2 几个物理学中的实例

(1) 瞬时速度

当一个物体作任意直线运动时, 它的位置可用它到某个坐标原点 O 的距离 s 来描述。在运动过程中 s 是随时间 t 变化的, 也就是说, s 是 t 的函数:

$$s = s(t).$$

函数 $s(t)$ 告诉我们的是这个物体什么时刻到达什么地方。形象一些说, 假如物体是一列火车, 则函数 $s(t)$ 就是它的一张“旅行时刻表”。但是, 在实际中往往不满足于一张“时刻表”, 我们还需要知道物体运动快慢的程度, 即速度或速率的概念。例如, 当车辆驶过繁华的街道或桥梁时, 为了安全, 对它的速率就要有一定的限制; 一个上抛体(如高射炮弹)能够达到怎样的高度, 也与它的初始速率有关, 等等。

为了建立速率的概念, 我们就要研究在一段时间间隔里物体位置的改变情况。假设我们考虑的是从 $t = t_0$ 到 $t = t_1$ 的一段时间间隔, 则这间隔的大小为

$$\Delta t = t_1 - t_0.$$

根据 s 和 t 的函数关系 $s(t)$ 可知, 在 t_0 和 $t_1 = t_0 + \Delta t$ 两个时刻, s 的数值分别为 $s(t_0)$ 和 $s(t_1) = s(t_0 + \Delta t)$, 即在 t_0 到 t_1 这段时间间隔里 s 改变了

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

在同样大小的时间间隔 Δt 里, 若 s 的改变量 Δs 小, 就表明物体运动得慢, 所以我们就把 Δs 与 Δt 之比 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 叫做这段时间间隔里的平均速率。用 \bar{v} 来表示, 则

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (\text{A. 19})$$

举例来说,对于匀变速直线运动,根据(A. 4) 式有

$$s(t_0) = s_0 + v_0 t_0 + \frac{1}{2} a t_0^2,$$

和
$$s(t_0 + \Delta t) = s_0 + v_0 \cdot (t_0 + \Delta t) + \frac{1}{2} a \cdot (t_0 + \Delta t)^2,$$

所以

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{\left[s_0 + v_0 \cdot (t_0 + \Delta t) + \frac{1}{2} a \cdot (t_0 + \Delta t)^2 \right] - \left[s_0 + v_0 t_0 + \frac{1}{2} a t_0^2 \right]}{\Delta t} \\ &= \frac{(v_0 + a t_0) \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t} = v_0 + a t_0 + \frac{1}{2} a \Delta t. \end{aligned}$$

平均速率 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 反映了物体在一段时间间隔内运动的快慢,除了匀速直线运动的特殊情况外, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的数值或多或少与 Δt 的大小有关。 Δt 取得愈短, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 就愈能反映出物体在 $t = t_0$ 时刻运动的快慢。通常我们就把 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限值,叫做物体在 $t = t_0$ 时刻的瞬时速率 v , 即

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (\text{A. 20})$$

对于匀变速直线运动来说,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_0 + a t_0 + \frac{1}{2} a \Delta t \right) = v_0 + a t_0.$$

这就是我们熟悉的匀变速直线运动的速率公式(A. 5)。

(2) 瞬时加速度

一般地说,瞬时速度或瞬时速率 v 也是 t 的函数:

$$v = v(t).$$

但是在许多实际问题中,只有速度和速率的概念还不够,我们还需要知道速度随时间变化的快慢,即需要建立“加速度”的概念。

平均加速度 \bar{a} 和瞬时加速度 a 概念的建立与 \bar{v} 和 v 的类似。在直线运动中,首先取一段时间间隔 t_0 到 t_1 , 根据瞬时速率 v 和时间 t 的函数关系 $v(t)$ 可知,在 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 两时刻的瞬时速率分别为 $v(t_0)$ 和 $v(t_1) = v(t_0 + \Delta t)$, 因此在 t_0 到 t_1 这段时间间隔里 v 改变了

$$\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0).$$

我们把 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 叫做这段时间间隔里的平均加速度, 记作 \bar{a} :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}. \quad (\text{A. 21})$$

举例来说, 对于匀变速直线运动, 根据(A. 5) 式有

$$v(t_0) = v_0 + at_0,$$

$$v(t_0 + \Delta t) = v_0 + a(t_0 + \Delta t),$$

所以平均加速度为

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{[v_0 + a(t_0 + \Delta t)] - (v_0 + at_0)}{\Delta t} = a(\text{常量}). \end{aligned}$$

对于一般的变速运动, \bar{a} 也是与 Δt 有关的, 这时为了反映出某一时刻速度变化的快慢, 我们就需取 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限, 这就是物体在 $t = t_0$ 时刻的瞬时加速度 a :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}. \quad (\text{A. 22})$$

(3) 水渠的坡度 任何排灌水渠的两端都有一定的高度差, 这样才能使水流动。为简单起见, 我们假设水渠是直的, 这时可以把 x 坐标轴取为逆水渠走向的方向(见图 A - 5), 于是各处渠底的高度 h 便是 x 的函数:

$$h = h(x).$$

知道了这个函数, 我们就可以计算任意两点之间的高度差。

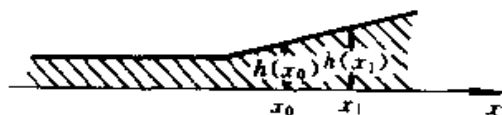


图 A - 5

在修建水渠的时候, 人们经常运用“坡度”的概念。譬如说, 若逆水渠而上, 渠底在 100 米的距离内升高了 20 厘米, 人们就说这水渠的坡度是 $\frac{0.2\text{m}}{100\text{m}} = \frac{2}{1000}$ 。因此所谓坡度, 就是指单位长度内的高度差, 它的大小反映着高度随长度变化的快慢程度。如果用数学语言来表达, 我们就要取一段水渠, 设它的两端的坐标分别为 x_0 和 x_1 , 于是这段水渠的长度为

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

根据 h 和 x 的函数关系 $h(x)$ 可知, 在 x_0 和 $x_1 = x_0 + \Delta x$ 两地 h 的数值分别为 $h(x_0)$ 和 $h(x_1) = h(x_0 + \Delta x)$, 所以在 Δx 这段长度内 h 改变了

$$\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0).$$

根据上述坡度的定义,这段水渠的平均坡度为

$$\bar{\kappa} = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x}. \quad (\text{A. 23})$$

在前面所举的数字例子里, Δx 采用了 100 米的数值。实际上在 100 米的范围内,水渠的坡度可能各处不同。为了更细致地把水渠在各处的坡度反映出来,我们应当取更小的长度间隔 Δx 。 Δx 取得愈小, $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ 就愈能精确地反映出 $x = x_0$ 这一点的坡度。所以在 $x = x_0$ 这一点的坡度 κ 应是 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的平均坡度 $\bar{\kappa}$ 的极限值,即

$$\kappa = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x}. \quad (\text{A. 24})$$

2.3 函数的变化率——导数

前面我们举了三个例子,在前两个例子中自变量都是 t ,第三个例子中自变量是 x 。这三个例子都表明,在我们研究变量与变量之间的函数关系时,除了它们数值上“静态的”对应关系外,我们往往还需要有“运动”或“变化”的观点,着眼于研究函数变化的趋势、增减的快慢,亦即,函数的“变化率”概念。

当变量由一个数值变到另一个数值时,后者减去前者,叫做这个变量的增量。增量,通常用代表变量的字母前面加个“ Δ ”来表示。例如,当自变量 x 的数值由 x_0 变到 x_1 时,其增量就是

$$\Delta x = x_1 - x_0. \quad (\text{A. 25})$$

与此对应。因变量 y 的数值将由 $y_0 = f(x_0)$ 变到 $y_1 = f(x_1)$,于是它的增量为

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (\text{A. 26})$$

应当指出,增量是可正可负的,负增量代表变量减少。增量比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{A. 27})$$

可以叫做函数在 $x = x_0$ 到 $x = x_0 + \Delta x$ 这一区间内的平均变化率,它在 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限值叫做函数 $y = f(x)$ 对 x 的导数或微商,记作 y' 或 $f'(x)$,

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (\text{A. 28})$$

除 y' 、 $f'(x)$ 外,导数或微商还常常写作 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{df}{dx}$ 、 $\frac{d}{dx}f(x)$ 等其它形式。导数与增量不同,它代表函数在一点的性质,即在该点的变化率。

应当指出,函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 本身也是 x 的一个函数,因此我们

可以再取它对 x 的导数, 这叫做函数 $y = f(x)$ 的二阶导数, 记作 y'' 、 $f''(x)$ 、 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 等。

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} f'(x). \quad (\text{A. 29})$$

据此类推, 我们不难定义出高阶的导数来。

有了导数的概念, 前面的几个实例中的物理量就可表示为:

$$\text{瞬时速率} \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad (\text{A. 30})$$

$$\text{瞬时加速度} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (\text{A. 31})$$

$$\text{水渠坡度} \quad \kappa = \frac{dh}{dx}. \quad (\text{A. 32})$$

2.4 导数的几何意义

在几何中切线的概念也是建立在极限的基础上的。如图 A-6 所示, 为了确定曲线在 P_0 点的切线, 我们先在曲线上 P_0 附近选另一点 P_1 , 并设想 P_1 点沿着曲线向 P_0 点靠拢。 P_0P_1 的连线是曲线的一条割线, 它的方向可用这直线与横坐标轴的夹角 α 来描述。从图上不难看出, P_1 点愈靠近 P_0 点, α 角就愈接近一个确定的值 α_0 , 当 P_1 点完全和 P_0 点重合的时候, 割线 P_0P_1 变成切线 P_0T , α 的极限值 α_0 就是切线与横轴的夹角。

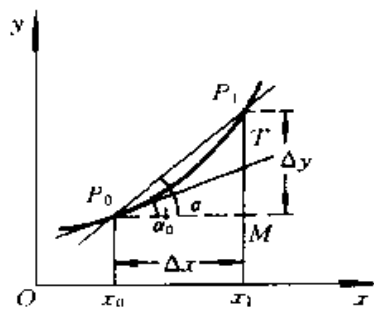


图 A-6

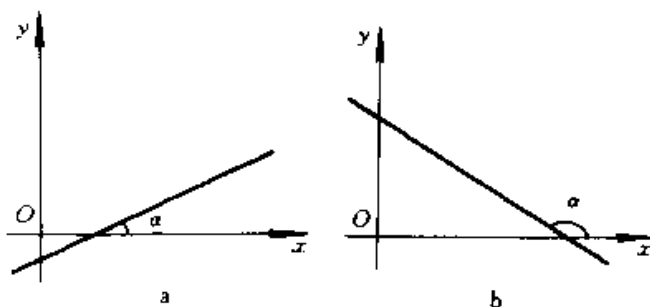


图 A-7

在解析几何中, 我们把一条直线与横坐标轴夹角的正切 $\tan \alpha$ 叫做这条直线的斜率。斜率为正时表示 α 是锐角, 从左到右直线是上坡的 (见图 A-7a); 斜率为负时表示 α 是钝角, 从左到右直线是下坡的 (见图 A-7b)。现在我们来研究图 A-6 中割线 P_0P_1 和切线 P_0T 的斜率。

设 P_0 和 P_1 的坐标分别为 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, 以割线 P_0P_1 为斜边作一直角三角形 $\triangle P_0P_1M$, 它的水平边 P_0M 的长度为 Δx , 竖直边

MP_1 的长度为 Δy , 因此这条割线的斜率为

$$\tan \alpha = \frac{\overline{MP_1}}{\overline{P_0P_1}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

如果图 A-6 中的曲线代表函数 $y = f(x)$, 则割线 P_0P_1 的斜率就等于函数在 $x = x_0$ 附近的增量比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 切线 P_0T 的斜率 $\tan \alpha_0$ 是 $P_1 \rightarrow P_0$ 时割线 P_0P_1 斜率的极限值, 即

$$\tan \alpha_0 = \lim_{P_1 \rightarrow P_0} \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

所以导数的几何意义是切线的斜率。

§ 3. 导数的运算

在上节里我们只给出了导数的定义, 本节将给出以下一些公式和定理, 利用它们可以把常见函数的导数求出来。

3.1 基本函数的导数公式

(1) $y = f(x) = C$ (常量)

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

(2) $y = f(x) = x$

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - (x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \end{aligned}$$

(3) $y = f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

(4) $y = f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 3x^2. \end{aligned}$$

(5) $y = f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
 y' = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - (x + \Delta x)}{(x + \Delta x)x\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x)x} = \frac{-1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

$$(6) y = f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
 y' = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \right] \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

上面推导的结果可以归纳成一个普遍公式:当 $y = x^n$ 时,

$$y' = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}. \quad (n \text{ 为任何数}) \quad (\text{A. 33})$$

例如当 $n = 1$ 时, $y = f(x) = x$, $y' = \frac{dx}{dx} = 1$; 当 $n = 2$ 时, $y = f(x) = x^2$, $y' = \frac{dx^2}{dx} = 2x$; 当 $n = 3$ 时, $y = f(x) = x^3$, $y' = \frac{dx^3}{dx} = 3x^2$; 当 $n = -1$ 时, $y = f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$; 当 $n = \frac{1}{2}$ 时, $y = f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, $y' = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 等等。利用 (A. 33) 式我们还可以计算其它幂函数的导数(见表 A-2)。

除了幂函数 x^n 外,物理学中常见的基本函数还有三角函数、对数函数和指数函数。我们只给出这些函数的导数公式(见表 A-2)而不推导,读者可以直接引用。

3.2 有关导数运算的几个定理

定理一

$$\frac{d}{dx}[u(x) \pm v(x)] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}. \quad (\text{A. 34})$$

证:

$$\frac{d}{dx}[u(x) \pm v(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$$

定理二

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = v(x) \frac{du}{dx} + u(x) \frac{dv}{dx}. \quad (\text{A. 35})$$

证:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \\ &= v(x) \frac{du}{dx} + u(x) \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

表 A-2 基本导数公式

函数 $y = f(x)$	导数 $y' = f'(x)$
C (任意常量)	0
x^n (n 为任意数)	nx^{n-1}
$n = 1, \quad x$	1
$n = 2, \quad x^2$	$2x$
$n = 3, \quad x^3$	$3x^2$
$n = -1, \quad x^{-1} = \frac{1}{x}$	$(-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$n = -2, \quad x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	$(-2)x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
$n = \frac{1}{2}, \quad x^{1/2} = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$n = -\frac{1}{2}, \quad x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2(\sqrt{x})^3}$
$n = -\frac{3}{2}, \quad x^{-3/2} = \frac{1}{(\sqrt{x})^3}$	$-\frac{3}{2}x^{-5/2} = -\frac{3}{2(\sqrt{x})^5}$
.....
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

定理三

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right] = \frac{v(x) \frac{du}{dx} - u(x) \frac{dv}{dx}}{[v(x)]^2}. \quad (\text{A. 36})$$

证:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x) + \Delta u]v(x) - u(x)[v(x) + \Delta v]}{[v(x) + \Delta v]v(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{[v(x) + \Delta v]v(x)\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{[v(x) + \Delta v]v(x)} = \frac{v(x) \frac{du}{dx} - u(x) \frac{dv}{dx}}{[v(x)]^2}.\end{aligned}$$

定理四

$$\frac{d}{dx}u[v(x)] = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}. \quad (\text{A. 37})$$

证:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}u[v(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u[v(x) + \Delta v] - u[v(x)]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(v + \Delta v) - u(v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left[\frac{u(v + \Delta v) - u(v)}{\Delta v} \right] \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \\&= \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.\end{aligned}$$

例题 1 求 $y = x^2 \pm a^2$ (a 为常量) 的导数。

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} \pm \frac{da^2}{dx} = 2x \pm 0 = 2x. \quad \blacksquare$

例题 2 求 $y = \ln \frac{x}{a}$ (a 为常量) 的导数。

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} - \frac{d \ln a}{dx} = \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x}. \quad \blacksquare$

例题 3 求 $y = ax^2$ (a 为常量) 的导数。

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} x^2 + a \frac{dx^2}{dx} = 0 \cdot x^2 + a \cdot 2x = 2ax. \quad \blacksquare$

例题 4 求 $y = x^2 e^x$ 的导数。

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} e^x + x^2 \frac{de^x}{dx} = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2)e^x. \quad \blacksquare$

例题 5 求 $y = \frac{3x^2 - 2}{5x + 1}$ 的导数。

解:
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{d(3x^2 - 2)}{dx}(5x + 1) - (3x^2 - 2) \frac{d(5x + 1)}{dx}}{(5x + 1)^2} \\&= \frac{6x(5x + 1) - (3x^2 - 2) \cdot 5}{(5x + 1)^2} = \frac{15x^2 + 6x + 10}{(5x + 1)^2}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

例题 6 求 $y = \tan x$ 的导数。

解:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \frac{d \sin x}{dx} - \frac{d \cos x}{dx} \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \quad \blacksquare$$

例题 7 求 $y = \cos(ax + b)$ (a, b 为常量) 的导数。

解: 令 $v = ax + b$, $y = u(v) = \cos v$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = (-\sin v) \cdot a = -a \sin(ax + b). \quad \blacksquare$$

例题 8 求 $\sqrt{x^2 - 1}$ 的导数。

解: 令 $v = x^2 - 1$, $y = u(v) = \sqrt{v}$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad \blacksquare$$

例题 9 求 $y = x^2 e^{-ax^2}$ (a 为常量) 的导数。

解: 令 $u = e^v$, $v = -ax^2$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} u + x^2 \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} = 2xu + x^2 \cdot e^v \cdot (-2ax) = 2x(1 - ax^2) e^{-ax^2}. \quad \blacksquare$$

§ 4. 微分和函数的幂级数展开

4.1 微分

自变量的微分, 就是它的任意一个无限小的增量 Δx . 用 dx 代表 x 的微分, 则

$$dx = \Delta x. \quad (\text{A. 38})$$

一个函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 乘以自变量的微分 dx , 叫做这个函数的微分, 用 dy 或 $df(x)$ 表示, 即

$$dy = df(x) = f'(x)dx, \quad (\text{A. 39})$$

故
$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (\text{A. 40})$$

在前面我们也曾把导数写成 $\frac{dy}{dx}$ 的形式. 然而它是把它作为一个整体引入的. 当时它虽然表面上具有分数的形式, 但在运算时并不象普通分数那样可以拆成“分子”和“分母”两部分. 在引入微分的概念之后, 我们就可把导数看成微分 dy 与 dx 之商 (所谓“微商”), 即一个真正的分数了. 把导数写成分数形式, 常常是很方便的, 例如, 把上节定理四 (A. 37) 式的左端 $\frac{d}{dx} u[v(x)]$ 简写成 $\frac{du}{dx}$, 则该式化为

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

此公式从形式上看就和分数运算法则一致了, 很便于记忆.

