Sisteme dinamice - Seminar 1

80% examen final
10% seminar (lucrare în S5)
10% laborator (lucrare în L7)
prezență minimă:
seminar: maxim o absență
laborator: minim 7 prezențe

Ecuații diferențiale de ordin I:

Ecuațiile diferențiale de ordin I în formă normală rezolvabile efectiv au următoarea formă:

$$\underbrace{y'}_{\text{rata de schimbare}}(x) = f(\underbrace{x}_{\text{moment}}, \underbrace{y(x)}_{\text{populația curentă}}) \Leftrightarrow y' = f(x, y)$$

(nu se mai scrie (x))

Metoda 1: Ecuații diferențiale cu variabile separabile (EVS)

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)), \text{ unde } f \in C(I) \text{ și } g \in C(J, \mathbb{R}^*),$$
$$\Updownarrow$$
$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

I și J intervale $\subseteq \mathbb{R}$

Fie y o soluție a ecuației și $f: (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ și $g: (y_1, y_2) \to \mathbb{R}^*$! continue $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y'}{g(y)} = f(x) \\ \text{știm că } y' = \frac{dy}{dx} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx \cdot g(y)} = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = dx \cdot f(x)$$

Integrăm, $x_0 \in (x_1, x_2)$ și $y_0 \overset{not}{=} y(x_0)$:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$$

Considerăm o funcție $G(\gamma) = \int_{y_0}^{\gamma} \frac{dt}{g(t)}$ derivabilă și strict monotonă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ G injectivă (pt. că e strict monotonă) $\Rightarrow$ G bijectivă $\Rightarrow$ G inversabilă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, G^{-1}$

$$G^{-1} / \ \boxed{G(y) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds} \rightarrow \text{soluție implicită}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = G^{-1} \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds} \rightarrow \text{soluție explicită}$$

① $y' = \underbrace{2x}_{f(x)} \underbrace{(1+y^2)}_{g(x)}$ EVS

$\Rightarrow \frac{y'}{1+y^2} = 2x$

Știm că $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = 2x \cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2x\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} y = x^2 + \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{y = tg(x^2+\mathcal{C})}_{\text{expelicită}}$ → o infinitate de soluții

se adaugă constanta în partea unde nu e y pentru că:

$\operatorname{arctg} y + \mathcal{C} = x^2 + \mathcal{C}'$

$\operatorname{arctg} y = x^2 + \underbrace{(\mathcal{C}' - \mathcal{C})}_{\text{tot o constantă}}$

② $(x^2 - 1)\,y' + 2xy^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)\,y^2 = -2xy^2$

Presupunem $x \neq \pm 1$:

$\Leftrightarrow y' = \underbrace{-\frac{2x}{x^2-1}}_{f(x)} \underbrace{y^2}_{g(x)}$ EVS

OBS: $g(y)=0$ deducem $y=0$ soluție singulară

Presupunem $y \neq 0$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} &= -\frac{2}{x^2-1} \\ y' &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{-2x}{x^2-1}\,dx \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int -\frac{2x}{x^2-1}\,dx \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{1}{y} = -\ln(x^2-1)}_{\text{implicită}} + \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \ln(x^2-1) + \mathcal{C} \Leftrightarrow \underbrace{y = \frac{1}{\ln(x^2-1)+\mathcal{C}}}_{\text{explicită}}$

Metoda 2: Ecuațiile omogene în sens Euler

Definiție: O funcție $g(x,y)$ este omogenă de grad k dacă:

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k \cdot g(x,y)$$

exemplu: $k=0$: $g(\lambda x, \lambda y) = g(x,y)$

$$g(x,y) = \frac{x}{y}$$

* Ecuațiile omogene în sens Euler au forma $y' = g(x, y)$, unde g este omogenă de grad 0.

$$y' = g(x, y) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

~~Strategia~~

Substituția $z(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow y = z \cdot \underbrace{x}_{\text{constantă}} \Big|' \Leftrightarrow y' = z'x + z$$

$$z'x + z = f(z) \Leftrightarrow z' = \frac{f(z) - z}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right) \quad \underline{\underline{EVS}}$$

③ $2x^2 y' = x^2 + y^2, \quad x > 0$

$$(1)\left[y' = \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\right]$$

Substituția $z(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot z(x) \Big|' \Rightarrow y' = z'x + z$

Înlocuim în (1):

$$z'x + z = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{xz}{x}\right)^2\right) \Leftrightarrow z'x + z = \frac{1}{2}(1 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{\frac{1}{2}(1 + z^2) - z}{x} \Leftrightarrow z' = \frac{\frac{1}{2} + \frac{z^2}{2} - z}{x} \Leftrightarrow z' = \frac{(z-1)^2}{x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$z' = \frac{1}{2x} \cdot (z - 1)^2 \quad \underline{\underline{EVS}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x} \qquad g(z) = (z-1)^2$$

