6
波及波动方程

为了解第 5 章最后的那一组方程，我们必须暂时离开交通流这个话题一会儿，转而先来研究波。在看到图 6-1 时，相信读者会理解这是必要的。该图将现场采集到的车辆轨迹显示在时-空图上。水平轴是时间，从左至右推进；纵轴是空间，车辆由下往上流动。图中有三道纹波清晰可见，它们描绘了某种扰动在车流中的传播。这个现象告诉我们交通流量确实具有波的行为，要解决车流动态变化的问题必须求助于波的知识。因此，本章的目的就是帮助读者尽快预备波的知识。

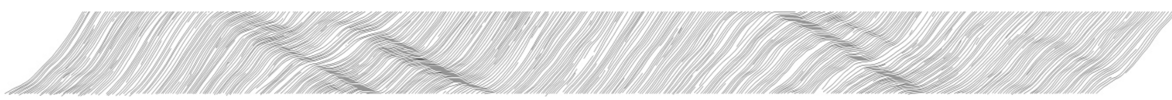

图 6-1 高速公路上观察到的车流波

6.1 波的现象

现实生活中随处可见波的现象，当向池塘里扔一块小石子时，我们看到波纹一圈圈地向外扩散，如图 6-2，这就是波。在足球比赛进入高潮时，一排排热情的观众依次起立和坐下，看上去就像某种“信号”在传来传去，这也是一种波。当将一根绳子一端固定，而在另一端抖动时，我们看到“波峰”不停地向前移动，这又是一种波。实际上，**波**就是*媒体中的扰动在时-空中的传播*。在之前的例子中，波纹、信号、波峰都是扰动，而水、观众、绳子则是媒体。现在将上述的定义应用于路上的一队车辆：当其中的一辆车突然急刹车，紧接着又恢复原状时，后续的车辆会依次受到影响。这种“痉挛”效应的传播就是波，其中“痉挛”是扰动，车流是媒体。

图 6-2 水面上的波纹

6.2 波的数学表达

在数学领域，我们用偏微分方程 (partial differential equation 或 PDE) 来描述波的现象，因此我们称描述波的现象的偏微分方程为波动方程。

6.2.1 符号及标注

如果一个因变量 k 是两个自变量 t 和 x 的函数，我们用 $k=k(t,x)$ 来表示，它对 t 和 x 的偏导数标记如下：

$$k_x=\frac{\partial k}{\partial x},k_t=\frac{\partial k}{\partial t},k_{xt}=\frac{\partial^2 k}{\partial x\partial t},k_{tx}=\frac{\partial^2 k}{\partial t\partial x},k_{xx}=\frac{\partial^2 k}{\partial x^2},k_{tt}=\frac{\partial^2 k}{\partial t^2}$$

$k(t,x)$ 的偏微分方程是个包含一个或多个关于k对 t 和 x偏导数的等式，例如：

$$k_t=k_x+k;\qquad k_t=k_{xx}+k_x+5;\qquad k_t=k_{xxx}+4k+\cos x$$

6.2.2 相关的术语

我们可以根据偏微分方程的阶数、齐次性、和线性对它们进行分类。

阶数

一个偏微分方程的阶数由其等式中的最高阶次决定，例如：

- 一阶偏微分方程： $k_t = k_x + k$
- 二阶偏微分方程： $k_t = k_{xx} + k_x + 5$
- 三阶偏微分方程： $k_t = k_{xxx} + 4k + \cos x$

一阶偏微分方程可以表示为如下一般形式：

$$P(t,x,k)k_t + Q(t,x,k)k_x = R(t,x,k)$$

其中，P，Q 和 R 是系数并且可以是 t，x，或 k 的函数。

齐次性

一阶偏微分方程$P(t,x,k)k_t + Q(t,x,k)k_x = R(t,x,k)$ 可以是：

- 齐次，如果 $R(t,x,k)=0$
- 非齐次，如果 $R(t,x,k)\neq 0$

线性

在上述的一阶偏微分方程中，如果 P 和 Q 独立于 k，即 $P=P(t,x), Q=Q(t,x)$，并且：

- 如果 R 也独立于 k，即 $R=R(t,x)$，则这个偏微分方程是*严格线性*的。例如，
  $2xk_t + 3k_x = 5t$
- 如果 R 是 k 的线性函数，即 $R=R(t,x,k)$，则这个偏微分方程是*线性*的。例如，

$$2xk_t + 3k_x = 5k + 3$$

- 如果 R 是 k 的非线性函数，则这个偏微分方程是*半线性*的。例如，$2xk_t + 3k_x = e^k$。

尤其是，当 P 和/或 Q 是 k 的函数，即$P = \mathrm{P}(t,x,k)$，$Q = \mathrm{Q}(t,x,k)$，并且$R = \mathrm{R}(t,x,k)$时，则这个偏微分方程是*拟线性*的。例如，$k_t + (3k+2)k_x = 0$。

如果一个偏微分方程中出现了k和它的偏导数的交叉项，则这个偏微分方程是*非线性*的，例如$k_t k_x + k = 2$。

现在请读者自测一下，给下列偏微分方程进行分类：

$$k_t + ck_x = 0$$
$$k_t + ck_x = e^{-t}$$
$$k_{tt} = C^2 k_{xx}, C\text{是一个常数}$$
$$k_{tt} - k_x x + k = 0$$
$$k_{tt} + kk_x + k_{xxx} = 0$$

6.3 行波

很多波动方程都有行波形式的解：$k(t,x) = f(x-ct)$。图 6-3 显示了一列行波的两个瞬间，它们分别是$f(x-ct_0)$和$f(x-ct_1)$。由此，我们看到：

