

1.5em 0pt

线性代数进阶课程
Advanced Linear Algebra Course

姓 名: _____ 姓名
学 号: _____ 学号
学 院: _____ 计算机科学与技术学院
专 业: _____ 计算机科学与技术
课任教师: _____ 方发明

2022 年 07 月

目录

摘要

在计算机广为普及的今天，最优化方法已然成为工程技术人员研究大规模优化问题所必备的研究工具。凸优化，作为最优化的一个子领域，研究定义于凸集中的凸函数最小化的问题。由于近年来计算机算力的提高和最优化理论的充分发展，凸优化问题以其优秀的性质在机器学习领域中拥有广泛的应用。本文针对凸优化模型展开研究，首先罗列了一些基础的数学概念，并对于所涉及的定理给予了详细的证明。然后分别介绍了牛顿迭代法、拟牛顿方法、梯度下降法、随机梯度类方法、共轭梯度法、临近梯度下降法、增广拉格朗日法和交替方向乘子法这八种优化方法。在每个方法中，首先描述了该方法适用的凸优化模型，然后介绍了其对应的算法流程和具体的迭代格式，接着基于方法进行收敛性或优缺点分析，最后列举了如 Lasso 问题、最小二乘问题、矩阵分解问题等经典模型，以具体的应用实例来增加读者对于方法在实际机器学习问题中使用的理解。

关键词: 凸优化, 机器学习, 牛顿法, 梯度法, 乘子法

Abstract

With the popularization of computers, optimization method has become a necessary research tool for engineers to resolve large-scale optimization problems. As a subfield of optimization, convex optimization studies the minimization of convex functions defined in convex sets. Because of the improvement of computing power and the full development of optimization theory, convex optimization problem has been widely used in machine learning regarding its excellent properties. In this paper, the convex optimization model is studied. Firstly, some essential mathematical concepts are listed, and the theorems involved are proved in detail. Then, eight optimization methods including Newton-Raphson method, Quasi-Newton method, Gradient descent method, Stochastic gradient descent method, Conjugate gradient method, Proximal gradient method, Augmented Lagrange method, and Alternating direction method of multipliers, are introduced respectively. In each scenario, the convex optimization model applicable to the method is described first, then the corresponding algorithm flow and specific iterative format are presented. Furthermore, the convergence or advantages and disadvantages of the method are analyzed. Finally, classical models such as the Lasso problem, the least square problem, and the matrix decomposition problem are listed. Concrete application examples are presented to increase the reader's understanding of the use of methods in real machine learning problems.

Keywords: Convex Optimization, Machine Learning, Newton's Method, Gradient Method, Multiplier Method

1. 引言

凸优化问题是在凸集 \mathcal{X} 上求解目标凸函数 $f(\cdot)$ 最小值的一类最优化问题。一般这类问题可以用于求解如何分配资源使收益达到最优，在对问题进行定性和定量的分析后，将资源与收益的关系抽象成适当的数学模型，作为目标函数 $f(\cdot)$ ，根据模型的不同设计不同的优化方法进行求解。也就是对于不同的目标函数 $f(\cdot)$ ，可以使用不同的优化方法求解。

凸优化问题的求解在许多科学与工程领域有广泛的应用，例如在数据分析与机器学习、金融与经济、工业生产等方面都有具体应用。

根据凸优化问题是否有约束，或根据目标函数的形式不同，分别有牛顿类方法与梯度类方法求解无约束优化问题，特别地，对于目标函数存在不可微的情况，可以在梯度概念的基础上，引入临近梯度，适用临近梯度下降法求解；而对于有约束的优化问题，可以通过引入乘子，适用乘子法进行求解。