OBS: $g(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow y(x) = x$ (soluție singulară)

Presupunem $z \neq 1$:

$$\frac{z'}{(z-1)^2} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx\,(z-1)^2} = \frac{1}{2x} \Big| \cdot dx \Leftrightarrow \frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int \frac{dx}{2x} \Leftrightarrow -\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \ln|x| + \mathcal{C}, \quad x > 0, \ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

↳ dacă se înlocuiește z în funcție de y, avem soluție implicită

$$-(z-1) = \frac{2}{\ln|x| + \mathcal{C}}, \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

$$y = z \cdot x = \underbrace{x\left(1 - \frac{2}{\ln x + \mathcal{C}}\right)}_{\text{explicită}}$$

Metoda 3 : Ecuații liniare :

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$, unde P, Q funcții continue

Pas 1 Se rezolvă ecuația liniară omogenă :

$$y' + P(x) \cdot y = 0 \Leftrightarrow y' = -P(x) \cdot y \quad \underline{EVS}$$

Notăm soluția ecuației omogene cu y_0.

Pas 2 Se determină o soluție particulară y_P a ecuației neomogene. (prin metoda variației constantei) (în y_0 înlocuim pe $\mathcal{C}$ cu $\mathcal{C}(x)$, înlocuim y_P în cel neomogen)

Pas 3 Soluția generală a ecuației liniare neomogene este :

$$\boxed{y = y_P + y_0}$$

(4) $$y' \cdot y \cdot tg\, x = \frac{1}{\cos x}$$ (ecuație liniară)

~ pas 1: Rezolvăm $y' + P(x) \cdot y = 0$

$$y' + y\, tg x = 0 \Leftrightarrow y' = -\underbrace{y}_{g(y)}\underbrace{tg x}_{f(x)} \quad \underline{\underline{EVS}}$$

OBS : $y = 0 \Rightarrow g(y) \cdot 0 \Rightarrow y = 0$ soluție singulară

Presupunem $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = -tg\, x \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -tg\, x\, dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -tg\, x\, dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + \mathcal{C}$$

$\mathcal{C} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \mathcal{C}_0 > 0$ a.î. $\mathcal{C} = \ln \mathcal{C}$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow \ln|y| = \ln(\mathcal{C}_0 \cdot |\cos x|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = \mathcal{C}_0 \cdot |\cos x|, \ \mathcal{C}_0 > 0 \Rightarrow y_0 = \mathcal{C}\cos x, \ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$ (include și soluția singulară)

~ pas 2: Determinăm soluția particulară a ecuației neomogene.

$$y_P = \mathcal{C}(x) \cdot \cos x \Rightarrow y'_P = \mathcal{C}'(x) \cdot \cos x - \mathcal{C}(x) \sin x$$

Înlocuim y_P în ecuația neomogenă și avem:

$$\mathcal{C}'(x)\cos x - \cancel{\mathcal{C}(x) \sin x + \mathcal{C}(x) \cdot \frac{\cos x \cdot tg\, x}{\sin x}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C}'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \mathcal{C}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \int \mathcal{C}'(x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C}(x) = tg\, x \Rightarrow y_P = tg\, x \cdot \cos x = \sin x$$

~ pas 3: Soluția generală: $y = y_0 + y_P \Leftrightarrow y = \mathcal{C}\cos x + \sin x, \ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

Sisteme Dinamice ~ Seminar 2

Ecuatii Diferentiale de ordin 2

1. Ecuații de forma $y''(x) = f(x)$, f o funcție continuă

~ soluția generală se obține integrând de 2 ori, adăugându-se după fiecare integrare câte o constantă

① $y'' = 1 + tg^2 x \quad / \int$

$y' = \int (1 + tg^2 x)\,dx$

$y' = \int \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg\, x + C_1 \quad / \int$

$y = \int (tg\, x + C_1)\,dx = \int tg\, x\, dx + \int C_1\, dx$

$\boxed{y(x) = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2}$ → soluție explicită

2. Ecuații de forma $y''(x) = f(x, y')$

~ putem reduce ordinul cu o unitate prin substituția $\boxed{y'(x) = z(x)}$; obținem $z'(x) = f(x, z)$ ecuație diferențială de ordin I

② $x \cdot y'' + y' + x = 0$

Substituție: $z(x) = y'(x)$ (presupunem $x \neq 0$)