1) 行波保持它的波形不变，
2) 在t_1时刻的行波只是t_0时刻行波平移的结果。

如果 c 是一个正的常数，行波$k(t,x) = f(x-ct)$随着时间向右移动，波$k(t,x) = f(x+ct)$随着时间向左移动。

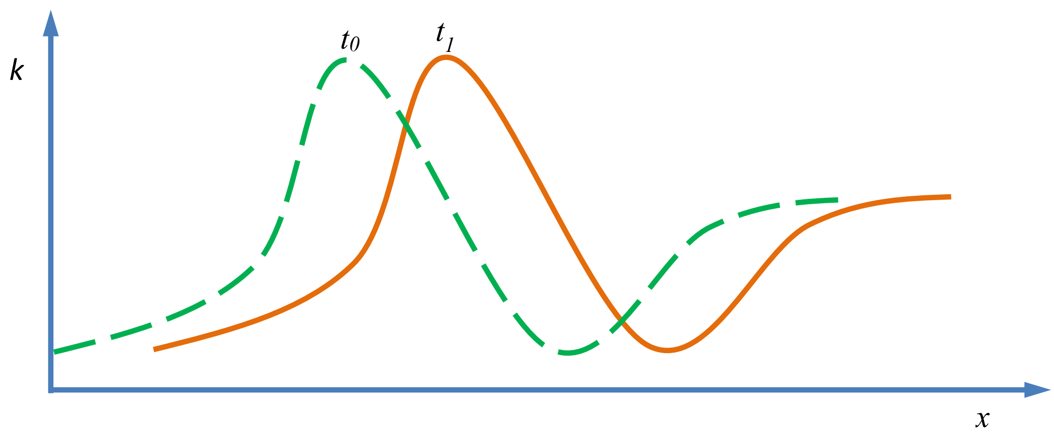

图 6-3 一列行波

6.4 行波解

求解以下波动方程：

$$k_{tt} = ak_{xx}$$

这里 a 是一个常数。

假设上述波动方程具有行波解 $k(t,x) = f(x-ct)$。令 $z = x-ct$，则

$$k_t = \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = f'\times(-c) = -cf'$$

同样，$k_x = f'$，$k_{tt} = c^2 f''$，$k_{xx} = f''$

将上述的等式代入波动方程，则有：

$$(c^2 - a)f'' = 0$$

有两种方法能够使左式为 0：(1) $c^2 - a = 0$ 和 (2) $f'' = 0$.

- 如果 $c^2 - a = 0$，那么 $k(t,x) = f(x \pm \sqrt{a}t)$，这里 f 可以是任意函数。
- 如果 $f'' = 0$，那么 $k(t,x) = A + B(x-ct)$，这里 A 和 B 任意常数。

6.5 波阵面和脉冲

如果下述等式成立，我们称一列行波为波阵面：

$$\begin{cases} k(t,x) = k_1 & \text{当 } x \to -\infty \text{ 时} \\ k(t,x) = k_2 & \text{当 } x \to +\infty \text{ 时} \end{cases}$$

图 6-4 显示了一个波阵面。当 $k_1 = k_2$ 时，我们称这个行波为脉冲。

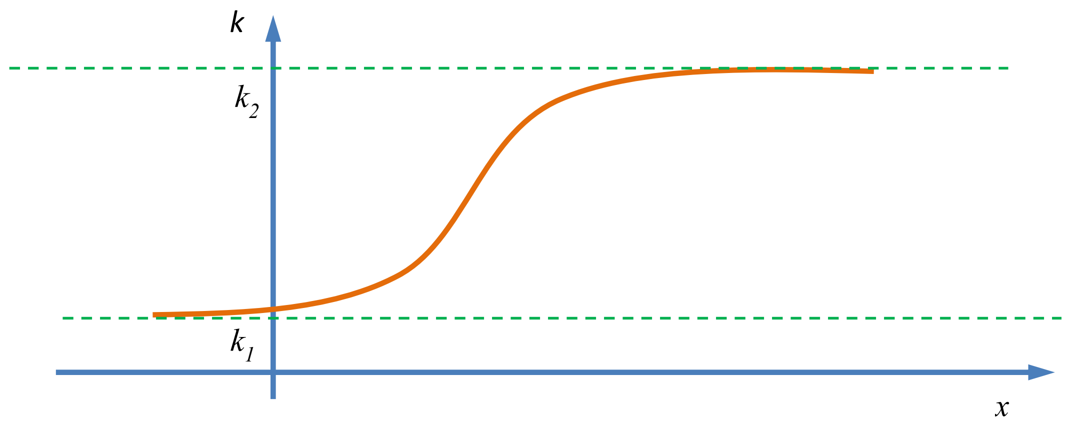

图 6-4 波阵面

6.6 波动方程的一般解法

很多的波动方程都有一种行波叠加形式的一般解法：

$$k(t,x) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

请注意，即使右式的每一项是行波，然而它们的叠加却不一定是行波。

例一

根据给定的初始条件，求解波动方程方程：

$$\begin{cases} k_{tt} = c^2 k_{xx} \\ k(0,x) = f(x) \\ k_t(0,x) = g(x) \\ -\infty < x < +\infty, t > 0 \end{cases}$$

解答：

将一般解代入第一个初始条件：

$$F(x) + G(x) = k(0,x) = f(x)$$

将一般解代入第二个初始条件：

$$-cF'(x) + cG'(x) = k_t(0,x) = g(x)$$

将上述等式两边同时除以 c，然后求积分后得到：

$$-F(x) + G(x) = -F(0) + G(0) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds$$

解出$F(x)$和$G(x)$：

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}[-F(0) + G(0) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds]$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}[-F(0) + G(0) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds]$$

