BOJ 28402
두 트리

#euler_tour_technique #segtree

난이도 – Diamond V

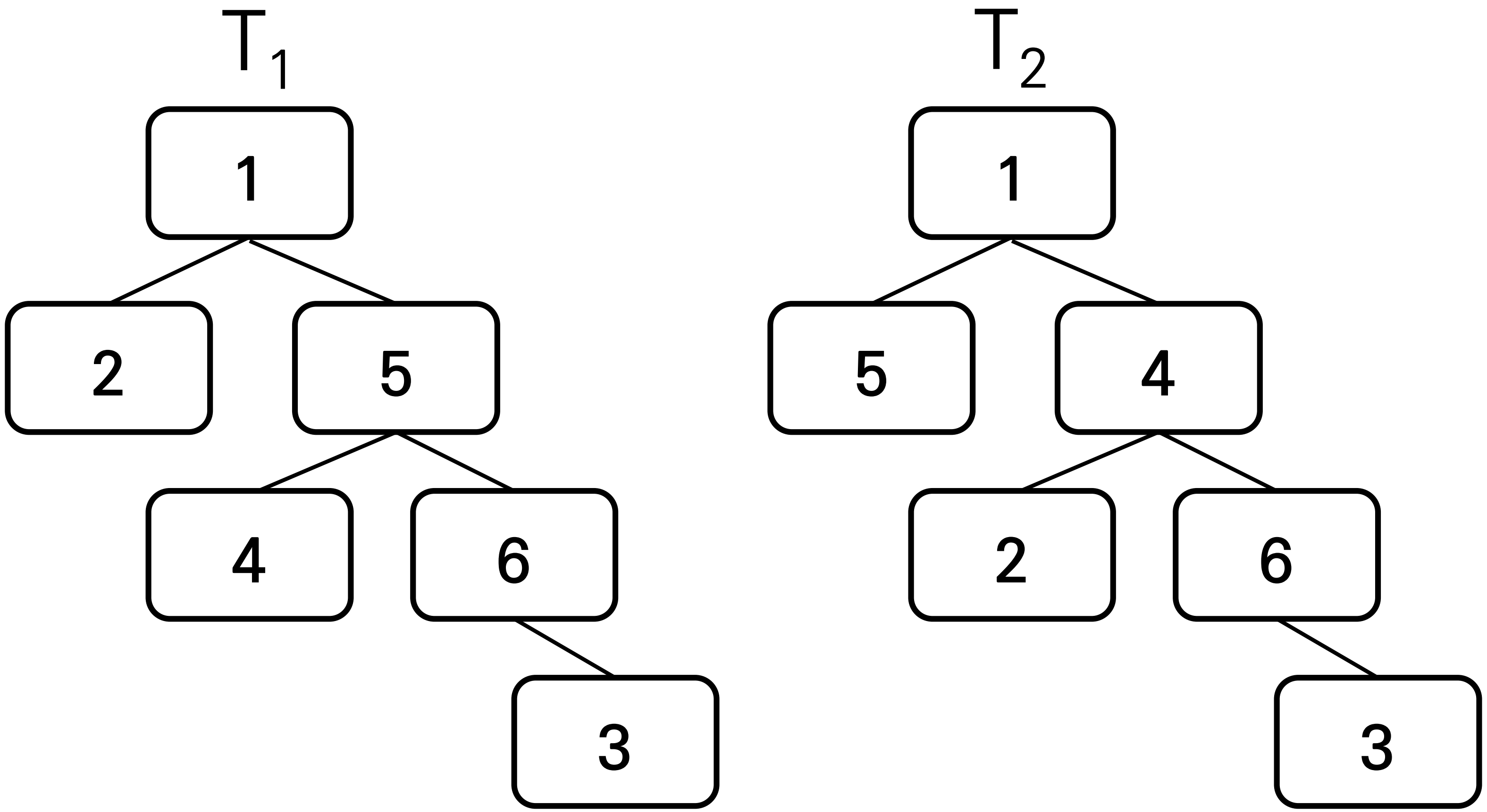
sorohue@sasa.hs.kr

BOJ 28402 두 트리

- 1부터 N까지의 번호가 붙은 노드로 이루어진 트리 2개가 주어집니다.
- 각 인덱스마다, 두 트리에서 해당 번호의 노드를 루트로 갖는 서브트리에 속한 정점 번호의 교집합에 포함되는 번호들에 대해 그 번호에 할당된 값의 최댓값을 구해야 합니다.

- 예제를 보면서 이게 무슨 말인지 생각해 봅시다.