$\Rightarrow \quad x z' + z + x = 0$

$z' = \frac{-z - x}{x} \Rightarrow z' = -\frac{z}{x} - 1$

$\Rightarrow \quad z' + z \cdot \frac{1}{x} = -1$ (ecuație liniară)

Pas 1 : Rezolvăm ecuația liniară omogenă

$z' + z \cdot \frac{1}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow z' = \underbrace{-z}_{g(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}$ (EVS)

! obs: $g(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ soluție singulară

Presupunem $z != 0$:

$\frac{z'}{z} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{z} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|z| = -\ln|x| + C$

$\Rightarrow (\exists)\ \mathscr{C}=0$ a.î. $\mathscr{C}' = \ln \mathscr{C} \Leftrightarrow \ln|z| = -\ln|x| + \ln|\mathscr{C}|$

$\ln|z| = \ln\frac{\mathscr{C}}{|x|} \Rightarrow |z| = \frac{\mathscr{C}}{|x|} \Rightarrow z = \frac{\mathscr{C}}{x}$, $\mathscr{C}\in\mathbb{R}$

include soluția singulară

Pas 2: Se determină soluția particulară a ecuației neomogene

$$z_p = \frac{\mathscr{C}(x)}{x} \Rightarrow z'_p = \frac{\mathscr{C}'(x)\cdot x - \mathscr{C}(x)}{x^2}$$

$$z'_p = \frac{\mathscr{C}'(x)\cdot x \cancel{- \mathscr{C}(x)}}{x^2} + \cancel{\frac{\mathscr{C}(x)}{x^2}} \Leftrightarrow z'_p = \frac{\mathscr{C}'(x)\cdot x}{x^2}$$

$$\frac{\mathscr{C}'(x)\cdot x}{x^2} = -1 \Rightarrow \mathscr{C}'(x) = -x \ /\int \Leftrightarrow \int \mathscr{C}'(x)\,dx = \int -x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{C}(x) = -\frac{x^2}{2}$$

$$z_p = -\frac{x}{2}$$

Pas 3: Soluția generală a ecuației liniare neomogene:

$$z = z_p + z_0 \Leftrightarrow z = -\frac{x}{2} + \frac{\mathscr{C}}{x}, \ \mathscr{C}\in\mathbb{R}$$

$$y' = -\frac{x}{2} + \frac{\mathscr{C}}{x} \ /\int \Leftrightarrow y = \int -\frac{x}{2}\,dx + \int\frac{\mathscr{C}}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-x^2}{4} + \mathscr{C}_1\cdot\ln|x| + \mathscr{C}_2$$

3. Ecuații liniare cu coeficienți constanți:

~ cu forma $\boxed{y'' + ay' + b\cdot y = f(x)}$, $a, b\in\mathbb{R}$

~ ecuația $\boxed{y'' + ay' + by = 0}$ este ecuație liniară omogenă

~ în cazul ei, soluția fundamentală se construiește căutând soluții de forma $y(x) = e^{r\cdot x}$, $r\in\mathbb{R}$

$$r^2\cdot e^{r\cdot x} + a\cdot r\cdot e^{r\cdot x} + b e^{r\cdot x} = 0 \ /: e^{r\cdot x}$$

$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$ → ecuația caracteristică ecuației liniare omogene

Algoritmul de rezolvare a ecuației liniare omogene:

Pas 1: Se atașează ecuația caracteristică.

Pas 2: Determinăm rădăcinile r_1, r_2 ale ecuației caracteristice

Pas 3: Fiecărei rădăcină i se atașează o soluție y_1, y_2 astfel:
soluții liniar independente

→ caz I: dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ $(\Delta > 0)$

$$y_1(x) = e^{r_1 \cdot x} \quad \text{și} \quad y_2(x) = e^{r_2 \cdot x}$$

→ caz II: dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2$ $(\Delta = 0)$

$$y_1(x) = e^{r_1 \cdot x} \quad \text{și} \quad y_2(x) = x \cdot e^{r_1 \cdot x}$$

→ caz III: dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $(\Delta < 0)$
conjugate

$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$
$$y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

De ce avem soluții liniar independente?
~ se demonstrează că mulțimea soluției e un spațiu vectorial de dimensiune 2.
~ dim. 2 => orice bază are 2 elemente
~ ∀ altă soluție e o combinație liniară dintre cele două soluții

Pas 4: Soluția generală a ecuației liniare omogene este

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

~ în cazul ecuației liniare neomogene, soluția generală:

$$y = y_e + y_p$$

Cazuri speciale de determinare a y_p:

$y'' + ay' + by = f(x)$

→ caz I: dacă $f(x) = P_m(x)$ ← polinom

(a) dacă $b \neq 0$, atunci $y_p = Q_m(x)$

(b) dacă $b = 0$, $a \neq 0$, atunci $y_p = x\,Q_m(x)$

→ caz II: dacă $f(x) = e^{r \cdot x} \cdot P_m(x)$

(a) dacă r NU este soluție a ecuației caracteristice, atunci

$y_p = e^{rx} Q_m(x)$

(b) dacă r este soluție, atunci $y_p = x^{\mu} e^{rx} Q_m(x)$

μ ← ordinul de multiplicitate a lui r

→ caz III: dacă $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x) \cdot \cos\beta x$ sau $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x) \sin\beta x$

(a) dacă $\alpha + i\beta$ NU este soluție a ecuației caracteristice, atunci

$$y_p = e^{\alpha x}\left[Q_m(x) \cdot \cos\beta x + P_m(x) \cdot \sin\beta x\right]$$

(b) dacă $\alpha + i\beta$ e soluție, atunci:

$$y_p = x e^{\alpha x}\left[Q_m(x) \cdot \cos\beta x + P_m(x) \cdot \sin\beta x\right]$$

Sisteme Dinamice ~ Seminar 3

Sisteme de Ecuatii Liniare

1. Multimea solutiilor sistemului fundamental de solutii

~ se consideră sistemul liniar omogen

$$(S)\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}\cdot y_1(x) + a_{12}\cdot y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21}\cdot y_1(x) + a_{22}\cdot y_2(x) \end{cases}$$

notatii: $Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$(S) \iff Y' = A\cdot Y$

notatie: S_0 = mulțimea soluției sistemului liniar omogen

$\boxed{T}$ $\quad S_0 \leq_{\mathbb{R}} \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ cu $\dim_{\mathbb{R}} S_0 = 2$

un spațiu vectorial

Fie $\{Y^1, Y^2\}$ o bază pentru $S_0 \overset{def}{=}$ sistem fundamental de soluții

~ dacă găsim două baze, orice soluție e o combinație liniară dintre cei 2

Fie $U = (Y^1, Y^2)$ matricea fundamentală de soluții.

~ soluția generală a sistemului liniar omogen este $\boxed{Y = U\cdot\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}}$

2. Metoda reducerii la o ecuație diferențială cu coeficienți constanți:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\cdot y_1 + a_{12}\cdot y_2 & (1) \\ y_2' = a_{21}\cdot y_1 + a_{22}\cdot y_2 & (2) \end{cases}$$

~ se alege una dintre ecuații și o derivăm:

$$(1)\,\big|' \Rightarrow y_1'' = a_{11}\cdot \underbrace{y_1' + a_{12}\cdot y_2'}_{\text{se înlocuiesc cu (1) și (2)}}$$

$$\Rightarrow y_1'' = a_{11}(a_{11}\cdot y_1 + a_{12}\cdot y_2) + a_{12}(a_{21}\cdot y_1 + a_{22}\cdot y_2)$$

$$\Rightarrow y_1'' = \alpha_1\cdot y_1 + \alpha_2\cdot y_2$$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y_1' - a_{11} \cdot y_1)} \quad (*) \\ y_1'' = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1'' = \alpha_1 y_1 + \frac{\alpha_2}{a_{12}} (y_1' - a_{11} \cdot y_1)$$

$$\Rightarrow y_1'' + \beta_1 \cdot y_1' + \beta_2 \cdot y_1 = 0$$ (ecuație liniară omogenă de ordin 2)

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow y_1(x) = C_1 \cdot \Phi_1(x) + C_2 \cdot \Phi_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

~ înlocuind pe y_1 în $(*)$ obținem pe y_2.

3. Metoda ecuației caracteristice (metoda valorilor proprii)

$$\boxed{Y' = A \cdot Y}$$

~ căutăm soluții de forma $Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}$ cu $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$

~ înlocuind :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda e^{\lambda x} \\ \alpha_2 \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda x} - A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\lambda \cdot I_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$ → sistem de ecuații liniare omogene $(\star)$

Cum $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0) \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat

$$\Rightarrow \boxed{\det(\lambda I_2 - A) = 0}$$ → ecuația caracteristică atașată sistemului liniar omogen

~ soluțiile ecuației caracteristice sunt valori proprii ale matricii A

~ pt. fiecare valoare proprie λ_i, rezolvăm sistemul $(\star)$ și obținem o soluție $\underbrace{(\alpha_1^i, \alpha_2^i)}_{\text{vector propriu coresp. lui } \lambda_i} \neq (0,0)$