将得到的结果代入一般的解中：

$$k(t,x) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

$$= \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2}[-F(0) + G(0) + \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} g(s)ds]$$
$$+ \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}[-F(0) + G(0) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} g(s)ds]$$

合并化简之后得到：

$$k(t,x) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

这就是著名的达朗伯尔 (d'Alembert) 解。

例二

根据给定的初始条件，解波动方程方程：

$$\begin{cases} k_{tt} = 4k_{xx} \\ k(0,x) = e^{-x^2} \\ k_t(0,x) = 0 \\ -\infty < x < +\infty, t > 0 \end{cases}$$

利用例一得到的结果，考虑到$k_t(0,x) = g(x) = 0$，则有：

$$k(t,x) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]$$

因此，

$$k(0,x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] = f(x) = e^{-x^2}$$

因为$f(x) = k(0,x)$，则有：

$$k(t,x) = \frac{1}{2}[k(0,x-ct) + k(0,x+ct)] = \frac{1}{2}[e^{-(x-ct)^2} + e^{-(x+ct)^2}]$$

6.7 特征线

在例一中，考虑到$f(x) = k(0,x)$，$g(x) = k_t(0,x)$，相应的解可以变成如下形式：

$$k(t,x) = \frac{1}{2}[k(0,x-ct) + k(0,x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

依赖域

应用上述结论，k 在任一时-空点(t^*, x^*)处的解为：

$$k(t^*, x^*) = \frac{1}{2}[k(0, x^* - ct^*) + k(0, x^* + ct^*)] + \frac{1}{2c}[\int_{x^*-ct^*}^{x^*+ct^*} g(s)ds]$$

这表明，k 在任意一点(t^*, x^*)处的解是由在$(0, x^* - ct^*)$和$(0, x^* + ct^*)$点处给定的初始条件，以及由这两个点(包括这两个点)围成的区间 I 决定的，$I = [x^* - ct^*, x^* + ct^*]$。见图 6-5 的左半部分。因此，这个 I 区间就称为点(t^*, x^*)的*依赖域*（*domain of dependence*）。

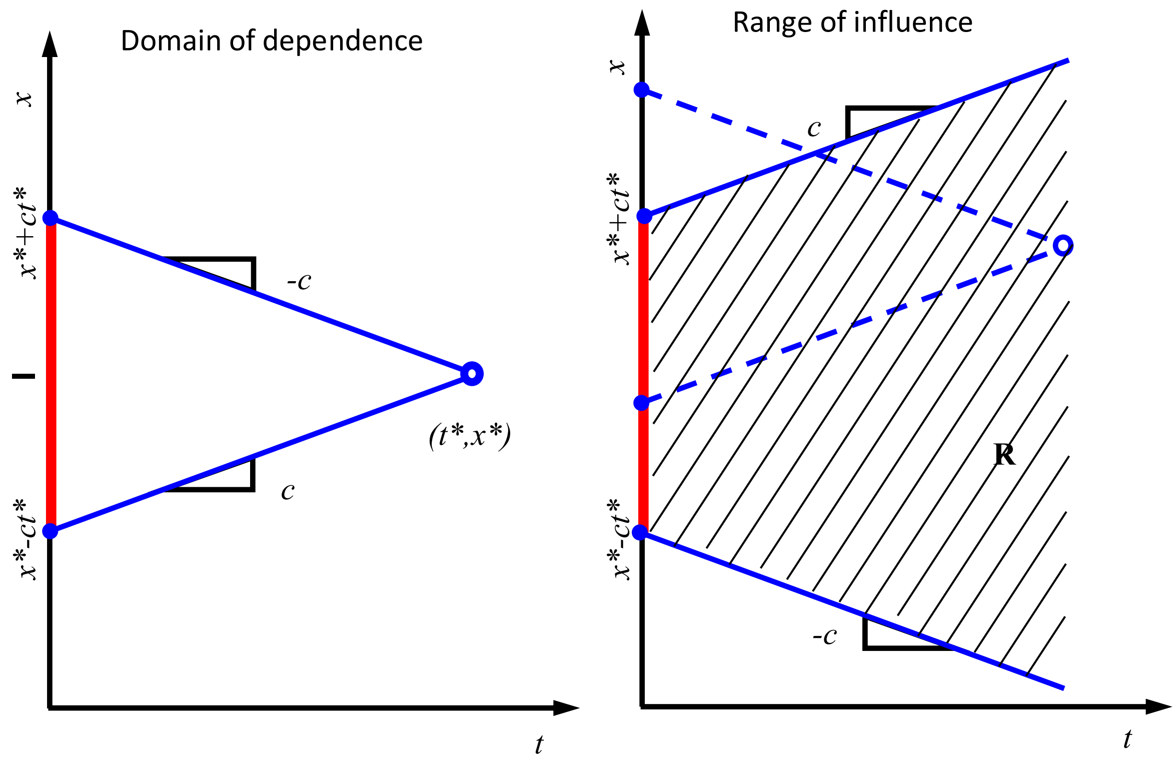

图 6-5 依赖域和影响范围

影响范围

影响范围（region of influence）是一个点的集合，这些点的解要么全部要么部分受到这个依赖域 I 的影响，如图 6-5 中阴影部分所示。

特征线

在图 6.5 的左半部分中，有两条直线由点(t^*,x^*)发射出来并与 x 轴相交于$(0,x^*-ct^*)$和$(0,x^*+ct^*)$，这两条直线的斜率分别为 c 和 -c。这两条直线就称作*特征线*（注意不要和之前提到的交通流特征里的“特征”混淆了）。

