Fractali în Canvas

Sorin Milutinovici
sorinmilu@gmail.com

Rezumat - Una dintre cele mai recent apărute platforme de grafică este elementul canvas din standardul HTML5. Canvasul permite construcţia elementelor grafice 2D şi 3D, acestea fiind disponibile direct în browser, fără necesitatea instalării componentelor software suplimentare. Fractalii, figuri geometrice aparte, asemănătoare cu unele forme naturale, au reprezentat una dintre primele aplicaţii a graficii pe computer, la începuturile acestui domeniu. Acest referat trece în revistă câteva moduri de generare a fractalilor cu aplicarea acestora în elementul canvas HTML5.

Implementarea algoritmilor descrişi în acest referat se poate vedea aici: http://makore.ro/fractals_in_canvas/

1. Componentul Canvas din standardul HTML5

Canvas-ul este unul dintre cele câteva elemente ale standardului HTML5, standard care permite clienţilor web să afişeze conţinut multimedia fără componente software adiţionale. Alte elemente adăugate de acest standard sunt <video>, <audio>, fiecare dintre ele reprezentând, ca şi canvas, API-uri către funcţionalităţi avansate ale browserelor şi chiar ale sistemului de operare.

Canvas se prezintă la prima vedere ca orice alt element de marcare în limbajul HTML. Cu un comportament asemănător cu alte tag-uri (H1, p) canvas are o sintaxa similară acestora, putând fi identificat cu ajutorul unui atribut “id”, putând avea atribute ca “width”, “height” la fel ca multe altele. De fapt, canvasul pune la dispoziţia utilizatorului o suprafaţă de desen cu accesarea directă a fiecărui pixel, similar cu accesul disponibil într-un software de editare a imaginilor bitmap. Pe lângă 2D canvasul permite şi construcţia scenelor 3D [1].

Interpretoarele Javascript existente în programele de navigare au fost extinse cu o serie de instrucţiuni care interacţionează cu interiorul canvasului (numit context) pentru a desena figuri geometrice.

O sesiune de desen simpla arată ca în figura 1.

```
var canvas = document.getElementById('mycanvas');

var ctx = canvas.getContext('2d');
ctx.beginPath();
ctx.arc(75,75,50,0,Math.PI*2,true);

ctx.moveTo(110,75);
ctx.arc(75,75,35,0,Math.PI,false);

ctx.moveTo(65,65);
ctx.arc(60,65,5,0,Math.PI*2,true);

ctx.moveTo(95,65);
ctx.arc(90,65,5,0,Math.PI*2,true);
ctx.stroke();
```

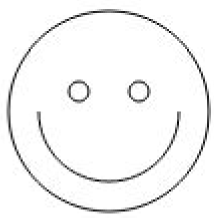


Figura 1: Exemplu de sesiune de desen în canvas-ul HTML5

2. Fractali

Geometria clasică este aproape neputincioasă în faţa unei probleme simple cum ar fi măsurarea volumului unui copac. Sau măsurarea lungimii unui ţărm. Sau măsurarea suprafeţei unei frunze de ferigă. Un matematician francez, Benoit Mandelbrot a încercat să ofere o explicaţie surprinzătoare: în timp ce formele geometrice cu care suntem obişnuiţi să operăm au dimensiuni geometrice finite (numere întregi), multe dintre structurile naturale au dimensiuni fracţionare [2].

Un copac nu are dimensiunea 2 pentru că nu încape într-un plan dar nu are cum să aibă nici dimensiunea 3 pentru că nu umple complet spaţiul pe care îl ocupă. În egală măsură un ţărm nu poate avea dimensiunea 1 (nu este o linie) dar nici 2 pentru că nu umple complet un spaţiu bidimensional.

Aceste structuri geometrice mai au o proprietate interesantă, numită autosimilaritate. Dacă privim un fragment al unui copac, acesta seamănă cu copacul întreg. Dacă privim de aproape linia unui ţărm, ea va arăta la fel ca şi cum am privi-o de la o distanţă mai mare. Nu va fi identică, dar forma geometrică va fi asemănătoare.