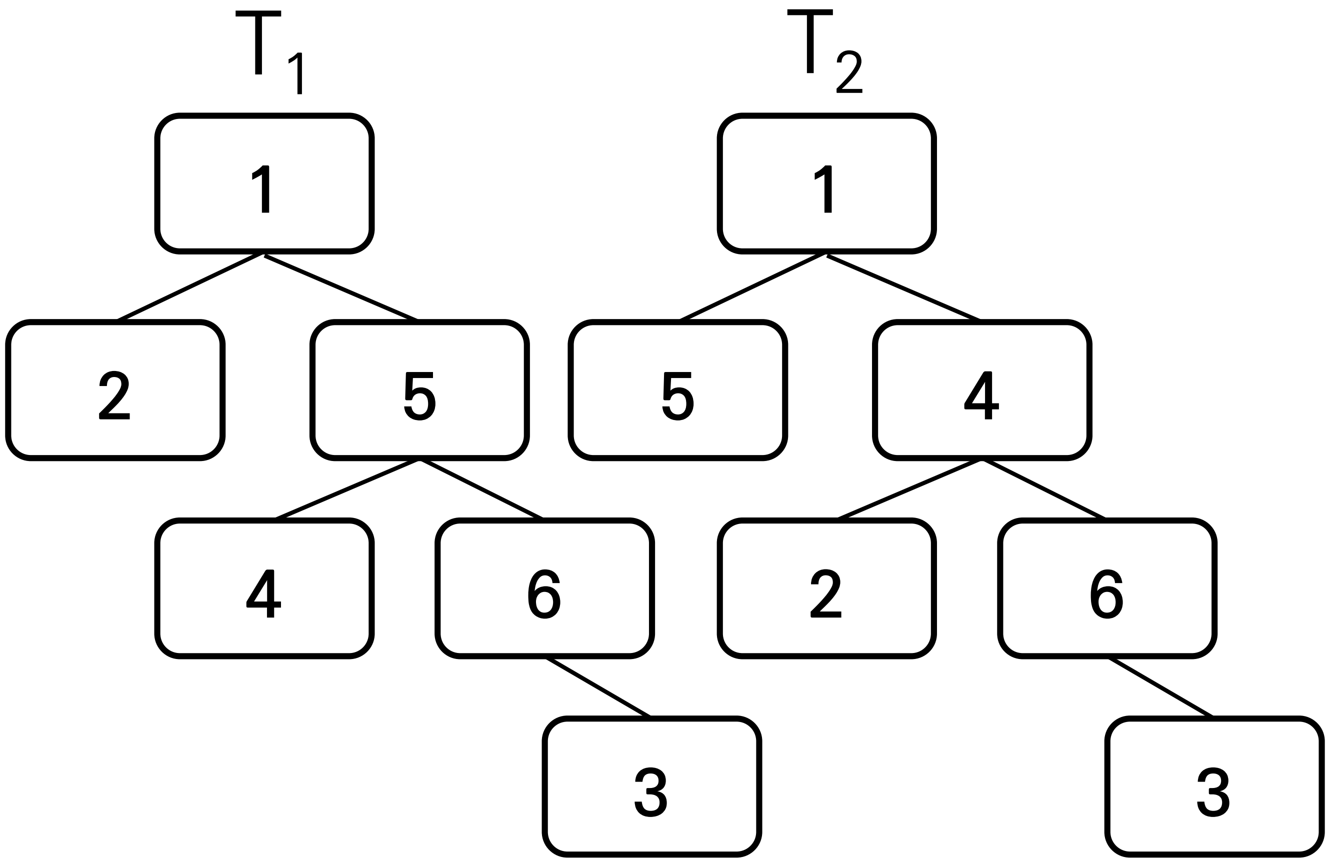
BOJ 28402 두 트리



번호	값
1	7
2	10
3	5
4	14
5	8
6	100

- 예제에서 두 트리 T_1, T_2와 각 번호에 부여된 값은 위와 같습니다.

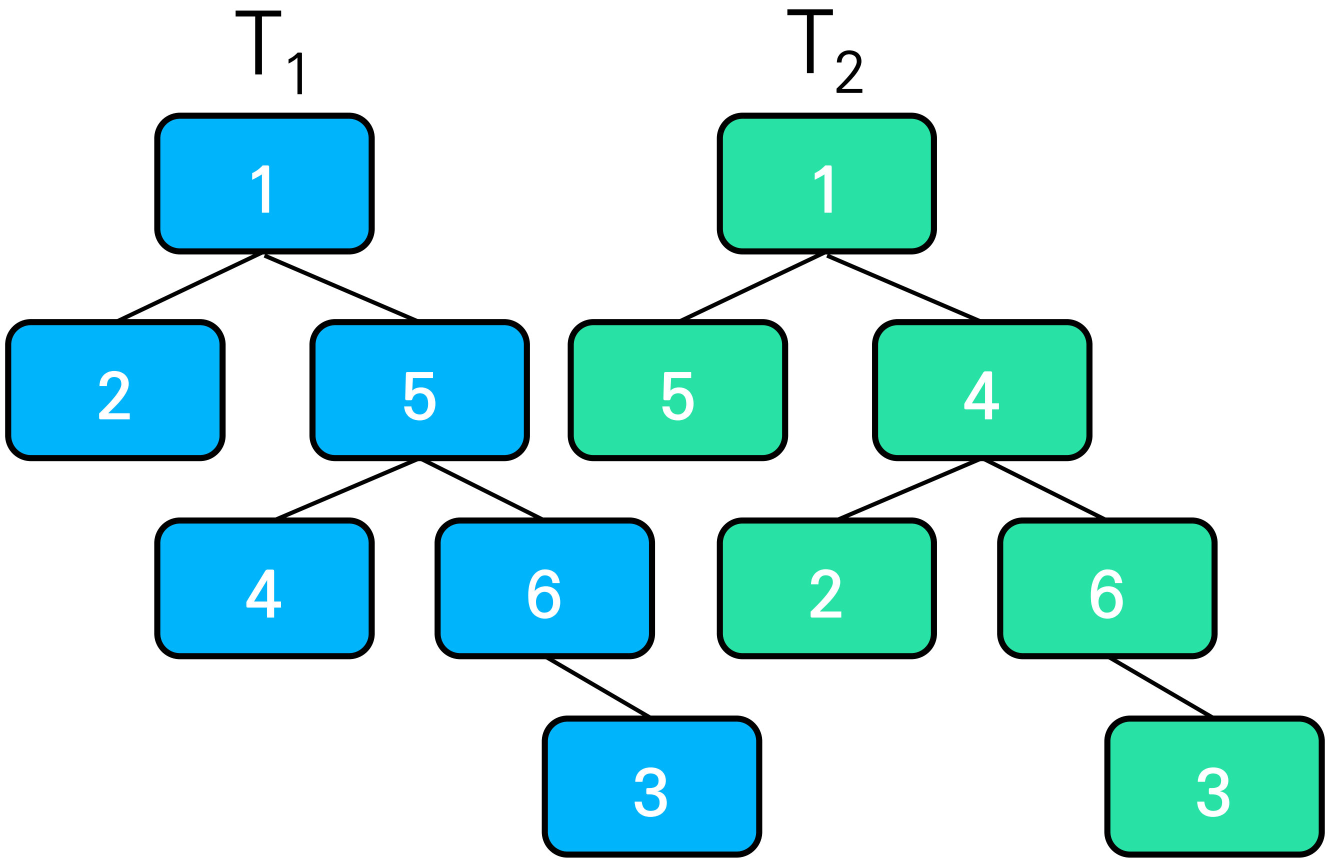
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	
2	10	
3	5	
4	14	
5	8	
6	100	

- 1번 노드를 루트로 갖는 서브트리에 대한 답 m_1을 구해 봅시다.