6.8 波动方程的解

当$k_t(0,x)=0$时，例一中波动方程的解可以化简为：

$$k(t,x)=\frac{1}{2}[k(0,x-ct)+k(0,x+ct)]$$

这表示在 (t,x) 处 k 的值仅仅依赖于 k 在$x_1=x-ct$和$x_2=x+ct$处的初始值。一旦这个初始值$k(0,x-ct)$和$k(0,x+ct)$确定了，k 在 (t,x) 处的解就是$k(0,x_1)$和$k(0,x_2)$的平均值。

例三

利用特征线求解以下波动方程：

$$\begin{cases} k_{tt}=4k_{xx} \\ k(0,x)=\begin{cases} 1, & \text{如果}0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它范围} \end{cases} \\ k_t(0,x)=0 \\ -\infty<x<+\infty, t>0 \end{cases}$$

在这个方程中，行波的速度是$c=\pm 2$，即$k(t,x)=f(x\pm 2t)$。首先，建立一个 x-t 平面，在 x 轴上找到 0 和 1（因为条件给定 x 在 0 和 1 处是是 k 的初始值突变点）。然后从这两个点分别发出两条特征线（斜率分别为± 2），如图 6.6 所示。这四条特征线将整个平面划分成六个区域。我们随便取一个点(t_0,x_0)进行分析。从这个点发出两条特征线，然

后找到它们和 x 轴的交点。接着，在两个交点处找到对应的 k 值，在这里 k 值为 1 和 0。最后，在 (t_0, x_0) 处 k 的解就是这两个交点处 k 值的平均数，即 $k(t_0, x_0) = \frac{1}{2}$。

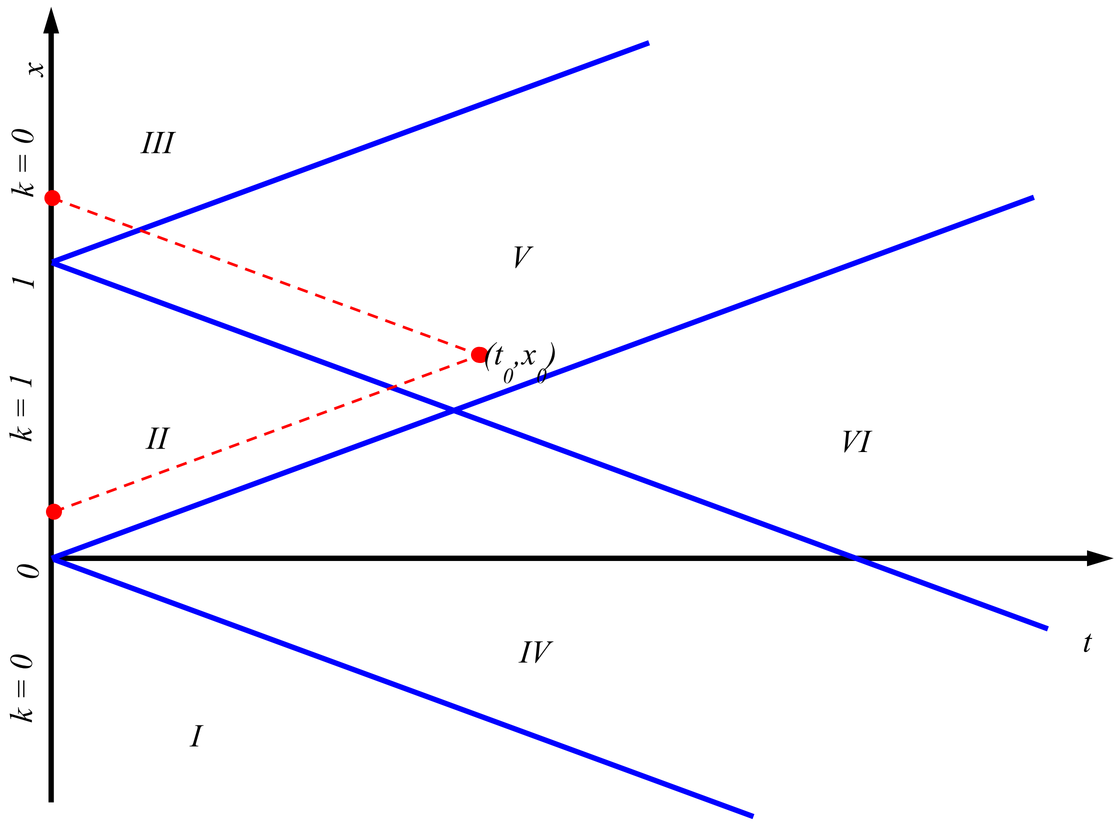

图 6-6 例三的图解

用同样的方法，在其他区域的解也可以确定：

$$k(t,x) = \begin{cases} 0, \text{如果}(t,x) \in \text{区域I} \\ 1, \quad \text{如果}(t,x) \in \text{区域II} \\ 0, \quad \text{如果}(t,x) \in \text{区域III} \\ \frac{1}{2}, \quad \text{如果}(t,x) \in \text{区域IV} \\ \frac{1}{2}, \quad \text{如果}(t,x) \in \text{区域V} \\ 0, \quad \text{如果}(t,x) \in \text{区域VI} \end{cases}$$

综上所述，我们得到如下启示：

1. 对于一些类似例三中的波动方程，k 在点(t,x)处的解和点$(0,x_0)$处的初始条件k_0相关。
2. 这种解法是从点(t,x)发出两条斜率分别为±c特征线。
3. 这两条特征线跟 x 轴交于两个点$(0,x_1)$和$(0,x_2)$这里$x_1=x-ct$ 和 $x_2=x+ct$。于是方程的解为：$k(t,x)=\frac{1}{2}[k(0,x_1)+k(0,x_2)]$

