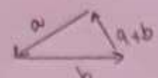
geometrie

Spațiu vectorial al vectorilor liberi

$\overline{AB}$ - vector legat sau segment orientat
- A e originea sau punctul de aplicare
- B e capătul sau extremitatea
- distanța se numește modulul $|\overline{AB}|$

- doi vectori au aceeași direcție dacă dreptele suport sunt paralele sau coincid
- doi vectori sunt echipolenți: $\bar{u} \sim \bar{v}$ dacă au același modul, aceeași direcție și același sens
- adunarea: regula triunghiului 

- înmulțirea cu scalar: $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$ (sensul se schimbă dacă $\lambda < 0$)

Sisteme de coordonate afine

- sistem ortogonal: vectorii bazei sunt perpendiculari și de lungime 1

Produs scalar a doi vectori

$$a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\alpha$$

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2}$$

$$(\lambda a + \beta b) \cdot c = \lambda(a \cdot c) + \beta(b \cdot c)$$

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

→ pentru vectori exprimați cu coordonate: $a(a_1, a_2, a_3)$ $b(b_1, b_2, b_3)$

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$a \perp b \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Produs vectorial: $a \times b$

a, b coliniari $\Rightarrow a \times b = 0$

când nu sunt coliniari:
- $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\alpha$
- $a \times b$ - perpendicular atât pe a cât și pe b
- sensul lui $a \times b$ se alege a.î. $\{a, b, a \times b\}$ să fie orientat direct

- $a \times b = - b \times a$
- aria paralelogramului: norma $\|a \times b\|$
- aria triunghiului: $\frac{1}{2} \cdot \|a \times b\|$
- nu e asociativ
- $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$

Produs mixt

- $(a,b,c) = (a\times b)\cdot c$
- volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori $V = |(a,b,c)|$
- volumul tetraedrului $V = \frac{1}{6}|(a,b,c)|$
- a,b,c - coplanari $\Leftrightarrow (a\times b)\cdot c = 0$
- reper direct $\Leftrightarrow (a\times b)\cdot c > 0$

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Dreapta în plan

- orice dreaptă are o infinitate de vectori directori
- versor director = vector director de lungime 1
- $v_{\pm} = \pm \frac{a}{\|a\|}$
- $r = r_0 + t\cdot a$, a - vector director M_0 - punct oarecare al dreptei - ecuatii vectoriale

$$\begin{cases} x = x_0 + l\cdot t \\ y = y_0 + m\cdot t \end{cases}$$ $t \in \mathbb{R}$, unde $M_0(x_0, y_0)$ și $a(l, m)$ - ecuatii parametrice

- ecuatia canonică: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$
- ecuatia dreptei determinată de două puncte: $(x-x_0)(y_1-y_0) = (y-y_0)(x_1-x_0)$
- ecuatia dreptei determinată de un punct și o pantă: $y - y_0 = \underbrace{\frac{m}{l}}_{\text{coeficientul unghiular al dreptei}}(x-x_0)$
- ecuatia pantă-tăietură: $r - r_0 = ta$
- ecuatia generală: $Ax + By + C = 0$
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ ecuatia dreptei prin tăieturi a - abscisa punctului de pe dreaptă care $\cap Ox$
  b - ordonata punctului de pe dreaptă care $\cap Oy$
- ecuatia oarecare a unei drepte care trece prin punctul de intersectie:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

toate dreptele care se pot scrie după ecuatia de mai sus formează fasciculul de drepte

- $\cos\theta = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$
- $tg\theta = \pm \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$, unde $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$
- dreptele sunt perpendiculare: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ $\quad 1 + k_1k_2 = 0$
- dreptele sunt paralele: $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ $\quad k_1 = k_2$

• forma Hesse: $\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - p = 0$ p = distanța de la origine la dreaptă

• $\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$

• $d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Plan în spațiu

π - plan și punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $a_1(l_1, m_1, n_1)$ $a_2(l_2, m_2, n_2)$, vectori necoliniari paraleli cu planul π

$r = r_0 + u a_1 + v a_2$, r_0 - vectorul de poziție al lui M_0, $u, v \in \mathbb{R}$
(ecuația vectorială a planului π)

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 \cdot u + l_2 \cdot v \\ y = y_0 + \cancel{l_2}\, u + m_2 v \\ z = z_0 + n_1 u + n_2 v \end{cases}$$ ecuațiile parametrice ale planului

• 2 vectori sunt coplanari dacă produsul lor mixt se anulează ($r - r_0, a_1, a_2$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

• dacă 3 puncte necoliniare det. planul π, cei doi vectori necoliniari ∥ sunt
$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

• planul ~~este~~ det de cele 3 puncte: trece prin M_1 și e ∥ cu $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

• ecuația generală a planului : $Ax + By + Cz + D = 0$
$\vec{n}(A, B, C)$ - vector normal la plan

• ecuația planului prin tăieturi: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

a - absisa unde $\cap Ox$
b - ordonata unde $\cap Oy$
c - cota unde $\cap Oz$.

• $\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma\, z - p = 0$, p = distanța de la origine la plan.
(forma normală, forma Hesse) α, β, γ unghiurile făcut de versor cu $Ox, Oy,$

• $\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$, unde semnul se alege a. î. termenul liber să fie <

• un plan separă ~~2~~ planul în 2 semispații:
  • semispațiul negativ (cel cu originea)
  • semispațiul pozitiv

• abaterea unui punct relativ la planul π

$$\delta(M_0, \pi) = \cos\alpha x_0 + \cos\beta \cdot y_0 + \cos\gamma z_0 - p$$

$$\delta(M_0, \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

• distanța de la un punct la π:

$$d(M_0, \pi) = |\delta(M_0, \pi)|$$

• unghiul dintre 2 plane = unghiul format de cele 2 plane

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

α ascuțit $\Rightarrow \cos\alpha > 0$

α obtuz $\Rightarrow \cos\alpha < 0$

• două plane sunt perpendiculare dacă: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

• două plane sunt paralele: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

• planele bisectoare sunt 2 planuri concurente care formează două planuri $\measuredangle$ egale cu planele

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele 2 plane)

Dreapta în spațiu

$r = r_0 + ta$, $t \in \mathbb{R}$, r_0 = vectorul de poz. al lui M_0

a - vectorul director al dreptei

ecuația vectorială a dreptei care trece prin punctul M_0 și are vector dir. a

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ $a(l, m, n)$

ecuațiile parametrice

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$ - ecuațiile canonice.