下面看微分的几何意义. 图 A-8 是任一函数 $y = f(x)$ 的图形,

$P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 是曲线上两个邻近的点, P_0T 是通过 P_0 的切线。直角三角形 $\triangle P_0MP_1$ 的水平边 $\overline{P_0M} = \Delta x$, 竖直边 $\overline{MP_1} = \Delta y$ (见图 A-8)。设 P_0T 与 MP_1 的交点为 N , 则

$$\tan \angle NP_0M = \frac{\overline{MN}}{\overline{P_0M}} = \frac{\overline{MN}}{\Delta x}.$$

但 $\tan \angle NP_0M$ 为切线 P_0T 的斜率, 它等于 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$, 因此

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan \angle NP_0M \cdot \Delta x = \overline{MN}.$$

所以微分 dy 在几何图形上相当于线段 MN 的长度, 它和增量 $\Delta y = \overline{MP_1}$ 相差 $\overline{NP_1}$ 一段长。从上一节计算导数时取极限的过程中可以看出, dy 是 Δy 中正比于 Δx 的那一部分, 而 $\overline{NP_1}$ 则是正比于 $(\Delta x)^2$ 以及 Δx 更高幂次的各项之和 [例如对于函数 $y = f(x) = x^3$, $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, 而 $dy = f'\Delta x = 3x^2\Delta x$]。当 Δx 很小时, $(\Delta x)^2, (\Delta x)^3, \dots$ 比 Δx 小得多, $\overline{NP_1}$ 也就比 dy 小得多, 所以我们可以把微分 dy 叫做增量 Δy 中的线性主部。这就是说, 如果函数在 $x = x_0$ 的地方象线性函数那样增长, 则它的增量就是 dy 。

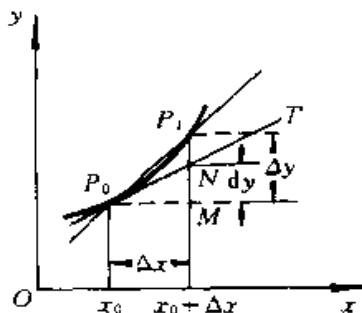


图 A-8

4.2 幂函数的展开

已知一个函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 一点的数值 $f(x_0)$, 如何求得其附近的点 $x = x_0 + \Delta x$ 处的函数值 $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$? 若 $f(x)$ 为 x 的幂函数 x^n , 我们可以利用牛顿的二项式定理:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n = (x_0 + \Delta x)^n \\ &= x_0^n \left[1 + \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right) \right]^n = f(x_0) \left[1 + \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right) \right]^n \\ &= f(x_0) \left[1 + n \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-3)}{3!} \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^3 + \dots \right] \\ &= f(x_0) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^m, \quad (\text{A. 41}) \end{aligned}$$

此式适用于任何 n (整数、非整数、正数、负数, 等等)。如果 n 为正整数, 则上式中的级数在 $m = n$ 的地方截断, 余下的项自动为 0, 否则上式为无穷级数。不过当 $\Delta x \ll x_0$ 时, 后面的项愈来愈小, 我们只需保留有限多项就足够精确了。

不要以为数学表达式愈精确愈好。譬如图 A-9 中 A、B 两点间的水平距离为 l ，若将 B 点竖直向上提高一个很小的距离 a ($a \ll l$) 而到达 B' ，问 AB' 之间的距离比 AB 增大了多少？利用勾股弦定理很容易写出，距离的增加量为

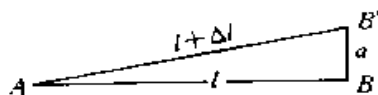


图 A-9

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + a^2} - l.$$

这是个精确的公式，但没有给我们一个鲜明的印象，究竟 Δl 是随 a 怎样变化的。如果我们用二项式定理将它展开，只保留到最低级的非 0 项，则有

$$\begin{aligned} \Delta l &= l \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2} - 1 \right] = l \left\{ \left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \\ &= l \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l}\right)^2 + \cdots - 1 \right\} \approx \frac{l}{2} \left(\frac{a}{l}\right)^2 = \frac{a^2}{2l}. \end{aligned}$$

即 Δl 是正比于 a 平方增长的，属二级小量。这种用幂级数展开来分析主要变化趋势的办法，在物理学里是经常用到的。

4.3 泰勒展开

非幂函数（譬如 $\sin x$ 、 e^x ）如何作幂级数展开？这要用泰勒 (Taylor) 展开。下面我们用一种不太严格，但简单明了的办法将它导出。假设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的增量 $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ 能够展成 $\Delta x = x - x_0$ 的幂级数：

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (x - x_0)^m, \quad (\text{A. 42})$$

则通过逐项求导可得

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1},$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时， $m > 1$ 的项都趋于 0，于是有

$$f'(x_0) = a_1.$$

再次求导，得

$$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m (x - x_0)^{m-2},$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时， $m > 2$ 的项都趋于 0，于是有

$$f''(x_0) = 2a_2.$$

如此类推，一般地说，对于 m 阶导数有

$$f^{(m)}(x_0) = m! a_m.$$

于是(A. 42)式可以写为

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m, \quad (\text{A. 43})$$

如果定义第 0 阶导数 $f^{(0)}(x)$ 就是函数 $f(x)$ 本身, 则上式还可进一步简写为

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m. \quad (\text{A. 44})$$

(A. 43) 或 (A. 44) 式称为泰勒展开式, 它在物理学中是非常有用的公式。

下面在表 A - 3 中给出几个常见函数在 $x_0 = 0$ 或 1 处的泰勒展开式。

表 A - 3 常见函数的幂级数展开式

函 数	展 开 式	收敛范围
$(1 \pm x)^{1/2}$	$1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{3/2}$	$1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{5/2}$	$1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-3/2}$	$1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-5/2}$	$1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$ x < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$	$ x < \infty$
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x < \infty$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x)$	$-\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right)$	$-1 \leq x < 1$

§ 5. 积分

5.1 几个物理中的实例

(1) 变速直线运动的路程

我们都熟悉匀速直线运动的路程公式。如果物体的速率是 v , 则它在 t_a 到 t_b 一段时间间隔内走过的路程是

$$s = v(t_b - t_a). \quad (\text{A. 45})$$

对于变速直线运动来说, 物体的速率 v 是时间的函数:

$$v = v(t),$$

函数的图形是一条曲线(见图 A-10a), 只有在匀速直线运动的特殊情况下, 它才是一条直线(参见图 A-4b)。对于变速直线运动, (A. 45) 式已不适用。但是, 我们可以把 $t = t_a$ 到 $t = t_b$ 这段时间间隔分割成许多小段, 当小段足够短时, 在每小段时间内的速率都可以近似地看成是不变的。这样一来, 物体在每小段时间里走过的路程都可以按照匀速直线运动的公式来计算, 然后把各小段时间里走过的路程都加起来, 就得到 t_a 到 t_b 这段时间里走过的总路程。

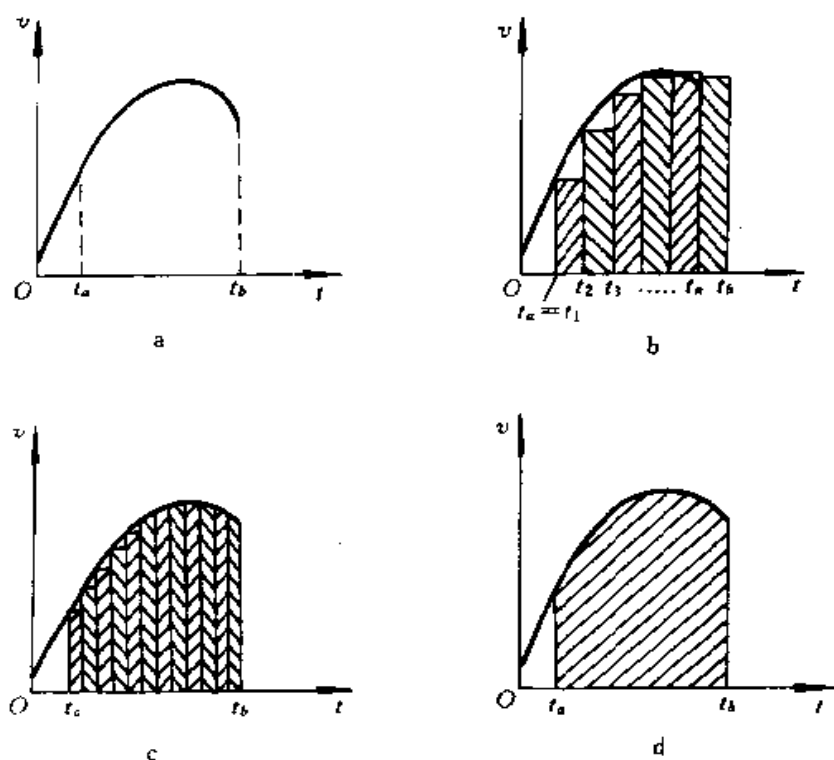


图 A-10

设时间间隔 $(t_b - t_a)$ 被 $t = t_1 (= t_a), t_2, t_3, \dots, t_n, t_b$ 分割成 n 小段, 每小段时间间隔都是 Δt , 则在 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 各时刻速率分别是 $v(t_1), v(t_2), v(t_3), \dots, v(t_n)$ 。如果我们将各小段时间的速率 v 看成是不变的, 则按照匀速直线运动的公式, 物体在这些小段时间走过的路程分等于 $v(t_1)\Delta t, v(t_2)\Delta t, v(t_3)\Delta t, \dots, v(t_n)\Delta t$ 。于是, 在整个 $(t_b - t_a)$ 这段时间里的总路程是

$$\begin{aligned} s &= v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + v(t_3)\Delta t + \dots + v(t_n)\Delta t \\ &= \sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t. \end{aligned} \quad (\text{A. 46})$$

现在来看看上式的几何意义。在函数 $v = v(t)$ 的图形中, 通过 $t = t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 各点垂线的高度分别是 $v(t_1), v(t_2), v(t_3), \dots, v(t_n)$ (见图 A-10b), 所以 $v(t_1)\Delta t, v(t_2)\Delta t, v(t_3)\Delta t, \dots, v(t_n)\Delta t$ 就分别是图中那些狭长矩形的面积, 而 $\sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t$ 则是所有这些矩形面积的总和, 即图中画了斜线的阶梯状图形的面积。

在上面的计算中, 我们把各小段时间 Δt 里的速率 v 看做是不变的, 实际上在每小段时间里 v 多少还是有些变化的, 所以上面的计算并不精确。要使计算精确, 就需要把小段的数目 n 加大, 同时所有小段的 Δt 缩短 (见图 A-10c)。 Δt 愈短, 在各小段里 v 就改变得愈少, 把各小段里的运动看成匀速运动也就愈接近实际情况。所以要严格地计算变速运动的路程 s , 我们就应对 (A. 46) 式取 $n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$ 的极限, 即

$$s = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t. \quad (\text{A. 47})$$

当 n 愈来愈大, Δt 愈来愈小的时候, 图 A-10 中的阶梯状图形的面积就愈来愈接近 $v(t)$ 曲线下方的面积 (图 A-10d)。所以 (A. 47) 式中的极限值等于 $(t_b - t_a)$ 区间内 $v(t)$ 曲线下的面积。

总之, 在变速直线运动中, 物体在任一段时间间隔 $(t_b - t_a)$ 里走过的路程要用 (A. 47) 式来计算, 这个极限值的几何意义相当于这区间内 $v(t)$ 曲线下的面积。

(2) 变力的功

当力与物体移动的方向一致时, 在物体由位置 $s = s_a$ 移到 $s = s_b$ 的过程中, 恒力 F 对它所作的功为

$$A = F(s_b - s_a). \quad (\text{A. 48})$$

如果力 F 是随位置变化的, 即 F 是 s 的函数: $F = F(s)$, 则不能运用 (A. 48)

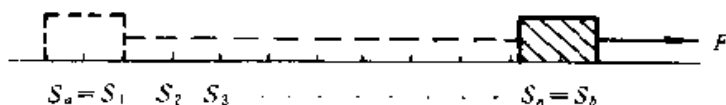


图 A - 11

式来计算力 F 的功了。这时, 我们也需要象计算变速运动的路程那样, 把 $(s_b - s_a)$ 这段距离分割成 n 个长度为 Δs 的小段 (见图 A - 11), 并把各小段内力 F 的数值近似看成是恒定的, 用恒力作功的公式计算出每小段路程 Δs 上的功, 然后加起来取 $n \rightarrow \infty$ 、 $\Delta s \rightarrow 0$ 的极限值。具体地说, 设力 F 在各小段路程内的数值分别为 $F(s_1)$ 、 $F(s_2)$ 、 $F(s_3)$ 、 \dots 、 $F(s_n)$, 则在各小段路程上力 F 所作的功分别为 $F(s_1)\Delta s$ 、 $F(s_2)\Delta s$ 、 $F(s_3)\Delta s$ 、 \dots 、 $F(s_n)\Delta s$ 。在 $(s_b - s_a)$ 整段路程上力 F 的总功 A 就近

似地等于 $\sum_{i=1}^n F(s_i)\Delta s$ 。因为实际上在每小段路程上力 F 都是变化的, 所以严格地计算, 还应取 $n \rightarrow \infty$ 、 $\Delta s \rightarrow 0$ 的极限值, 即

$$A = \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n F(s_i)\Delta s. \quad (\text{A. 49})$$

同上例, 这极限值应是 $(s_b - s_a)$ 区间内 $F(s)$ 下面的面积 (见图 A - 12)。

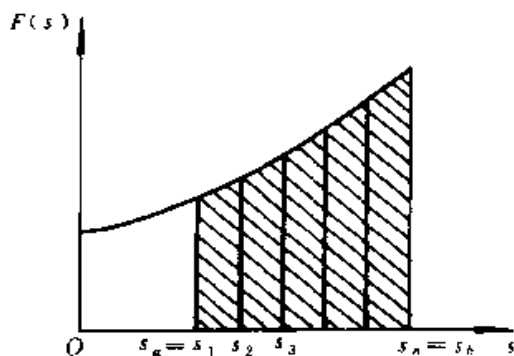


图 A - 12

5.2 定积分

以上两个例子表明, 许多物理问题中需要计算象 (A. 47) 和 (A. 49) 式中给出的那类极限值。概括起来说, 就是要解决如下的数学问题: 给定一个函数 $f(x)$, 用 $x = x_1 (= a)$ 、 x_2 、 x_3 、 \dots 、 x_n 、 b 把自变量 x 在 $(b - a)$ 区间内的数值分成 n 小段, 设每小段的大小为 Δx , 求 $n \rightarrow \infty$ 、 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ 的极限。通常把这类形式的极限用符号 $\int_a^b f(x) dx$ 来表示, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x. \quad (\text{A. 50})$$

$\int_a^b f(x) dx$ 叫做 $x = a$ 到 $x = b$ 区间内 $f(x)$ 对 x 的定积分, $f(x)$ 叫做被积函数, b 和 a 分别叫做定积分的上限和下限。

用定积分的符号来表示, (A. 47) 和 (A. 49) 式可分别写为

$$s = \int_{t_a}^{t_b} v(t) dt \quad (\text{A. 51})$$

$$A = \int_{s_a}^{s_b} F(s) ds. \quad (\text{A. 52})$$

在变速直线运动的路程公式 (A. 51) 里, 自变量是 t , 被积函数是 $v(t)$, 积分的上、下限分别是 t_b 和 t_a ; 在变力做功的公式 (A. 52) 里, 自变量是 s , 被积函数是 $F(s)$, 积分的上、下限分别是 s_b 和 s_a .

