# TABELA DE DISPERSIE
# Hash Table

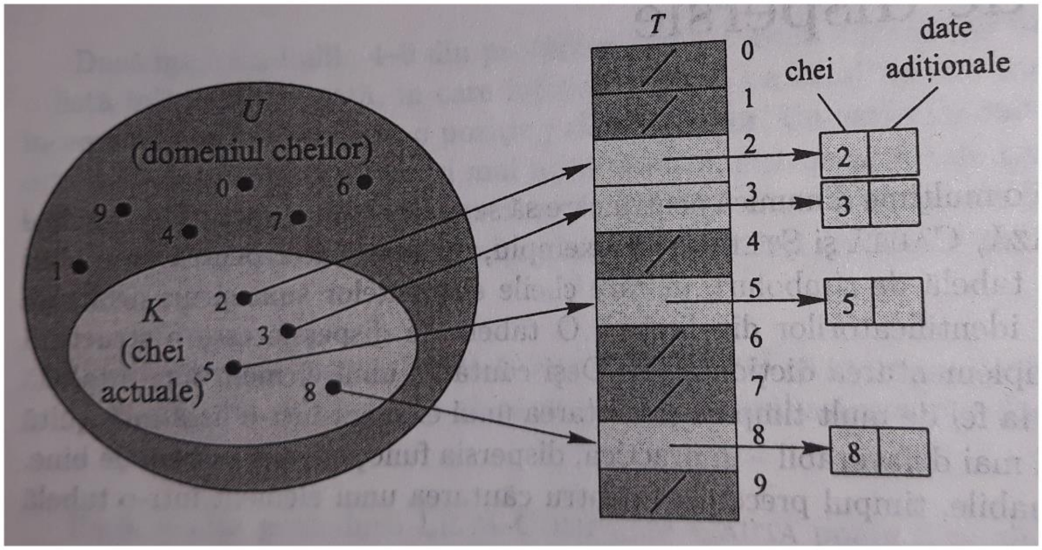
- Este o structură de date **eficientă** pentru implementarea dicționarelor (și nu numai).
- Exemplu: un compilator păstrează o **tabelă de simboluri**, în care cheia este șirul de caractere corespunzător unui identificator
- TD poate fi folosită pentru implementarea containerelor pe care operațiile specifice sunt: **adăugare** element, **căutare** element, **ștergere** element. Ex: dicționare, colecții, mulțimi
  - JAVA
    - HashMap (dicționar reprezentat folosind o tabelă de dispersie)
    - HashSet (mulțime reprezentată folosind o tabelă de dispersie)
  - STL
    - unordered_set (mulțime reprezentată folosind o tabelă de dispersie)
    - unordered_map (dicționar reprezentată folosind o tabelă de dispersie).
- TD este o generalizare a noțiunii mai simple de **tabelă cu adresare directă**
- **Notații**
  - *n* – numărul de elemente din container
  - un element *e* din container este o pereche cheie (*c*) – valoare (*v*) ($\boldsymbol{TElement} = \boldsymbol{TCheie} \times \boldsymbol{TValoare}$)
  - *U* – **domeniul** (universul) cheilor
  - *K* – domeniul actual al cheilor (mulțimea cheilor efectiv memorate în container)

## Tabelă cu adresare directă

- Notații și presupuneri
  - Presupunem chei numere naturale, chei distincte
  - Domeniul cheilor $U = \{0,1,2...,m-1\}$ - *m* relativ mic
  - *K* – domeniul actual al cheilor (mulțimea cheilor efectiv memorate în container)

- Tabela cu adresare directă este memorată sub forma unui vector $T[0..m-1]$
  - Locația $T[c]$ va corespunde cheii *c* (la acea locație se memorează cheia și datele adiționale asociate acesteia)
  - Dacă o cheie $c \notin K$, atunci $T[c]$ va conține NIL (sau o valoare specială care marchează locație goală)
  - $T[c]$ poate memora un pointer spre elementul având cheia *c* sau chiar elementul (cheia și valoarea asociată)

**Exemplu**




Considerăm următoarea reprezentare:

| | |
|---|---|
| **TElement** | **TabelaAdresareDirecta** |
| *c*:TCheie | *m*:Întreg |
| *v*:TValoare | *e*:TElement[0..*m*-1] |

Cele trei operații (**căutare**, **adăugare**, **ștergere**) pe o tabelă cu adresare directă sunt sumarizate mai jos:

**CAUTĂ** (*T*, *c*)
//pre: *T* este o tabelă cu adresare directă, *c* este o cheie, de tip TCheie
**@** returnează *T*.*e*[*c*]

**ADAUGĂ** (*T*, *e*)
//pre: *T* este o tabelă cu adresare directă, *e* este de tip TElement
**@** *T*.*e*[*e*.*c*]←*e*

**ȘTERGE** (*T*, *c*)
//pre: *T* este o tabelă cu adresare directă, *c* este de tip TCheie
**@** *T*.*e*[*c*]←NIL

- **Observații**
  - o tablelă cu adresare directă funcționează bine dacă universul cheilor este mic
  - complexitatea timp a operațiilor este $\theta(\mathbf{1})$
  - spațiul de memorare este $\theta(|\boldsymbol{U}|)$
- **<u>Dezavantaje</u>**
  - dacă universul *U* este mare, memorarea tabelului *T* poate fi nepractică, sau chiar imposibilă, dată fiind memoria disponibilă.
  - dacă mulțimea *K* este mică relativ la *U*, rămâne mult spațiu nefolosit ⇒ gestionare ineficientă a spațiului de memorare.

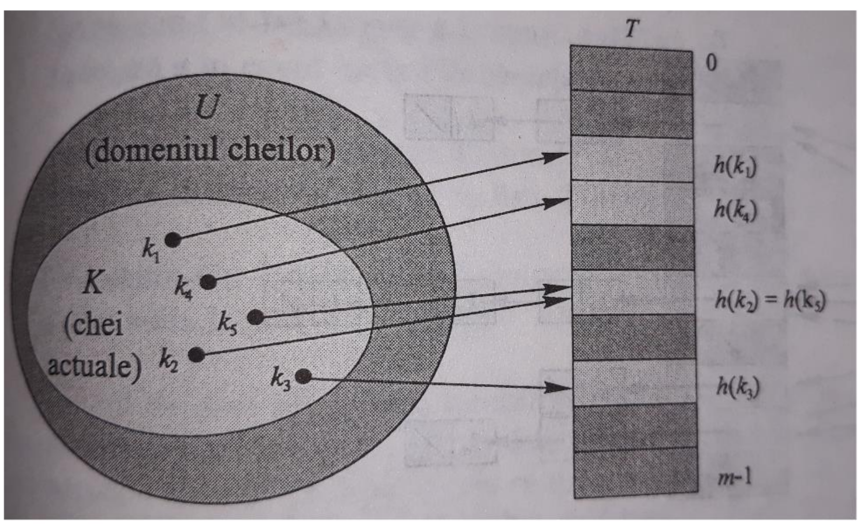
**PROBLEMĂ**

Sugerați cum se poate implementa o tabelă cu adresare directă în care cheile elementelor memorate nu sunt neapărat distincte și elementele pot avea date adiționale.

# Tabela de dispersie

- $T[0..m\text{-}1]$
  - $m$ – număr locații din tabelă
- reduce spațiul de memorare la $\theta(|\boldsymbol{K}|)$ - eficientizare a spațiului de memorare (mai ales când $K$ este mult mai mică decât $U$)
- complexitatea timp ***medie*** pentru toate operațiile pe TD (adăugare, căutare, ștergere) este $\theta(1)$.
  - **căutarea** unui element într-o TD poate necesita $\theta(n)$ în caz ***defavorabil*** (ca și căutarea în liste)
    - în practică, dispersia funcționează foarte bine
    - timpul ***mediu*** preconizat pentru căutare este $\theta(1)$
- se definește o **funcție de dispersie** (*hash function*) $\boldsymbol{d}: \boldsymbol{U} \rightarrow \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \ldots \boldsymbol{m} - \boldsymbol{1}\}$
  - $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c})$ este **valoarea de dispersie** a cheii $c$
  - vom spune că o cheie $\boldsymbol{c}$ se **dispersează** în locația $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c})$
- dacă două chei $c_1$ și $c_2$ se dispersează în aceeași locație, adică $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c_1}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{c_2})$, spunem că avem o **coliziune**
  - evitatarea totală a coliziunilor este imposibilă
    - deoarece $|U| > m$, sigur există două chei care să fie în coliziune
  - minimizare numărului de coliziuni
    - printr-o alegere potrivită a funcției de dispersie

**Exemplu** În figura de mai jos, cheile sunt notate cu $k$ (***keys***), iar funcția de dispersie prin $h$ (***hashing*** function).