Astfel de figuri, autosimilare, cu dimensiune topologică fracţionară pot fi generate matematic. Denumirea lor este "Fractali" - denumire care evidenţiază ceea ce aceste figuri modelează: caracterul fracţionar, zdrenţuit şi în ultimă instanţă haotic al acestor forme geometrice. Datorită faptului că au aceleaşi proprietăţi geometrice ca formele naturale, fractalii generaţi matematic sunt consideraţi de majoritatea celor care îi privesc ca fiind figuri extrem de plăcute vizual. Creierul uman, obişnuit cu admirarea formelor naturale, admiră cu aceeaşi putere figurile geometrice generate după aceleaşi principii geometrice care seamănă cu acestea.

Fractalii sunt aproape sinonimi cu evoluţia graficii pe calculator. Descoperitorul fractalilor, Benoit Mandelbrot, a utilizat computerele IBM pentru a descoperi ceea ce probabil este cel mai celebru şi cel mai recunoscut fractal în acest moment, setul Mandelbrot.

Apariţia tehnologiilor HTML5 permite desenarea fractalilor direct în canvas. Evident, canvasul a fost utilizat pentru desenarea fractalilor încă de la apariţia acestuia. Datorită istoriei ambelor domenii, chiar dacă la prima vedere nu există o conexiune între ele, în realitate desenarea unui fractal într-un canvas într-o pagină de web este una dintre cele mai naturale uniuni din domeniul graficii pe computer. Există mai multe moduri de a genera fractali cu ajutorul computerului, toate bazându-se pe sisteme iterative.

2.1. Jocul haosului (the Chaos Game)

Jocul haosului (sau jocul haotic) se referă la un algoritm iterativ descris pentru prima dată de matematicianul britanic Michael Barnsley în 1988. Algoritmul generează o figură autosimilară (fractal) prin repetarea unei proceduri extrem de simple, ancorată în colţurile unui poligon cu n laturi [4].

Algoritmul este următorul:

1. se alege un punct X la întâmplare în interiorul poligonului
2. se alege unul dintre colţurile poligonului la întâmplare (C)
3. se plasează un punct (P) la jumătatea distanţei între punctul iniţial (X) şi colţul ales (C).
4. P devine noul punct iniţial
5. se alege un alt colţ al poligonului (C1)
6. se plasează un punct P1 la jumătatea distanţei dintre P şi C1.

După aplicarea algoritmului în cazul unui triunghi se obţine o figură cunoscută sub numele de "triunghiul lui Sierpinsky" sau "sita lui Sierpinsky", a cărui construcţie geometrică se poate obţine şi prin subdivizarea infinită a unui triunghi echilateral în 4 triunghiuri.

Aplicarea aceluiaşi algoritm în interiorul poligoanelor de dimensiuni diferite conduce la obţinerea unor figuri geometrice autosimilare (cu condiţia selecţiei atente a ordinii vârfurilor).

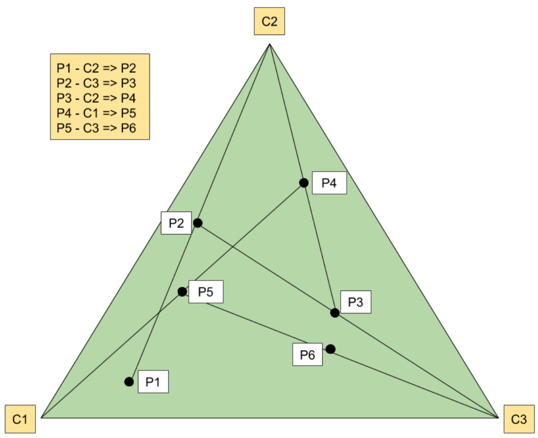
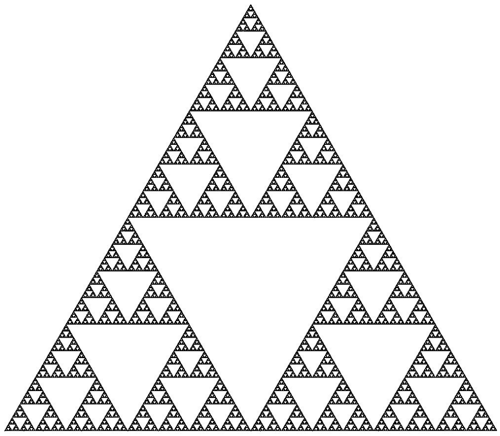
	
Ordinea generării punctelor în cazul aplicării jocului haosului într-un triunghi	Rezultatul aplicării algoritmului, numit triunghiul lui Sierpinski

Figura 2 - Algoritmul “Jocul Haosului” în cazul unui triunghi şi rezultatul aplicării acestuia, triunghiul lui Sierpinsky.