6.9 特征线解法

现在我们考虑一种非常简单的偏微分方程，在第五章中，我们由守恒定律推导出了以下连续性方程：

$$k_t+q_x=0$$

如果我们假设$q=ck$，这里c是一个常数，那么有$q_x=ck_x$。上述的偏微分方程可以表示如下（这里暂时忽略 k 和 q 的物理意义，我们后面回到这个问题上）：

$$\begin{cases} k_t+ck_x=0 \\ k(0,x)=k_0(x) \\ -\infty<x<\infty, 0<t \\ c \text{ 是一个常数} \end{cases}$$

我们的目的是解出这个偏微分方程，或者说找到在任意一点 (t,x) 处的 k 值。与其寻找整个时-空平面中任意点的解，我们不如先从一个简单的情形开始，即寻找时-空平面上某条具体的曲线上一点处的解。我们先画一条曲线 x = x(t)（至于曲线怎么画，我们稍后就知道了），现在新的目标就是找到这条曲线上的任意一点的 k 值，即 k(t,x(t))。为了找到解，我们先来看看 k 在这个曲线上是怎样变化的。k 对时间的变化率等于 k 对 t 的一阶（全）导数：

$$\frac{dk(t,x(t))}{dt}=\frac{\partial k}{\partial t}\frac{dt}{dt}+\frac{\partial k}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt}=k_t+\frac{dx}{dt}k_x$$

细心的读者已经发现了，这个等式的右边跟原方程很像。事实上，如果我们令下式成立，则它们是完全一样的：

$$\frac{dx(t)}{dt}=c$$

那么我们就得到了：

$$\frac{dk(t,x(t))}{dt}=k_t+ck_x=0$$

这表明在曲线上 k 对 t 的全导数为 0，即只要沿着这条曲线，k 就是一个常数。这意味着我们需要画的这条曲线 $x=x(t)$ 是一条斜率为 c 的直线。因此，这条曲线可以通过解以下常微分方程组得到：

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=c\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x(t)=ct+x_0\\ x_0=x-ct\end{cases}$$

在时间 t=0 处，这条线跟 x 轴交于 x_0，因为在这条线上，k 值保持不变，即 $k(t,x(t))=k_0(0,x_0)=k_0(x_0)$，而 $k_0(x_0)$ 在初始条件中已经给定。于是，我们就找到了这条直线上所有点的解了。这样的一条线就称作*特征线*，听起来熟悉吗？没错，这和之前所说的特征线是一样的，那是从一个时-空间点发出的斜率为 c 的直线，其中 c 是行波 $f(x-ct)$ 的传播速度。

有了上述准备，我们就能很容易地得到任意一点 $(t^*,x^*(t^*))$ 处的解 $k(t^*,x^*(t^*))$。求解步骤如下：

1. 写出从这个点发出的特征线的方程：$x(t)=ct+x_0$，
2. 找到这条线和 x 轴的交点：$x_0=x^*-ct^*$，
3. 根据初始条件，算出在交点处的 k 值：$k(0,x_0)=k_0(x_0)=k_0(x^*-ct^*)$，
4. 这就是你想要求解的那个点的 k 值：$k(t^*,x^*)=k_0(x^*-ct^*)$。

例一

利用特征线解法，求以下偏微分方程 在（$t^* = 3, x^* = 10$）处的解：

$$\begin{cases} k_t + 2k_x = 0 \\ k(0,x) = 2x^2 + 5 \\ -\infty < x < \infty, 0 < t \end{cases}$$

解法：根据上述步骤：

1. 从这个点发出的特征线是： $x(t) = 2t + x_0$
2. 特征线和 x 轴的交点是： $x_0 = 10 - 2 \times 3 = 4$
3. 在交点处的 k 值是： $k(0,4) = 2 \times 4^2 + 5 = 37$
4. 因此， $k(3,10) = 37$

6.10 特征线解法的一些性质

前面介绍的是一个非常简单的一阶齐次线性偏微分方程。下面我们对它进行更深入的讨论并指出它的一些性质。

6.10.1 特征线的性质

在之前的例子中，特征线是一条直线，因为 c 是一个常数。同样地，从另一个时-空点发出的特征线也是一条直线。除此之外，这两条直线平行，因为它们的斜率相同。图 6-7 描述了在 x-t 平面上的一组平行的特征线。每一条线上的 k 值都相同，用另一条与之平行的空间线表示。称这条空间线特征曲线。不同的特征线上的 k 值不同，所以 k(t,x) 面不一定是平的。我们称一组携带和传播信号的特征线为*运动波*（kinematic wave），就像图中描绘的那组特征线一样。