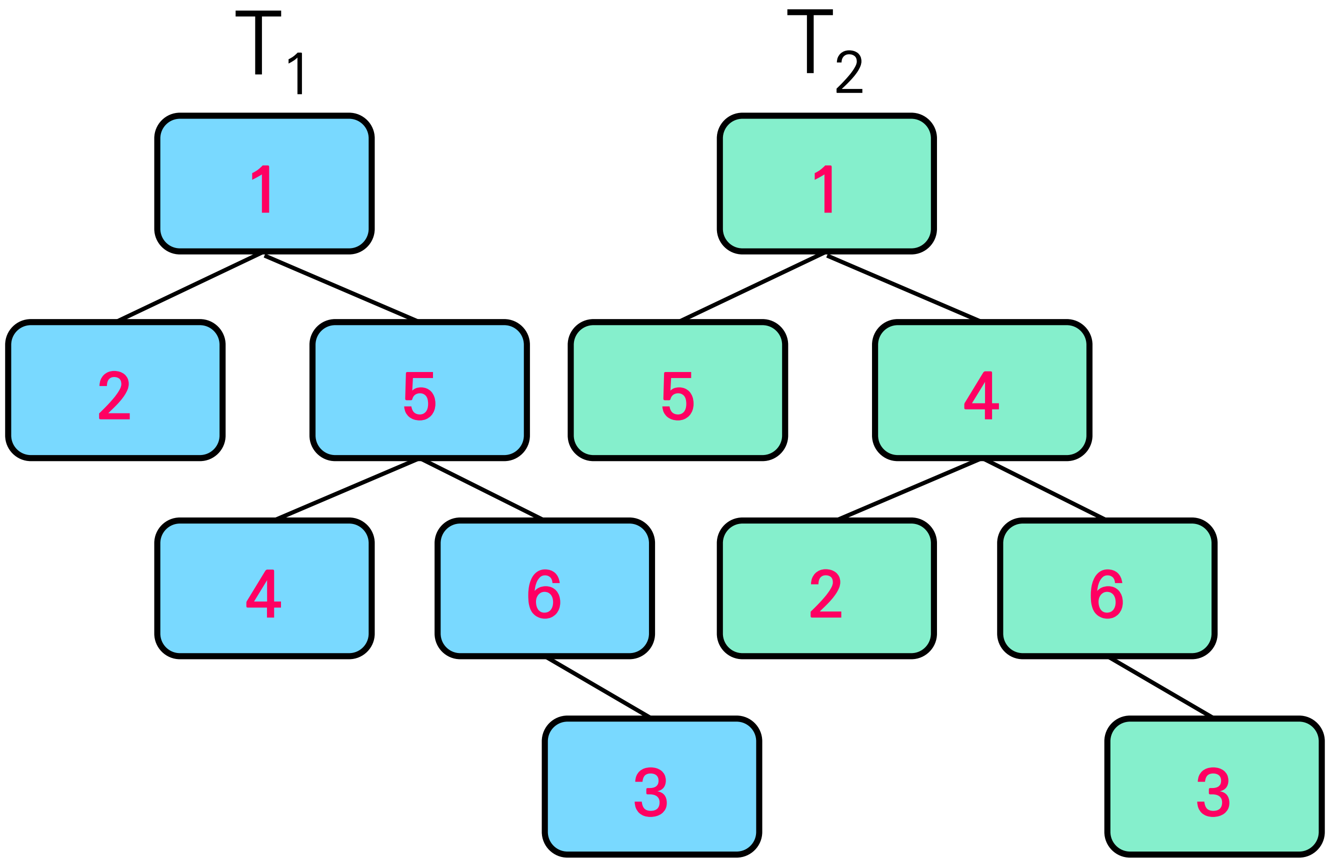
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	
2	10	
3	5	
4	14	
5	8	
6	100	

- 두 트리에서 해당하는 노드를 색칠하면 위와 같습니다.

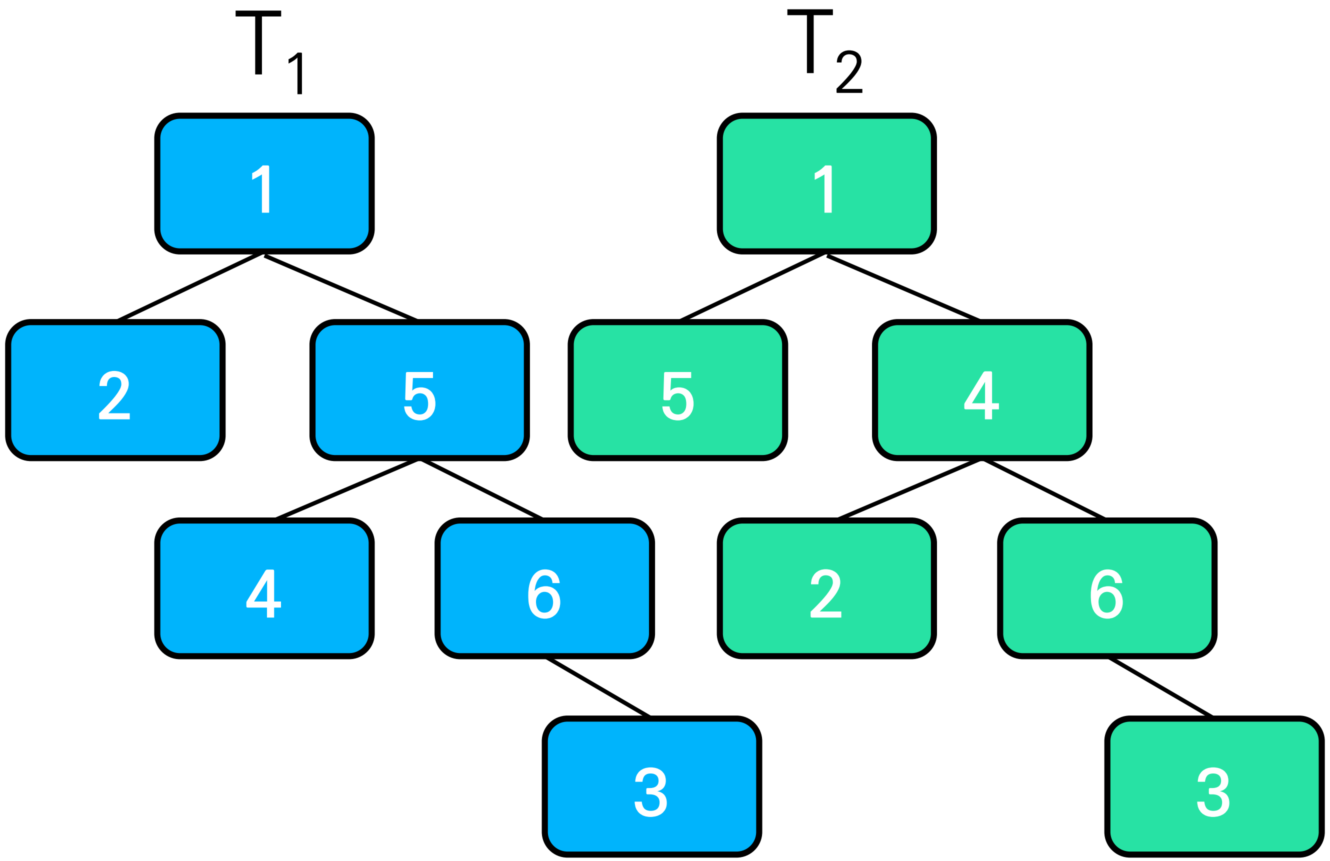
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	
2	10	
3	5	
4	14	
5	8	
6	100	