- **dispersia perfectă** (*perfect hashing, perfect hash function*)

- fără coliziuni
  - când se cunosc cheile (mulțimea de chei este statică – ex. compilatoare)
- a se vedea Cursul 9

- cum se face **adăugarea unui nou element** $e=(c, v)$?
  - se calculează locația de dispersie a cheii $c$, $\boldsymbol{i = d(c)}$
  - dacă locația $i$ este liberă, atunci se adaugă elementul la locația $i$
  - dacă la locația $i$ mai e memorat un alt element $\Rightarrow$ **rezolvare coliziune**
    - 2 tipuri de metode de dispersie
      - **dispersia deschisă** (*open hashing*)
        - cheile sunt stocate în liste înlănțuite atașate celulelor unei TD.
        - se mai numește **adresare închisă** (*closed adressing*)
      - **dispersia închisă** (*closed hashing*)
        - cheile sunt stocate în interiorul TD fără a utiliza liste înlănțuite.
        - **adresare deschisă** (*open adressing*)
    - 3 metode de rezolvare a coliziunilor
      - **prin liste independente (înlănțuire)**
        - dispersie **deschisă**
      - **prin liste întrepătrunse**
        - combinație între *liste independente* și *adresare deschisă*
        - considerată o tehnică de **adresare deschisă/dispersie închisă**
      - **prin adresare deschisă**
        - dispersie **închisă**
- **funcție de dispersie bună**
  - este ușor de calculat (folosește operații aritmetice simple) - $\theta(\mathbf{1})$
  - produce cât mai puține coliziuni.

## Interpretarea cheilor ca numere naturale

- Majoritatea funcțiilor de dispersie presupun universul cheilor din mulțimea numerelor naturale
- În cazul în care cheile nu sunt numere naturale, trebuie găsită o modalitate de a le interpreta ca numere naturale – o funcție care asociază fiecărei chei un număr natural (implementare - $\boldsymbol{hashCode: TCheie \rightarrow \{0, 1, 2...\}}$)
  - identificatorul **pt** poate fi interpretat ca un număr în baza **128** – $(\mathbf{pt})_{128}=112\cdot128+116=14452$.
  - pentru un șir de caractere putem considera suma codurilor ASCII ale caracterelor.
  - ...
- În cazul în care în container elementele sunt de tip *TElement* (nu au asociată o cheie - ex. mulțime, colecție), $\boldsymbol{hashCode: TElement \rightarrow \{0, 1, 2...\}}$
- Pp. în cele ce urmează că avem chei naturale.
- Java – metoda ***hashCode***
  - clasa **String**

```
s[0]*31^(n-1) + s[1]*31^(n-2) + ... + s[n-1]
```

  - *n* – lungimea string-ului (s[0] – primul caracter, etc
  - *hashCode*-ul sirului vid este 0

- funcție *hash* bună pentru string-uri
  - *uniformitate* - asigură o distribuție uniformă a string-urilor în tabela de dispersie
  - *eficiență* – dpdv al calculului
  - *nu e sensibilă* la modificări mici – valoarea funcției *hash* nu se schimbă drastic pentru mici schimbări în string
  - *rată mică de coliziuni* – string-uri diferite nu furnizează aceeași valoare *hash*
- funcția DJB2 are o performanță bună și o rată mică de coliziuni
  - exemplu Java

```java
public static int djb2(String str) {
    int hash = 5381;
    for (int i = 0; i < str.length(); i++) {
        hash = ((hash << 5) + hash) + str.charAt(i);
    }
    return hash;
}
```

```java
int hash = djb2("hello");
System.out.println(hash); // prints "99162322"
```

## Funcții de dispersie

- O funcție de dispersie bună satisface (aproximativ) *ipoteza dispersiei uniforme simple* (**Simple Uniform Hashing - SUH**): fiecare cheie se poate dispersa cu aceeași probabilitate în oricare din cele *m* locații.
  - $\boldsymbol{P(d(c) = j) = \frac{1}{m}, \forall j = 0, \dots, m-1 \quad \forall c \in U}$
    - $\boldsymbol{P\big(d(c_1) = d(c_2)\big) = \frac{1}{m}, \quad \forall\, c_1, c_2 \in U}$
    - dacă $P(c)$ este probabilitatea de a alege cheia $c$, atunci $\sum_{c:d(c)=j} \boldsymbol{P(c) = \frac{1}{m}\ \forall j = 0, 1, \dots m-1}$
      - în general, nu se poate verifica această condiție, deoarece nu se cunoaște distribuția de probabilitate *P*
  - dacă această ipoteză ar fi verificată, atunci s-ar minimiza numărul de coliziuni
  - în practică se pot folosi tehnici euristice pentru a crea funcții de dispersie care să se comporte bine.