În cazul în care algoritmul se aplică asupra unui pătrat, dacă se permite selecţia colţurilor poligonului la întâmplare, se obţine o distribuţie aleatoare a punctelor. Dacă modul de selecţie al următorului colţ al poligonului este controlat, se obţin diferite figuri fractale, după cum se poate vedea în figura 3

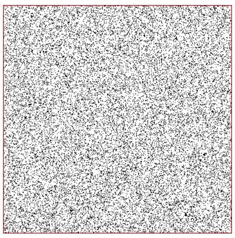
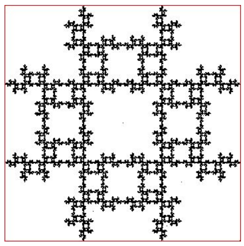
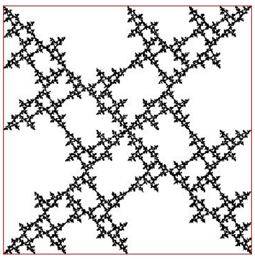
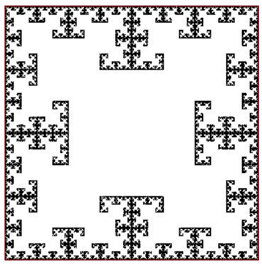
	
(v1) Alegerea următorului colţ la întâmplare	(v2) următorul colţ nu poate fi cel curent
	
(v3) următorul colţ nu poate fi la distanţă de un singur colţ (în sens trigonometric) de colţul curent	(v4) următorul colţ nu poate fi la două colţuri de colţul curent.

Figura 3. Influenţa modului de selecţie al următorului colţ al poligonului asupra rezultatului [8].

Implementarea codului javascript care desenează versiunile de fractali bazate pe jocul haosului este adaptată după codul publicat pe site-ul https://www.lesscake.com/fractals-chaos-game [7].

2.2. Mulţimea Mandelbrot

Mulţimea Mandelbrot reprezintă, din punct de vedere matematic, o mulţime de numere complexe care satisface o anumită condiţie. Mai precis, mulţimea tuturor numerelor complexe c pentru care următoarea serie converge:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

unde z se iniţializează cu 0.

Astfel, dacă există o limită L astfel încât:

$$|z_n| \; < \; L$$

pentru orice n, atunci numărul complex c este parte din mulţimea Mandelbrot. Se demonstrează matematic că dacă L > 2 atunci seria diverge. Această condiţie este folosită pentru oprirea iteraţiilor.

Dacă reprezentăm în planul complex toate numerele care fac parte din mulţimea Mandelbrot, obţinem următoarea figură:

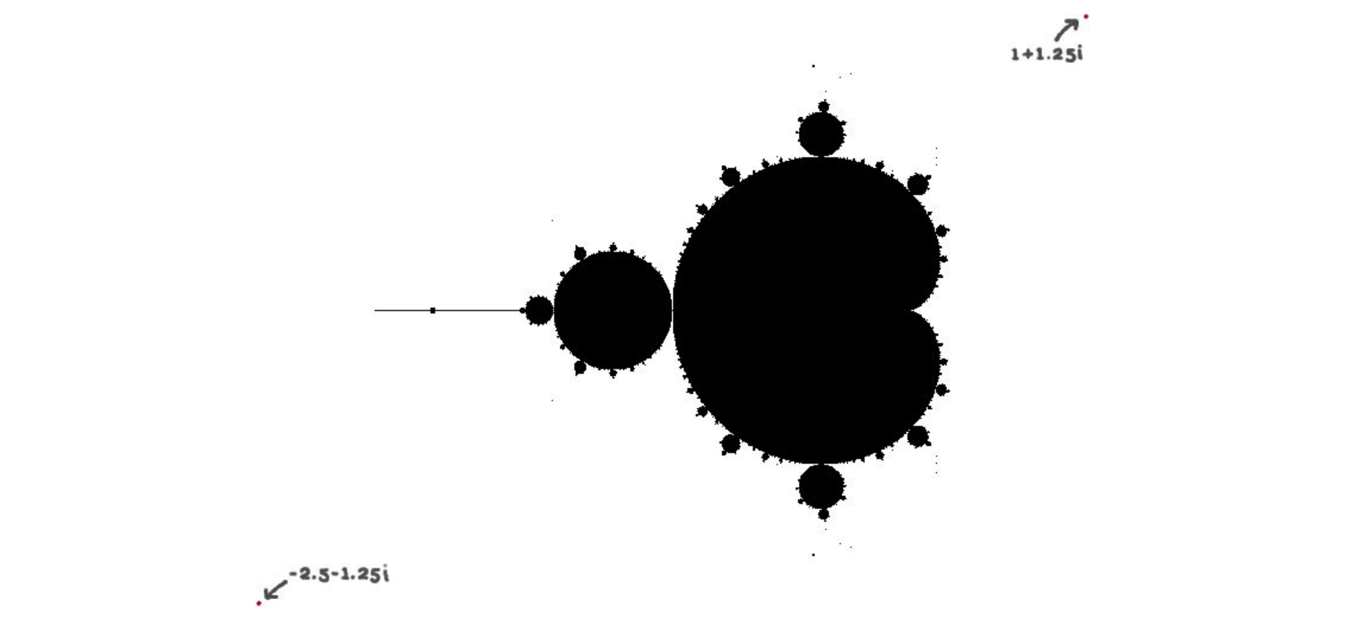


Figura 4: Mulţimea Mandelbrot în planul complex, împreună cu limitele acesteia (după [6]).

Toate punctele negre corespund numerelor complexe care îndeplinesc condiţia de convergenţă. Cea mai interesantă proprietate a mulţimii Mandelbrot este că este infinită fără sa fie infinită - cu cât ne apropiem de marginile acesteia se relevă noi structuri, asemănătoare cu structurile anterioare (autosimilaritate) dar nu ajungem niciodată la final. Nu reuşim să găsim un factor de mărire a imaginii la care să nu apară noi protuberanţe.

Configurată în acest mod, imaginea mulţimii Mandelbrot este alb/negru. Fiecare punct din planul complex converge sau nu. Dar aceasta presupune ca testul de convergenţă este făcut cu un număr infinit de iteraţii. Cu cât numărul de iteraţii care “decide” convergenţă unui punct este mai mare, cu atât imaginea devine mai “precisă”. Punctele aflate pe marginea mulţimii vor converge cu viteze diferite. Dacă reprezentăm diferite viteze de convergenţă cu diferite culori, obţinem imaginile cunoscute ale mulţimii Mandelbrot, afişate în figura 5.

