ARBORI BINARI DE CĂUTARE
(BINARY SEARCH TREE)

- *Arborii binari de căutare* (ABC) sunt structuri de date des folosite în implementarea containerelor care conţin elemente de tip $TComparabil$ (sau identificate prin chei de tip $TComparabil$) şi care suportă următoarele operaţii:
  1. căutare;
  2. adăugare;
  3. ştergere;
  4. determinare maxim, minim, predecesor, succesor.
- ABC sunt SD care se folosesc pentru implementare:
  - dicţionar, dictionar ordonat
    - **TreeMap** în Java (foloseşte ABC echilibrat - arbore roşu-negru)
    - **map** din STL foloseşte ABC echilibrat ca implementare.
      - C++ 11 - **unordered_map** (tabelă de dispersie)
  - coadă cu priorităţi;
  - listă (**TreeList** în Java; foloseşte ABC echilibrat);
  - colecţie, mulţime (**TreeSet** în Java; foloseşte ABC echilibrat - arbore roşu-negru);

Observaţie: Presupunem în cele ce urmează (fără a reduce generalitatea):

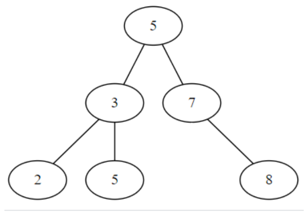
1. *Elementele* sunt identificate printr-o **cheie**.
2. *Cheia* elementului este de tip $TComparabil$.
3. Pp. relaţia "$\leq$" între chei (se poate uşor generaliza la o relaţie de ordine oarecare).

Definiţie 1 *Un ABC este un AB care satisface următoarea* ***proprietate*** *(proprietatea ABC):*

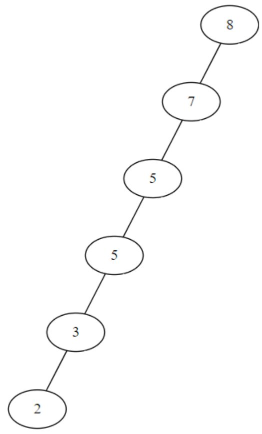
- *dacă x este un nod al ABC, atunci:*
  - *$\forall$ y un nod din subarborele stâng al lui x, are loc inegalitatea $cheie(y) \leq cheie(x)$ ($cheie(y)\ \mathcal{R}\ cheie(x)$).*
  - *$\forall$ y un nod din subarborele drept al lui x, are loc inegalitatea $cheie(x) < cheie(y)$ ($\neg(cheie(y)\ \mathcal{R}\ cheie(x))$).*

Exemplu. Presupunem că în container avem cheile 2 3 5 5 7 8 şi relaţia $\mathcal{R} = \leq$. În Figura 1 sunt indicaţi 2 ABC care conţin aceste chei.

- operaţiile de bază pe ABC consumă timp O(**înălţimea** arborelui).



(a) ABC echilibrat.



(b) ABC degenerat (lanţ).

- dacă ABC este plin $\Rightarrow$ înălţimea este $\theta(log_2 n)$
  - de ex, in caz (a) arborele este *echilibrat* şi înălţimea este $\theta(log_2 n)$;
- dacă ABC este degenerat (lanţ liniar) $\Rightarrow$ înălţimea este $\theta(n)$ - caz (b).
- forma unui ABC este importantă
  - operaţiile vor avea complexitate timp $O(h)$, h fiind înălţimea arborelui

Proprietate. Traversarea în inordine a unui ABC furnizează cheile în ordine în raport cu relaţia de ordine (ordine crescătoare dacă $R = \leq$).

- în exemplele (a) şi (b) de mai sus, parcurgerea în inordine este 2 3 5 5 7 8

Reprezentarea ABC

Un ABC (ca şi un AB) poate fi reprezentat:

1. secvenţial (folosind schema de memorare sub formă de ansamblu);
2. înlănţuit
   - reprezentarea înlănţuirilor folosind alocare dinamică (pointeri);
   - reprezentarea înlănţuirilor folosind alocare statică (tablouri).

- pentru implementarea operaţiilor, pp. în cele ce urmează
  - reprezentare înlănţuită folosind alocare dinamică.
  - $\mathcal{R} = \leq$
- notăm cu h înălţimea arborelui.
- notăm cu n numărul de noduri din arbore.