求任意函数定积分的办法有赖于下面关于定积分的基本定理:

如果被积函数 $f(x)$ 是某个函数 $\Phi(x)$ 的导数, 即

$$f(x) = \Phi'(x),$$

则在 $x = a$ 到 $x = b$ 区间内 $f(x)$ 对 x 的定积分等于 $\Phi(x)$ 在这区间内的增量, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (\text{A. 53})$$

现在我们来证明上述定理。

在 $a \leq x \leq b$ 区间内任选一点 x_i , 首先考虑 $\Phi(x)$ 在 $x = x_i$ 到 $x = x_i + \Delta x \equiv x_{i+1}$ 区间的增量 $\Delta\Phi(x_i) = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)$;

$$\Delta\Phi(x_i) = \frac{\Delta\Phi(x_i)}{\Delta x} \Delta x.$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 我们可用 $\Phi(x)$ 的导数 $\Phi'(x) = \frac{d\Phi}{dx}$ 代替 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$, 但按照定理的前提, $\Phi'(x) = f(x)$, 故

$$\Delta\Phi(x_i) \approx \Phi'(x_i) \Delta x = f(x_i) \Delta x.$$

式中 \approx 表示“近似等于”, 若取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限, 上式就是严格的等式。

把 $a \leq x \leq b$ 区间分成 $n - 1$ 小段, 每段长 Δx . 上式适用于每小段。根据积分的定义和上式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x] \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} [\Delta\Phi(x_1) + \Delta\Phi(x_2) + \cdots + \Delta\Phi(x_{n-1})] \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \{[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] + [\Phi(x_3) - \Phi(x_2)] \\ &\quad + \cdots + [\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})]\} \\ &= \Phi(x_n) - \Phi(x_1), \end{aligned}$$

因 $x_1 = a$, $x_n = b$, 于是得 (A. 53) 式, 至此定理证讫。

下面看看函数 $\Phi(x)$ 在 f - x 图(见图 A-13)中所表现的几何意义。如前所述, $\Delta\Phi(x_i) = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = f(x_i)\Delta x$, 正是宽为 Δx 、高为 $f(x_i) = \overline{x_i P_i}$ 的一个矩形(即图 A-13 中的矩形 $x_i x_{i+1} N P_i$)的面积。它和曲线段 $P_i P_{i+1}$ 下面的梯形 $x_i x_{i+1} P_{i+1} P_i$ 的面积只是相差一个小三角形 $P_i N P_{i+1}$ 的面积。当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 可认为 $\Delta\Phi(x_i)$ 就是梯形 $x_i x_{i+1} P_{i+1} P_i$ 的面积。

既然当 x 由 x_i 变到 x_{i+1} 时, $\Phi(x)$ 的增量的几何意义是相应区间 f - x 曲线下的面积, 则 $\Phi(x)$ 本身的几何意义就是从原点 O 到 x 区间 f - x 曲线下的面积加上一个常量 $C = \Phi(0)$ 。例如 $\Phi(x_i)$ 的几何意义是图形 $Ox_i P_i P_0$ 的面积加 C , $\Phi(x_{i+1})$ 的几何意义是图形 $Ox_{i+1} P_{i+1} P_0$ 的面积加 C , 等等。这样, $\Delta\Phi(x_i) = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)$ 就是:

$$\begin{aligned} & (Ox_{i+1} P_{i+1} P_0 \text{ 的面积} + C) - (Ox_i P_i P_0 \text{ 的面积} + C) \\ & = x_i x_{i+1} P_{i+1} P_i \text{ 的面积,} \end{aligned}$$

而 $\Phi(b) - \Phi(a)$ 的几何意义是:

$$\begin{aligned} & (Ob P_b P_0 \text{ 的面积} + C) - (Oa P_a P_0 \text{ 的面积} + C) \\ & = ab P_b P_a \text{ 的面积.} \end{aligned}$$

它相当于定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值。

5.3 不定积分及其运算

在证明了上述定积分的基本定理之后, 我们就可以着手解决积分的运算问题了。根据上述定理, 只要我们求得函数 $\Phi(x)$ 的表达式, 利用 (A. 53) 式立即可以算出定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 来。那么, 给出了被积函数 $f(x)$ 的表达式之后, 怎样去求 $\Phi(x)$ 的表达式呢? 上述定理告诉我们, $\Phi'(x) = f(x)$, 所以这就相当于问 $f(x)$ 是什么函数的导数。由此可见, 积分运算是求导的逆运算。如果 $f(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的导数, 我们可以称 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的逆导数或原函数。求 $f(x)$ 的定积分就可以归结为求它的逆导数或原函数。

在上节里我们讲了一些求导数的公式和定理, 常见的函数我们都可以按照一定的法则把它们的导数求出来。然而求逆导数的问题却不像求导数那样容易, 而需要靠判断和试探。例如, 我们知道了 $\Phi(x) = x^3$ 的导数 $\Phi'(x) = 3x^2$, 也就知道了 $F(x) = 3x^2$ 的逆导数是 $\Phi(x) = x^3$ 。这时, 如果要问函

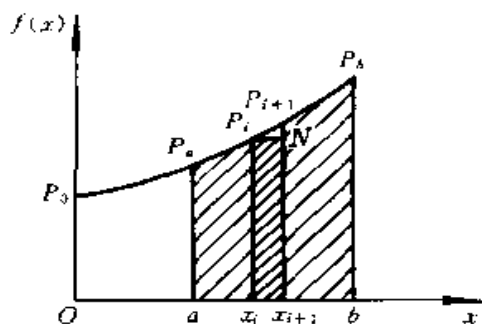


图 A-13

数 $f(x) = x^2$ 的逆导数是什么,那么我们就想到,它的逆导数应该是 $x^3/3$. 这里要指出一点,即对于一个给定的函数 $f(x)$ 来说,它的逆导数并不是唯一的。 $\Phi_1(x) = x^3/3$ 是 $f(x) = x^2$ 的逆导数, $\Phi_2(x) = x^3/3 + 1$ 和 $\Phi_3(x) = x^3/3 - 5$ 也都是它的逆导数,因为 $\Phi_1'(x)$ 、 $\Phi_2'(x)$ 、 $\Phi_3'(x)$ 都等于 x^2 . 一般说来,在函数 $f(x)$ 的某个逆导数 $\Phi(x)$ 上加一任意常量 C ,仍旧是 $f(x)$ 的逆导数。通常把一个函数 $f(x)$ 的逆导数的通式 $\Phi(x) + C$ 叫做它的不定积分,并记作 $\int f(x) dx$,于是

$$\int f(x) dx = \Phi(x) + C. \quad (\text{A. 54})$$

因在不定积分中包含任意常量,它代表的不是个别函数,而是一组函数。

表 A - 4 基本不定积分公式

函 数 $f(x)$	不定积分 $\int f(x) dx$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$n = 1$ 时, $x^1 = x$	$\frac{x^2}{2} + C$
$n = 2$ 时, x^2	$\frac{x^3}{3} + C$
$n = 3$ 时, x^3	$\frac{x^4}{4} + C$
$n = -2$ 时, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	$\frac{x^{-1}}{(-1)} + C = -\frac{1}{x} + C$
$n = \frac{1}{2}$ 时, $x^{1/2} = \sqrt{x}$	$\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C$
$n = -\frac{1}{2}$ 时, $x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$
$n = -\frac{3}{2}$ 时, $x^{-3/2} = \frac{1}{(\sqrt{x})^3}$	$\frac{x^{-1/2}}{(-\frac{1}{2})} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$
.....
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$

上面所给的例子太简单了,我们一眼就能猜到逆导数是什么。在一般的情况下求逆导数,首先要求我们对各种函数的导数掌握得很熟练,才能确定选用那一种形式的函数去试探。此外,掌握表 A-4 中给出的基本不定积分公式和其后的几个有关积分运算的定理,也是很重要的。(表中的公式可以通过求导运算倒过来验证,望读者自己去完成)

下面是几个有关积分运算的定理。

定理一 如果 $f(x) = au(x)$ (a 是常量), 则

$$\int f(x) dx = a \int u(x) dx. \quad (\text{A. 55})$$

定理二 如果 $f(x) = u(x) \pm v(x)$, 则

$$\int f(x) dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx. \quad (\text{A. 56})$$

这两个定理的证明是显而易见的,下面我们利用这两个定理和表 A-4 中的公式计算两个例题。

例题 10 求 $\int 5x^2 dx$.

解: $\int 5x^2 dx = 5 \int x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + C. \quad \blacksquare$

例题 11 求 $\int (3x^3 - x + 4) dx$.

解: $\int (3x^3 - x + 4) dx = 3 \int x^3 dx - \int x dx + 4 \int dx$
 $= \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + C. \quad \blacksquare$

定理三 如果 $f(x) = u(v) v'(x)$, 则

$$\int f(x) dx = \int u(v) v'(x) dx = \int u(v) dv. \quad (\text{A. 57})$$

此定理表明,当 $f(x)$ 具有这种形式时,我们就可以用 v 来代替 x 作自变量,这叫做换元法。经过换元往往可以把比较复杂的积分化成表 A-4 中给出的现成结果。下面看几个例题。

例题 12 求 $\int \sin(ax+b) dx$.

解: 令 $u(v) = \sin v$, $v(x) = ax+b$, $dv = v'(x) dx = a dx$, 经换元得

$$\int \sin(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int \sin v dv = -\frac{1}{a} \cos v + C = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C. \quad \blacksquare$$

例题 13 求 $\int \sin x \cos x dx$.

解: 令 $v(x) = \sin x$, 则 $dv = v'(x) dx = \cos x dx$, 于是

$$\int \sin x \cos x dx = \int v dv = \frac{1}{2} \sin^2 x + C. \quad \blacksquare$$

例题 14 求 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

解: 令 $u(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$, $v(x) = x^2 + a^2$, 则 $dv = v'(x) dx = 2x dx$, 于是

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{dv}{2\sqrt{v}} = \sqrt{v} + C = \sqrt{x^2 + a^2} + C. \quad \blacksquare$$

例题 15 求 $\int \frac{dx}{x-a}$.

解: 令 $u(v) = \frac{1}{v}$, $v(x) = x - a$, 则 $dv = v'(x) dx = dx$, 于是

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C = \ln|x-a| + C. \quad \blacksquare$$

5.4 通过不定积分计算定积分

当我们求得不定积分

$$\int f(x) dx = \Phi(x) + C$$

之后, 将上、下限的数值代入相减, 就得到定积分的值:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (\text{A. 58})$$

作定积分运算时, 任意常量就被消掉了。

例题 16 计算 $\int_0^{1/2} \sin 2\pi x dx$ 和 $\int_0^1 \sin 2\pi x dx$.

解: 因为 $\int \sin 2\pi x dx = -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x + C$, 故

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sin 2\pi x dx &= -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x \Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) \\ &= -\frac{1}{2\pi} [(-1) - 1] = \frac{1}{\pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin 2\pi x dx &= -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x \Big|_0^1 = -\frac{1}{2\pi} (\cos 2\pi - \cos 0) \\ &= \frac{1}{2\pi} [1 - 1] = 0. \end{aligned}$$

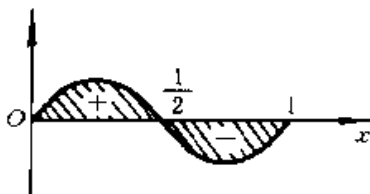


图 A-14

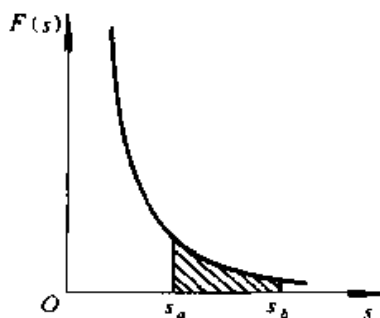


图 A-15

图 A-14 是 $f(x) = \sin 2\pi x$ 的曲线, 它在 $x=0$ 到 $1/2$ 一段是正的, 在 $x=1/2$ 到 1 一段是负的。从 $x=0$ 到 1 的定积分为 0 , 是因为横轴上下两块面积大小相等, 一正一

负,相互抵消了。

例题 17 推导匀变速直线运动的路程公式。

解: $v(t) = v_0 + at$,

$$s = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = \left[v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \right]_0^t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$

例题 18 若在(A.52)式中力 $F(s)$ 与距离平方成反比: $F(s) = a/s^2$, 求功 A (见图 A-15).

解:
$$A = \int_{s_a}^{s_b} F(s) ds = \int_{s_a}^{s_b} \frac{a ds}{s^2} = -\frac{a}{s} \Big|_{s_a}^{s_b} = a \left(\frac{1}{s_a} - \frac{1}{s_b} \right).$$

习 题

A-1.

(1) 若 $f(x) = x^2$, 写出 $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(3)$ 之值。

(2) 若 $f(x) = \cos 2\pi x$, 写出 $f(0)$ 、 $f\left(\frac{1}{12}\right)$ 、 $f\left(\frac{1}{8}\right)$ 、 $f\left(\frac{1}{6}\right)$ 、 $f\left(\frac{1}{4}\right)$ 、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 、 $f(1)$ 之值。

(3) 若 $f(x) = a + bx$, $f(0) = ?$ x_0 为多少时 $f(x_0) = 0$?

A-2. 求下列函数的导数:

(1) $y = 3x^4 - 2x^2 + 8$, (2) $y = 5 + 3x - 4x^3$, (3) $y = \frac{1}{2}ax^2$,

(4) $y = \frac{a + bx + cx^2}{x}$, (5) $y = \frac{a-x}{a+x}$, (6) $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$,

(7) $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, (8) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, (9) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$,

(10) $y = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, (11) $y = x \tan x$, (12) $y = \sin(ax + b)$,

(13) $y = \sin^2(ax + b)$, (14) $y = \cos^2(ax + b)$, (15) $y = \sin x \cos x$,

(16) $y = \ln(x + a)$, (17) $y = x^2 e^{-ax}$, (18) $y = x e^{-ax^2}$.

式中 a, b, c 为常量。

A-3. 计算习题 A-2(1) - (18) 中 y 的微分。

A-4. 求以下函数围绕 $x = 0$ 的泰勒级数中前两个非 0 项:

(1) $f(x) = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}$, (2) $f(x) = \frac{1-ax}{(1-ax+x^2)^{3/2}} - 1$,

(3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x - 1$, (4) $f(x) = 1 - \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x$.

A - 5. 求下列不定积分:

$$(1) \int (x^3 + x - 1) dx, \quad (2) \int (3 - 4x - 9x^3) dx, \quad (3) \int \frac{x^2 + x + 1}{3} dx,$$

$$(4) \int \frac{1 + x^2 + x^4}{x} dx, \quad (5) \int \frac{2 - 3x + 6x^2}{x^2} dx, \quad (6) \int \sqrt{x + a} dx,$$

$$(7) \int x \sqrt{x^2 - a^2} dx, \quad (8) \int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}}, \quad (9) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

$$(10) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad \left[\text{提示: } \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) \right],$$

$$(11) \int \frac{x dx}{x^2 + a^2}, \quad (12) \int \sin^2 x \cos x dx, \quad (13) \int \cos^2 x \sin x dx,$$

$$(14) \int \tan x dx, \quad (15) \int \sin^2 x dx \quad \left[\text{提示: } \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right],$$

$$(16) \int \cos^2 x dx, \quad (17) \int \sin 2x \sin x dx, \quad (18) \int \frac{\ln x}{x} dx,$$

$$(19) \int e^{-x} dx, \quad (20) \int x e^{-ax^2} dx, \quad (21) \int \frac{dx}{e^x}.$$

A - 6. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^1 (3x^2 - 4x + 1) dx, \quad (2) \int_1^1 (8x^3 - x) dx, \quad (3) \int_3^6 \frac{dx}{\sqrt{x-2}},$$

$$(4) \int_1^6 \frac{dx}{x^2}, \quad (5) \int_1^3 \frac{dx}{x}, \quad (6) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x+3},$$

$$(7) \int_0^1 \sin^2 2\pi x dx, \quad (8) \int_0^1 \cos^2 2\pi x dx, \quad (9) \int_0^1 e^{-ax} dx,$$

$$(10) \int_1^2 x e^{-ax^2} dx.$$

附录B 矢量

1. 矢量及其解析表示

物理学中有各种物理量,像质量、密度、能量、温度、压强等,在选定单位后仅需用一个数字来表示其大小,这类物理量叫做标量(scalar);而像位移、速度、加速度、动量、力等,除数量的大小外还具有一定的方向,这类物理量叫做矢量(vector)。严格地说,作为一个矢量,还必须遵从一定的合成法则与随坐标变换的法则。这将在下文和本课适当的地方论及。

通常手写时用字母上加箭头(如 \vec{A}) 来表示一个矢量,印刷中则常用黑体字(如 A)。在作图时,用一个加箭头的线段来代表矢量,线段的长度正比于矢量的大小,箭头的方向表示矢量的方向(见图 B-1)。

用直角坐标系来描述空间和表示其中的矢量,是最基本的方法。 n 维的直角坐标系有 n 个相互垂直的坐标轴。我们先从二维空间说起。

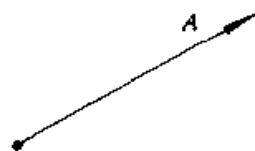


图 B-1

如图 B-2 所示,在平面上取二维直角坐标系 xOy ,在平面某点 P 上有矢量 A ,其大小为 A ,与 x 轴的夹角为 α ,则它在 x 、 y 轴上的投影分别为 $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \sin \alpha$, A_x 和 A_y 分别称为矢量 A 的 x 分量和 y 分量。应注意,一个矢量的分量是代数量,即其值是可正可负的。分别沿坐标轴 Ox 和 Oy 取单位矢量(即长度为 1 的矢量) i 和 j (见图 B-2),则有

$$A = A_x i + A_y j, \quad (\text{B.1})$$

这里 i 、 j 称为坐标系的基矢。当坐标系及其基矢选定后,数列 (A_x, A_y) 可以把矢量 A 的全部特征确定下来,所以我们可以说矢量是个按一定顺序排列的数列,如数列 $(2, 1)$ 代表 $A_x = 2$, $A_y = 1$ 的矢量,数列 $(0, -5)$ 代表 $A_x = 0$, $A_y = -5$ 的矢量,等等。矢量大小的平方等于它的分量的平方和:

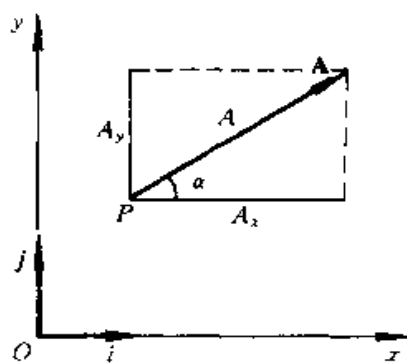


图 B-2

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2. \quad (\text{B.2})$$

图 B-3 所示为三维空间里的直角坐标系,这里三个相互垂直的坐标轴 Ox 、 Oy 和 Oz ,在空间某点 P 上的矢量 A 大小为 A ,方向与 Ox 、 Oy 、 Oz 轴的夹角分别为 α 、 β 、 γ ,则它在 Ox 、 Oy 、 Oz 轴上的投影,即 x 、 y 、 z 三

个分量, 分别为 $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \cos \beta$, $A_z = A \cos \gamma$, 这里 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 称为这矢量的方向余弦。因为方向余弦满足下列恒等式:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (\text{B. 3})$$

三个数中只有两个是独立的, 它们把矢量的方向唯一地确定下来。

通常用 i 、 j 、 k 来代表三维直角坐标系的基矢。在三维的情况下, 正交基矢有左手和右手两种系统。设想基矢 i 沿小于 180° 的角度转向基矢 j 。如图 B-4a 所示将右手的四指弯曲, 代表上述旋转方向, 则伸直的姆指指向基矢 k 。如此规定的正交基矢系统称为右手系统。若用左手代替上述操作过程所规定的正交基矢系统 (见图 B-4b), 则是左手系统。我们按照国际惯例, 一律采用右手系统。

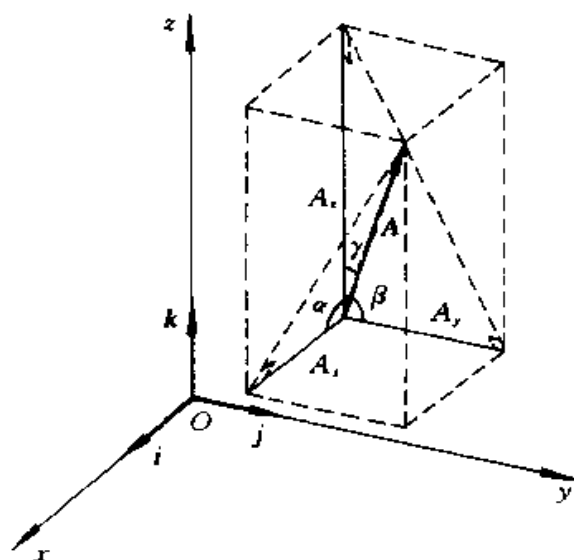


图 B-3

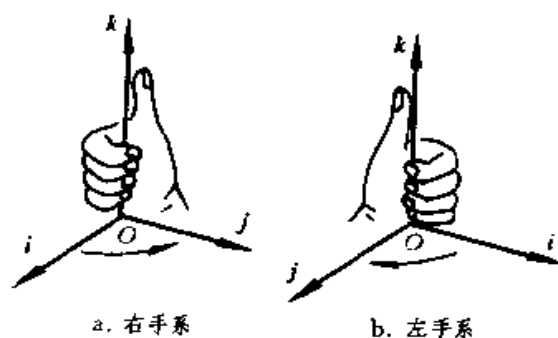


图 B-4

有了正交基矢, 矢量可以写成解析形式:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad (\text{B. 4})$$

