SISTEME DINAMICE

SEMINAR 1 - SEMINAR 4

ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL 1

$\boxed{y' = f(x, g(x))}$

I: Ecuații cu variabile separabile $\quad y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$

- împart la $g(y)$ care e diferit de 0 (pt $g(y)=0 \Rightarrow$ soluții singulare)
- schimb notația derivatei
- integrez ambele părți, o calculez pe cea din dreapta $\Rightarrow$ soluția implicită
- aplic inversa funcției din stânga, scot $y \Rightarrow$ soluția explicită (după ce calc $\int$)

II: Ecuații omogene în sens Euler $\quad y' = g(x,y)$

- duc la cea de forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
- fac substituția: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, $\quad y = z(x) \cdot x \quad y' = z'(x)x + z(x)$
- separ $z'(x) \Rightarrow$ EVS, aflu z și apoi y.

ex: $2x^2y' = x^2+y^2$

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

Fac substituția: $y = x \cdot z$.

$$z'x + z = \frac{1}{2}(1+z^2)$$

$$z' = \underbrace{\frac{z^2-2z+1}{2}}_{g(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \quad \text{(ESV)}$$

(cea ce ține de f z)

III ECUAȚII LINIARE $\quad y' + P(x)y = Q(x)$

PASUL 1: rezolv ecuația omogenă $\Rightarrow$ soluția y_0

PASUL 2: aflu o soluție particulară: în y_0 înlocuim pe C cu C(x) și îl aflu $\to y_p$

PASUL 3: Soluția generală e $y_0 + y_p$

ex: $y' + y \cdot tg\,x = \frac{1}{\cos x}$ (...)

$y_0 = C\cos x$

$\Rightarrow y_p = C(x)\cos x$

- înlocuiesc y_p în ecuația inițială

$y_p' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$ $\quad$ în general se simplifică

$\Rightarrow C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\sin x = \frac{1}{\cos x}$

$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$C(x) = tg\,x$

$\Rightarrow y_p = tg\,x \cdot \cos x = \sin x$

$\Rightarrow y_s = y_0 + y_p$

$y_s = C\cos x + \sin x$

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL 2

Obs: când avem o ecuație de forma $y''=f(x)$ soluția e să $\int$ x 2

$$\boxed{y''(x)=f(x,y')}$$

- reducem ordinul prin substituția $y'(x)=z(x)$
- ajungem la $z'(x)=f(x,z)$ - ajungi ori la ESU, EC lin sau în sens Euler

ex
$xy''+y'+x=0$

facem substituția $y'=z$

$\Rightarrow xz'+z+x=0$

$xz'=-z-x$

$z'=-\frac{z}{x}-1$ (Ecuație liniară)

- egalez cu 0 și încerc să rezolv

$z'=-\frac{z}{x}$

$\frac{z'}{z}=-\frac{1}{x}$

$\frac{dz}{z}=-\frac{1}{x}dx \quad \Big| \int()$

$\ln(z)=-\ln(x)+C$!

$\ln(z)=-\ln(x)+\ln(C)$

$z=\frac{C}{|x|}$

- determin o ecuație particulară

$z=\frac{C(x)}{x} \Rightarrow z'=\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=-1$

$C'(x)x-\cancel{C(x)}+\cancel{C(x)}=-x^2$

$C'(x)=-\frac{x^2}{x}$

$C(x)=-\frac{x^2}{2}$

$z_p=-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{x}{2}$

- aflu y după

$y'=-\frac{x}{2}+\frac{C}{x} \quad \Big| \int()dx$

$y=-\frac{x^2}{4}+C_1\ln|x|+C_2$

ECUAȚII LINIARE DE ORD 2 CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

$y''+ay'+by=f(x)$

e^{rx}

PAS 1: atașăm ecuația car: $r^2+ar+b=0$

PAS 2: determinăm soluțiile

PAS 3: caz 1: $r_1\neq r_2 \in \mathbb{R}$ $(\Delta>0)$

$y_1(x)=e^{r_1x} \quad y_2(x)=e^{r_2x}$

caz 2: $r_1=r_2\in\mathbb{R}$ $(\Delta=0)$

$y_1(x)=e^{rx} \quad y_2(x)=x\cdot e^{rx}$

caz 3: $(\Delta<0)$ $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$

$y_1(x)=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta \quad y_2(x)=e^{\alpha x}\cos\beta$

PAS 4: soluția generală e $y=y_1c_1+y_2c_2$

Cazuri speciale de determinare a lui y_p:

1) dacă $f(x)$ - polinom (inclusiv gradul 0) - caut

a) $b\neq 0 \Rightarrow y_p=Q_m(x)$

b) $b=0 \Rightarrow y_p=x\cdot Q_m(x)$

} caut un polinom de gradul lui f pt care să dea soluție.