读者也许会问，如果 c 不是一个常数呢？我们利用随后的两个例子来说明这个问题。

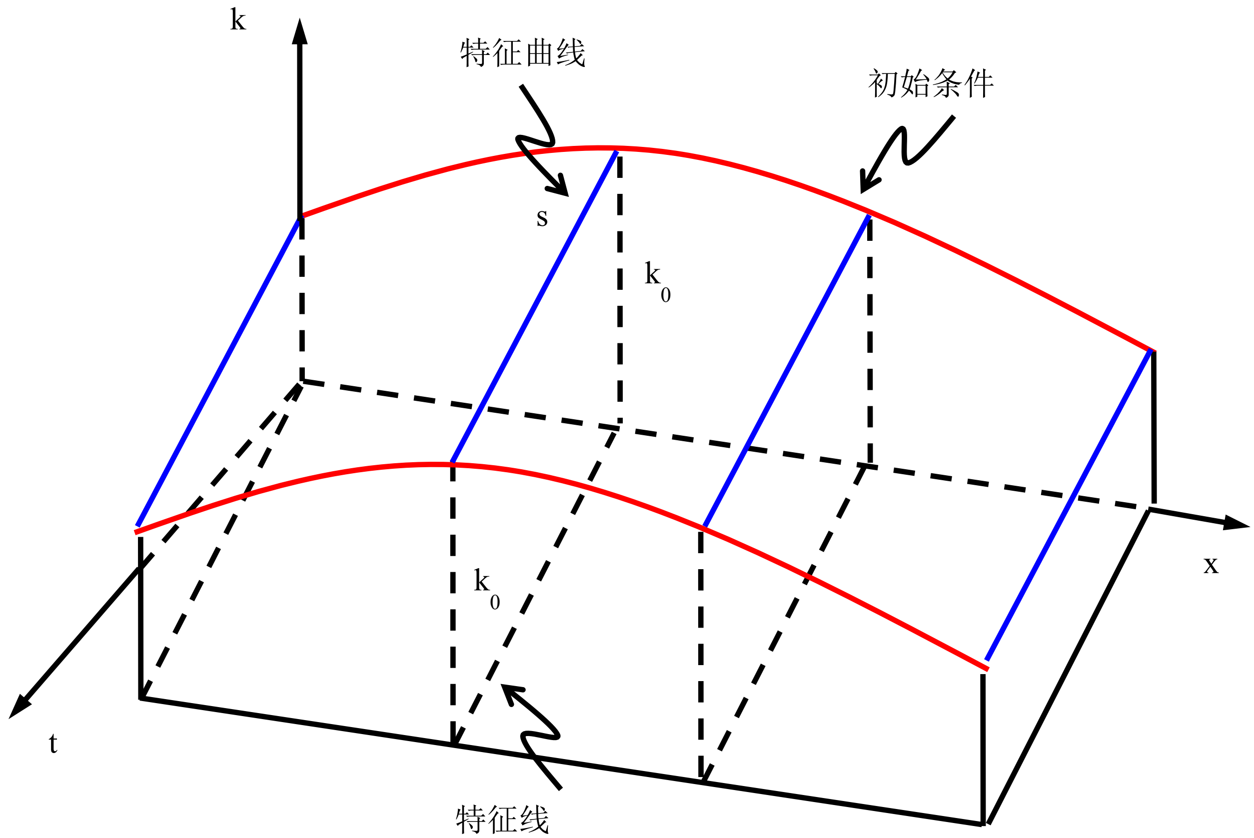

图 6-7 特征线解法：特征线是直线且平行

例二

在这个例子中，c 依赖于 k，但是不显式依赖于 t 和 x，即 $c = c(k(t,x))$。在这种情况下，特征线方程要从以下方程中得出：

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(k(t,x))$$

因此，特征线方程为：

$$x = c(k_0(x_0))t + x_0$$

可见，特征线仍然是一条直线。只是在不同的截距 x_0 处，这条直线的斜率不同。因此，两条特征线有可能相交，如图 6-8 所示。

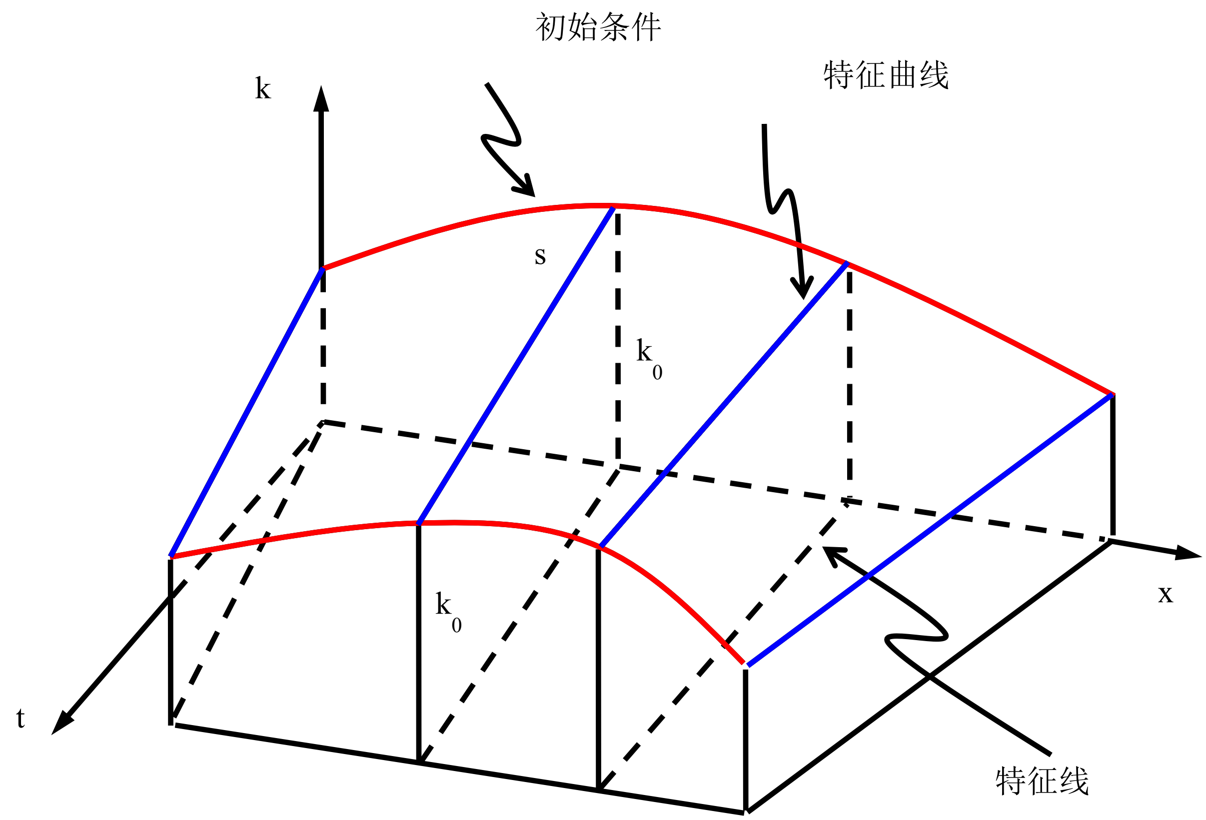

图 6-8 特征线解法：特征线是直线但相交

例三

在这个例子中，c 显式依赖于 x 和/或 t，例如 c = t。特征线等式是从以下微分方程中得出：

$$\frac{dx(t)}{dt} = c = t$$

经过积分，我们得到 $x = \frac{1}{2}t^2 + A$，这里 A 是一个积分常数。这种情况下，特征线不再是直线，而是抛物线。另外，从不同的时-空点发出的特征线不再平行，因而会相交。

下面总结一下以上的讨论：

- 如果 c 是常数，特征线是直线且互相平行。
- 如果 c 依赖于 k，但不显式依赖于 t 和 x，特征线依然是直线。但是不同的特征线会有不同的斜率，有可能会相交。
- 如果 c 显式依赖于 x 和/或 t，特征线既不是直线也不平行，因此，它们可能会相交。
- 因为特征线是一组 k 值不变的时-空点的集合，那么两条特征线的交点处的 k 值有可能取多个值。这种现象叫作*梯度突变*（gradient catastrophe）。