三维的矢量要用长度为 3 的数列 (A_x, A_y, A_z) 来表示, 如 $(1, 3, 0)$ 、 $(-2, 0, -1)$ 等。与二维的情况类似, 我们有

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \quad (\text{B. 5})$$

2. 矢量的加减法

从上面我们看到, 一个 n 维的矢量可看成是一个长度为 n 的有序数列 (A_1, A_2, \dots, A_n) 。从这种意义上说, 标量是个一维的矢量。把标量的加减

运算推广到矢量,我们有

$$\begin{aligned} & (A_1, A_2, \dots, A_n) \pm (B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= (A_1 \pm B_1, A_2 \pm B_2, \dots, A_n \pm B_n), \end{aligned} \quad (\text{B. 6})$$

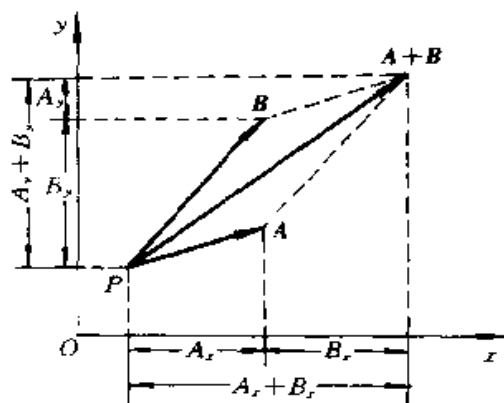


图 B-5

从矢量的叠加图 B-5 不难看出,上述运算(解析运算)与通常矢量合成的平行四边形法则(几何运算)是一致的(请读者自行证明)。

用几何法运算矢量 A 和 B 的叠加,可利用如图 B-6a 所示的平行四边形,也可利用与之等价的三角形(见图 B-6b)。这后一种图示,对于两个以上矢量的合成特别方便,因为我们只需把它们首尾衔接起来就行了(见图 B-7)。在一个矢量前面加个负号,表示一个与

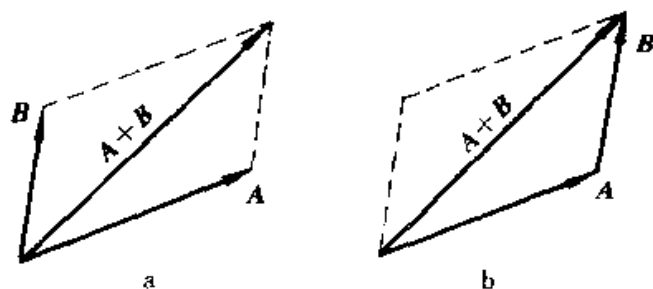


图 B-6

它大小相等、方向相反的矢量(见图 B-8a)。矢量之差 $A - B$ 可理解为矢量 A 与 $-B$ 的合成 $A + (-B)$ (见图 B-8b),它也可利用 A 和 B 组成的另一种方



图 B-7

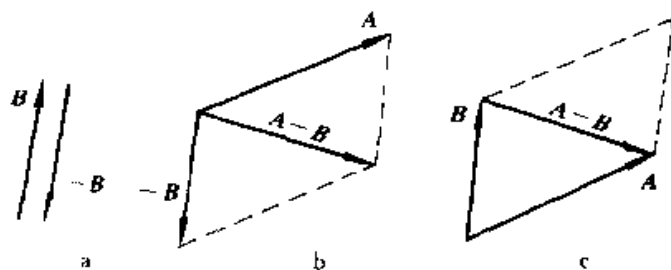


图 B-8

式组合成的三角形来表示(见图 B-6c)。

从矢量加减的解析表示(B.6)式可立即看出,它们是符合通常的交换

律和组合律的:

$$A + B = B + A, \quad (\text{交换律}) \quad (\text{B. 7})$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad (\text{组合律}) \quad (\text{B. 8})$$

用几何运算法来验证上述法则,也不算太困难,特别是利用三角形来表示的话。

并不是所有带有方向的物理量都服从上述叠加法则的(如大角度的角位移就是例外,见第四章),不符合这法则的物理量不是矢量。

3. 矢量的标积

设 A 和 B 是两个任意矢量,它们的标积(常用 $A \cdot B$ 表示,故又称点乘)的解析定义为如下标量:

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{B. 9})$$

由此定义不难看出,点乘是服从交换律和分配律的:

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad (\text{交换律}) \quad (\text{B. 10})$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (\text{分配律}) \quad (\text{B. 11})$$

下面看点乘的几何意义。把 A 、 B 两矢量的起点 O 叠在一起,二者决定一个平面,取此平面为直角坐标系的 xy 面,从而 $A_z = B_z = 0$ 。令 A 、 B 与 Ox 轴的夹角分别为 α 、 β (见图 B-9),

则 $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \sin \alpha$, $B_x = B \cos \beta$, $B_y = B \sin \beta$, 标积

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A_x B_x + A_y B_y \\ &= AB(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= AB \cos(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

$$\text{即 } A \cdot B = AB \cos \theta, \quad (\text{B. 12})$$

式中 $\theta = \beta - \alpha$ 为两矢量之间的夹角。

(B. 12) 式可看作是标积的几何定义。从这个定义可立即看出: A 、 B 平行时, θ

$= 0$, 标积 $A \cdot B = AB$; A 、 B 反平行时, $\theta = \pi$, 标积 $A \cdot B = -AB$; A 、 B 垂直时, $\theta = \pi/2$, 标积 $A \cdot B = 0$ 。一般说来, θ 为锐角时, 标积取正值; θ 为钝角时, 标积取负值。一个矢量 A 与自身的标积 $A \cdot A = A^2$ 。

在物理学中标积的典型例子是功(见第三章 1.5 节)。

4. 矢量的矢积

设 A 和 B 是两个任意矢量,它们的矢积(常用 $A \times B$ 表示,故又称叉乘)的解析定义为如下矢量:

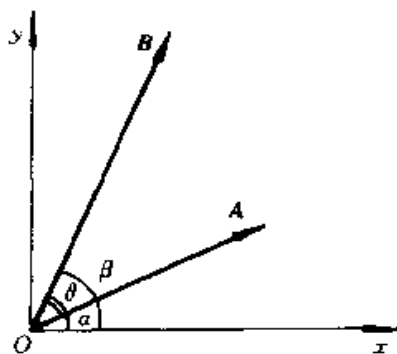


图 B-9

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \quad (\text{B. 13})$$

由此定义不难看出,点乘是服从反交换律和分配律的:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad (\text{反交换律}) \quad (\text{B. 14})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \quad (\text{分配律}) \quad (\text{B. 15})$$

下面看叉乘的几何意义。同前,把 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 两矢量的起点 O 叠在一起,二者决定一个平面,取此平面为直角坐标系的 xy 面,从而 $A_z = B_z = 0$ 。令 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 与 Ox 轴的夹角分别为 α 、 β , 则 $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \sin \alpha$, $B_x = B \cos \beta$, $B_y = B \sin \beta$, 矢积

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} = AB (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \mathbf{k} \\
 &= AB \sin(\beta - \alpha) \mathbf{k},
 \end{aligned}$$

即矢积

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{k}, \quad (\text{B. 16})$$

式中 $\theta = \beta - \alpha$ 为两矢量之间的夹角。当 $\beta > \alpha$ 时, $\theta > 0$, \mathbf{C} 沿 \mathbf{k} 的正方向; 当 $\beta < \alpha$ 时, $\theta < 0$, \mathbf{C} 沿 \mathbf{k} 的负方向。由于我们采用的是右手坐标系, \mathbf{C} 的指向可用如图 B-10a 所示的右手定则来判断: 设想矢量 \mathbf{A} 沿小于 180° 的角度转向矢量 \mathbf{B} , 将右手的四指弯曲, 代表上述旋转方向, 则伸直的姆指指向它们的矢积 \mathbf{C} 。

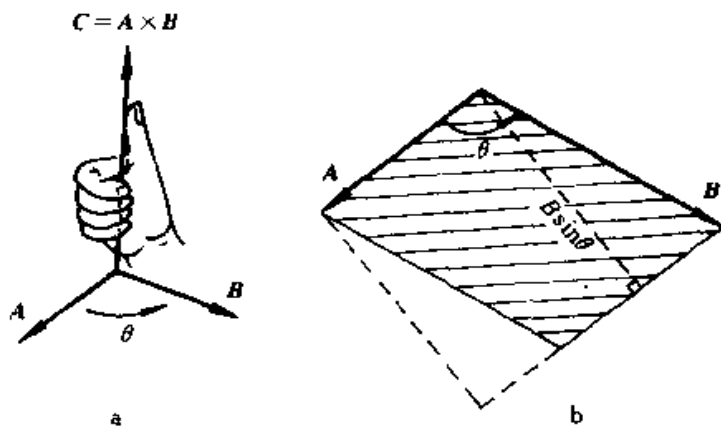


图 B-10

(B. 16) 式可看作是矢积的几何意义: 矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的矢积 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的数值 $C = AB \sin \theta$, 正好是由 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 为边组成的平行四边形的面积 (见图 B-10b); \mathbf{C} 的方向与 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 组成的平面垂直, 其指向由上述右手定则来规定。从这个定义可立即看出: \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 平行或反平行时, $\theta = 0$ 或 π , 矢积 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$; \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 垂直时, $\theta = \pi/2$, 矢积的数值 $C = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB$ 最大。一

个矢量 A 与自身的矢积 $A \times A = 0$ 。

在物理学中矢积的典型例子有角动量、力矩等(见第四章 §1)。

5. 矢量的三重积

物理学中经常遇到矢量的三重积。最常见的三重积有以下两个。

(1) 三重标积 $A \cdot (B \times C)$

这三重积是个标量。不难验证,此三重积的解析表达式为

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (\text{B. 17})$$

从几何上看,因 $|B \times C|$ 是以 B 和 C 为边组成平行四边形的面积,矢积 $B \times C$ 的方向沿其法线,故而再与 A 点乘,相当于再乘上 A 在法线上的投影,亦即,这三重积的绝对值等于以 A 、 B 、 C 三矢量为棱组成的平行六面体的体积(见图 B-11),其正负号与三矢量的循环次序有关。由于计算平行六面体的体积与取哪一面为底无关,点乘又是可交换的,所以 A 、 B 、 C 三矢量的轮换,以及 \cdot 和 \times 的位置对调,都不影响此三重积的计算结果。唯一要注意的是三矢量的循环次序不能变,否则差一个负号。概括起来写成公式,我们有

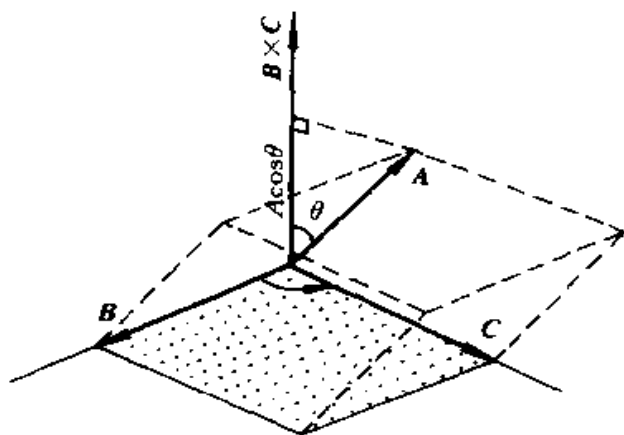


图 B-11

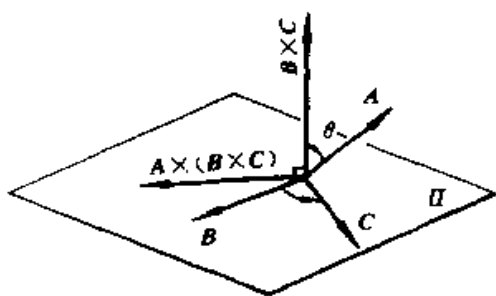


图 B-12

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \\ &= (A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B \\ &= -A \cdot (C \times B) = -C \cdot (B \times A) = -B \cdot (A \times C) \end{aligned}$$

$$= -(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}. \quad (\text{B.18})$$

从解析表达式(B.17)来看(B.18)式的成立,就更显然了。

最后提请注意:在 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 三个矢量中有任何两个平行或反平行时,三重标积为0。

(2) 三重矢积 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

这三重积是个矢量。矢积 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 与 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 组成的平面 Π 垂直,而 \mathbf{A} 与它的矢积又回到 Π 平面内。故矢量 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 与 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 共面。(见图B-12),从而前者是后面二者的线性组合: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{C}$ 。用矢量的解析表达式可以直接验证, $a_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $a_2 = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,亦即存在下列恒等式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (\text{B.19})$$

这是有关这三重积最重要的恒等式。

6. 极矢量和轴矢量

左手在镜子中的象是右手,右手在镜子中的象是左手。我们说,左右手具有镜象对称。一般说来,所谓对称性,就是在某种操作下的不变性。与镜象对称相联系的是空间反射操作。在这种操作下,沿镜面法线方向的坐标 $z \rightarrow -z$,其它方向不变,于是左手坐标系变成了右手坐标系(见图B-13)。

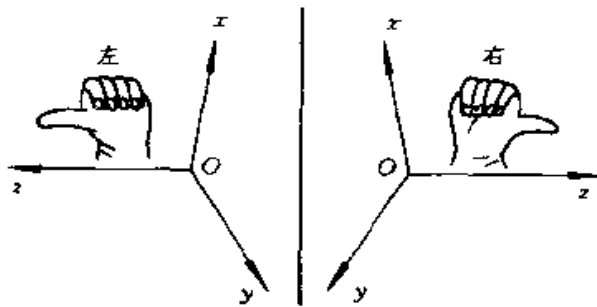


图 B-13

物理学中有各种矢量,它们在空间反射操作下怎样变换?对于位矢 \mathbf{r} 来说,这是清楚的:与镜面垂直的分量反向,平行分量不变。与 \mathbf{r} 相联系的速度 \mathbf{v} 、加速度 \mathbf{a} 、乃至力 \mathbf{f} 等矢量都应有相同的变换规律。但存在另一类矢量,它们在空间反射操作下具有不同的变换规律。在第二章5.4节里按右

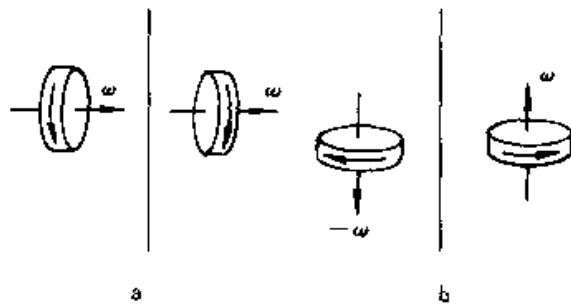


图 B-14

手螺旋法则把角速度 ω 定义成矢量(见图 2-50), 这定义的前提是采用右手坐标系。如图 B-14 所示, 在空间反射操作下, ω 与镜面垂直的分量不变, 平行的分量却反向。和 ω 相似, 角速度、角加速度、角动量、力矩等矢量, 都具有这样的变换规律。通常把在空间反射变换下服从前一类变换规律的矢量叫做极矢量, 后一类的叫做轴矢量。应指出, 两个极矢量叉乘, 得到的是轴矢量。实际上许多轴矢量都能写成两个极矢量叉乘的形式。例如一个质点的角动量 $J = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, 力矩 $M = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$, 等等。

习 题

B-1. 有三个矢量 $A = (1, 0, 2)$ 、 $B = (1, 1, 1)$ 、 $C = (2, 2, -1)$, 试计算:

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| (1) $A \cdot B$, | (2) $B \cdot A$, | (3) $B \cdot C$, |
| (4) $C \cdot A$, | (5) $A \cdot (B + C)$, | (6) $B \cdot (2A - C)$, |
| (7) $A \times B$, | (8) $A \times (2B + C)$, | (9) $A \cdot (B \times C)$, |
| (10) $(A \cdot B)C$, | (11) $(A \times B) \times C$, | (12) $A \times (B \times C)$. |

B-2. 证明下列矢量恒等式:

- (1) $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$,
- (2) $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$.