2) $f(x)=e^{rx}\cdot P_m(x)$

a) r - nu e soluție a ec car: $y_p=e^{rx}\cdot Q_m(x)$

b) r - soluție: $y_p=x^{\mu}\cdot e^{rx}Q_m(x)$ μ - ordinul de multiplicitate a lui $\mathbb{R}$

3) $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)\cdot\cos(\beta x)=e^{\alpha x}(P_m)\cdot\sin(\beta x)$

a) $\alpha+i\beta$ nu e soluție $y_p=e^{\alpha x}[\cos\beta x\, Q(x)+P_m(x)\cdot\sin\beta x]$

b) $\alpha+i\beta$ e soluție $y_p=x\cdot e^{\alpha x}[\cos\beta x\, Q(x)+P_m(x)\cdot\sin\beta x]$

ex $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$

I) rezolv ecuatia liniara omogena

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$r_{1,2} = 3, 2.$

$\Rightarrow y_1 = e^{2x} \quad y_2 = e^{3x}$

$y = e^{2x} + e^{3x}$

II) Ecuatia particulara: observ ca

f - polinom

$b = 6 \neq 0 \Rightarrow$ primul caz.

$y_p = Q_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

aflam constantele

$y_p' = 2\alpha x + \beta$

$y_p'' = 2\alpha$

$\Rightarrow 2\alpha - 5(2\alpha x + \beta) + 6\alpha x^2 + 6\beta x + 6\gamma = 6x^2 - 10x + 2.$

$6\alpha x^2 + (6\beta - 10\alpha)x + 2\alpha - 5\beta + 6\gamma = 6x^2 - 10x + 2$

$$\begin{cases} 6\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 1. \\ 6\beta - 10\alpha = -10 \Rightarrow \beta = 0 \\ 2\alpha - 5\beta + 6\gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p = x^2$

III) $y = y_0 + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2$

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) \end{cases}$$

Notatii: $Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad Y' = A \cdot Y$

$u = (Y_1, Y_2) \quad Y = u \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Metoda ecuatiei caracteristice.

· caut solutii de forma $Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot e^{\lambda x} \\ \alpha_2 \cdot e^{\lambda x} \end{pmatrix}$, inlocuind $(\lambda I_2 - A)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (**)

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$

· pt fiecare valoare λ_i rezolv sistemul (**) si obtim un vector propriu $(\alpha_1^i \alpha_2^i)$

I) valori simple

- det matricea
- pt fiecare λ aflu vectorul nenul
- construim solutii $Y^i = \begin{pmatrix} \alpha_1^i e^{\lambda_i x} \\ \alpha_2^i e^{\lambda_i x} \end{pmatrix}$

~ se alege una din ecuatii si o derivam
~ inlocuim in derivata y_1 si y_2'
~ scot una daca e necesar

- matricea fundamentala
- solutia generala

II) valori complexe $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

- pt $\alpha + i\beta$ det un vector propriu
- $z \begin{pmatrix} (a_1 + ib_1) \cdot e^{(\alpha+\beta i)x} \\ (a_2 + ib_2) \cdot e^{(\alpha+\beta i)x} \end{pmatrix}$

- $z = z_1 + iz_2 \Rightarrow u = (z_1, z_2)$

III) caz valori proprii multiple.

- daca A admite valori proprii cu ordinul de multiplicitate 2

$Y^1 = e^{\lambda x} \cdot u_1 \qquad Y^2 = e^{\lambda x}\left(\frac{x}{1!} u_1 + u_2\right)$

$(A - \lambda I_2) u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I_2) u_2 = u_1$

PROBLEME ATAȘATE ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

1) Problema Cauchy: - rezolv ecuatia
- dau valori constantei pt cazul special.

2) Problema Bilocală: avem 2 conditii, încercăm să aflăm soluțiile.

Obs: când avem o soluție singulară presupunem că restul e diferit.

SEMINAR 5 - SEMINAR 6

SISTEME DINAMICE GENERATE DE ECUAȚII DIF. AUTONOME

- o ecuație se numește autonomă dacă variabila funcției necunoscute nu apare în mod explicit

Fluxul generat. Portretul fazic.