- 두 트리에서 모두 색칠된 노드는 1, 2, 3, 4, 5, 6이 있습니다.

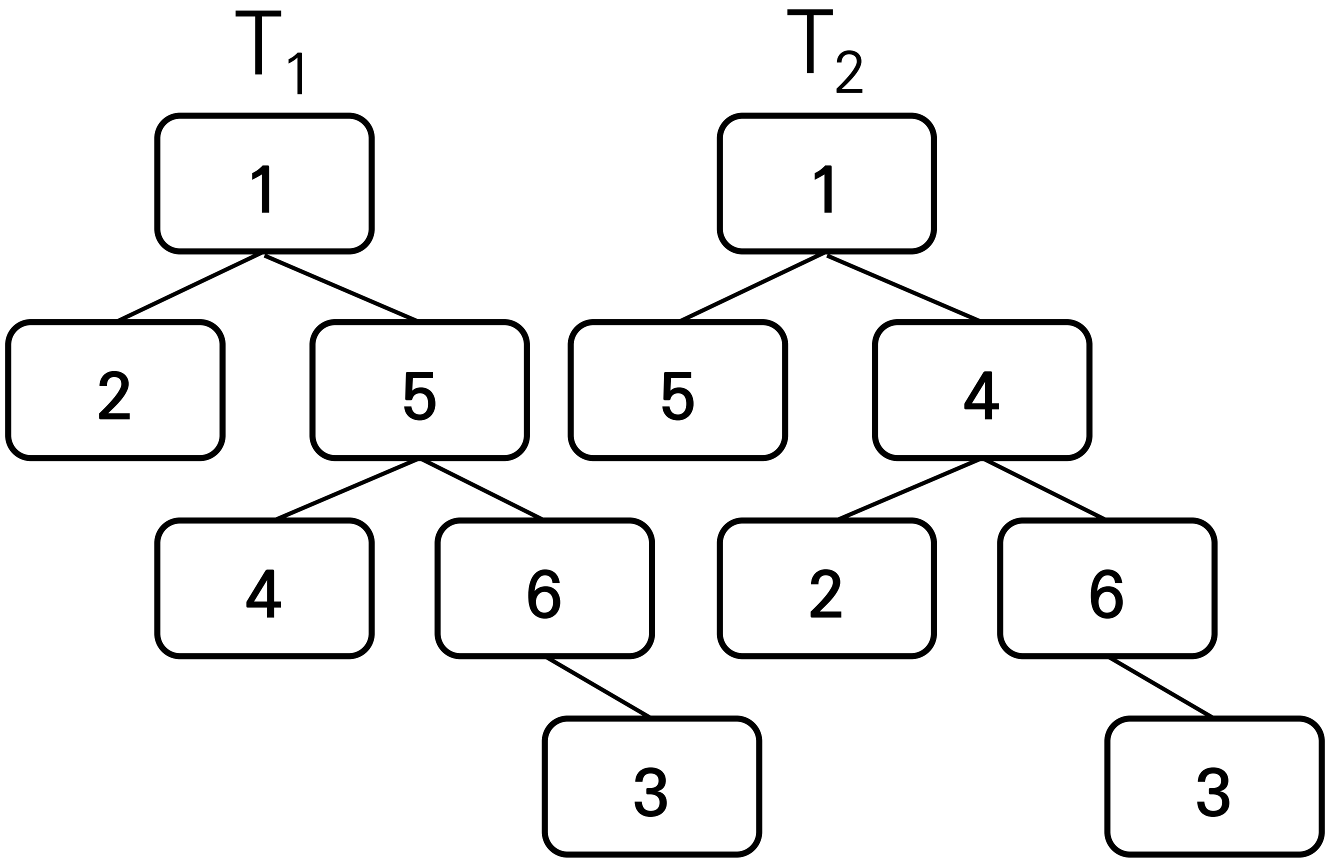
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	100
2	10	
3	5	
4	14	
5	8	
6	100	

- 이 중 할당된 값이 가장 큰 노드는 6이므로, 답은 100 됩니다.