B-3. 有三个矢量 $a = (1, 2, 3)$ 、 $b = (3, 2, 1)$ 、 $c = (1, 0, 1)$, 试计算:

- (1) 三个矢量的大小和方向余弦;
- (2) 两两之间的夹角;
- (3) 以三矢量为棱组成平行六面体的体积和各表面的面积。

B-4. 试证明:

- (1) 极矢量 A 和 B 的矢积 $A \times B$ 是轴矢量;
- (2) 极矢量 A 和轴矢量 B 的矢积 $A \times B$ 是极矢量。

附录 C 复数的运算

1. 复数的表示法

复数 \tilde{A} 是一个二维数, 它对应于复平面中的一个坐标为 (x, y) 的点, 或对应于复平面中的一个长度为 A 、仰角为 φ 的矢量 (见图 C-1)。与此相应地复数有下列两种表示法:

$$\begin{cases} \tilde{A} = x + jy, & (C. 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{A} = A e^{j\varphi}, & (C. 2) \end{cases}$$

式中 $j = \sqrt{-1}$, $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ (欧勒公式, 详见第 3 节)。(C. 1) 式是复数的直角坐标表示, 对应点的横坐标 x 为复数的实部, 记作 $x = \operatorname{Re} \tilde{A}$; 纵坐标 y 为复数的虚

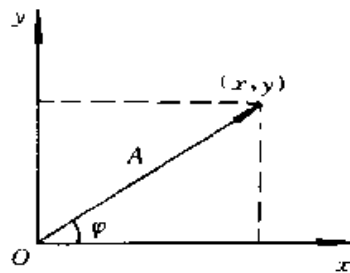


图 C-1

部, 记作 $y = \operatorname{Im} \tilde{A}$ 。(C. 2) 式是复数的极坐标表示, 对应矢量的长度 A 为复数的模或绝对值, 记作 $A = |\tilde{A}|$; 仰角 φ 为复数的辐角, 记作 $\varphi = \arg \tilde{A}$ 。两种表示法之间有如下换算关系: ①

$$\begin{cases} A = \sqrt{x^2 + y^2}, & (C. 3) \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}. & (C. 4) \end{cases}$$

或反过来, 有

$$\begin{cases} x = A \cos \varphi, & (C. 5) \\ y = A \sin \varphi. & (C. 6) \end{cases}$$

单位虚数 $j = \sqrt{-1}$ 有如下性质:

$$j^2 = -1, \quad \frac{1}{j} = -j, \quad j = e^{j\pi/2}, \quad \frac{1}{j} = e^{-j\pi/2}.$$

复数 $\tilde{A} = x + jy = e^{j\varphi}$ 的共轭 \tilde{A}^* 定义为

$$\tilde{A}^* = x - jy = e^{-j\varphi} \quad (C. 7)$$

① 通常把反三角函数的符号, 如 $\arctan \varphi$, 理解为 φ 在主值区间 $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ 取值, 这里应该认为 φ 在从 $-\pi$ 到 π 的所有象限中取值。至于它在哪个象限, 要根据 x 和 y 的正负来确定。

所以

$$\bar{A} \bar{A}^* = A^2 = x^2 + y^2. \quad (\text{C. 8})$$

即一对共轭复数的乘积等于模的平方。两个复数 $\bar{A}_1 = x_1 + j y_1 = A_1 e^{j \varphi_1}$ 、 $\bar{A}_2 = x_2 + j y_2 = A_2 e^{j \varphi_2}$ 相等的充要条件为：

$$\begin{cases} \text{实部相等: } x_1 = x_2, \\ \text{虚部相等: } y_1 = y_2. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \text{模相等: } A_1 = A_2, \\ \text{辐角相等: } \varphi_1 = \varphi_2. \end{cases}$$

2. 复数的四则运算

(1) 加减法

$$\bar{A}_1 \pm \bar{A}_2 = (x_1 + j y_1) \pm (x_2 + j y_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2), \quad (\text{C. 9})$$

即实部、虚部分别加减。

(2) 乘法

$$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 = (A_1 e^{j \varphi_1}) \cdot (A_2 e^{j \varphi_2}) = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (\text{C. 10})$$

即模相乘，辐角相加。或者

$$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 = (x_1 + j y_1) \cdot (x_2 + j y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (\text{C. 11})$$

(3) 除法

$$\frac{\bar{A}_1}{\bar{A}_2} = \frac{A_1 e^{j \varphi_1}}{A_2 e^{j \varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (\text{C. 12})$$

即模相除，辐角相减。或者

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + j y_1}{x_2 + j y_2} &= \frac{(x_1 + j y_1)(x_2 - j y_2)}{(x_2 + j y_2)(x_2 - j y_2)} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned} \quad (\text{C. 13})$$

倒数运算可以看作是除法的特例：

$$\frac{1}{\bar{A}} = \frac{1}{A e^{j \varphi}} = \frac{1}{A} e^{-j \varphi}, \quad (\text{C. 14})$$

$$\begin{aligned}
 \text{或} \quad \frac{1}{\bar{A}} &= \frac{1}{x + j y} = \frac{x - j y}{(x + j y)(x - j y)} \\
 &= \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}.
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

3. 欧勒公式

现在介绍一下欧勒公式是如何得来的。从附录 A 的表 A-3 中可以查到 e^x 、 $\cos x$ 、 $\sin x$ 的幂级数展开式：

$$\begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \end{cases}$$

在 e^x 的展开式中把 x 换成 $\pm jx$ ，注意到 $(\pm j)^2 = -1$ ， $(\pm j)^3 = \mp j$ ， $(\pm j)^4 = 1$ ， \cdots ，我们得到

$$\begin{aligned}
 e^{\pm jx} &= 1 \pm j \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} \mp j \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
 &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots) \pm j(x - \frac{x^3}{3!} \cdots),
 \end{aligned}$$

即

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x, \tag{C.16}$$

这就是欧勒公式。下面给出几个常用的三角函数与复指数函数之间的变换公式。从欧勒公式可以反解出：

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}), \tag{C.17}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}), \tag{C.18}$$

由此立即得到

$$\tan \varphi = -j \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}. \tag{C.19}$$

4. 简谐振动的复数表示

简谐振动

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

也可用一个复数

$$\tilde{s}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

的实部或虚部来表示。上式右端又可写为 $(A e^{j\varphi_0}) e^{j\omega t} = \tilde{A} e^{j\omega t}$, 其中

$$\tilde{A} = A e^{j\varphi_0}$$

称为复振幅, 它集振幅 A 和初相位 φ_0 于一身。于是, 简谐振动的复数表示可写为

$$\tilde{s}(t) = \tilde{A} e^{j\omega t}. \quad (\text{C. 20})$$

如果 $\tilde{s}(t)$ 代表位移的话, 则速度和加速度为

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{s}}{dt} = j\omega \tilde{s},$$

$$\tilde{a} = \frac{d^2\tilde{s}}{dt^2} = (j\omega)^2 \tilde{s} = -\omega^2 \tilde{s},$$

亦即, 对 t 求导数相当于乘上一个因子 $j\omega$, 运算起来十分方便。

我们有时候需要计算两个同频简谐量乘积在一个周期里的平均值, 如平均功率, 这也可以用复数来运算。设两个同频简谐量为

$$\begin{cases} a_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1), \\ a_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \Phi_2), \end{cases}$$

它们的乘积在一个周期内的平均值等于

$$\begin{aligned} \overline{a_1 a_2} &= \frac{1}{T} \int_0^T a_1(t) a_2(t) dt \\ &= \frac{\omega A_1 A_2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \Phi_1) \cos(\omega t + \Phi_2) dt \\ &= \frac{\omega A_1 A_2}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\cos(\Phi_1 - \Phi_2) + \cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2)] dt \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\Phi_1 - \Phi_2). \end{aligned}$$

如果用相应的复数

$$\begin{cases} \tilde{a}_1(t) = A_1 e^{j(\omega t + \Phi_1)} \\ \tilde{a}_2(t) = A_2 e^{j(\omega t + \Phi_2)} \end{cases}$$

来计算的话, 下列公式给出同样的结果:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2^*) &= \frac{A_1 A_2}{2} \operatorname{Re}(e^{j(\omega t + \Phi_1)} e^{-j(\omega t + \Phi_2)}) \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \operatorname{Re}(e^{j(\Phi_1 - \Phi_2)}) = \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\Phi_1 - \Phi_2). \end{aligned}$$

所以今后我们将用下式来计算两简谐量乘积的平均值:

附录 A 矢量的乘积和对称性

立体角 曲线坐标系

1. 矢量的标积

设 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是两个任意矢量, 它们的标积 (常用 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示, 故又称点乘) 的解析定义为如下标量:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{A. 1})$$

由此定义不难看出, 点乘是服从交换律和分配律的:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad (\text{交换律}) \quad (\text{A. 2})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \quad (\text{分配律}) \quad (\text{A. 3})$$

下面看点乘的几何意义。把 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 两矢量的起点 O 叠在一起, 二者决定一个平面, 取此平面为直角坐标系的 xy 面, 从而 $A_z = B_z = 0$ 。令 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 与 Ox 轴的夹角分别为 α 、 β (见图 A-1), 则 $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \sin \alpha$, $B_x = B \cos \beta$, $B_y = B \sin \beta$, 标积

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y \\ &= AB(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= AB \cos(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

即 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \quad (\text{A. 4})$

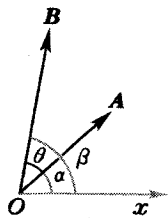


图 A-1 矢量的标积

式中 $\theta = \beta - \alpha$ 为两矢量之间的夹角。(A. 4) 式可看作是标积的几何定义。从这个定义可立即看出: \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 平行时, θ

$= 0$, 标积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$; \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 反平行时, $\theta = \pi$, 标积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -AB$; \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 垂直时, $\theta = \pi/2$, 标积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ 。一般说来, θ 为锐角时, 标积取正值; θ 为钝角时, 标积取负值。一个矢量 \mathbf{A} 与自身的标积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$ 。

2. 矢量的矢积

设 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是两个任意矢量, 它们的矢积 (常用 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 表示, 故又称叉乘) 的解析定义为如下矢量:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

由此定义不难看出, 点乘是服从反交换律和分配律的:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad (\text{反交换律}) \quad (\text{A. 6})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \quad (\text{分配律}) \quad (\text{A. 7})$$

下面看叉乘的几何意义。同前,把 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 两矢量的起点 O 叠在一起,二者决定一个平面,取此平面为直角坐标系的 xy 面,从而 $A_z = B_z = 0$ 。令 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 与 Ox 轴的夹角分别为 α 、 β , 则 $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \sin \alpha$, $B_x = B \cos \beta$, $B_y = B \sin \beta$, 矢积

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} = AB (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \mathbf{k} \\ &= AB \sin(\beta - \alpha) \mathbf{k},\end{aligned}$$

即矢积

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{k}, \quad (\text{A. 8})$$

式中 $\theta = \beta - \alpha$ 为两矢量之间的夹角。当 $\beta > \alpha$ 时, $\theta > 0$, \mathbf{C} 沿 \mathbf{k} 的正方向; 当 $\beta < \alpha$ 时, $\theta < 0$, \mathbf{C} 沿 \mathbf{k} 的负方向。由于我们采用的是右手坐标系, \mathbf{C} 的指向可用如图 A-2a 所示的右手定则来判断: 设想矢量 \mathbf{A} 沿小于 180° 的角度转向矢量 \mathbf{B} 。将右手的四指弯曲, 代表上述旋转方向, 则伸直的姆指指向它们的矢积 \mathbf{C} 。

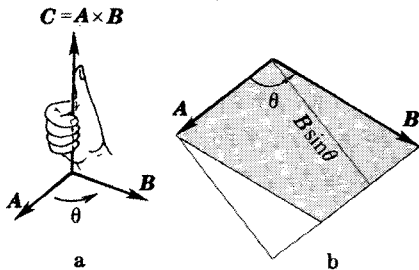


图 A-2 矢量的矢积

(A. 8) 式可看作是矢积的几何意义: 矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的矢积 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的数值 $C = AB \sin \theta$, 正好是由 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 为边组成的平行四边形的面积 (见图 A-2b); \mathbf{C} 的方向与 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 组成的平面垂直, 其指向由上述右手定则来规定。从这个定义可立即看出: \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 平行或反平行时, $\theta = 0$ 或 π , 矢积 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$; \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 垂直时, $\theta = \pi/2$, 矢积的数值 $C = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB$ 最大。一个矢量 \mathbf{A} 与自身的矢积 $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ 。

3. 矢量的三重积

物理学中经常遇到矢量的三重积。最常见的三重积有以下两个。

(1) 三重标积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

这三重积是个标量。不难验证, 此三重积的解析表达式为

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A. 9})$$

从几何上看,因 $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ 是以 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 为边组成平行四边形的面积,矢积 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的方向沿其法线,故而再与 \mathbf{A} 点乘,相当于再乘上 \mathbf{A} 在法线上的投影。亦即,这三重积的绝对值等于以 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 三矢量为棱组成的平行六面体的体积(见图 A-3),其正负号与三矢量的循环次序有关。由于计算平行六面体的体积与取哪一面为底无关,点乘又是可交换的,所以 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 三矢量的轮换,以及 \cdot 和 \times 的位置对调,都不影响此三重积的计算结果。唯一要注意的是三矢量的循环次序不能变,否则差一个负号。概括起来写成公式,我们有

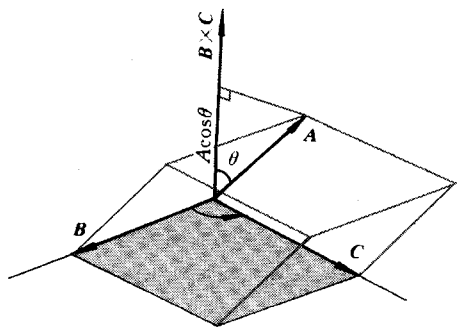


图 A-3 矢量的三重标积

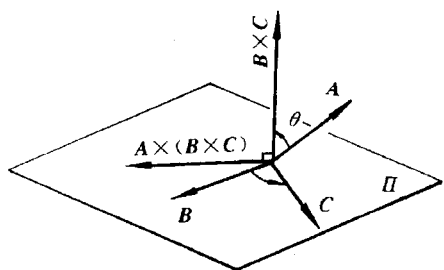


图 A-4 矢量的三重矢积

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\
 &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\
 &= -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \\
 &= -(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}. \quad (\text{A. 10})
 \end{aligned}$$

从解析表达式(A.9)来看(A.10)式的成立就更显然了。

最后提请注意:在 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 三个矢量中有任何两个平行或反平行时,三重标积为0。

(2) 三重矢积 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

这三重积是个矢量。矢积 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 与 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 组成的平面 Π 垂直,而 \mathbf{A} 与它的矢积又回到 Π 平面内。故矢量 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 与 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 共面(见图 A-4)。从而前者是后面二者的线性组合: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{C}$ 。用矢量的解析表达式可以直接验证, $a_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $a_2 = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 亦即存在列恒等式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (\text{A. 11})$$

这是有关这三重积最重要的恒等式。

4. 矢量的镜像反射对称性 极矢量和轴矢量

对称性原理是普遍的原理,它统帅着自然界各个领域,在当代物理学中有着广泛应用。有关对称性和对称性原理,请参阅《新概念物理教程·力学》第三章 §5。简言之,一个系统在任何操作或变换下的不变性,都是“对称性”,例如绕固定轴旋转的不变性是轴对称性,绕固定点旋转的不变性是球对称性,沿特定方向平移的不变性是平移对称性,等等。在对称的条件下必然有对称的结果,例如点电荷具有球对称性,故电场的分布必然是球对称的,这便是“对称性原理”。在普通物理的各门课中电磁学里对称性原理的应用特别突出。

除旋转、平移等操作外,还有一种几何变换具有特殊的重要作用,即“空间反射”操作,在空间反射变换下的不变性叫做镜像对称性。

如图 A-5 所示,在镜面 Π 前取一右手坐标系 $Oxyz$,它在镜面后成的像为左手坐标系 $O'x'y'z'$ 。如果 x 轴和 y 轴与 Π 平行, z 轴与之垂直,则 x' 轴、 y' 轴分别与 x 轴、 y 轴平行, z' 轴与 z 轴反平行。这便是镜像反射操作或镜像反射变换。

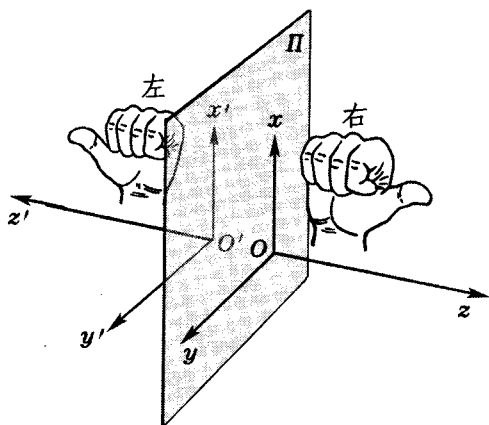


图 A-5 坐标系与极矢量的镜像变换

物理学中有各种矢量,它们在镜像反射操作下怎样变换?对于位矢 \mathbf{r} 来说,这是清楚的:与镜面 Π 垂直的分量反向,平行分量不变。在电磁学中,与 \mathbf{r} 具有相同变换规律的有电场强度 \mathbf{E} 、电偶极矩 \mathbf{p} 等。但磁感应强度 \mathbf{B} 、磁矩 \mathbf{m} 等矢量在空间反射操作下服从不同的变换规律。在空间反射操作下,小线圈里的电流的变换如图 A-6 所示,从而按照右手定则磁感应强度 \mathbf{B} 、磁矩 \mathbf{m} 等矢量与镜面垂直的分量不变,平行的分量却反向。通常把在空间反射变换下服从前

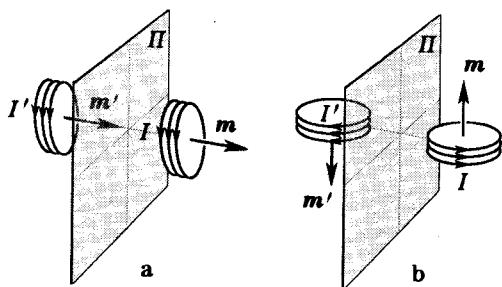


图 A-6 轴矢量的镜像变换

一类变换规律的矢量叫做极矢量,后一类的叫做轴矢量。

应指出,两个极矢量叉乘,得到的是轴矢量。譬如矢量 $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ 和 $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$ 都是极矢量, $\mathbf{c}(c_x, c_y, c_z) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是它们的叉乘:

$$\begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x. \end{cases}$$

取 z 轴沿镜面的法向。在镜像变换下

$$\begin{cases} \bar{a}_x = a_x, & \bar{a}_y = a_y, & \bar{a}_z = -a_z; \\ \bar{b}_x = b_x, & \bar{b}_y = b_y, & \bar{b}_z = -b_z. \end{cases}$$

而

$$\begin{cases} \bar{c}_x = \bar{a}_y \bar{b}_z - \bar{a}_z \bar{b}_y = -a_y b_z + a_z b_y = -c_x, \\ \bar{c}_y = \bar{a}_z \bar{b}_x - \bar{a}_x \bar{b}_z = -a_z b_x + a_x b_z = -c_y, \\ \bar{c}_z = \bar{a}_x \bar{b}_y - \bar{a}_y \bar{b}_x = a_x b_y - a_y b_x = c_z. \end{cases}$$

即 $\mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$ 是个轴矢量。

实际上许多轴矢量都能写成两个极矢量叉乘的形式。例如毕奥-萨伐尔公式(2.2)中

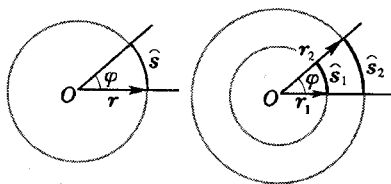
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(L_1)} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2}$$

$d\mathbf{l}_1$ 和 $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ 是极矢量,而由它们叉乘构成的 \mathbf{B} 是轴矢量。

5. 立体角

我们知道,平面角 φ 的大小可以用“弧度”来量度。其办法如图 A-7a 所示,以 φ 角的顶点 O 为中心,任意长度 r 为半径作圆,则 φ 角所对的弧长 \widehat{s} 与半径 r 之比即为 φ 角的弧度(rad):

$$\varphi = \frac{\widehat{s}}{r} \text{ rad.}$$



a 弧度

b \widehat{s} 正比于 r

图 A-7 平面角

因为整个圆周的长度为 $2\pi r$,故圆周角是 $2\pi \text{ rad}$ 。半径 r 可以任意选取的根据如下: 因为以不同的半径 r_1 、 r_2 作圆时, φ 角所对的弧长 \widehat{s}_1 、 \widehat{s}_2 与半径成正比(见图 A-7b),它们的比值与 r 的选择无关。

现在来考虑三维空间的情形。如图 A-8a,在球面上取一面元 dS ,由它的边缘上各点引直线到球心 O ,这样构成一个锥体。这锥体的“顶角”是立体的,称为立体角。仿照用弧度量度平面角的办法,用 dS 的面积和半径 r 的平方之比来量度它在球心所张立体角 $d\Omega$ 的大小,这种量度方法所用的单位叫球面度(sr):

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \text{sr.} \quad (\text{A. 12})$$

因为整个球面的面积是 $4\pi r^2$, 所以它所张的立体角是 $4\pi \text{sr}$.