Obs: dacă un numitor se anulează, facem convenția ca numărătorul = 0

dacă $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

• dreapta, intersecția a 2 plane: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ unde $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ rang = 2.

• vectorul director al dreptei: $a = \vec{n_1}(A_1, B_1, C_1) \times \vec{n_2}(A_2, B_2, C_2)$.

$$a = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} k$$

• distanța de la un punct M_1 la dreapta Δ dată de punctul M_0 și vectorul dir. a:

$$d(M_1, \Delta) = \frac{\|(r_1 - r_0) \times a\|}{\|a\|}$$

r_0, r_1 - vectorii de poz. ai lui M_0, M_1.

· unghiul a două drepte Δ_1, Δ_2 format de directorii $a_1(l_1, m_1, n_1)$, $a_2(l_2, m_2, n_2)$

$$\cos\alpha = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

. cele două drepte sunt perpendiculare: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

paralele: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

Dreapta și planul

· poziția relativă a două plane: $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

· se taie după o dreaptă: $rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$

· sunt paralele dacă: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

. coincid: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

· poziția relativă a trei plane:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \qquad m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

· $\Delta \neq 0$ planele se intersectează într-un punct
· $\Delta = 0$, $rg\,m = 2$ $rg\,M = 3$ ⇒ planele se intersectează două câte două, 3 drepte ||
· $rg\,m = 2$ $rg\,M = 3$ cu 2 vectori coliniari ⇒ plane paralele cu al treilea ∩ cele două.
· $rg\,m = 2$ $rg\,M = 2$ ⇒ trec prin aceeași dreaptă
· $rg\,m = 2$ $rg\,M = 2$ ⇒ (cu vec. col) 2 coincid cu al 3 ∩ după o dreaptă.
· $rg\,m = 1$ $rg\,M = 3$ ⇒ plane distincte și ||
· $rg\,m = 1$ $rg\,M = 2$ ⇒ 2 plane coincid și al 3-lea ||
· $rg\,m = 1$ $rg\,M = 1$ ⇒ coincid

· fascicule de plane și snopuri de plane
· fascicul = mulțimea tuturor planelor ce trec prin dreapta de intersecție
$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$
· dreapta de intersecție = axa fasciculului
· 3 plane care trec prin punctul $S_0(x_0, y_0, z_0)$
· snop de plane, stea de plane: toate planele care trec prin S_0
$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$

· poziția relativă a unei drepte față de un plan.

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

dreapta Δ dată prin ecuațiile parametrice: $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

- Δ și π au un punct comun: $Al+Bm+Cn\neq 0$
- $\Delta \parallel \pi$: $Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$
- $\Delta \subset \pi$: $Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

Ecuația planului dat de 2 drepte concurente:

$$\Delta_1 : \frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1} = \frac{z-z_0}{n_1} \qquad \Delta_2 = \frac{x-x_0}{l_2} = \frac{y-y_0}{m_2} = \frac{z-z_0}{n_2}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuația planului dat de o dreaptă și un punct:

$$\Delta = \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \qquad M_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Ecuația planului dat de 2 drepte paralele care nu coincid.

$$\Delta_1 : \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \qquad \Delta_2 : \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l. & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Proiecția unui punct pe un plan

- proiecția unui punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe planul $Ax+By+Cz+D=0$ e piciorul perpendicularei coborâte pe plan, cu coordonatele: (sol. ecuațiilor)

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ \frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C} \end{cases}$$

Proiecția unui punct pe o dreaptă:

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ și dreapta $\Delta = \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \\ (x-x_0)l + (y-y_1)m + (z-z_1)n = 0 \end{cases}$$

soluția sistemului e punctul căutat

Proiecția unei drepte pe un plan (π)

- dacă dreapta $\perp$ plan $\Rightarrow$ punct de intersecție, altfel
- intersecția dintre planul inițial & planul $\perp$ pe π care trece prin Δ

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

Poziția reciprocă a 2 drepte în spațiu. (dat prin ecuațiile canonice).

- dreptele $\parallel$ $\Leftrightarrow$ vectorii directori sunt coliniari și vectorii $\vec{a_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt necol. $(\vec{a_1}, \vec{a_2})$
- coincid dacă $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ coliniari

Dacă $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ sunt necoliniari:

- dreptele concurente: $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$
- necoplanare (strâmbe) $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Perpendiculara comună a 2 drepte necoplanare.

- singura dreaptă care intersectează ambele drepte și $\perp$ pe ele.
- $\vec{v}$ = vectorul director al celor 2 perpendiculari $\vec{v} = \vec{a_1} \times \vec{a_2}$

$\vec{v}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Distanța dintre 2 drepte strâmbe:

- distanța dintre punctele în care perpendiculara comună $\cap$ dreptele.

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}} \right|$$

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

- dreapta are vectorul dir $\vec{a}(l, m, n)$ și planul $Ax+By+Cz+D=0$

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

- dreapta e $\parallel$ cu planul dacă: $Al+Bm+Cn=0$
- dreapta e $\perp$ cu planul: $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$