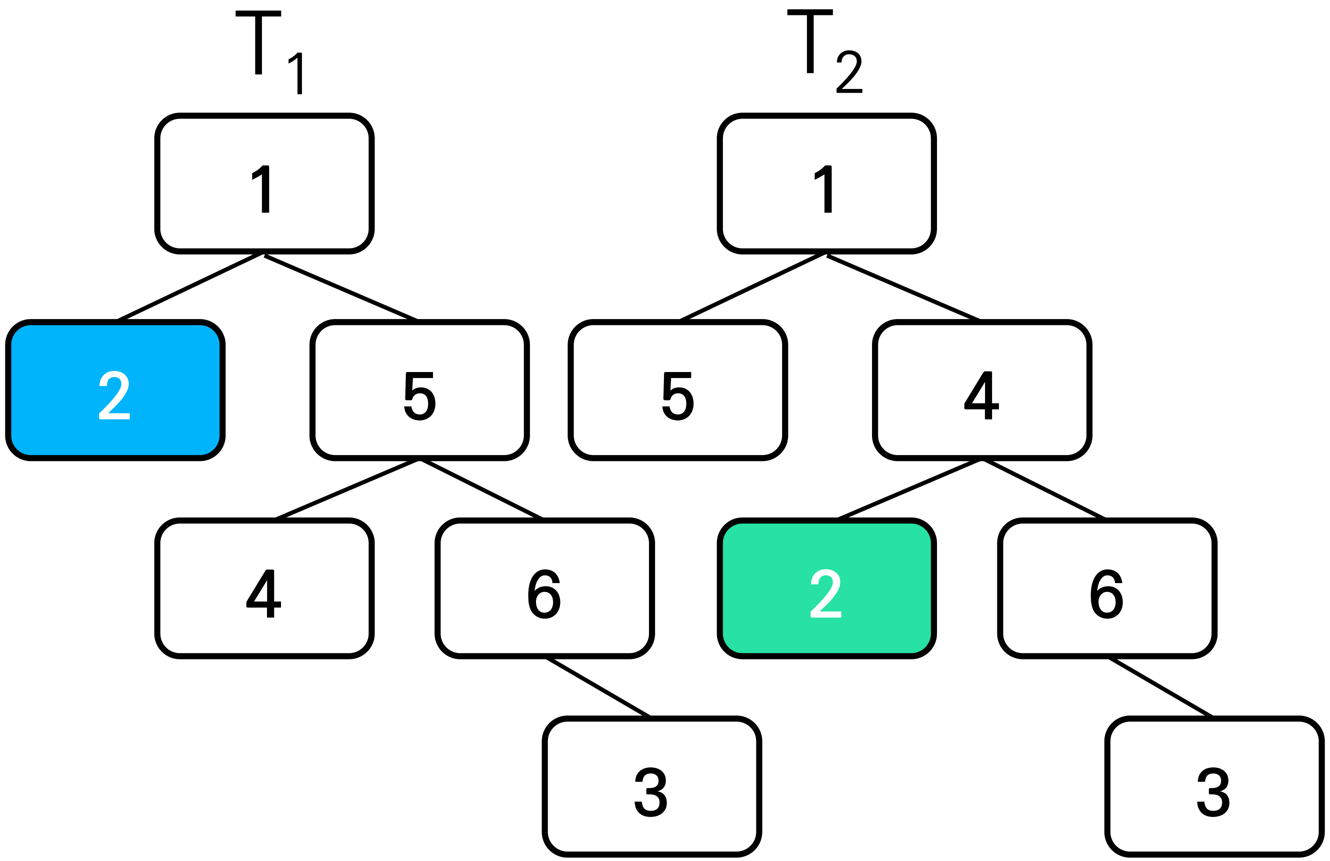
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	100
2	10	
3	5	
4	14	
5	8	
6	100	

- m_2를 구해 봅시다.

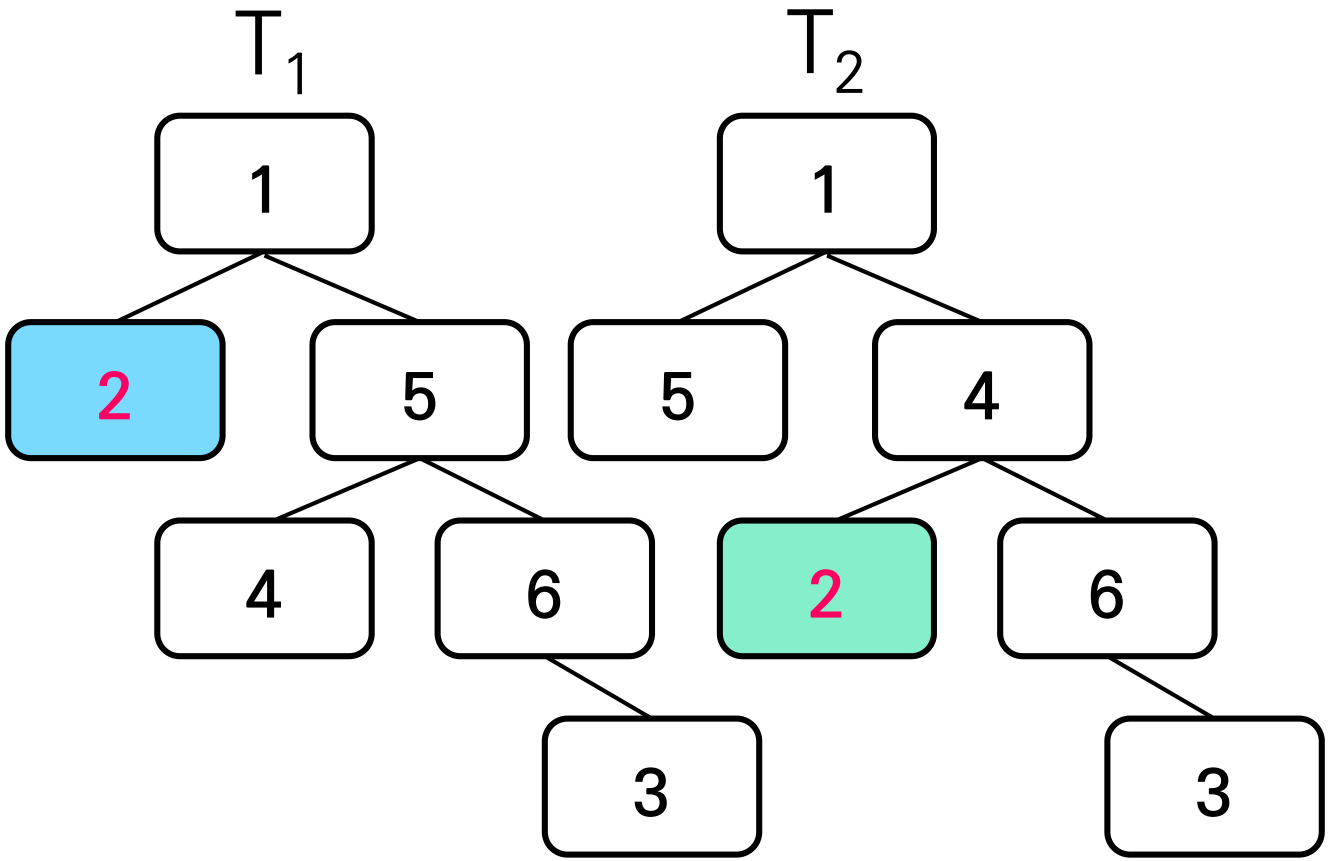
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	100
2	10	
3	5	
4	14	
5	8	
6	100	

- m_2를 구해 봅시다. 해당하는 노드를 색칠하면 위와 같습니다.