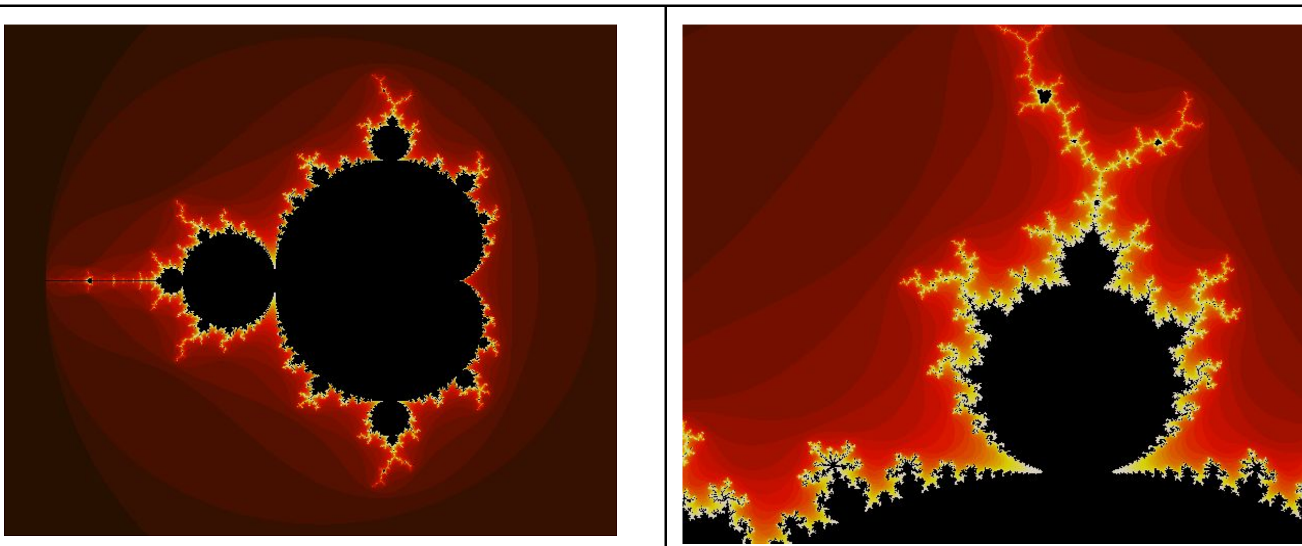


Figura 5: Mulţimea Mandelbrot cu reprezentarea cromatică a vitezei de convergenţă şi cu evidenţierea autosimilarităţii.

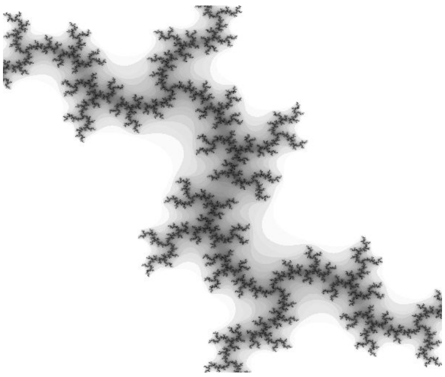
2.3 Mulţimea Julia

Mulţimea Julia a fost descoperită cu mult timp înainte de mulţimea Mandelbrot de matematicianul francez Gaston Julia în 1918. Pornind de la aceeaşi formulă care a fost folosită pentru construcţia setului Mandelbrot:

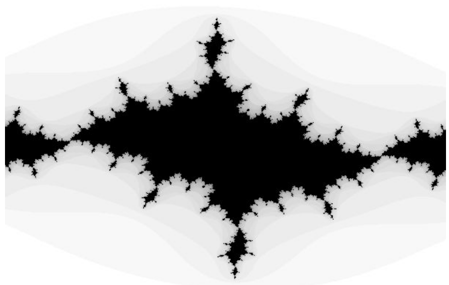
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

se pot construi o infinitate de mulţimi Julia. Pentru construcţia unei astfel de mulţimi, se alege o constantă C fixă şi se modifică valoarea de început a iteraţiilor (z_0) care în cazul setului Mandelbrot era de fiecare dată 0. Dacă iteraţiile converg, atunci z_0 este parte din mulţimea Julia corespunzătoare constantei C alese. Dacă iteraţiile diverg, atunci punctul z_0 nu face parte din mulţimea Julia.

Relaţia dintre mulţimile Mandelbrot şi Julia este astfel clară: mulţimea Mandelbrot este un index al tuturor mulţimilor Julia posibile. Formele pe care le pot lua mulţimile Julia sunt foarte diferite dar ele pot fi împărţite în două grupuri: mulţimi Julia conectare şi mulţimi Julia neconectate. Mulţimile Julia neconectate au o infinitate de puncte de convergenţă risipite în plan înconjurate de zone de divergenţă mai rapidă sau mai lentă. Acestea se numesc şi mulţimi Julia de tip “praf”.



Mulţime Julia deconectată



Mulţime Julia conectată

Figura 6: Cele două tipuri de mulţimi Julia

Relaţia dintre mulţimea Mandelbrot şi mulţimile Julia corespunzătoare diferitelor puncte ale mulţimii Mandelbrot este schiţată în figura 8. Cu cât punctul ales ca origine pentru mulţimea Julia este mai aproape de limita de convergenţă a mulţimii Mandelbrot cu atât mulţimea Julia rezultată este mai haotică, mai deconectată. În apropiere de marginile mulţimii Mandelbrot, aceasta are comportament haotic, o variaţie foarte mică a lui C poate conduce la o mulţime Julia complet diferită.