REPREZENTARE

- într-un nod memorăm informaţia utilă şi adresa celor doi descendenţi (stâng şi drept)
- putem memora (pentru a eficientiza anumite operaţii) şi alte informaţii
  - adresa părintelui
  - adâncimea, înalţimea nodului

Nod
    e: TElement *//informaţia utilă nodului*
    st: ↑ Nod *//adresa la care e memorat descendentul stâng*
    dr: ↑ Nod *//adresa la care e memorat descendentul drept*

Container
    rad: ↑ Nod *//adresa rădăcinii* ABC

CĂUTARE - pp. chei distincte.

- returnează subarborele a cărui rădăcină conţine cheia căutată.

Varianta recursivă.

Modelul recursiv

- arborele binar de căutare îl vom referi sub forma $abc(r,s,d)$
  - r - e informaţia din rădăcină

– s - e subarborele stâng

– d - e subarborele drept

$$cauta\_rec(abc(r,s,d),e) = \begin{cases} \emptyset & abc(r,s,d) = \emptyset \\ abc(r,s,d) & r.c = e.c \\ cauta\_rec(s,e) & e.c \leq r.c \\ cauta\_rec(d,e) & altfel \end{cases}$$

```
Functia cauta(abc, e)
   {complexitate timp: O(h)}
pre:    abc este un container reprezentat folosind un arbore binar de căutare
post:   se returnează pointer spre nodul care conţine un element având cheia egală cu cheia
   lui e
   cauta ← cauta_rec(abc.rad, e)
SfFunctia

Functia cauta_rec(p, e)
   {complexitate timp: O(h)}
pre:    p este adresa unui nod; p :↑ Nod - rădăcina unui subarbore
post:   se returnează pointer spre nodul care conţine un element având cheia egală cu cheia
   lui e în subarborele de rădăcină p
   {dacă s-a ajuns la subarbore vid sau nodul este cel căutat}
   Daca p = NIL ∨ [p].e.c = e.c atunci
      cauta_rec ← p
   altfel
      Daca e.c < [p].e.c atunci
         {se caută în subarborele stâng}
         cauta_rec ← cauta_rec([p].st, e)
      altfel
         {se caută în subarborele drept}
         cauta_rec ← cauta_rec([p].dr, e)
      SfDaca
   SfDaca
SfFunctia
```

Varianta iterativă.

```
Functia cauta(abc, e)
   {complexitate timp: O(h)}
post:   se returnează pointer spre nodul care conţine un element având cheia egală cu cheia
   lui e în arborele abc
   p← abc.rad
   CatTimp p ≠ NIL ∧ [p].e.c ≠ e.c executa
      Daca e.c < [p].e.c atunci
         {se caută în subarborele stâng}
         p← [p].st
      altfel
         {se caută în subarborele drept}
         p← [p].dr
      SfDaca
```

```
  SfCatTimp
  cauta← p
SfFunctia
```

ADĂUGARE

- returnează arborele rezultat prin inserarea unui element într-un arbore

Modelul recursiv

$$adauga\_rec(abc(r,s,d),e) = \begin{cases} abc(e,\emptyset,\emptyset) & abc(r,s,d)=\emptyset \\ abc(r, adauga\_rec(s,e), d) & e.c \leq r.c \\ abc(r,s,adauga\_rec(d,e)) & altfel \end{cases}$$

Functia creeazaNod(e)
  {complexitate timp: $\theta(1)$}
pre: e este de tip $TElement$
post: se returnează pointer spre un nod care conţine elementul e
  {se alocă un spaţiu de memorare pentru un nod; $p :\uparrow Nod$}
  aloca(p)
  {se completează componentele nodului}
  $[p].e \leftarrow e$
  $[p].st \leftarrow NIL$
  $[p].dr \leftarrow NIL$
  creeazaNod $\leftarrow p$
SfFunctia

Subalgoritm adauga(abc, e)
  {complexitate timp: $O(h)$}
pre: abc este un **container** reprezentat folosind un arbore binar de căutare
post: abc' este containerul în care a fost adăugat e
  $abc.rad \leftarrow$ adauga_rec($abc.rad, e$)
SfSubalgoritm

Functia adauga_rec(p, e)
  {complexitate timp: $O(h)$}
pre: p este adresa unui nod; $p :\uparrow Nod$ - rădăcina unui subarbore
post: se adaugă e în subarborele de rădăcină p şi se returnează rădăcină noului subarbore
  {dacă s-a ajuns la subarbore vid se adaugă}
  Daca $p = NIL$ atunci
    $p \leftarrow$creeazaNod(e)
  altfel
    Daca $e.c \leq [p].e.c$ atunci
      {se adaugă în subarborele stâng}
      $[p].st \leftarrow$adauga_rec($[p].st, e$)
    altfel
      {se adaugă în subarborele drept}
      $[p].dr \leftarrow$ adauga_rec($[p].dr, e$)
    SfDaca

```
    SfDaca
    {se returnează rădăcina subarborelui}
    adauga_rec ← p
  SfFunctia
```