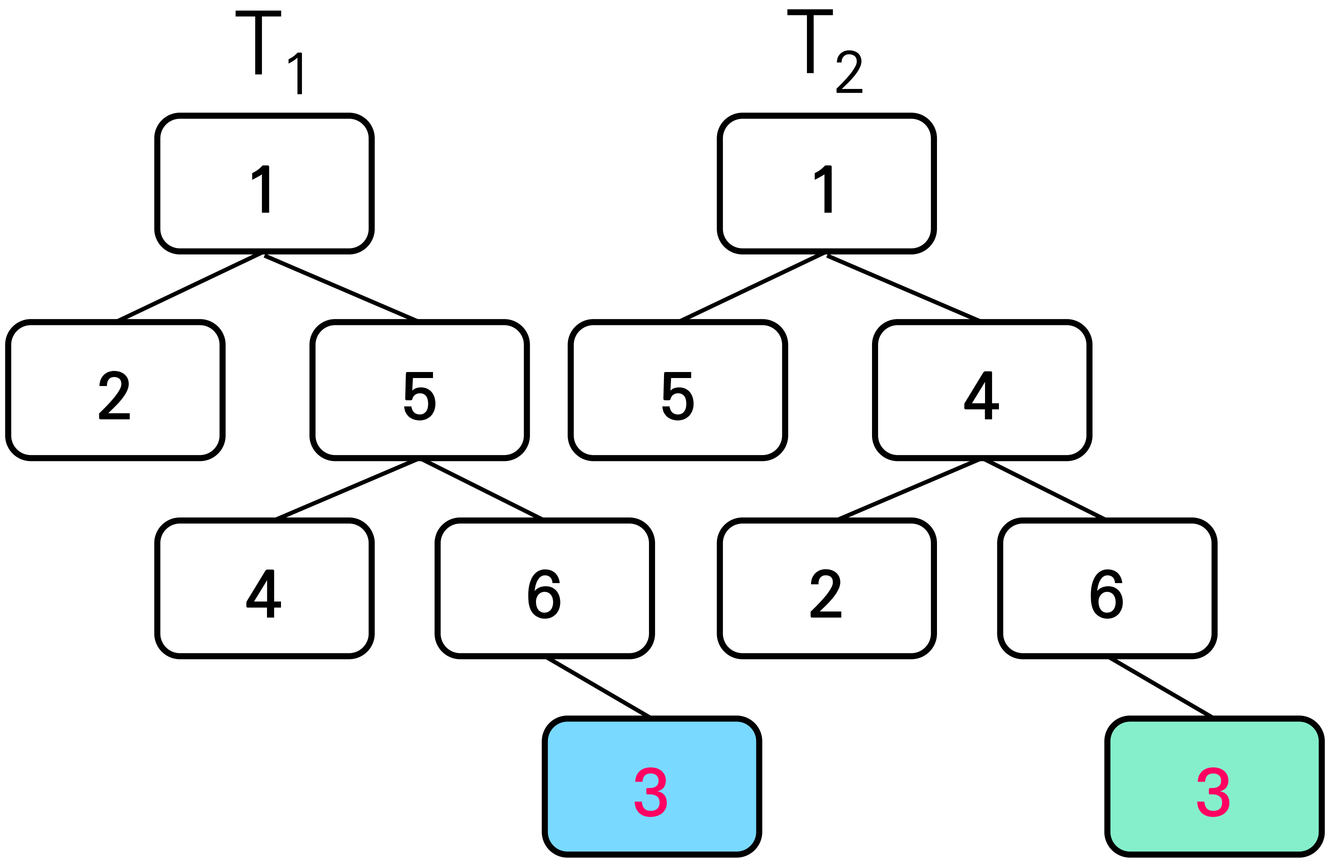
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	100
2	10	10
3	5	
4	14	
5	8	
6	100	

- 두 트리 모두 색칠된 노드는 2뿐이므로, 2에 할당된 값인 10이 답이 됩니다.

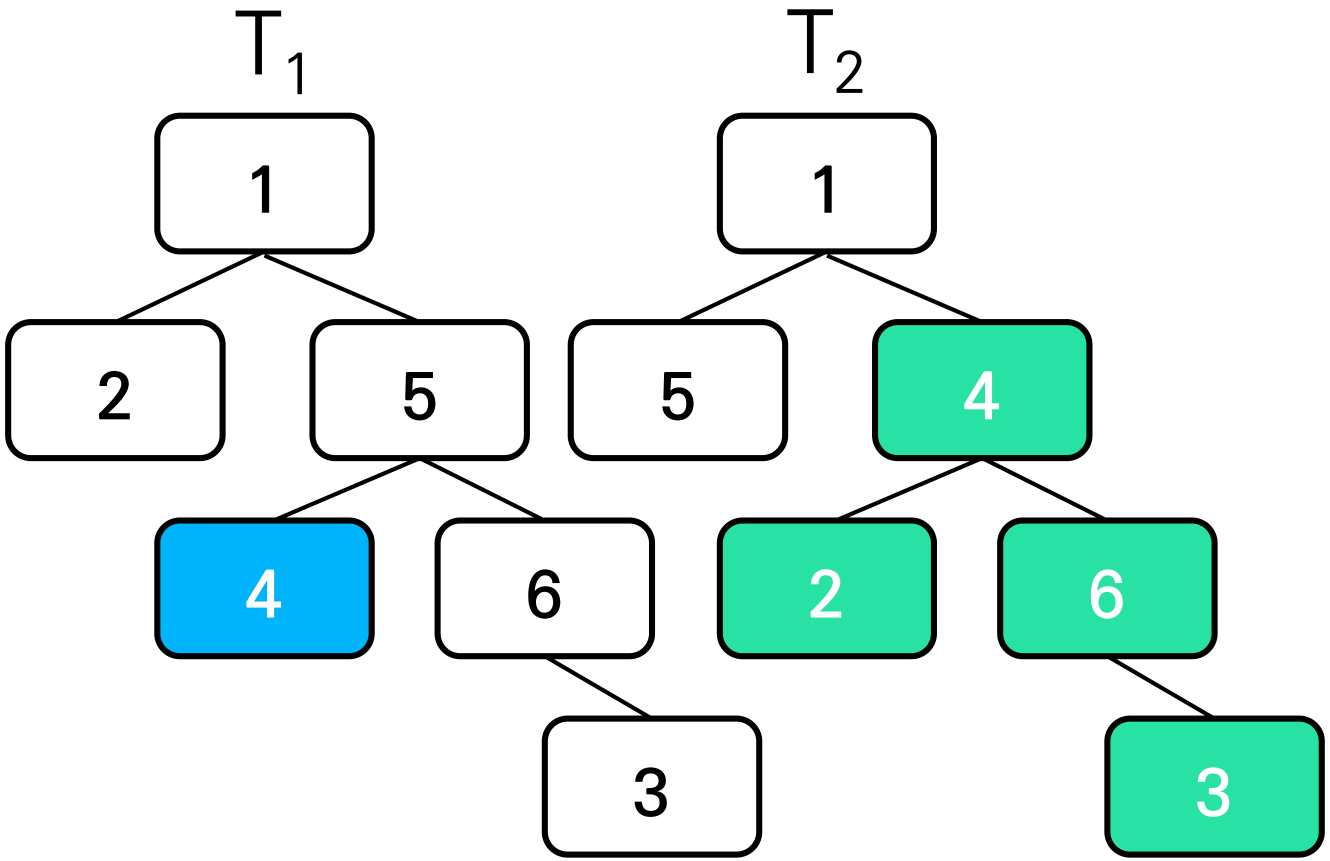
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	100
2	10	10
3	5	5
4	14	
5	8	
6	100	