这样量度立体角的方法也和半径 r 的选择无关。从图 A-8b 可以看出,

以不同的半径 r_1 、 r_2 作同心球面 S_1 、 S_2 。为了直观, 不妨把立体角 $d\Omega$ 所对的面元 dS_1 和 dS_2 取成小方块。由于 dS_1 和 dS_2 的边长与半径成正比, 所以它们的面积与半径的平方成正比, 即

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2},$$

这个比值与半径的选择无关。

在一般的情形里, 人们需要讨论面元 dS 对任意顶点 O 所张的立体角 $d\Omega$, 如图 A-9 所示。这时 O 并不是球心, dS 到 O 的连线并不与它垂直。如果它是斜的, 应计算它在垂直径矢方向的投影面积 $dS^* = dS \cos\theta$, 这里 θ 是 dS 的法线与径矢之间的夹角。为了把上述关系表达得更简洁, 我们可以引进面元矢量 $d\mathbf{S}$ 的概念: 在面元 dS 的法线方向取一单位矢量 \mathbf{n} , 面元矢量定义为 $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, 即 $d\mathbf{S}$ 的大小等于 dS , 方向沿法向 \mathbf{n} 。这样一来, 立体角的公式 (A. 12) 推广为:

$$d\Omega = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S}}{r^2}, \quad (\text{A. 13})$$

式中 $\hat{\mathbf{r}}$ 为单位径矢。

a 球面度

b dS 正比于 r^2

图 A-8 立体角

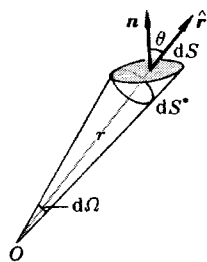


图 A-9 立体角的矢量表示

6. 一般正交曲线坐标系的概念

除直角坐标系外, 在物理学中还常常根据被研究物体的几何形状, 采用其它的坐标系, 其中用到最多的是柱坐标系和球坐标系。

任何描述三维空间的坐标系都要有三个独立的坐标变量 u_1 、 u_2 、 u_3 , 例如在直角坐标系中 $u_1 = x$, $u_2 = y$, $u_3 = z$ 。方程式

$$\begin{cases} u_1 = \text{常量}, \\ u_2 = \text{常量}, \\ u_3 = \text{常量}, \end{cases} \quad (\text{A. 14})$$

代表三组曲面(或平面),称为坐标面。例如在直角坐标系中的坐标面就是分别与 x 、 y 、 z 轴垂直的三组平行平面(见图 A-10),一般坐标面是曲面。

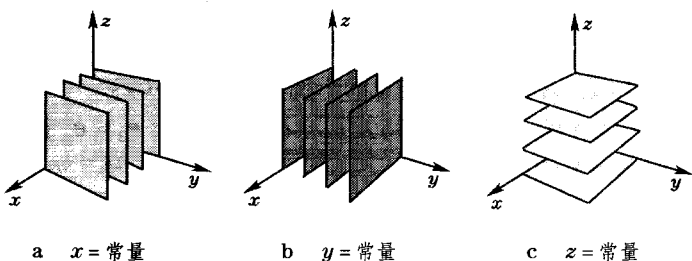
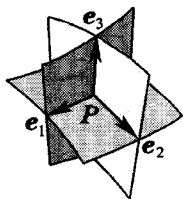


图 A-10 直角坐标系的坐标面

若三组坐标面在空间每一点正交,则坐标面的交线(一般是曲线)也在空间每点正交(图 A-11),这种坐标系叫做正交曲线坐标系。在空间每点 P 可沿坐标面的三条交线方向各取一个单位矢量(矢量指向 u_1 、 u_2 、 u_3 增加的方向,顺序 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 满足右旋法则),这三个矢量 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 叫做坐标系的单位基矢。在直角坐标系中的单位基矢通常写作 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ 、 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ 、 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$,它们的方向是不变的。但在一般正交曲线坐标系中 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 的方向可能逐点变化,它们只构成局部的正交右旋系。

沿三个基矢的线段 dl_1 、 dl_2 、 dl_3 分别与三坐标变量的微分 du_1 、 du_2 、 du_3 成正比:

$$\begin{cases} dl_1 = h_1 du_1, \\ dl_2 = h_2 du_2, \\ dl_3 = h_3 du_3. \end{cases} \quad (\text{A. 15})$$



例如在直角坐标系中 $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, $dl_1 = dx$, $dl_2 = dy$, $dl_3 = dz$,但在一般坐标系中 h_1 、 h_2 、 h_3 不仅不一定等于 1,而且还可能是坐标变量 u_1 、 u_2 、 u_3 的函数(参见下文)。

7. 柱坐标系

柱坐标系相当于把直角坐标系中的 x 、 y 换为二维极坐标 ρ 、 φ ,同时保留 z 轴(见图 A-12)。柱坐标变量 $u_1 = \rho$ 、 $u_2 = \varphi$ 、 $u_3 = z$ 与直角坐标变量 x 、 y 、 z 的变换关系如下:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases} \quad (\text{A. 16})$$

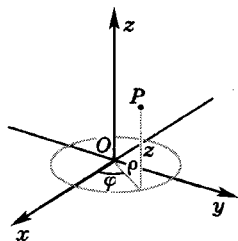


图 A-12 柱坐标系

柱坐标系三个变量的取值范围是

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty. \quad (\text{A. 17})$$

柱坐标系的坐标面为

(i) $\rho = \text{常量}$, 这是以 z 轴为轴线的圆柱面(图 A-13a),

(ii) $\varphi = \text{常量}$, 这是通过 z 轴的半平面(图 A-13b),

(iii) $z = \text{常量}$, 这是与 z 轴垂直的平面(图 A-13c)。

三组坐标面彼此正交, 从而三个基矢 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ 彼此正交。一个矢量在柱坐标系中的表示式是

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z, \quad (\text{A. 18})$$

式中 A_ρ 、 A_φ 、 A_z 分别称为 A 的 ρ 分量、 φ 分量和 z 分量。

在柱坐标系中沿基矢方向的三个线段元为

$$dl_\rho = d\rho, \quad dl_\varphi = \rho d\varphi, \quad dl_z = dz; \quad (\text{A. 19})$$

即

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = z. \quad (\text{A. 20})$$

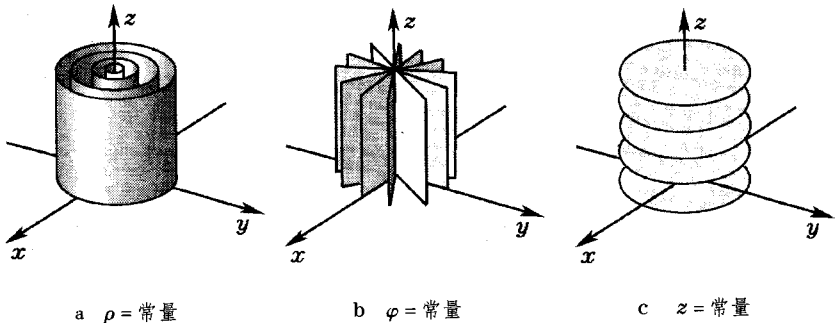


图 A-13 柱坐标系的坐标面

由 ρ 、 φ 、 $\varphi + d\varphi$ 、 z 、 $z + dz$ 六个坐标面围成的曲边六面体上柱面元的面积是(见图 A-14 中有阴影的面元)

$$dS = dl_\varphi dl_z = \rho d\varphi dz, \quad (\text{A. 21})$$

这体积元的体积为

$$dV = dl_\rho dl_\varphi dl_z = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (\text{A. 22})$$

8. 球坐标系

球坐标系的三个坐标变量是径矢的长度 r 、径矢与 z 轴的夹角 θ 和径矢在 xy 面上的投影与 x 轴的夹角 φ (见图 A-15)。球坐标变量 $u_1 = r$ 、 $u_2 = \theta$ 、 $u_3 = \varphi$ 与直角坐标变量 x 、 y 、 z 的变换关系如下:

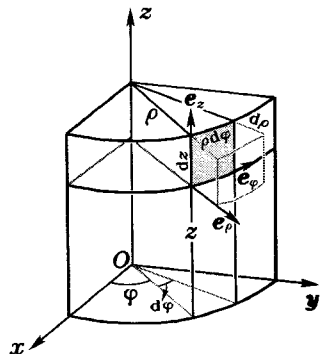


图 A-14 柱坐标系的面元与体积元

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x}. \end{cases}$$

(A. 23)

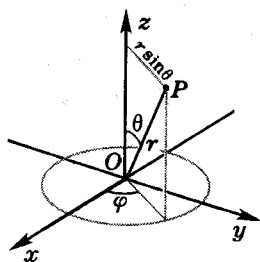


图 A-15 球坐标系

球坐标系三个变量的取值范围是

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (\text{A. 24})$$

球坐标系的坐标面为

- (i) $r = \text{常量}$, 这是以原点为中心的球面 (图 A-16a),
- (ii) $\theta = \text{常量}$, 这是以原点为中心的圆锥面 (图 A-16b),
- (iii) $\varphi = \text{常量}$, 这是通过 z 轴的半平面 (图 A-16c)。

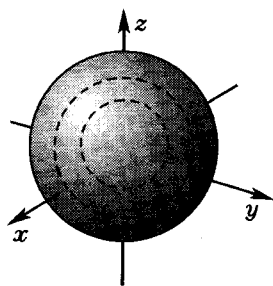
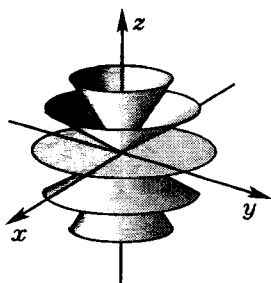
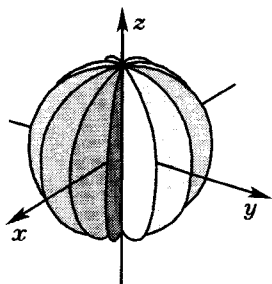
a $r = \text{常量}$ b $\theta = \text{常量}$ c $\varphi = \text{常量}$

图 A-16 球坐标系的坐标面

三组坐标面彼此正交, 从而三个基矢 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\varphi$ 彼此正交。一个矢量在球坐标系中的表示式是

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{A. 25})$$

A_r 、 A_θ 、 A_φ 分别称为 A 的 r 分量、 θ 分量和 φ 分量。

在球坐标系中沿基矢方向的三个线段元为

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi; \quad (\text{A. 27})$$

即

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta. \quad (\text{A. 28})$$

r 、 $r+dr$ 、 θ 、 $\theta+d\theta$ 、 φ 、 $\varphi+d\varphi$ 六个坐标面围成的曲边六面体上柱面元的面积是 (见图 A-17 中有阴影的面元)

$$dS = dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{A. 29})$$

这体积元的体积为

$$\begin{aligned} dV &= dl_r dl_\theta dl_\varphi \\ &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \quad (\text{A. 30}) \end{aligned}$$

例题 1 求整个球面对中心所张的立体角。

$$\text{解: 立体角 } \Omega = \oint_{(\text{球面})} \frac{dS}{r^2}$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi. \quad \blacksquare$$

例题 2 求半径为 R 的球体的体积。

$$\text{解: 体积 } V = \iiint_{(\text{球体})} dV$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad \blacksquare$$

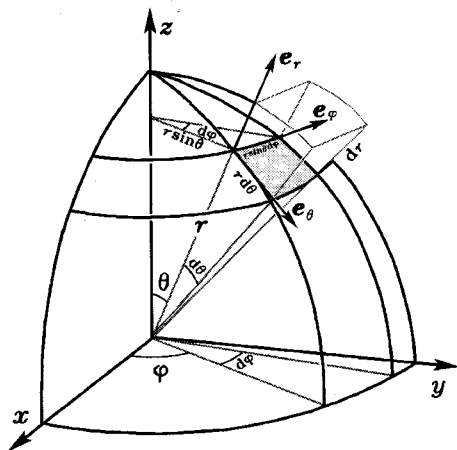


图 A-17 球坐标系的面元与体积元

附录 B 矢量分析提要

1. 标量场和矢量场

(1) 标量场

所谓标量场,就是在空间各点存在着一个标量 Φ ,它的数值是空间位置的函数。在一般的情况下,标量场是分布在三维空间里的。若采用三维的直角坐标 (x, y, z) 来描写空间各点的位置,则 Φ 是 x, y, z 的三元函数,即

$$\Phi = \Phi(x, y, z), \quad (\text{B. 1})$$

如果标量 Φ 指的是气压 P ,这个标量场就叫做气压场;如果标量 Φ 指的是温度 T ,这个标量场就叫做温度场,等等。在电学中最重要标量场例子是电势。

研究任何标量场时,人们常常引入“等值面”的概念。所谓等值面,就是下列方程式的轨迹:

$$\Phi(x, y, z) = \text{常量}. \quad (\text{B. 2})$$

(在二维空间里轨迹是曲线,所以叫“等值线”。在三维空间里轨迹形成曲面,所以叫“等值面”。)如气压场中的等压面,电场中的等势面,都是等值面。

(2) 矢量场

所谓矢量场,就是在空间各点存在着一个矢量,它的大小和方向是空间位置的函数。譬如我们用直角坐标 (x, y, z) 来描写空间各点的位置,则矢量 \mathbf{A} 是 x, y, z 的三元函数,即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z). \quad (\text{B. 3})$$

矢量 \mathbf{A} 还可以分解成三个分量 A_x, A_y, A_z ,每个分量都是 x, y, z 的函数,所以若将(B. 3)式写成分量形式的话,它实际包含了三个函数式:

$$\begin{cases} A_x = A_x(x, y, z), \\ A_y = A_y(x, y, z), \\ A_z = A_z(x, y, z). \end{cases} \quad (\text{B. 4})$$

如果矢量 \mathbf{A} 指的是流体的流速 \mathbf{v} ,这矢量场就叫做流速场;如果矢量 \mathbf{A} 指的是电场强度 \mathbf{E} ,这矢量场就叫做电场,①等等。

① 这里所说的“电场”和其它矢量场(如流速场)一样,是个偏重数学的概念。物理中所说的“电场”还具有不同的含义,它常常指的是一种物理实在,是物质存在的一种形式。

研究任何矢量场时,人们常引入“场线”和“场管”的概念。所谓场线,就是这样一些有方向的曲线,其上每一点的切线方向都和该点的场矢量 \mathbf{A} 的方向一致。由一束场线围成的管状区域,叫做场管。如流速场中的流线,电场中的电场线都是场线,流速场中的流管,电场中的电场管都是场管,等等。

2. 标量场的梯度

(1) 定义

平常所谓“梯度”是指一个空间位置函数的变化率,在数学上就是它的微商。对于多元函数,它对每个空间坐标变量都有一个偏微商,如 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ 等。这些偏微商表示标量场

$\Phi(x, y, z)$ 沿三个坐标方向的变化率。如果要问 $\Phi(x, y, z)$ 沿任意方向 $\Delta \mathbf{l}$ 的变化率是多少呢?如图 B-1 所示, P 是标量场中的某个点,设此点标量场的数值是 $\Phi(P)$, 由 P 点引一个位移矢量 $\Delta \mathbf{l}$, 到达附近的另一点 Q , 设 Q 点标量场的数值为 $\Phi(Q) = \Phi(P) + \Delta \Phi$, 令 Q 点向 P 点趋近, $\Delta \mathbf{l} \rightarrow 0$, 则标量场沿 $\Delta \mathbf{l}$ 方向的变化率为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta l}, \quad (\text{B. 5})$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ 叫做标量场 Φ 在 P 点沿 $\Delta \mathbf{l}$ 方向的方向微商。

显然,在同一地点 P , Φ 沿不同方向的方向微商一般说来是不同的。那么沿哪个方向的方向微商最大呢?如图 B-1 所示,作通过 P 、 Q 两点 Φ 的等值面,在两等值面上标量场的数值分别是 $\Phi(P)$ 和 $\Phi(P) + \Delta \Phi$ 。在局部范围看来,两等值面近似平行。通过 P 点引等值面的法线与另一等值面交于 Q' 点。法线方向的位移矢量 $\Delta \mathbf{n} = \overrightarrow{PQ'}$ 是两等值面间最短的位移矢量,其它方向的位移矢量都比 $\Delta \mathbf{n}$ 长。例如对于上述位移矢量 $\Delta \mathbf{l}$, 设它与 $\Delta \mathbf{n}$ 的夹角为 θ , 则由图 B-1 不难看出,

$$\Delta n = \Delta l \cos \theta \leq \Delta l, \quad \text{或} \quad \Delta l = \frac{\Delta n}{\cos \theta} \geq \Delta n.$$

沿 $\Delta \mathbf{n}$ 方向的方向微商为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta n} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta l} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial l} \frac{1}{\cos \theta} \geq \frac{\partial \Phi}{\partial l}. \quad (\text{B. 6})$$

由此可见,沿 $\Delta \mathbf{n}$ 方向的方向微商比任何其它方向的方向微商都大。

标量场的梯度定义为这样一个矢量,它沿方向微商最大的方向(即 $\Delta \mathbf{n}$ 方向),数值上等于这个最大的方向微商(即 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$)。标量场 Φ 的梯度通常记

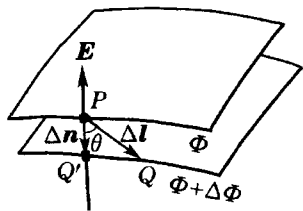


图 B-1 标量场的梯度

作 $\text{grad}\Phi$ 或 $\nabla\Phi$. 根据上面的分析可知, Φ 的梯度的方向总是与 Φ 的等值面垂直的。

标量场的梯度是个矢量场。例如, 电场中电势 U 是个标量场, 它的负梯度等于场强 E , 是个矢量场。

(2) 坐标表示式

在正交曲线坐标系中标量场梯度的一般表示式为

$$\begin{aligned}\nabla U &= \frac{\partial U}{\partial l_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial l_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial l_3} \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (\text{B. 7})$$