6.10.2 方程解的属性

如果我们令 $\frac{dx(t)}{dt}=c$，则：

$$\frac{dk}{dt}=0$$

这表明在这条特征线上 k 值保持不变，这个结论成立的前提是相应的偏微分方程是齐次的：

$$k_t+ck_x=0$$

如果偏微分方程是非齐次的呢？例如：

$$k_t+ck_x=-1$$

这种情况下，k 对 t 的导数为：

$$\frac{dk}{dt}=-1$$

这表明在这条特征线上 k 值不再是常数，只是以 1 的速率减小，即 $k=k_0-t$，

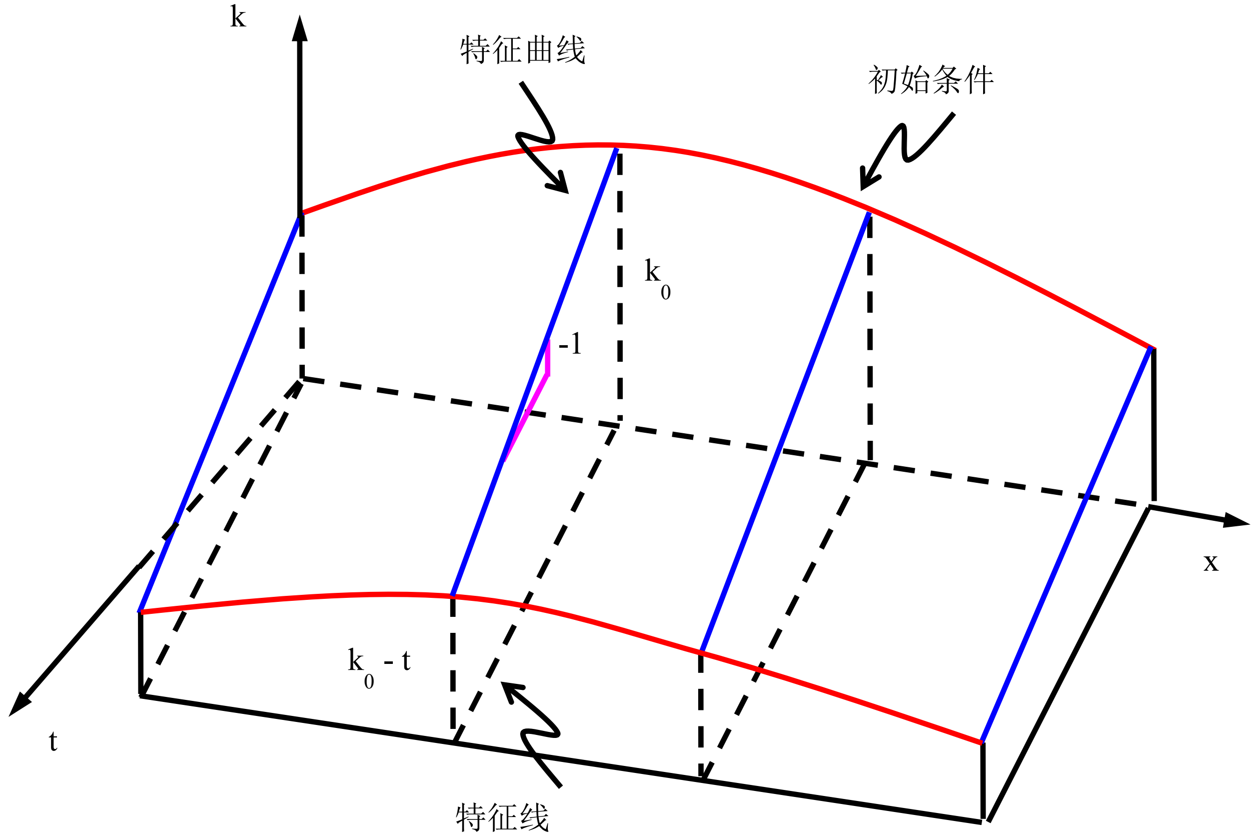

图 6-9 就描绘了这样的一个例子。

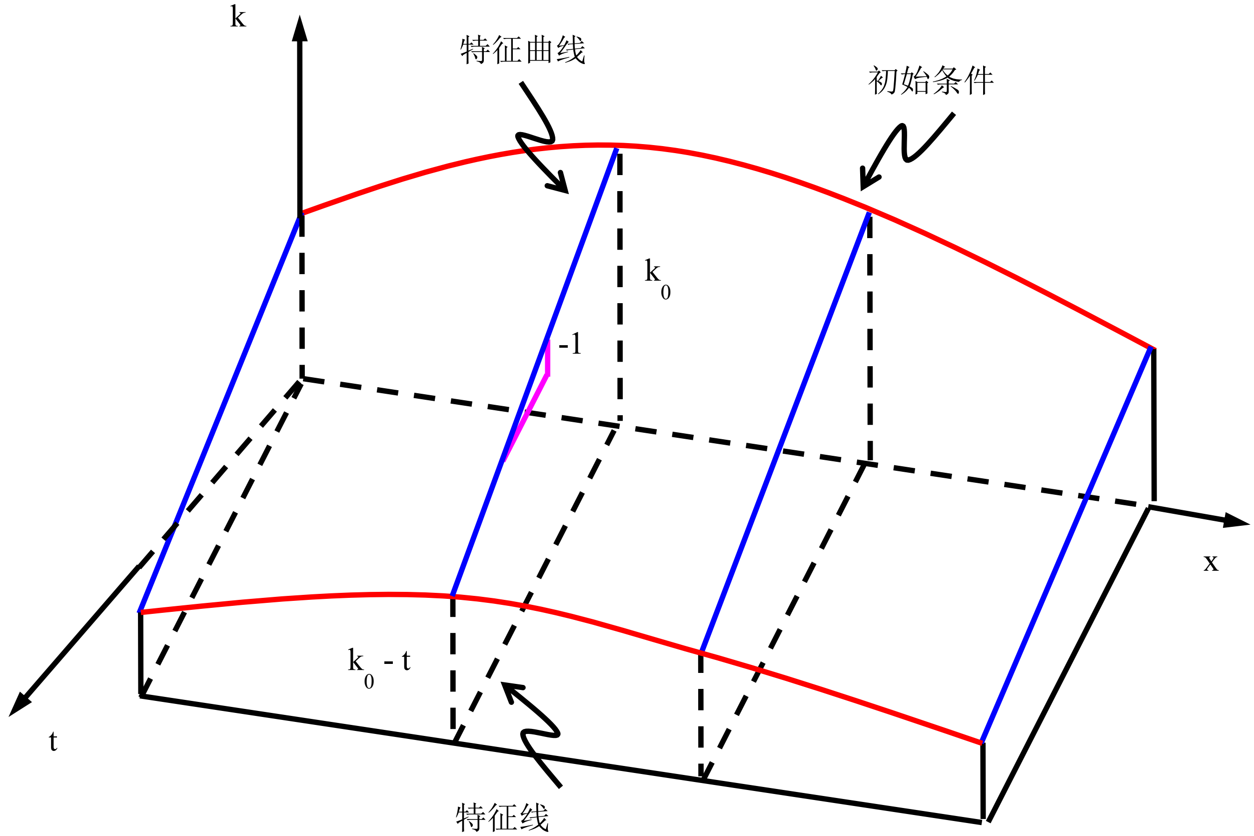

图 6-9 特征线解法：沿特征线 k 值不再是常值

练习题

1. 对下列的偏微分方程进行分类：

   a) $k_{txt} = 3xk_{tt} + 4tkk_x k_t - 8xt$
   b) $k_t = 9k_x$
   c) $k_{xx} + \frac{1}{5}k_x + \frac{1}{25}k_{tt} = 0$
   d) $kk_x + ak_t + bk = 0$ 其中 a 和 b 是常数
   e) $5k_t + 9k_x = 3k^3$

2. 根据给定的初始条件，用特征线方法来解出下列的偏微分方程：

$$k_{tt} - k_{xx} = 0$$

$$\text{其中 } k(0,x) = \begin{cases} 2 & \text{当} \quad x > 1 \text{ 时} \\ 1 & \text{当} \quad -1 \le x \le 1 \text{ 时} \\ 0 & \text{当} \quad x < -1 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\text{并且 } k_t(0,x) = 0$$