- 3 역시 2와 동일하게 구할 수 있습니다.

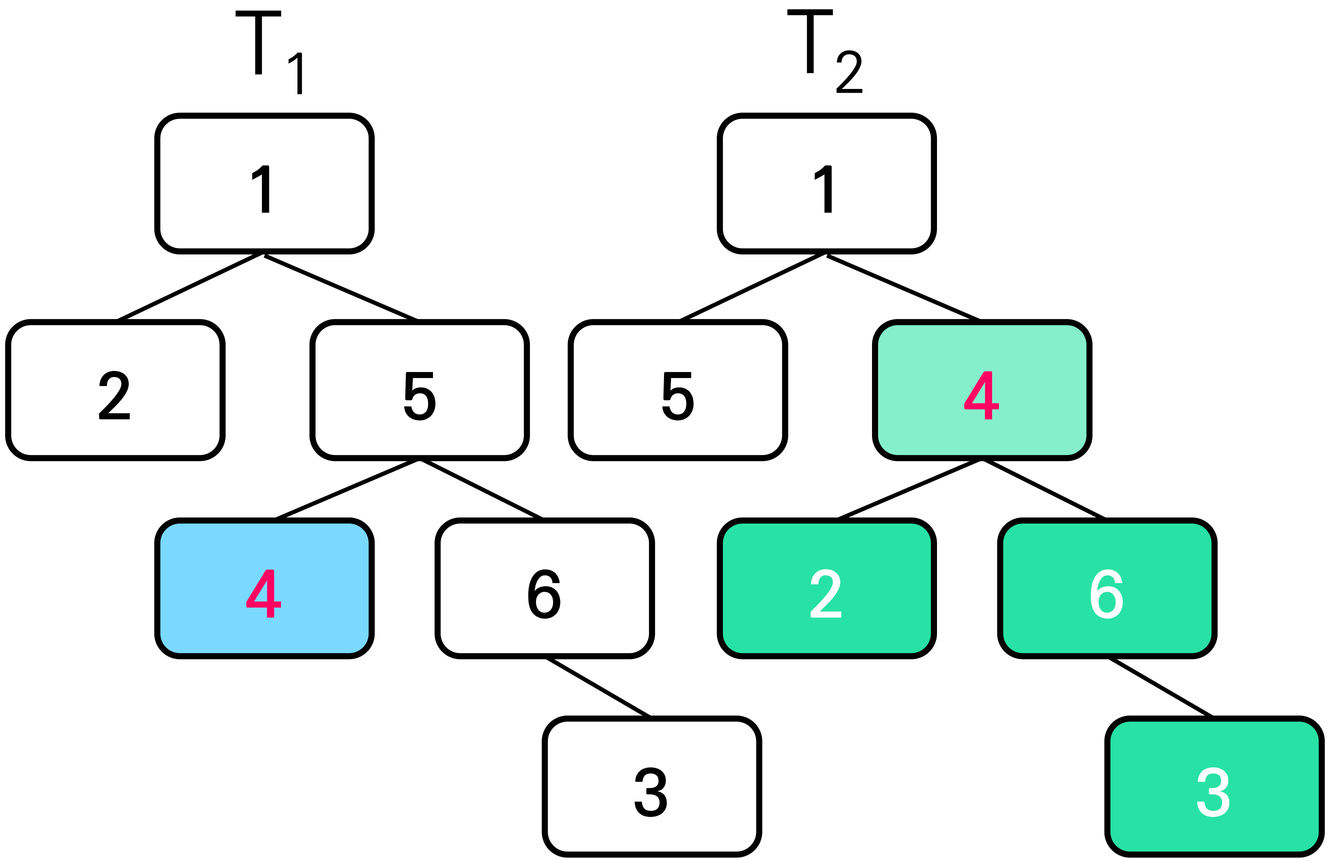
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	100
2	10	10
3	5	5
4	14	
5	8	
6	100	

- m_4의 경우 두 트리의 서브트리에 포함된 노드가 서로 다릅니다.