$u_1, u_2, u_3, l_1, l_2, l_3, h_1, h_2, h_3$ 的含义见附录 A 中 6-8 节。在各种坐标系中的具体表示式如下:

$$\text{直角坐标系} \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (\text{B. 8})$$

$$\text{柱坐标系} \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (\text{B. 9})$$

$$\text{球坐标系} \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{B. 10})$$

3. 矢量场的通量和散度 高斯定理

(1) 定义

矢量场 A 通过一个截面 S 的通量 Φ_A 定义为下列面积分:

$$\Phi_A = \iint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{(S)} A \cos \theta dS, \quad (\text{B. 11})$$

式中 θ 为 A 与面元 dS 的法线 n 之间夹角, $d\mathbf{S} = n dS$. 如流速场中的流量, 电场和磁场中的电通量、磁通量, 都属于“通量”的概念。

令 S 为一闭合曲面, 它包含的体积为 ΔV , 设想 S 面逐渐缩小到空间某点 P . 用 Φ_A 代表矢量场 A 在闭合面 S 上的通量:

$$\Phi_A = \oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

当 $\Delta V \rightarrow 0$, Φ_A 也趋于 0. 若两者之比有一极限, 则这极限值为矢量场 A 在 P 点的散度, 记作 $\text{div} A$ 或 $\nabla \cdot A$:

$$\nabla \cdot A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi_A}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}. \quad (\text{B. 12})$$

矢量场的散度是个标量场。

(2) 散度的坐标表示式

上述散度的定义式(B.12)是与坐标的选取无关的,下面我们来研究它的直角坐标表示式。如图B-2,以 P 点为中心取一个棱边分别与 x 、 y 、 z 轴平行的平行六面体,设边长分别为 Δx 、 Δy 、 Δz 。现在来计算通过这平行六面体表面的通量。

先考虑与 x 轴垂直的一对表面。它们的面积都是 $\Delta y \Delta z$ 。设 P 点的坐标为 x, y, z ,则这一对表面的 x 坐标分别为 $x - \Delta x/2$ 和 $x + \Delta x/2$,从而在这一对表面上矢量场分别为 $\mathbf{A}(x - \Delta x/2, y, z)$ 和 $\mathbf{A}(x + \Delta x/2, y, z)$ 。在计算通量的时候,只有与表面垂直的分量,即 A_x 分量起作用,它们在两表面上的数值分别是 $A_x(x - \Delta x/2, y, z)$ 和 $A_x(x + \Delta x/2, y, z)$,于是穿过这一对表面的通量分别是

$$A_x(x - \Delta x/2, y, z) \Delta y \Delta z \text{ 和 } A_x(x + \Delta x/2, y, z) \Delta y \Delta z,$$

二者一进一出,它们的代数数和为

$$\Phi_x = A_x(x + \Delta x/2, y, z) \Delta y \Delta z - A_x(x - \Delta x/2, y, z) \Delta y \Delta z.$$

围绕 P 点将 A_x 按泰勒级数展开:

$$A_x(x \pm \Delta x/2, y, z) = A_x(x, y, z) \pm \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \text{高次项},$$

于是

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \left[A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \\ &\quad - \left[A_x(x, y, z) - \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z + \text{高次项}, \end{aligned}$$

即

$$\Phi_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \text{高次项}.$$

同理可以得到穿过与 y 轴和 z 轴垂直的两对表面的通量代数数和分别为

$$\Phi_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \text{高次项},$$

$$\Phi_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z + \text{高次项}.$$

最后我们得到穿过平行六面体六个表面的通量代数总和为

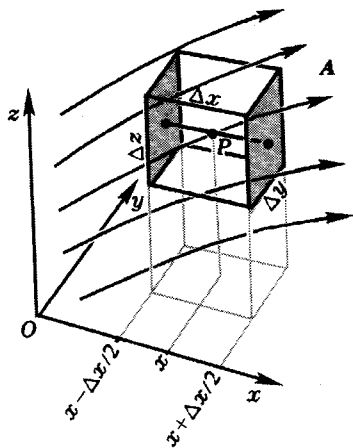


图 B-2 散度直角坐标表示式的推导

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{(\text{平行六面体表面})} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + \text{高次项},\end{aligned}$$

因为平行六面体的体积 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, 按照散度的定义 (B. 12) 式, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + \text{高次项}}{\Delta x \Delta y \Delta z},$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{B. 13})$$

这就是散度的直角坐标表示式。下面我们不加推导地写出散度在其它常用坐标中的表示式, 以备参考。

$$\text{柱坐标系} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{B. 14})$$

$$\text{球坐标系} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (\text{B. 15})$$

(3) 高斯定理

在矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 中取任意闭合面 S , 用 V 代表它所包围的体积。如图 B-3a, 用一曲面 D (下面叫它“隔板”) 把体积 V 及其表面 S 分为两部分: V_1 和 V_2 , 以及 S_1' 和 S_2' , 这里 $V_1 + V_2 = V$, $S_1' + S_2' = S$, 体积 V_1 的全部表面为 $S_1' + D = S_1$, 体积 V_2 的全部表面为 $S_2' + D = S_2$. 穿过 S_1 和 S_2 的通量分别是

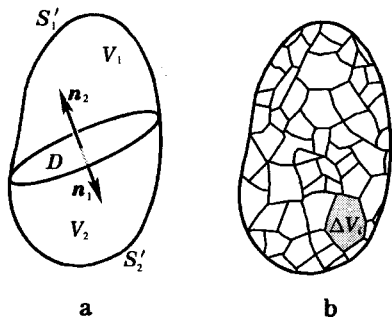


图 B-3 高斯定理的证明

$$\begin{aligned}\Phi_{A1} &= \oiint_{(S_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_1 = \oiint_{(S_1')} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_1 + \oiint_{(D)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_1, \\ \Phi_{A2} &= \oiint_{(S_2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_2 = \oiint_{(S_2')} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_2 + \oiint_{(D)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_2.\end{aligned}$$

在上两式中右端的第二项 $\oiint_{(D)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_1$ 和 $\oiint_{(D)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_2$ 虽然都是矢量场 \mathbf{A} 穿过“隔板” D 的通量, 但对于闭合曲面 S_1 和 S_2 来说, 在 D 上的外法线 \mathbf{n}_1 和 \mathbf{n}_2 方向相反, 所以这两项绝对值相等, 正负号相反。于是

$$\Phi_{A1} + \Phi_{A2} = \oiint_{(S_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_1 + \oiint_{(S_2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_2 = \oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_A.$$

这就是说,将闭合曲面 S 所包围的空间用“隔板”隔开,穿过两部分通量的代数和不变,它仍等于穿过 S 的总通量 Φ_A 。

以上结论不难推广到把 V 分割成更多块的情形(见图 B-3b)。这时我们有

$$\Phi_A = \sum_{i=1}^n \Phi_{Ai}. \quad (\text{B. 16})$$

如果把体积 V 无限分割下去,使每块体积 ΔV_i 都趋于 0,则按照散度的定义,

$$\Phi_{Ai} = \oiint_{(S_i)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_i = (\nabla \cdot \mathbf{A})_i \Delta V_i,$$

其中 $(\nabla \cdot \mathbf{A})_i$ 是 \mathbf{A} 的散度在体积元 ΔV_i 内的数值。把上式代入(B. 16)式:

$$\Phi_A = \oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_{i=1}^n (\nabla \cdot \mathbf{A})_i \Delta V_i,$$

取极限后右端变为体积分:

$$\oiint_{(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{(V)} \nabla \cdot \mathbf{A} dV. \quad (\text{B. 17})$$

(B. 17) 式表明:矢量场通过任意闭合曲面 S 的通量等于它所包围的体积 V 内散度的积分。这就是矢量场论中的高斯定理。

高斯定理是矢量场论中重要的定理之一,利用它可以把面积分化为体积分,或反过来把体积分化为面积分。应注意,这是一个数学的定理,不要和第一章 §4 中静电场的高斯定理混淆!静电场高斯定理成立的前提是库仑定律(即平方反比律),而这个数学上的高斯定理对场的物理规律没有要求,只要求场函数是连续可微的。

4. 矢量场的环量和旋度 斯托克斯定理

(1) 定义

矢量场 \mathbf{A} 沿闭合回路的线积分称为环量,用 Γ_A 表示环量,则有:

$$\Gamma_A = \oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{B. 18})$$

令 ΔS 为闭合曲线 L 包围的面积, \mathbf{n} 为 ΔS 的右旋单位法向矢量。设想回路 L 逐渐缩小,最后缩到空间某点 P 。当 $\Delta S \rightarrow 0$ 时, Γ_A 也趋于 0。若两者之比有一极限,则这极限值为矢量场 \mathbf{A} 的旋度(它是个矢量)在 \mathbf{n} 上的投影。 \mathbf{A} 的旋度记作 $\text{curl} \mathbf{A}$ 或 $\text{rot} \mathbf{A}$, 或 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。上述定义可写作

$$(\nabla \times \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Gamma_A}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}. \quad (\text{B. 19})$$

矢量场的旋度也是个矢量场。

(2) 旋度的坐标表示式

下面我们来研究旋度的直角坐标表示式。先看旋度的 x 分量。如图B-4a,取一个与 x 轴垂直的矩形回路 L_x ,它的边分别与 y, z 轴平行,边长为 Δy 和 Δz 。取回路 L_x 的环绕方向,使它的右旋法向矢量 \mathbf{n} 指向 $+x$ 方向。设回路的中心 P 点的坐标为 x, y, z ,则在1,2,3,4四边上矢量场 \mathbf{A} 沿回路元的平行分量是

$$A_z(x, y + \Delta y/2, z), -A_y(x, y, z + \Delta z/2), \\ -A_z(x, y - \Delta y/2, z), A_y(x, y, z - \Delta z/2).$$

所以

$$\oint_{(L_x)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_z(x, y + \Delta y/2, z) \Delta z \\ - A_z(x, y - \Delta y/2, z) \Delta z \\ - A_y(x, y, z + \Delta z/2) \Delta y \\ - A_y(x, y, z - \Delta z/2) \Delta y,$$

围绕 P 点将 A_y, A_z 按泰勒级数展开:

$$A_y(x, y, z \pm \Delta z/2) = A_y(x, y, z)$$

$$\pm \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} + \text{高次项},$$

$$A_z(x, y \pm \Delta y/2, z) = A_z(x, y, z)$$

$$\pm \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \text{高次项},$$

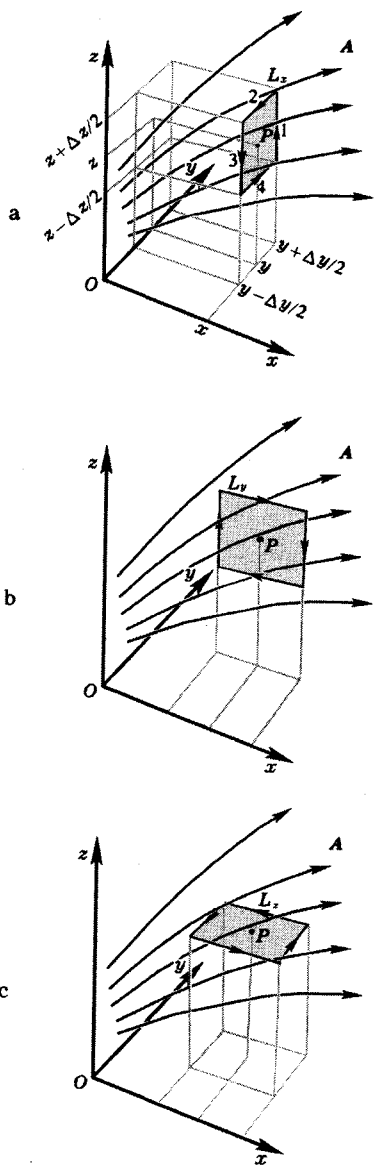
代入前式,得

$$\oint_{(L_x)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z + \text{高次项}.$$

因为回路 L_x 包围的矩形面积为 $\Delta S = \Delta y \Delta z$,按照旋度的定义(B.19)式,得

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{(L_x)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z + \text{高次项}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (\text{B.20})$$



图B-4 旋度直角坐标表示式的推导

同理可以得到旋度的 y, z 两个分量(参见图 B-4b 和 c)。现将全部分量的直角坐标表示罗列如下:

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{cases} \quad (\text{B. 21})$$

旋度矢量的直角坐标表示式为^①

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B. 22})$$

下面不加推导地给出旋度在其它常用坐标中的表示式,以备参考。

柱坐标系

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \quad (\text{B. 23})$$

球坐标系

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{B. 24})$$

(3) 斯托克斯定理

在矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 中取任意闭合回路 L (见图 B-5a)。现用一条曲

① 我们已多次使用了符号“ ∇ ”,但一直是将它和一个场函数 Φ 或 \mathbf{A} 连起来写,而未说明它单独代表什么。其实 ∇ 是个矢量性质的算符,叫做梯度算符或纳布拉算符,它的直角坐标表示式为

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

我们可以把 ∇ 形式地“乘”在一个标量场 Φ 上,成为它的梯度 $\nabla \Phi$,也可以把 ∇ 形式地“点乘”或“叉乘”在一个矢量场 \mathbf{A} 上,成为它的散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 或旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。不难验证,这样做的结果,我们得到的正是前面的(B. 8)、(B. 13) 和(B. 22) 式。由此也可以看出,把梯度、散度和旋度写成 $\nabla \Phi$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 、 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的依据。

线搭在回路 L 上的 M 、 N 两点之间。 M 和 N 把 L 分割为 L_1' 和 L_2' 两部分, L_1' 和 MN 组成新的小闭合回路 L_1 , L_2' 和 NM 组成新的小闭合回路 L_2 , L_1 和 L_2 的环绕方向一致。沿 L_1 和 L_2 的环量分别是

$$\Gamma_{A1} \equiv \oint_{(L_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(L_1')} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_M^N \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

$$\Gamma_{A2} \equiv \oint_{(L_2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(L_2')} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_N^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

故

$$\begin{aligned} \Gamma_{A1} + \Gamma_{A2} &= \int_{(L_1')} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(L_2')} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma_A, \end{aligned}$$

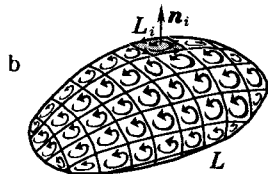
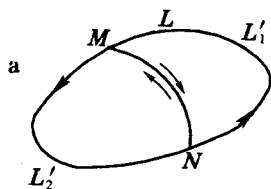


图 B-5 斯托克斯定理的证明

即矢量在闭合回路 L 上的环量等于分割出来的两个闭合回路 L_1 和 L_2 上环量之和。这个结论不难推广到更多个小回路。如图 B-5b, 用许多曲线, 像织成的网子一样绷在回路 L 的“框架”上, 则每个网眼是一小闭合回路 L_i 。令它们的环绕方向都一致, 用 Γ_{Ai} 代表 L_i 上的环量, 则有

$$\Gamma_A = \sum_{i=1}^n \Gamma_{Ai}. \quad (\text{B. 25})$$

这就是说, L 上的环量是由各局部的环量累积起来的。

如果把上述分割过程无限继续下去, 使每个小回路的面积 ΔS_i 都趋于 0, 则按照旋度的定义,

$$\Gamma_{Ai} \equiv \oint_{(L_i)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{A})_{ni} \Delta S_i = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta \mathbf{S}_i,$$

这里 $(\nabla \times \mathbf{A})_{ni}$ 代表旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 在 $\Delta \mathbf{S}_i$ 的右旋单位法线矢量 \mathbf{n}_i 上的投影, $\Delta \mathbf{S}_i = \mathbf{n}_i \Delta S_i$ 是矢量面元。代入 (B. 25) 式, 得

$$\Gamma_A \equiv \oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta \mathbf{S}_i.$$

取极限后, 右端变为面积分:

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{(S)} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{B. 26})$$

(B. 26) 式表明: 矢量场在任意闭合回路 L 上的环量等于以它为边界的曲面 S 上旋度的积分。这就是斯托克斯定理。

斯托克斯定理和高斯定理一样, 也是矢量场论中的一个重要定理。利用

它可以把线积分化为面积分,或反过来把面积分化为线积分。

5. 一些公式

下面再给出一些常用的公式,推导从略。读者可用直角坐标表示式直接验证。

(1) 场量乘积的微商公式

梯度

$$\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi), \quad (\text{B. 27})$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}). \quad (\text{B. 28})$$

散度

$$\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A}) = \nabla\Phi\cdot\mathbf{A} + \Phi\nabla\cdot\mathbf{A}, \quad (\text{B. 29})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}. \quad (\text{B. 30})$$

旋度

$$\nabla\times(\Phi\mathbf{A}) = \Phi\nabla\times\mathbf{A} + \nabla\Phi\times\mathbf{A}, \quad (\text{B. 31})$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}). \quad (\text{B. 32})$$

其中 Φ 、 Ψ 是任意标量场, \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 是任意矢量场。^①

(2) 二阶微商的公式

$$\nabla\times\nabla\Phi = 0, \quad (\text{B. 33})$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} = 0, \quad (\text{B. 34})$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla\cdot\nabla\mathbf{A}, \quad (\text{B. 35})$$

其中算符 $\nabla\cdot\nabla$ 常写作 ∇^2 , 叫做拉普拉斯算符。

6. 矢量场的类别和分解

(1) 有散场和无散场

若一矢量场在空间某范围内散度为 0, 我们就说它在此范围内无源, 或它是无散场; 若散度不为 0, 则这矢量场是有源的, 或它是有散场。

(B. 34) 式表明, 任何矢量场 \mathbf{A} 的旋度 $\nabla\times\mathbf{A}$ 永远是个无散场。反之亦然, 任何无散场 \mathbf{B} 可以表示成某个矢量场 \mathbf{A} 的旋度:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \quad (\text{B. 36})$$

证明从略。

(2) 有旋场和无旋场

若一矢量场在空间某范围内旋度为 0, 我们就说它在此范围内无旋, 或

① 在 (B. 28) 和 (B. 32) 式中出现 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$ 一类的项, 它代表矢量场 \mathbf{B} 和矢量场的梯度 $\nabla\mathbf{A}$ 的点乘, 后者是个张量。