MINIM

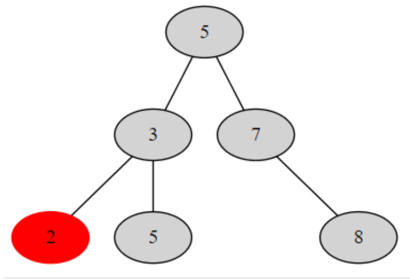


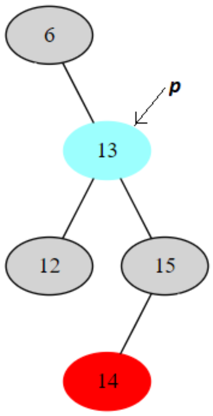
Figura 2: Minim.

```
  Functia minim(p)
    {complexitate timp: O(h)}
pre:    p este adresa unui nod; p :↑ Nod; p ≠ NIL
post:   se returnează adresa nodului având cheia minimă din subarborele de rădăcină p
    CatTimp [p].st ≠ NIL executa
      p ← [p].st
    SfCatTimp
    minim ← p
  SfFunctia
```

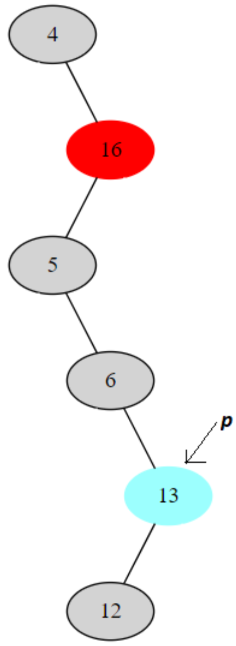
SUCCESOR

- cheia din container imediat mai mare (dacă $\mathcal{R} = \leq$) decât o cheia dintr-un nod p dat
- de exemplu, dacă am avea cheile 2 6 3 4 2 3 1, atunci succesorul cheii 4 este 6.

```
  Functia succesor(p)
pre:    p este adresa unui nod; p :↑ Nod; p ≠ NIL
post:   se returnează adresa nodului având cheia imediat mai mare decât cheia din p
    Daca [p].dr ≠ NIL atunci
      {există subarbore drept al lui p}
      succesor ← minim([p].dr)
    altfel
      prec ← parinte(p)
      CatTimp prec ≠ NIL ∧ p = [prec].dr executa
        p ← prec
        prec ← parinte(p)
      SfCatTimp
      succesor ← prec
    SfDaca
  SfFunctia
```



(a) Nodul p are descendent drept. Succesorul e marcat cu **roşu**.



(b) Nodul p nu are descendent drept. Succesorul e marcat cu **roşu**.

Observaţie

- dacă un nod memorează adresa părintelui, atunci complexitatea operaţiei este $O(h)$, în caz contrar este $O(h^2)$.

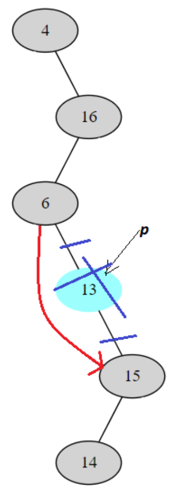
ŞTERGERE

- pp. chei distincte
- se şterge nodul având cheia egală cu cea a unui element dat
- se returnează arborele rezultat în urma ştergerii

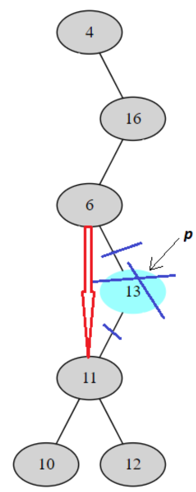
Sunt trei cazuri la ştergere, indicate mai jos.

Modelul matematic recursiv

$$sterge\_rec(abc(r,s,d),e) = \begin{cases} \emptyset & abc(r,s,d)=\emptyset \\ abc(r, sterge\_rec(s,e), d) & e.c < r.c \\ abc(r, s, sterge\_rec(d,e)) & e.c > r.c \\ d & s=\emptyset \\ s & d=\emptyset \\ abc(minim(d), s, sterge\_rec(d, minim(d))) & altfel \end{cases}$$



(a) Nodul p nu are descendent stâng.