## I. Metoda diviziunii

- Dispersia prin diviziune
- $\boldsymbol{d(c) = c \bmod m}$
- Experimental: valori bune pentru *m* sunt numerele prime nu prea apropiate de puteri exacte ale lui 2 (ex: 13,...)
- $m$=13
  - $c$=63 $\Rightarrow$ $d(c)$=11
  - $c$=26 $\Rightarrow$ $d(c)$=0
- ex: pentru a reține $n$=2000 șiruri de caractere (1 caracter = 8 biți)
  - 3 elemente, în medie, într-o coliziune
  - $\Rightarrow$ m=701 (apropiat de 2000/3, nu e apropiat de o putere a lui 2)

- $\Rightarrow \boldsymbol{d(c) = c \bmod 701}$

➢ *Observație*

- $m$=$2^k$ $\Rightarrow \boldsymbol{x \bmod m}$= $x$ & ($m$-1)

**II. Metoda înmulțirii**

➢ $\boldsymbol{d(c) = [m \cdot (c \cdot A \, mod \;\; 1)]}$ unde "$\boldsymbol{c \cdot A \, mod \;\; 1}$"reprezintă partea fracționară a lui $\boldsymbol{c \cdot A}$**,** adică ($\boldsymbol{c \cdot A - [c \cdot A]}$)

➢ Valoarea lui $m$ nu e critică (în general este o putere a lui 2)

➢ **Knuth**: valoarea optimă pentru $A$ este $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx \boldsymbol{0.6180339887}$ (**golden ratio**-1)

$m$ = 13, $A$ = 0.6180339887 (Knuth)

- $c$=63 $\Rightarrow d(c)$ =[13 * frac(63 * $A$)] =12
- $c$ =52 $\Rightarrow d(c)$=[13 * frac(52 * $A$)]= 1
- $c$=129 $\Rightarrow d(c)$=[13 * frac(129 * $A$)] = 9

**III. Dispersia universală**

➢ $\boldsymbol{c = < c_1, c_2, ..., c_k >}$

➢ $\boldsymbol{d(c) = (\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot x_i) \bmod \;\; m}$ unde $\boldsymbol{< x_1, x_2, ..., x_k >}$ este o secvență de numere aleatoare fixate (selectate de-a lungul inițializării funcției de dispersie)

➢ apropiată de ipoteza SUH

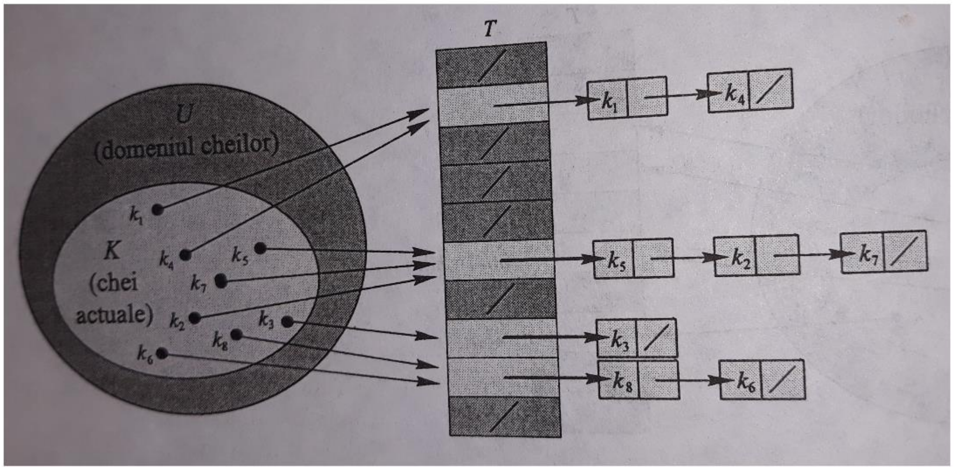
**Observație**

- în cazul în care cheile nu sunt numere naturale, funcția de dispersie $d$ (una din cele definite anterior) se definește nu pe cheia $c$, ci pe ***hashCode***-ul acesteia
  ➢ ex: $\boldsymbol{d(c) = hashCode(c) \bmod m}$