Teorema: Dacă $f \in C^1(\mathbb{R})$ atunci problema Cauchy $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \eta \end{cases}$ are o soluție unică pentru $\forall \eta \in \mathbb{R}$

- soluție saturată = soluție definită pe cel mai mare interval posibil $I_\eta = (\underset{<0}{\alpha_\eta}, \underset{>0}{\beta_\eta})$
- soluția $x(\cdot, \eta): I_\eta \to \mathbb{R}$
- fluxul $\varphi: W \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(t,\eta) = x(t,\eta)$ $\quad W = \{ I_\eta \times \{\eta\} \mid \eta \in \mathbb{R}\}$

Proprietăți:
1) $\varphi(0) = \eta$
2) $\varphi(t+s, \eta) = \varphi(t+s, \varphi(s,\eta))$
3) φ e continuu în raport cu η

- Orbite:
  - → orbita pozitivă $\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in[0,\beta_\eta)} \varphi(t,\eta)$
  - → orbita negativă $\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in[\alpha_\eta,0]} \varphi(t,\eta)$

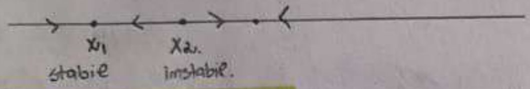
orbita $= \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta)$

(iau mai multe valori pt η și aflu portretul), când nu avem o constantă, ne oprim.

Sau:
- rezolv $f(x) = 0$
- construiesc tabelul tabelul

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$\infty+$
$f(x)$		0	0	0	

← pun semnul funcției.
$-$ ←
$+$ →



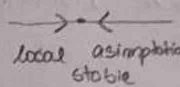
Puncte de echilibru. Stabilitate

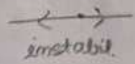
$x' = f(x)$

- soluțiile $f(x) = 0$ - puncte de echilibru

Stabilitate

a) portret fazic: (îl realizăm cu tabelul):





b) metoda liniarității (primei aproximări).
  a) $f'(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ local asimptotic stabil.
  b) $f'(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ instabil.

SISTEME DINAMICE GENERATE DE SISTEME PLANARE

Flux. Portret fazic.

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases}$$

(analog ca mai sus)

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ - ecuația diferențială a orbitelor din portretul fazic.

- rezultă o funcție care e portretul fazic.

Puncte de echilibru. Stabilitate.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

- sisteme liniare:
  - notez cu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - matricea coeficienților
  - $(0,0)$ - punct de echilibru

Teoremă:

a) $Re\,\lambda < 0 \quad \forall \lambda \Rightarrow (0,0)$ asimptotic stabil

b) $Re\,\lambda \leq 0 \quad \forall \lambda \Rightarrow (0,0)$ local asimptotic stabil.

c) altfel: instabil

λ e soluția ecuației $\det(\lambda \cdot I_2 - A) = 0$

• ecuații neliniare.

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & , \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & , \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Teoremă

pt $f \in C^1(\mathbb{R})$ & (x^*, y^*) punct de echilibru al sistemului.

a) $Re\,\lambda < 0 \quad \forall \lambda \Rightarrow (x^*, y^*)$ local asimptotic stabil

b) $\exists\, Re\,\lambda > 0$ atunci (x^*, y^*) instabil.

λ e soluția ecuației $\det(\lambda \cdot I_2 - J_f(x^*, y^*)) = 0$

FUNCȚIA LYAPUNOV.

• funcția $V(x,y)$ se dă cu sistemul.

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) \cdot f_1(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) \cdot f_2(x,y)$$

Teoremă

$V \in C^1(D) \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

(i) $V(x^*) = V(x^*, y^*) = 0$ și $V(x,y) > 0 \quad \forall\, x,y \in D \setminus \{x^*\}$

(ii) $\dot{V}(x,y) < 0 \rightarrow \forall\, x,y \in D \setminus \{x^*\} \Rightarrow x^*$ local stabil

(iii) $\dot{V}(x,y) > 0, \ \forall\, x,y \in D \setminus \{x^*\} \Rightarrow x^*$ instabil.

MODELE EC GRAD 1.

1) Dezintegrarea Radioactivă.

Legea lui Rutherford: viteza de dezintegrare e d.p cu cant. de substanță

$x(t)$ - cant la mom. $t>0$

x_0 - cant la momentul t_0

$x'(t)$ - viteza de dezintegrare.