(b) Nodul p nu are descendent drept.

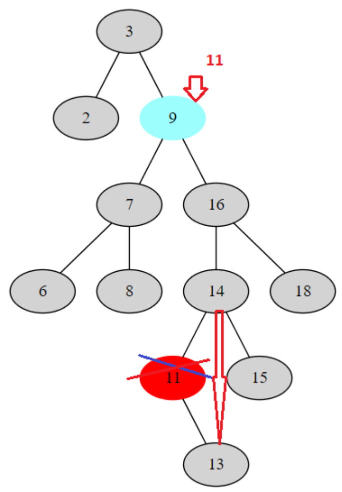


Figura 5: Nodul p are şi descendent stâng şi drept.

`Subalgoritm sterge`(abc, e)
  {complexitate timp: $O(h)$}
pre: abc este un **container** reprezentat folosind un arbore binar de căutare
post: abc' este containerul din care a fost şters e
  $abc.rad \leftarrow$ `sterge_rec`$(abc.rad, e)$
`SfSubalgoritm`

`Functia sterge_rec`(p, e)
  {complexitate timp: $O(h)$}
pre: p este adresa unui nod; $p :\uparrow Nod$ - rădăcina unui subarbore
post: se sterge nodul având cheia egală cu cheia lui e din subarborele de rădăcină p şi se returnează rădăcină noului subarbore
  {dacă s-a ajuns la subarbore vid}
  `Daca` p=`NIL atunci`
    `sterge_rec` $\leftarrow$`NIL`
  `altfel`

```
Daca e.c < [p].e.c atunci
   {se şterge din subarborele stâng}
   [p].st ←sterge_rec([p].st, e)
   sterge_rec ← p
altfel
   Daca e.c > [p].e.c atunci
      {se şterge din subarborele drept}
      [p].dr ← sterge_rec([p].dr, e)
      sterge_rec ← p
   altfel
      {am ajuns la nodul care trebuie şters}
      Daca [p].st ≠ NIL ∧ [p].dr ≠ NIL atunci
         {nodul are şi subarbore stâng şi subarbore drept}
         temp ← minim([p].dr)
         {se mută cheia minimă în p}
         [p].e ← [temp].e
         {se şterge nodul cu cheia minimă din subarborele drept}
         [p].dr ← sterge_rec([p].dr, [p].e)
         sterge_rec ← p
      altfel
         temp ← p
         Daca [p].st = NIL atunci
            {nu există subarbore stâng}
            repl ← [p].dr
         altfel
            {nu există subarbore drept, [p].dr=NIL}
            repl ← [p].st
         SfDaca
         {dealocă spaţiul de memorare pentru nodul care trebuie şters}
         dealoca(temp)
         sterge_rec ← repl
      SfDaca
   SfDaca
SfDaca
SfDaca
SfFunctia
```

În directorul asociat cursului găsiţi implementarea parţială, în limbajul C++, a containerului **Colecţie** cu elemente de tip comparabil, reprezentarea este sub forma unui ABC reprezentat înlănţuit, cu alocare dinamică a nodurilor). Iteratorul (în inordine) nu este implementat.

Probleme

1. Scrieţi o operaţie nerecursivă care determină părintele unui nod p dintr-un ABC.

2. Scrieţi varianta iterativă pentru operaţia de adăugare într-un ABC.

3. Presupunând că dorim ca fiecare nod din arbore să memoreze următoarele: informaţia utilă, referinţă către subarborele stâng, referinţă către subarborele drept, referinţă

către părinte. Folosind reprezentarea înlănţuită cu alocare dinamică a nodurilor, scrieţi operaţia de adăugare în ABC (varianta iterativă, varianta recursivă).

4. Presupunând ca elementele sunt de forma (cheie, valoare) şi relaţia de ordine între chei este “$\leq$”, scrieţi operaţia **MAXIM** care determină elementul din ABC având cea mai mare cheie.

5. Presupunând ca elementele sunt de forma (cheie, valoare), relaţia de ordine între chei este “$\leq$”, şi arborele este reprezentat înlănţuit cu alocare dinamică a nodurilor, scrieţi operaţia **PREDECESOR** care pentru un nod p dintr-un ABC determină elementul având cea mai mare cheie mai mică decât cheia lui p .

6. Implementaţi operaţiile pe ABC generalizând relaţia “$\leq$” de la proprietatea unui ABC la o relaţie de ordine oarecare R.