## A. Rezolvare coliziuni prin *liste independente (înlănțuire*) – SEPARATE CHAINING

- Elementele care se dispersează în aceeași locație (sunt într-o coliziune), vor fi puse într-o listă înlănțuită.
  - în general, alocare dinamică pentru memorarea înlănțuirilor
  - listele pot fi simplu sau dublu înlănțuite
- Locația $j$ conține un pointer către primul element al listei înlănțuite a elementelor care se dispersează în locația $j$ (dacă această listă e vidă, se memorează NIL).
- Operațiile sunt ușor de implementat.

**Exemplu** În figura de mai jos, cheile sunt notate cu $k$ (***keys***), iar funcția de dispersie prin $h$ (***hash function***).




Dacă $m$=10, $K$={11, 21, 31, 5, 15, 7, 17, 27}, $d(c) = c \bmod m$, atunci

- d(11)= d(21)=d(31)=1
- d(5)=d(15)=5
- d(7)= d(17)=d(27)=7

și tabela tabela va fi

$\boxed{0}$
$\boxed{1}$→ 11→ 21→31
$\boxed{2}$
$\boxed{3}$
$\boxed{4}$
$\boxed{5}$→ 5→15
$\boxed{6}$
$\boxed{7}$→ 7→ 17→27
$\boxed{8}$
$\boxed{9}$

**<u>Reprezentare și operații</u>**

**TElement**
*c*:TCheie
*v*:TValoare

**Container**
*m*:Întreg
*l*:TListă[0..*m*-1]

- *d* este funcția de dispersie, $\boldsymbol{d}: \boldsymbol{TCheie} \rightarrow \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \ldots \boldsymbol{m}-\boldsymbol{1}\}$
- pp. cheia are o singură valoare asociată
- Container poate fi, de ex., dicționar, mulțime, colecție.
  - în cazul mulțimii/colecției, **TCheie=TElement** și nu există valoare asociată cheii.

**CAUTĂ** (*C*, *ch*)
// pre: *C* este un container reprezentat sub forma unei TD (coliziuni prin înlănțuire), *ch* este de tip
// TCheie
@ caută elementul cu cheia *ch* în lista *C.l*[*d*(*ch*)]

**ADAUGĂ** (*C*, *e*)
// pre: *C* este un container reprezentat sub forma unei TD (coliziuni prin înlănțuire), *e* este de tip
// TElement
@ se adaugă elementul *e* în capul listei înlănțuite *C.l*[*d*(*e.c*)]

**ȘTERGE** (*T*, *ch*)
// pre: *C* este un container reprezentat sub forma unei TD (coliziuni prin înlănțuire), *ch* este de tip
// TCheie
@ se șterge elementul cu cheia *ch* din lista înlănțuită *C.l*[*d*(*ch*)]

**Observații**

- Este posibil ca listele independente să fie memorate ordonat după cheie sau valoare
- Funcția de dispersie este considerată *bună* dacă listele au aproximativ aceeași lungime
- Dacă apar multe liste de vide sau liste prea lungi, se modifică $m \Rightarrow$ redispersare (**rehashing**)
  - dublare $m$ ($m \ll 1$)

## Timp defavorabil pentru operații

Pp $n$ este numărul elementelor din container.

- **CAUTĂ** – $O(n)$
  - defavorabil: toate elementele se dispersează în aceeași locație ($\boldsymbol{\theta(n)}$ – dacă elementul nu e găsit)
- **ADAUGĂ** – $\boldsymbol{\theta(1)}$
  - se poate adăuga la începutul listei înlănțuite
- **ȘTERGE** – presupune
  - (1) căutare nod în lista înlănțuită + (2) ștergere nod $\Rightarrow$ $O(n)$

**Exemplu**

$m$=10, $d(c)$=$c$ mod $m$

| c | 5 | 15 | 13 | 22 | 28 | 35 | 38 | 32 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d(c) | 5 | 5 | 3 | 2 | 8 | 5 | 8 | 2 | 2 |