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$ k - constanta de dezintegrare

· soluția modelului: rezolv sistemul $\Rightarrow x(t) = c \cdot e^{-kt}$

Timp de înjumătățire: intervalul de timp necesar unei subs radioactive să-și înjumătățească cantitatea

$T_{1/2} \to \frac{x_0}{2} \Rightarrow x(T_{1/2}) = \frac{x_0}{2}$ (înlocuiesc în soluție $\Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$ $\quad k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$

2) Datarea prin C^{14} - izotop radioactiv (C^{12} e stabil)

$T_{1/2} \simeq 5730$ ani

$x(t)$ = cant. de C^{12}/C^{14} la mom. $t>0$

t_0 - momentul de deces al organismului (fiecare organism conține C^{14})

$$\begin{cases} x'(t) = -kt \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad k = \frac{\ln 2}{5730} \text{ ani}^{-1}$$

3) Răcirea corpurilor

Legea Newton: viteza de răcire a unui corp e proporțională cu dif. dintre temperatura corpului la mom. decesului și temperatura mediului

$T(t)$ - temperatura corpului la mom $t>0$

T_0 la momentul inițial

$$\begin{cases} T'(t) = -k(T(t) - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$ soluția: $T(t) = (T_0 - T_m) \cdot e^{-kt} + T_m$

Avem două cazuri:

- temp mediului > tem. corpului (se încălzește) T - crescătoare
- temp mediului < tem. corpului (se răcește) T - descrescătoare.

Obs: $y = T_m$ - asimptotă orizontală la graficul funcției

4) Mișcarea pe verticală a câmpului gravitațional. (arunc un corp în aer

x - distanța de la corp la suprafața pământului.

$V(0) = V_0$ viteza inițială

$G(x)$ - forța gravitațională (cu cât crește distanța, cu atât scade forța de atracție)

R - raza pământului

$G(x) = \frac{-k}{(x+R)^2} \quad k = mg \cdot R^2$

$$\begin{cases} V'(x) \cdot V(x) = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

$$V(x) = \pm\sqrt{\frac{2gR^2}{x+R} + V_0^2 - 2gR}$$

Altitudinea maximă: când corpul se oprește $\Rightarrow V(h) = 0$.

Viteza de evadare din câmpul gravitațional (cu ce viteză trebuie aruncat inițial ca acesta să părăsească gravitația pământului)

$V_e = \lim_{h \to \infty} V_0(h)$

V_0 - viteza inițială pt. care corpul atinge h

MODELE PRIN ECUAȚII DE ORD 2

1) Mișcarea unui corp sub acțiunea unei forțe.

$x(t)$ - poz corpului la momentul t

x_0 - poz corpului la momentul inițial

$x(0) = x_0$

Legea lui Newton (2): $F = m \cdot a$

accelerația = variația vitezei într-un interval de timp $x''(t)$

$$\begin{cases} m \cdot x'' = F(t, x(t), x''(t)) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

2) Pendulul matematic

$\varphi(t)$ - unghiul format din fir și verticală la mom t

φ_0 - unghiul la momentul inițial

$$\begin{cases} \varphi''(t) + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi(t) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = \frac{v_0}{l} \end{cases}$$

l - lungimea firului

g - acc. grav.

$\varphi(t) = \varphi_0 \cos wt + \frac{v_0}{l \cdot w} \sin wt \qquad w^2 = \frac{g}{l}$

3) Pendulul armonic ~~fără~~ frecare.

$x(t)$ - alungirea resortului față de poz de echilibru la momentul t.

x_0 - poz corpului la momentul inițial.

v_0 - viteza corpului la mom. inițial.

Legea lui Hooke: F_e (forța de elasticitate) e proporțională cu alungirea resortului

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{l} \cdot x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

$\frac{g}{l} = w_0^2 \qquad w_0$ - frecvență naturală a pendulului.

$x(t) = x_0 \cos w_0 t + \frac{v_0}{w_0} \cdot \sin w_0 t$

4) Pendulul armonic cu frecare.

$$\begin{cases} x'' + \lambda x' + w_0^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

• ecuația caracteristică $r^2 + \lambda r + w_0^2 = 0$

$\Delta = \lambda^2 - 4 w_0^2$

• $\lambda > 0 \Rightarrow$ supra-amortizare
• $\lambda = 0 \Rightarrow$ amortizare critică
• $\lambda < 0 \Rightarrow$ amortizare slabă

5) Oscilație forțată.

$$\begin{cases} x'' + \omega_0^2 x = a \cos \omega t \\ x(0) = x_0 \\ x'(0)\ v_0 \end{cases}$$

DINAMICA POPULAȚIEI

$x(t)$ - mărimea unei populații la momentul $t > 0$.
$x(0) = x_0$
$x'(t)$ - viteza cu care se modifică populația.
$\frac{x'(t)}{x(t)}$ - rata de creștere.

