Seminar 12

Monday, December 18, 2023 1:57 PM

Baza unui spațiu vectorial

Def: Fie V un K- sp. vectorial o listă de vectori $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$

s.n • liniar independentă dacă pt $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

• liniar dependentă: $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ nu toți zero a.î.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

Ex: $2v_1 + 3v_2 + 5v_3 = 0$

$\Rightarrow v_1 = -\frac{3}{2} v_2 - \frac{5}{2} v_3$ (v_1 dependent)

• bază dacă $\left| \begin{array}{l} v \text{ este liniar independentă} \\ \langle v \rangle = V \end{array} \right.$

În acest caz dimensiunea lui V, $\dim_K V = n$

Prop: Dacă $\dim_K V = n$ și $v = [v_1, \dots, v_n]^t \in V^{n \times 1}$

u.a.s.e:

(i) v este liniar independentă

(ii) v e bază

Lema subst.: Dacă $b = [b_1, \dots, b_n]^t$ este o bază a lui V

și $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$, atunci și $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, atunci

$e' = (e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)$ este bază $\Leftrightarrow \alpha_i \neq 0$

pe poz i

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$x(1,0) + y(0,1)$ este o bază

$(\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3})$ e o bază în $\mathbb{R}^3$

3.2.33

$(x, y)^t \in V^{2\times 1}$ este liniar. dep: $\exists \alpha, \beta \in K$ nu toți zero

a.î. $\alpha x + \beta y = 0$

- dacă $\alpha = 0$, atunci $\beta y = 0 \xrightarrow{\beta \text{ nu e } 0} y = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot x$
- dacă $\alpha \neq 0$, $x = -\frac{\beta y}{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot y$

Interpretare în $\mathbb{R}^3 (\alpha \neq 0)$ $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

„$x, y, 0$" sunt coliniare $0 = (0,0,0)$

Doi vectori sunt l. d $\Leftrightarrow$ au aceeași dreaptă suport

$(x, y, z)^t$ l. d $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma$ nu toți nuli a.î

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) + \gamma(z_1, z_2, z_3) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = 0 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z)^t$ l. d $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$(x, y, z)^t$ l. independentă $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

$(x,y,z)^t$ l. independentă $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

3.2.26

$\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$ este $\mathbb{Q}$ - s.p vectorial TEMA $\left\langle \begin{array}{l} (\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2},+) \text{ grup abelian} \\ 4 \text{ axiome ale S. P} \end{array} \right.$

$x = \alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2$

$= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \sqrt{2}$

Fie lista de vectori $b(1, \sqrt{2})$, $1 = 1+0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 0+1\cdot\sqrt{2}$

• b este liniar independentă

fie $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ a.î $\alpha\cdot 1 + \beta\cdot\sqrt{2} = 0$

dacă $\beta \neq 0$ atunci $\sqrt{2} = -\frac{\alpha}{\beta}$

presupunem că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p,q) = 1$ a. î $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2\cdot q^2 \Rightarrow 2 | p \Rightarrow 4 | p^2 \Rightarrow 4 | 2q^2 \Rightarrow 2 | q^2 \Rightarrow 2 | q$

$2|p$ şi $2|q$ contradicţie $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Astfel $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ Deci 1 şi $\sqrt{2}$ ln. dep

• $\langle b \rangle \overset{?}{=} \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$

fie $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$

$a + b\sqrt{2} = a\cdot 1 + b\sqrt{2} \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle$

Aşadar $\underset{(1,\sqrt{2})}{\overset{\shortparallel}{b}}$ e bază a lui $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$

$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}) = 2$

3.2.40

(1) Met I

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

v este baza $\Leftrightarrow$ v este liniar independentă

$\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{L_2 - L_3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a + 4 = 5 - a$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \overset{L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a + 4 = 5 - a$$

v e bază $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Metoda 2 Se obs. că $((1,-2,0),(2,1,1),(0,0,1))$ e bază, deoarece $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\alpha, \beta, \gamma = ?$

$(0, a, 1) = \alpha(1,-2,0) + \beta(2,1,1) + \gamma(0,0,1)$

$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = a \end{cases}$ $\quad \alpha = -\frac{2a}{5}$, $\beta = \frac{a}{5}$

$(0, a, 1) = -\frac{2a}{5}(1,-2,0) + \frac{a}{5}(2,1,1) + \left(1 - \frac{a}{5}\right)\cdot(0,0,1)$

$v' = ((1,-2,0),(2,1,1),(0,a,1))$ e bază $\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{5} \neq 0 \Rightarrow a \neq 5$

(2) TEMĂ

3.2.41

$e = [e_1, e_2, e_3, e_4]$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_4 + L_2}{\overset{L_1 + L_2}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 - L_1}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$= -2 \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 9 = -18 \neq 0 \Rightarrow e$ este lin. independentă; $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$ $\Rightarrow e$ este bază a lui $\mathbb{R}^4$

? $\alpha, \beta, \gamma, \delta = ?$

a.î. $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 2 + \delta \cdot 1 = 2 \\ \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 3 + \delta \cdot 3 = 3 \\ \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot (-1) = 2 \\ \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 4 + \gamma \cdot (-1) + \delta \cdot 0 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

sau aflăm inversa matricii

$$\Delta\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_1 + 2C_4}{\overset{C_2 + C_4}{=}} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \\ 10 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 + 3L_3}{\overset{L_1 + 2L_3}{=}} \begin{vmatrix} 24 & 10 & 0 \\ 39 & 17 & 0 \\ 10 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -(24 \cdot 17 - 39 \cdot 10) = -6(68 - 65) = -18$$

$$\begin{vmatrix} \cdots \\ 10 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2+3L_3}{=} \begin{vmatrix} \cdots \\ 10 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \ldots$$

$\alpha = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta} = \dfrac{-18}{-18} = 1$ analog β, γ, δ

3.2.42

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{L_1+L_3}{\overset{L_1+L_2}{=}} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3-C_1}{\overset{C_2-C_1}{=}} (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

$$\left.\begin{matrix} a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\} \Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow v \text{ este lin. independentă} \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v \text{ e bază}$$