$\boxed{0}$
$\boxed{1}$
$\boxed{2}\rightarrow 2 \rightarrow 32 \rightarrow 22$
$\boxed{3}\rightarrow 13$
$\boxed{4}$
$\boxed{5}\rightarrow 35 \rightarrow 15 \rightarrow 5$
$\boxed{6}$

$\boxed{7}$

$\boxed{8} \to 38 \to 28$

$\boxed{9}$

**<u>Iterator</u>**

- dacă listele sunt simplu înlănțuite cu alocare dinamică
- iteratorul va memora
  - o referință *c* către containerul reprezentat folosind o TD cu coliziuni prin liste independente
  - poziția curentă *pozCurent* din tabelă (indică lista înlănțuită iterată)
  - adresa unui nod (pointer) *curent* din lista înlănțuită de la poziția *pozCurent*

| **Telement** | **Nod** | **Container** | **IteratorContainer** |
|---|---|---|---|
| *c*:TCheie | *e*:TElement | *m*:Întreg | *c*:Container //**referință (în implementare)** |
| *v*:TValoare | *urm*:↑Nod | *l*:↑Nod [0..m-1] | *pozCurent*:Intreg |
| | | | *curent*:↑Nod |

Operațiile pe iterator sunt descrise în Pseudocod, în continuare.

Pe lângă operațiile uzuale ale iteratorului (*creează*, *prim*, *valid*, *element*, *următor*), avem nevoie de o operație auxiliară ***deplasare*** care, dacă lista de la locația curentă *pozCurent* a fost iterată până la final (*curent* devine invalid), deplasează *pozCurent* pe următoarea locație din tabelă care conține o listă nevidă și poziționează *curent* pe primul nod din această listă.

- în exemplul anterior, dacă *pozCurent*=3 și s-a terminat de iterat lista de la poziția 3, mută *pozCurent* pe 5, iar *curent* va indica 35.
- această operația NU va fi în interfața iteratorului (secțiunea publică), ci în implementare (secțiunea privată)

**Subalgoritm deplasare** (*i*) este<br>
  {pre: *i:* IteratorContainer}<br>
  {post: deplasează iteratorul pe prima listă nevidă care urmează după locația *pozCurent*}<br>
  {incrementăm *pozCurent* cât timp nu s-a epuizat tabela și lista de la poziția *pozCurent* e vidă}<br>
  **CâtTimp** (*i.pozCurent* < *i.c.m*) ∧ (*i.c.l* [*i.pozCurent*] = NIL) **execută**<br>
    *i.pozCurent* = *i.pozCurent* + 1<br>
  **SfCâtTimp**<br>
  {dacă nu s-a epuizat tabela}<br>
  **Dacă** *i.pozCurent* < *i.c.m* **atunci**<br>
    *i.curent* ← *i.c.l* [*i.pozCurent*]<br>
  **SfDacă**<br>
**SfSubalgoritm**

**Subalgoritm creează** (*i*, *c*) este<br>
    *i.c* ← *c*

*i.pozCurent* $\leftarrow$ 0
{căutăm prima listă nevidă, pentru a poziționa iteratorul}
deplasare(*i*)
**SfSubalgoritm**

**Subalgoritm prim** (*i*) este
*i.pozCurent* $\leftarrow$ 0
deplasare(*i*)
**SfSubalgoritm**

**Funcția valid**(*i*) este
{locația curent iterată nu depășește numărul de locații din tabelă și nodul curent este valid }
**valid** $\leftarrow$ (*i.pozCurent* < *i.c.m*) $\wedge$ (*i.curent* $\neq$ NIL)
**SfFuncție**

**Subalgoritm element** (*i*, *e*) este
{pre: *i* este valid}
*e* $\leftarrow$ [*i.curent*].*e*
**SfSubalgoritm**

**Subalgoritm urmator** (*i*) este
{pre: *i* este valid}
*i.curent* $\leftarrow$ [*i.curent*].*urm*
{dacă s-a terminat de iterat lista curentă, căutăm prima listă nevidă, pentru a repoziționa iteratorul}
**Dacă** *i.curent* = NIL **atunci**
*i.pozCurent* = *i.pozCurent* + 1
deplasare(*i*)
**SfDacă**
**SfSubalgoritm**

**Observație**

- complexitatea iterării unui container cu *n* elemente, reprezentat folosind o TD cu *m* locații și liste independente este $\boldsymbol{\theta(n+m)}$ (dar $m \ll n$ => $\boldsymbol{\theta(n)}$)

În directorul asociat cursului 7, găsiti implementarea parțială, în limbajul C++, a containerului **Colecție** (reprezentarea este sub forma unei TD în care coliziunile sunt reprezentate prin înlănțuire).