它是无旋场;若旋度不为 0,则这矢量场是有旋的,或它是有旋场。

(B.33) 式表明,任何标量场 Φ 的梯度 $\nabla\Phi$ 永远是个无旋场。反之亦然,任何无旋场 \mathbf{A} 可以表成某个标量场 Φ 的梯度:

$$\mathbf{A} = \nabla\Phi, \quad \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (\text{B.37})$$

Φ 为无旋场 \mathbf{A} 的势函数,故无旋场又称为势场。

(3) 谐和场

若一矢量场 \mathbf{A} 在某空间范围内既无散又无旋,则这矢量场称为谐和场。

因谐和场无旋,它也是势场:

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A} = \nabla\Phi,$$

又因它同时无散:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

故

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = 0. \quad (\text{B.38})$$

上式叫做拉普拉斯方程,即谐和场的势函数满足拉普拉斯方程。

(4) 一般矢量场的分解

在普遍的情形下,一个矢量场 \mathbf{A} 可以既是有旋的,又是有散的。在这种情况下 \mathbf{A} 可以分解为两部分:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{势}} + \mathbf{A}_{\text{旋}}, \quad (\text{B.39})$$

其中 $\mathbf{A}_{\text{势}}$ 是势场,即无旋场; $\mathbf{A}_{\text{旋}}$ 是无散的有旋场。但上述分解并不唯一,其中可以相差一个任意的谐和场。

现以电磁场为例,麦克斯韦方程组(6.10)中的(I)、(II)两式表明,在非恒定的情况下,电场既有散度,又有旋度。这时电场 \mathbf{E} 可分解为势场和无散的有旋场:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{势}} + \mathbf{E}_{\text{旋}}.$$

在恒定的状态下, $\nabla \times \mathbf{E}_{\text{势}} = 0$, $\mathbf{E}_{\text{旋}} = 0$, 电场 \mathbf{E} 可以写成某个势函数 Φ 的梯度,这势函数 Φ 正是电势 U 的负值,即

$$\mathbf{E} = -\nabla U.$$

麦克斯韦方程组(6.10)中的(III)式表明,磁感应强度 \mathbf{B} 永远是个无散场,故它可写作某个矢量 \mathbf{A} 的旋度,即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{B.40})$$

这个 \mathbf{A} 就是磁矢势。

附录 C 二阶常系数微分方程

二阶线性常系数微分方程

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = d \quad (\text{C.1})$$

的解由两部分相加而成。一部分是非齐次方程的特解

$$x = \frac{d}{c}, \quad (\text{C.2})$$

另一部分是齐次方程式

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (\text{C.3})$$

的通解。通解可如下求得,首先设(C.3)式解的形式为

$$x = e^{\gamma t}, \quad (\text{C.4})$$

将(C.4)式代入(C.3)式即可看出,要(C.4)式能够满足(C.3)式, γ 必须满足

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0. \quad (\text{C.5})$$

解此二次代数方程式(C.5),即得

$$\gamma = -\alpha \pm \beta, \quad (\text{C.6})$$

其中

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}, \quad (\text{C.7})$$

令

$$\lambda = \frac{b^2}{4ac}, \quad (\text{C.8})$$

λ 称为阻尼度。下面按 λ 的不同值分三个情形讨论:

(1) 当 $\lambda > 1$ 时, $\frac{b^2}{4a^2} > \frac{c}{a}$, β 为实数, (C.5) 式有两个实根:

$$\gamma_1 = -\alpha + \beta \quad \text{和} \quad \gamma_2 = -\alpha - \beta,$$

在此情况下(C.3)式的通解为

$$x = A e^{(-\alpha+\beta)t} + B e^{(-\alpha-\beta)t} = e^{-\alpha t} (A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}), \quad (\text{C.9})$$

式中 A 、 B 为任意常数,由起始条件决定。

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$, $\beta = 0$, 这时(C.5)式的两个实根重合,

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -\alpha.$$

在此情况下(C.3)式的通解为

$$x = (A' + B't) e^{-\alpha t}, \quad (\text{C.10})$$

式中 A' 、 B' 为任意常数,由起始条件决定。

(3) 当 $\lambda < 1$ 时, $\frac{b^2}{4a^2} < \frac{c}{a}$, β 为虚数, 令 $\beta = i\omega$, $i = \sqrt{-1}$, 则

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}, \quad (\text{C. 11})$$

这时 (C. 5) 式有两个复数根:

$$\gamma_1 = -\alpha + i\omega \quad \text{和} \quad \gamma_2 = -\alpha - i\omega,$$

在此情况下 (C. 3) 式的通解为

$$x = A''e^{(-\alpha+i\omega)t} + B''e^{(-\alpha-i\omega)t} = e^{-\alpha t} (A''e^{i\omega t} + B''e^{-i\omega t}), \quad (\text{C. 12})$$

式中 A'' 、 B'' 为任意常数, 由起始条件来决定。若用另外两个任意常数 K 和 φ 来代替 A'' 和 B'' :

$$K = 2 \sqrt{A''B''}, \quad \varphi = \frac{1}{2i} \ln \frac{A''}{B''},$$

或反过来

$$A'' = \frac{K}{2} e^{i\varphi}, \quad B'' = \frac{K}{2} e^{-i\varphi},$$

$$\text{则} \quad x = \frac{K e^{-\alpha t}}{2} [e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}] = K e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (\text{C. 13})$$

此解具有衰减振荡的形式, 振荡频率为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}, \quad (\text{C. 14})$$

周期为

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}, \quad (\text{C. 15})$$

当 $b \rightarrow 0$ 时, $\alpha = b/2a \rightarrow 0$, 方程式的解变为等幅振荡的形式:

$$x = K \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (\text{C. 16})$$

式中

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad (\text{C. 17})$$

这时振荡的频率和周期分别变为

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad T_0 = \frac{1}{\nu_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}, \quad (\text{C. 18})$$

微分方程式 (C. 1)、(C. 3) 各种解的形式示于图 C-1 和图 C-2, 其中图 C-1 所示为非齐次方程式 (C. 1) 在以下起始条件下三种解的形式,

$$t=0 \text{ 时 } x=0, \quad \frac{dx}{dt}=0. \quad (\text{C. 19})$$

图 C-2 所示则为齐次方程式 (C. 3) 在以下起始条件下三种解的形式,

$$t=0 \text{ 时 } x=x_0, \quad \frac{dx}{dt}=0. \quad (\text{C. 20})$$

由图 C-1 和 C-2 可见, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, x 趋于某一稳定值 ($\frac{d}{c}$ 或 0)。在 $\lambda > 1$ 时过程是非周期性的; 在 $\lambda < 1$ 时, 过程是衰减振荡式的。 $\lambda = 1$ 的情形是前两者转折点, 这时 x 达到稳定值的过程最短, 这种情形称为临界情形。

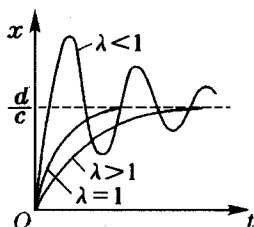


图 C-1 非齐次方程
的三种解

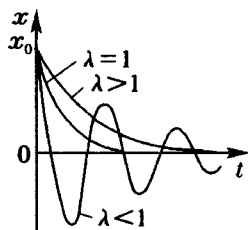


图 C-2 齐次方程
的三种解

附录 D 复数的运算

1. 复数的表示法

复数 \tilde{A} 是一个二维数, 它对应于复平面中的一个坐标为 (x, y) 的点, 或对应于复平面中的一个长度为 A 、仰角为 φ 的矢量 (见图 D-1)。与此相应地复数有下列两种表示法:

$$\begin{cases} \tilde{A} = x + iy, & (D.1) \\ \tilde{A} = A e^{i\varphi}, & (D.2) \end{cases}$$

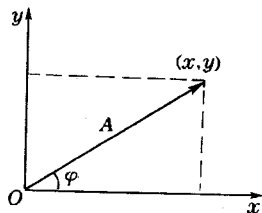


图 D-1

式中 $i = \sqrt{-1}$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ (欧拉公式, 详见第3节)。(D.1) 式是复数的直角坐标表示, 对应点的横坐标 x 为复数的实部, 记作 $x = \operatorname{Re} \tilde{A}$; 纵坐标 y 为复数的虚部, 记作 $y = \operatorname{Im} \tilde{A}$ 。(D.2) 式是复数的极坐标表示, 对应矢量的长度 A 为复数的模或绝对值, 记作 $A = |\tilde{A}|$; 仰角 φ 为复数的辐角, 记作 $\varphi = \arg \tilde{A}$ 。两种表示法之间有如下换算关系: ①

$$\begin{cases} A = \sqrt{x^2 + y^2}, & (D.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{y}{x}. & (D.4) \end{cases}$$

或反过来, 有

$$\begin{cases} x = A \cos\varphi, & (D.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = A \sin\varphi. & (D.6) \end{cases}$$

单位虚数 $i = \sqrt{-1}$ 有如下性质:

$$i^2 = -1, \quad \frac{1}{i} = -i, \quad i = e^{i\pi/2}, \quad \frac{1}{i} = e^{-i\pi/2}.$$

复数 $\tilde{A} = x + iy = e^{i\varphi}$ 的共轭 \tilde{A}^* 定义为

$$\tilde{A}^* = x - iy = e^{-i\varphi} \quad (D.7)$$

所以

$$\tilde{A} \tilde{A}^* = A^2 = x^2 + y^2. \quad (D.8)$$

即一对共轭复数的乘积等于模的平方。

两个复数 $\tilde{A}_1 = x_1 + iy_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$ 、 $\tilde{A}_2 = x_2 + iy_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$ 相等的充要

① 通常把反三角函数的符号, 如 $\arctan\varphi$, 理解为 φ 在主值区间 $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ 取, 这里应该认为 φ 在从 $-\pi$ 到 π 的所有象限中取值。至于它在哪个象限, 要根据 x 和 y 的正负来确定。

条件为

$$\begin{cases} \text{实部相等: } x_1 = x_2, \\ \text{虚部相等: } y_1 = y_2. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \text{模相等: } A_1 = A_2, \\ \text{辐角相等: } \varphi_1 = \varphi_2. \end{cases}$$

2. 复数的四则运算

(1) 加减法

$$\tilde{A}_1 \pm \tilde{A}_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \quad (\text{D. 9})$$

即实部、虚部分别加减。

(2) 乘法

$$\tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 = (A_1 e^{i\varphi_1}) \cdot (A_2 e^{i\varphi_2}) = A_1 A_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (\text{D. 10})$$

即模相乘, 辐角相加。或者

$$\tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (\text{D. 11})$$

(3) 除法

$$\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2} = \frac{A_1 e^{i\varphi_1}}{A_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (\text{D. 12})$$

即模相除, 辐角相减。或者

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned} \quad (\text{D. 13})$$

倒数运算可以看作是除法的特例:

$$\frac{1}{\tilde{A}} = \frac{1}{A e^{i\varphi}} = \frac{1}{A} e^{-i\varphi}, \quad (\text{D. 14})$$

或

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{A}} &= \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (\text{D. 15})$$

3. 欧拉公式

现在介绍一下欧拉公式是如何得来的。因为

$$\begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \end{cases}$$

在 e^x 的展开式中把 x 换成 $\pm ix$, 注意到 $(\pm i)^2 = -1$, $(\pm i)^3 = \mp i$, $(\pm i)^4 = 1$, \cdots , 我们得到

$$\begin{aligned} e^{\pm ix} &= 1 \pm i \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} \mp i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots) \pm i(x - \frac{x^3}{3!} \cdots), \end{aligned}$$

即

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x, \quad (\text{D. 16})$$

这就是欧拉公式。下面给出几个常用的三角函数与复指数函数之间的变换公式。从欧拉公式可以反解出:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad (\text{D. 17})$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \quad (\text{D. 18})$$

由此立即得到

$$\tan \varphi = -i \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}. \quad (\text{D. 19})$$

4. 简谐量的复数表示

简谐量

也可用一个复数

$$\tilde{s}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

的实部或虚部来表示。上式右端又可写为 $(A e^{i\varphi}) e^{i\omega t} = \tilde{A} e^{i\omega t}$, 其中

$$\tilde{A} = e^{i\varphi}$$

称为复振幅, 它集振幅 A 和初相位 φ_0 于一身。于是, 简谐振动的复数表示可写为

$$\tilde{s}(t) = \tilde{A} e^{i\omega t}. \quad (\text{D. 20})$$

用复数也可计算同频简谐量的叠加问题。譬如我们要计算两简谐量

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ 和 } s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

的叠加, $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 都是对应复数量

$$\widetilde{s}_1(t) = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \quad \text{和} \quad \widetilde{s}_2(t) = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

的实部, 所以它们的叠加 $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ 就是相应复数叠加

$$\widetilde{s}(t) = \widetilde{s}_1(t) + \widetilde{s}_2(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

的实部:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

如果 $\widetilde{s}(t)$ 代表位移的话, 则速度和加速度为

$$\widetilde{v} = \frac{d \widetilde{s}}{dt} = i \omega \widetilde{s},$$

$$\widetilde{a} = \frac{d^2 \widetilde{s}}{dt^2} = (i \omega)^2 \widetilde{s} = -\omega^2 \widetilde{s},$$

亦即, 对 t 求导数相当于乘上一个因子 $i\omega$, 运算起来十分方便。

我们有时候需要计算两个同频简谐量乘积在一个周期里的平均值, 如平均功率, 这也可以用复数来运算。设两个同频简谐量为

$$\begin{cases} a_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1), \\ a_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \Phi_2), \end{cases}$$

它们的乘积在一个周期内的平均值等于

$$\begin{aligned} \overline{a_1 a_2} &= \frac{1}{T} \int_0^T a_1(t) a_2(t) dt \\ &= \frac{\omega A_1 A_2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \Phi_1) \cos(\omega t + \Phi_2) dt \\ &= \frac{\omega A_1 A_2}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\cos(\Phi_1 - \Phi_2) + \cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2)] dt \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\Phi_1 - \Phi_2). \end{aligned}$$

如果用相应的复数

$$\begin{cases} \widetilde{a}_1(t) = A_1 e^{i(\omega t + \Phi_1)} \\ \widetilde{a}_2(t) = A_2 e^{i(\omega t + \Phi_2)} \end{cases}$$

来计算的话, 下列公式给出同样的结果:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\widetilde{a}_1 \widetilde{a}_2^*) &= \frac{A_1 A_2}{2} \operatorname{Re}[e^{i(\omega t + \Phi_1)} e^{-i(\omega t + \Phi_2)}] \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \operatorname{Re}[e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)}] = \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\Phi_1 - \Phi_2). \end{aligned}$$

所以今后我们将用下式来计算两简谐量乘积的平均值:

$$\overline{a_1 a_2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\widetilde{a}_1 \widetilde{a}_2^*). \quad (\text{D. 21})$$

数学附录

A. 高斯积分

具有下列形式的定积分称为高斯积分：

$$\mathcal{I}_n = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-ax^2} dx, \quad (a > 0, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{A. 1})$$

这是统计物理学中经常用到的一类积分。作 $z = x^2$ 的变量变换，则 $x = z^{1/2}$, $dx = \frac{1}{2} z^{-1/2} dz$ ，可将高斯积分写成另一种形式：

$$\mathcal{I}_n = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{n/2-1} e^{-az} dz, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{A. 2})$$

现将它们的表达式罗列于下，供读者参考：

$n = 1$	$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{-1/2} e^{-az} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2 a^{1/2}}$
$n = 2$	$\mathcal{I}_2 = \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-az} dz = \frac{1}{2a}$
$n = 3$	$\mathcal{I}_3 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{1/2} e^{-az} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{4 a^{3/2}}$
$n = 4$	$\mathcal{I}_4 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z e^{-az} dz = \frac{1}{2 a^2}$
$n = 5$	$\mathcal{I}_5 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{3/2} e^{-az} dz = \frac{3\sqrt{\pi}}{8 a^{5/2}}$
$n = 6$	$\mathcal{I}_6 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^2 e^{-az} dz = \frac{1}{a^3}$
...

下面我们简单地讲一讲，这些积分是怎样得到的。将 a 看作变量求导：

$$\frac{\partial}{\partial a} \int x^n e^{-ax^2} dx = - \int x^{n+2} e^{-ax^2} dx,$$

即

$$\mathcal{I}_n = - \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{I}_{n-2}.$$

这样一来，就把高斯积分 \mathcal{I}_n 用 \mathcal{I}_{n-2} 表示出来，将 n 降了两级。连续使用这种方法，就可把求所有奇数的 \mathcal{I}_n 问题归结为求 \mathcal{I}_1 ，求所有偶数的 \mathcal{I}_n 问题归结为求 \mathcal{I}_2 。 \mathcal{I}_2 是很容易求出的，因为将不定积分

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} + \text{常数},$$

代入积分的上下限，即可得到上表中 \mathcal{I}_2 的表达式。

\mathcal{I}_1 就不那么好求了,需要用一种特殊的技巧来解决。考虑一个二维无限大平面上的积分,积分的变量可以采用直角坐标 (x, y) , 这时面元为 $dx dy$; 也可以采用极坐标 (r, θ) , 这时面元为 $r dr d\theta$ 。两种作法应是等价的。被积函数为 $e^{-ar^2} = e^{-a(x^2+y^2)}$, 用极坐标来作, 我们有

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ar^2} = 2\pi \mathcal{I}_2.$$

用直角坐标来作, 我们有

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy e^{-a(x^2+y^2)} = 4 \int_0^\infty e^{-ax^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-ay^2} dy = 4 \mathcal{I}_1^2.$$

比较以上两式, 得

$$\mathcal{I}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{I}_2.$$

于是, 由 \mathcal{I}_2 的表达式即可得到上表中 \mathcal{I}_1 的表达式。

B. 误差函数

高斯积分是上下限固定的定积分, 在概率论和统计物理中常需要计算任意积分限的数值, 人们建立了误差函数 (error function) 的概念, 其定义为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx, \quad (\text{B. 1})$$

并编纂了函数表附在一般积分表里供查阅。下面给出误差函数的一个简表:

x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$
0	0	1.0	0.8427	2.0	0.9953
0.2	0.2227	1.2	0.9103	2.2	0.9981
0.4	0.4284	1.4	0.9523	2.4	0.9993
0.6	0.6039	1.6	0.9763	2.6	0.9998
0.8	0.7421	1.8	0.9891	2.8	0.9999

当 x 大于表中所给的数时, 误差函数值可用下列级数算出:

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots \right]. \quad (\text{B. 2})$$