3. 求出下列偏微分方程的达朗伯尔解：

$$k_{tt} - \frac{1}{9}k_{xx} = 0$$

$$\text{其中 } k(0,x) = 0 \text{ 和 } k_t(0,x) = 2$$

4. 求出下列偏微分方程的达朗伯尔解：

$$k_{tt} = 4k_{xx}$$

$$\text{其中} k(0,x) = 2x \text{ 和 } k_t(0,x) = e^{-x}$$

5. 求出下列一阶齐次线性偏微分方程在点 (t,x) = (4,5) 处的解：

$$\begin{cases} k_t + \frac{1}{2}k_x = 0 \\ k(0,x) = 4x + \ln x^2 \\ -\infty < x < \infty \\ t > 0 \end{cases}$$

6. 用特征线法解出下列的一阶齐次准线性偏微分方程在点 (t, x) = (2,20) 处的解：

$$\begin{cases} k_t + (2k+1)k_x = 0 \\ k(0,x) = x + 10 \\ -\infty < x < \infty \\ t > 0 \end{cases}$$

7. 用特征线法来解出下列的一阶非齐次准线性偏微分方程在点 (t, x) = (5,9) 处的解：

$$\begin{cases} k_t + 2tk_x = 2 \\ k(0,x) = 2x + 1 \\ -\infty < x < \infty \\ t > 0 \end{cases}$$