## Analiza dispersiei cu înlănțuire

**Notații și presupuneri**

- $\boldsymbol{\alpha = \frac{n}{m}}$ *factorul de încărcare* al tabelei (numărul mediu de elemente memorate într-o înlănțuire)
- $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{1}$
- Pp. că timpul de calcul al funcției de dispersie este $\boldsymbol{\theta(1)}$ (!! la timpul de căutare se adaugă și timpul de calcul al funcției de dispersie)

– La **căutare** apar 2 cazuri

- Căutare **cu succes** (găsim elementul)
- Căutare **fără succes** (nu găsim elementul)

**Teorema 1.** Într-o TD în care coliziunile sunt rezolvate prin înlănțuire, în *ipoteza dispersiei uniforme simple* (SUH), o căutare **fără succes**, necesită, în ***medie***, un timp $\boldsymbol{\theta(1+\alpha)}$.

În ipoteza SUH, fiecare listă are aceeași lungime, $\boldsymbol{\alpha}$**,** iar o cheie se poate dispersa, cu aceeași probabilitate, în orice locație (poate fi în oricare dintre liste)

- (1) căutarea fără succes necesită iterarea unei liste $\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}$
- (2) calcul funcției de dispersie $\Rightarrow \mathbf{1}$
- Din (1) și (2) $\Rightarrow \boldsymbol{\theta(1+\alpha)}$.

**Teorema 2.** Într-o TD în care coliziunile sunt rezolvate prin înlănțuire, în *ipoteza dispersiei uniforme simple* (SUH), o căutare **cu succes**, necesită, în ***medie***, un timp $\boldsymbol{\theta(1+\alpha)}$.

Intuiție

- probabilitatea ca o cheie să se disperseze într-una din locații este $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$
- în lista de pe poziția $j$, elementul poate fi găsit după 1, 2, .... $\alpha$ pași $\Rightarrow$ timpul mediu este aproximativ

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{\propto}\frac{\boldsymbol{i}}{\propto} \in \boldsymbol{\theta(1+\alpha)}$$

## CONCLUZII

- Dacă $\boldsymbol{n = O(m)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{O(m)}}{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{O(1)} \Rightarrow$ **căutarea** necesită, în ***medie***, timp constant $\boldsymbol{\theta(1)}$
- Adăugarea necesită $\boldsymbol{\theta(1)}$
- Dacă listele sunt dublu înlănțuite atunci ștergerea unui nod se poate face în $\boldsymbol{\theta(1)}$

$\Rightarrow$ **TOATE OPERAȚIILE (adăugare, căutare, ștergere) POT FI EXECUTATE ÎN *MEDIE* ÎN** $\boldsymbol{\theta(1)}$

**Observații**

- Caz favorabil căutare $\theta(1)$
- Spațiu de memorare $\theta(n+m)$
- Pentru memorarea listele independente se pot folosi și arbori echilibrați, ceea ce va reduce complexitatea timp în caz defavorabil la căutare de la $\theta(n)$ la $\boldsymbol{\theta}(log_2 n)$.
- Rezolvarea colizunilor prin liste independente se numește **dispersie deschisă** (*open hashing*) sau **adresare închisă** (*closed adressing*)
  - elemente sunt memorate în afara tabelei.

**PROBLEME**

1. Presupunem că folosim o funcție de dispersie aleatoare **d** pentru a dispersa *n* chei distincte într-o tabelă $T$ de dimensiune $m$. Care este numărul mediu de coliziuni? (cardinalul probabil al mulțimii $\{(x, y) \in TCheie \times TCheie: d(x) = d(y)\}$)
2. Presupunem că folosim o TD în care coliziunile sunt rezolvate prin înlănțuire (liste independente), dar fiecare listă este ordonată după cheie. Care va fi timpul de execuție pentru **căutare** (cu succes, fără succes), **adăugare** și **ștergere**?
3. Arătați că dacă $|\boldsymbol{U}| > \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}$**,** atunci există o submulțime a lui $U$ de mărime *n* ce conține chei care se dispersează toate în aceeași locatie, astfel încât timpul de căutare pentru dispersia cu înlănțuire, în cazul cel mai defavorabil, este $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{n})$**.**