1) Modelul creșterii exponențiale Malthus

r = rata de creștere = $b - \mu$ (rata nașterilor - rata morților)

$$\begin{cases} x' = rx. \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

• aflăm soluția.
• $r < 0 \Rightarrow$ populația $\to 0$
• $r > 0 \Rightarrow$ populația $\to \infty +$

2) Modelul logistic (Verhulst)

• rata de creștere = o funcție care depinde de populație
• k - constanta de suport a mediului.

$$\begin{cases} x' = r_0 x \left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

• aflu punctele de echilibru $f(x) = 0$
• soluția modelului: $x(t) = \frac{x_0 \cdot k \cdot e^{r_0 t}}{k - x_0 + x_0 \cdot e^{r_0 t}}$

MODELE CU SISTEME DE ECUAȚII

1) Modelul pradă-prădător

$x(t)$ - mărimea populației pradă
$y(t)$ - mărimea populației prădător

$$\begin{cases} x' = \overset{\oplus \text{ dacă nu e mâncat, crește}}{a x} - bxy \\ y' = \underset{- \text{ dacă nu mănâncă, scade.}}{-cy} + dxy \end{cases}$$

xy - nr de interacțiuni între populații
• puncte de echilibru
• stabilitate
• portret fazic

2) Modelul epidemiologic SIR

S - clasa suspectilor

I - clasa infectatilor

R - clasa recuperatilor.

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta S I} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R}$$

S·I - interacțiuni

$$\begin{cases} S' = -\beta S I \\ I' = \beta S I - \gamma I \end{cases}$$

- puncte de echilibru
- stabilitate
- ecuația orbitelor
- portretul fazic

METODE DE APROXIMARE

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

METODE SEMIANALITICE

1) Metoda aproximațiilor succesive

ecuația integrală Volterra: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$

șirul aproximațiilor succesive: $y_{m+1} = A(y_m)$

Teorema de ∃! în spațiu:

f continuă + lipschitz: $\exists \alpha_f > 0$ a.î. $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le \alpha_f |y_1 - y_2|$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

=> problema Cauchy are o soluție unică care poate fi aproximată prin metoda aproximării succesive.

- alegem $y_0(x) = 1$ - o valoare.
- aflăm y_k până ne prindem de o funcție (Serii Taylor).

Lipschitz pe $[0,b] \times \mathbb{R}$: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le M = \alpha_y$

Teorema de ∃! în bilă:

$\Delta = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y^0 - b, y^0 + b]$

Problema Cauchy are o soluție unică $y^* \in C([x_0 - h, x_0 + h], [y_0 - b, y_0 + b])$ care poate fi obținută prin aproximare succesivă, $h = \min\{a, \frac{b}{M_f}\}$ M_f - maximul funcției f

2) Metoda Seriei Taylor

$$y(x) \simeq \bar{y}(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{y^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$

METODE NUMERICE (condițiile inițiale sunt pe capete)

1) Metoda lui Euler

$d_1: y - y_0 = \overset{\text{derivata}}{m}(x - x_0)$

$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$

$(x_1, y_1) \in d_1 \Rightarrow y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0)$

- alegem puncte până ajungem la capătul din dreapta.
- noduri echidistante: $x_{m+1} - x_m = h$ - pas $\Rightarrow y_{m+1} = y_m + f(x_m, y_m) \cdot h$.

2) Metoda Euler modificată

- panta medie a soluției pe $[x_m, x_{m+1}]$: $P_m = \frac{1}{x_{m+1} - x_m} \cdot \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s))ds$.

$$P_m \simeq y'\left(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}\right)$$

$$y_{m+1} = y_m + (x_{m+1} - x_m) \cdot f\left(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}, \underbrace{y\left(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}\right)}_{\text{o aproximez cu Euler clasic.}}\right)$$

3) Runge-Kutta

- succesiune de etape, fiecare evaluând o valoare aprox a pantei
- pasul final utilizează o medie ponderată a pantelor calculate.

$$y_{m+1} = y_m + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_s k_s)$$