Seminar 13

Monday, January 8, 2024 1:59 PM

Probleme cu baze și dimensiuni

Def: Rangul unei liste de vectori

$v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^t$ este dimensiunea s.p generat de v

$\text{rang } v = \dim \langle v \rangle$

Prop Dacă $S, T \leq_k V$ atunci

$\dim S + \dim T = \dim(S+T) - \dim(S \cap T)$

$S + T \overset{?}{=} \langle S \cup T \rangle$

Prop: Dacă $f: V \longrightarrow W$ o aplicație liniară

$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

3.2.43 Să se det rangul listelor de vectori din $\mathbb{R}^4$:

a) $v = [(0,1,3,2); (1,0,5,1); (-1,0,1,1); (3,-1,-3,-4); (2,0,1,-1)]^t$

b) $[(1,2,3,0); (0,1,-1,1); (3,7,8,1); (1,3,2,1)]^t$ TEMĂ

c) ...

Soluție:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -18 & -7 \\ 0 & 0 & -9 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & -9 & -3 \end{pmatrix} \text{ depind unele de altele}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } v = 3$$

Sau luăm det ord 4 și le calculăm până găsim unul $= 0$

Met II $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$

Obs. că

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3, e_4 \text{ este o bază}$$

Obs. că
$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e_4 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3, e_4$$ este o bază

$\Rightarrow$ lin. ind

$\exists\, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ a.î. $(3,-1,-3,-4) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$

....

Da $(3,-1,-3,-4) = -v_1 + \frac{1}{2} v_2 - \frac{5}{3} v_3 + \underline{0 \cdot e_4}$

$\delta = 0 \Rightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4)$ nu sunt l.n nu e bază

(nu putem înlocui e_4 cu v_4

analog v_5

Deci (v_1, v_2, v_3) e bază pt $\langle v \rangle$

$\Rightarrow$ rang $v = 3$

<u>3.2.44</u> Se consideră subsp

$S = \langle (2,0,1,-1), (0,1,2,3), (-1,0,1,1), (1,1,5,2) \rangle$

$T = \langle (1,0,2,0), (2,1,-1,2), (-1,-1,3,-2) \rangle$

Să se det dimensiunea și câte o bază în subsp S, T, $S+T$ și $S \cap T$

Soluție:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_3+L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3\left(-\frac{3}{4}\right)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rang$(S) = 4$ iar o bază ar fi $(\underset{s_1}{(1,1,5,2)}, \underset{s_2}{(0,1,1,3)}, \underset{\substack{e^3 \\ s_3}}{(0,0,1,0)}, \underset{\substack{e^4 \\ s_4}}{(0,0,0,1)})$

Obs că $(1,0,2,0) = \underset{t_1}{\overset{a}{(2,1,-1,2)}} + \underset{t_2}{\overset{b}{(-1,-1,3,-2)}}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \dim T = \text{rang}(T) = 2$$ iar (a, b) e bază

$S + T = \langle S \cup T \rangle$

$= \langle \underbrace{s_1, s_2, s_3, s_4}_{\text{sunt liniari ind}}, t_1, t_2 \rangle$

$\Rightarrow S, T \quad \mathbb{R}^4$

$= \langle \underbrace{h_1, h_2, h_3, h_4}_{\text{sunt liniari ind}}, t_1, t_2 \rangle$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sunt liniari ind} \\ \dim S+T \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow S+T = \mathbb{R}^4$$

$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S+T) = 2$

obs că $S \cap T = T$ deci (t_1, t_2) e bază și pt $S \cap T$

sau $S \cap T = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R},\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ a.î.
$x = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4 = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2\}$

<u>3.2.45</u> Să se calculeze dimensiunea și câte o bază a subspațiilor $\ker f$ și $\operatorname{Im} f$:

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2 + x_3, x_1 - 2x_3)$

metodă 1.

$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

facem det să ne dăm seama

Fie $x_3 = t$
$\Rightarrow x_1 = 2t,\ x_2 = -t$

$(x_1, x_2, x_3) = (2t, -t, t) = t(2, -1, 1)$

$\ker f = \{t(2, -1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (2, -1, 1) \rangle$

$\dim \ker f = 1$ și baza $(2, -1, 1)$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

$3 = 1 + \dim(\operatorname{Im} f) \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 2$

Pentru bază căutam 2 vectori ind.

$f(1,0,0) = (1,0,1)$
$f(1,0,0) = (1,1,0)$ sunt l.i.

$\Rightarrow ((1,0,1), (1,1,0))$ este o bază pt $\operatorname{Im} f$

Met II

$\operatorname{Im} f = ?$

(e_1, e_2, e_3) e bază pt $\mathbb{R}^3$

$f(1,0,0) = (1,0,1) \in \operatorname{Im} f$

$(1,1,0) = f(0,1,0) \in \operatorname{Im} f$

$(1,1,0) = 1 \cdot (1,0,1) + (0,1,0) - e_2$

(e_1, e_2, e_3) e bază pt $\mathbb{R}^3$

$f(1,0,0) = (1,0,1) \in \mathrm{Im} f$

$(1,0,1) = e_1 + e_3$

$\Rightarrow ((1,0,1), e_2, e_3)$ e bază pt $\mathbb{R}^3$

$(1,1,0) = f(0,1,0) \in \mathrm{Im} f$

$(1,1,0) = 1 \cdot (1,0,1) + (0,1,0) - e_3$

$\Rightarrow ((1,0,1), (1,1,0), e_3)$ e bază pt $\mathbb{R}^3$

Puteam să-l subst pe e3 cu un el din Imf!

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

$3 = \dim \mathrm{Ker} f + 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 1$

$x = ?$ $f(x) = 0$

dacă $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ dar $(0,0,0)$ nu e bun

dacă $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1 \Rightarrow \underset{\neq 0}{(2,-1,1)} \in \mathrm{Ker} f$

e o bază

b) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ TEMĂ

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 - x_3, 3x_2 + x_4, 3x_1 - 3x_3 + x_4)$

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 + x_3)$

Met I

$(e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ e bază a lui $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1,0) = \underset{\in \mathrm{Im} f}{(1,0)} \\ f(0,0,1) = \underset{\in \mathrm{Im} f}{(0,1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$ bază: (e_1, e_2)

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f \Leftrightarrow 3 = \dim \mathrm{Ker} f + 2$

$\dim \mathrm{Ker} f = 1$ $x = ?$ $f(x) = 0$

$f(2,1,-1) = (0,0,0) \Rightarrow \underset{\neq 0}{(2,1,-1)} \in \mathrm{Ker} f$

$\Rightarrow (2,1,-1)$ e bază a lui Kerf

$f(2,1,-1) = (0,0,0) \Rightarrow \underset{\neq 0}{(2,1,-1)} \in \ker f$

Met II

$\ker f = ?$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$x_3 = t \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = -t \end{cases} \Rightarrow x_2 = -t \quad x_1 = -2t$

$x = (x_1, x_2, x_3) = (-2t, t, t) = t(2, -1, 1)$