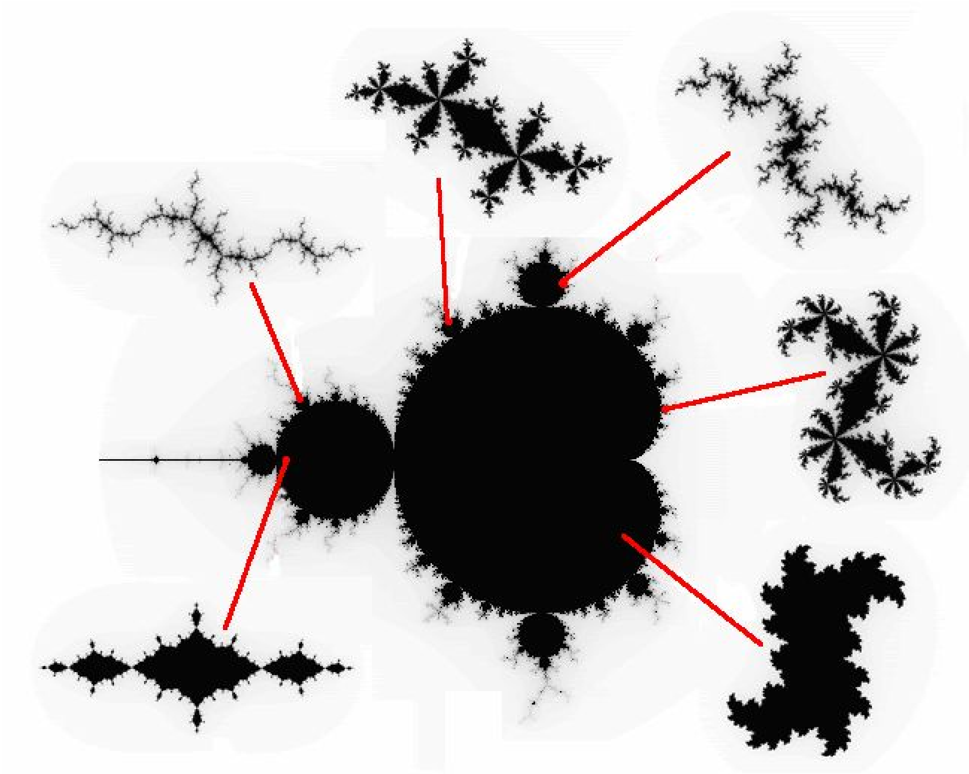


Figura 7: Aspectul mulţimilor Julia în funcţie de poziţia constantei C în planul complex al mulţimii Mandelbrot (adaptat din [5]).

3. Concluzii

Implementarea algoritmilor de desen al fractalilor într-o platformă atât de facilă, disponibilă oricui, permite descoperirea acestor forme geometrice complet aparte, forme care au determinat modificarea semnificativă a filozofiei ştiinţifice. Speranţa că necunoscutul este compus doar din elemente nedescoperite, că metoda reducţionismului ştiinţific funcţionează la toate nivelele a dispărut odată cu înţelegerea faptului că multe procese naturale pot fi matematic haotice, fără predictibilitate fără speranţa unui proces ştiinţific care să ducă la cunoaşterea lor completă. Fractalii reprezintă forme de autoorganizare ale haosului care ne arată că haosul nu ne oferă nici măcar decenţa de a fi tot timpul la fel de haotic.

4. Bibliografie

[1] Geary, D., Core HTML5 Canvas: Graphics, Animation, and Game Development, Prentice Hall, 2012
[2] Mandelbrot, B, The Fractal Geometry of Nature, New York, W.H. Freeman and Company, 1982.
[3] Rashid T., Make your own Mandelbrot, New York: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014
[4] Barnsley, M. F. and Rising, H. Fractals Everywhere, 2nd ed. Boston, MA: Academic Press, 1993.
[5] Bourke P. Julia Set Fractal (2D), http://paulbourke.net/fractals/juliaset/, 2001
[6] Fonseca R., The Mandelbrot Set, https://renatofonseca.net/mandelbrotset
[7] Palef T. A fascinating method to draw fractals, https://www.lesscake.com/fractals-chaos-game
[8] Wikipedia, Chaos Game, https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_game