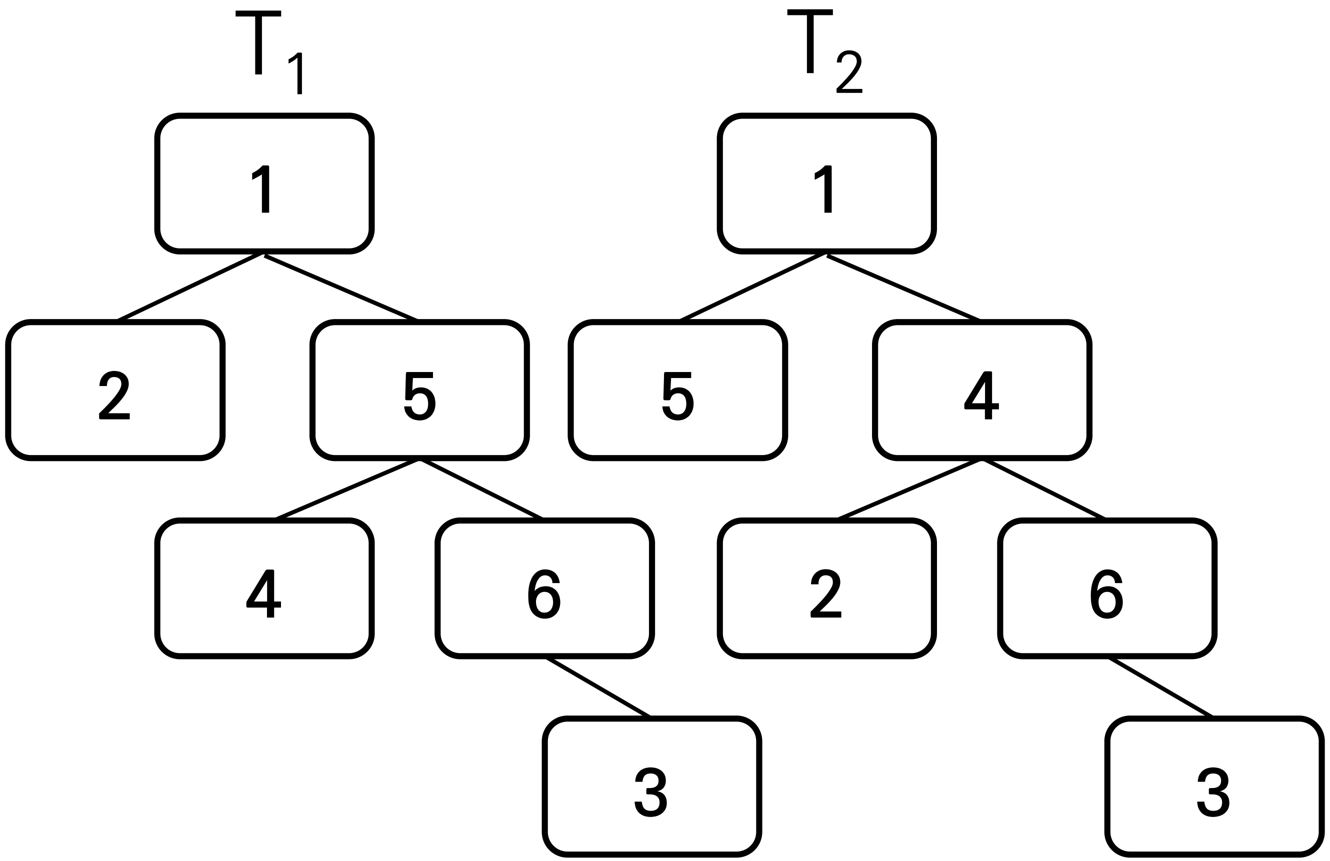
BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	100
2	10	10
3	5	5
4	14	14
5	8	
6	100	

- 두 서브트리의 노드 번호의 교집합은 4뿐이므로, 답은 14입니다.

BOJ 28402 두 트리



번호	값	m_i
1	7	100
2	10	10
3	5	5
4	14	14
5	8	8
6	100	100

- 같은 방법으로 모든 답을 구할 수 있습니다.

BOJ 28402 두 트리

- 그러나 트리에서 각각의 서브트리를 돌면서
  모든 경우의 수를 확인해 볼 수는 없습니다.
- 어떤 노드에 대한 서브트리를 빠르게 찾아야 하며,
  이를 더 쉽게 이용할 수 있는 형태로 만들어야 합니다.

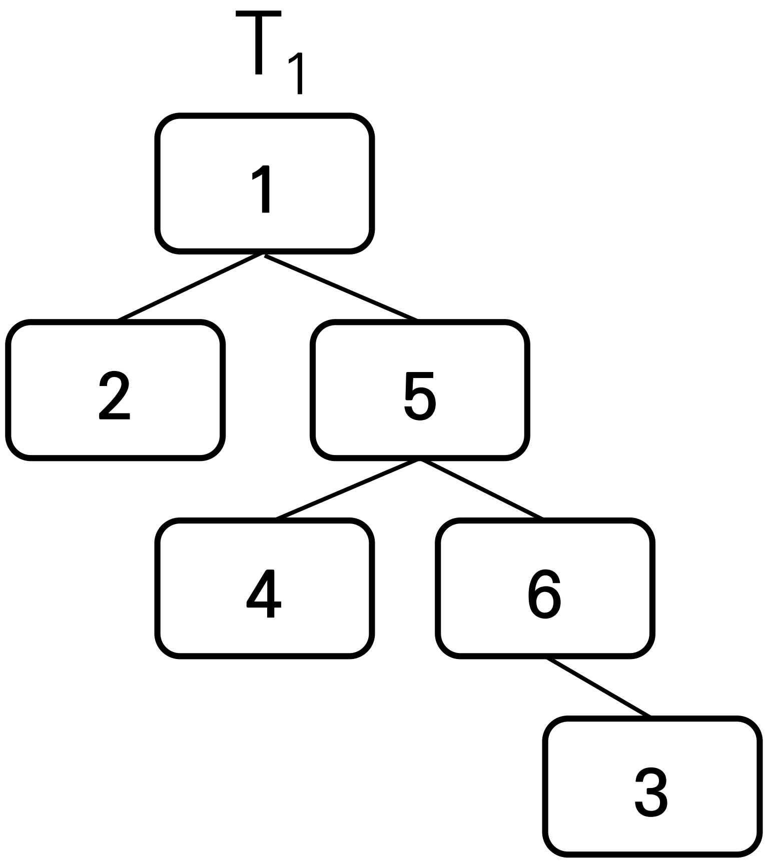
BOJ 28402 두 트리

- 이런 상황에서 오일러 투어 테크닉을 활용할 수 있습니다.
- 각 트리를 전위 순회하면서 방문하는 순서대로 노드 번호를 정렬합니다.
- 그러면 임의의 서브트리가 정렬된 노드 번호 배열에서 연속한 임의의 구간으로 대응됩니다.

BOJ 28402 두 트리

- 이런 상황에서 오일러 투어 테크닉을 활용할 수 있습니다.
- 각 트리를 전위 순회하면서 방문하는 순서대로 노드 번호를 정렬합니다.
- 그러면 임의의 서브트리가 정렬된 노드 번호 배열에서
  연속한 임의의 구간으로 대응됩니다.

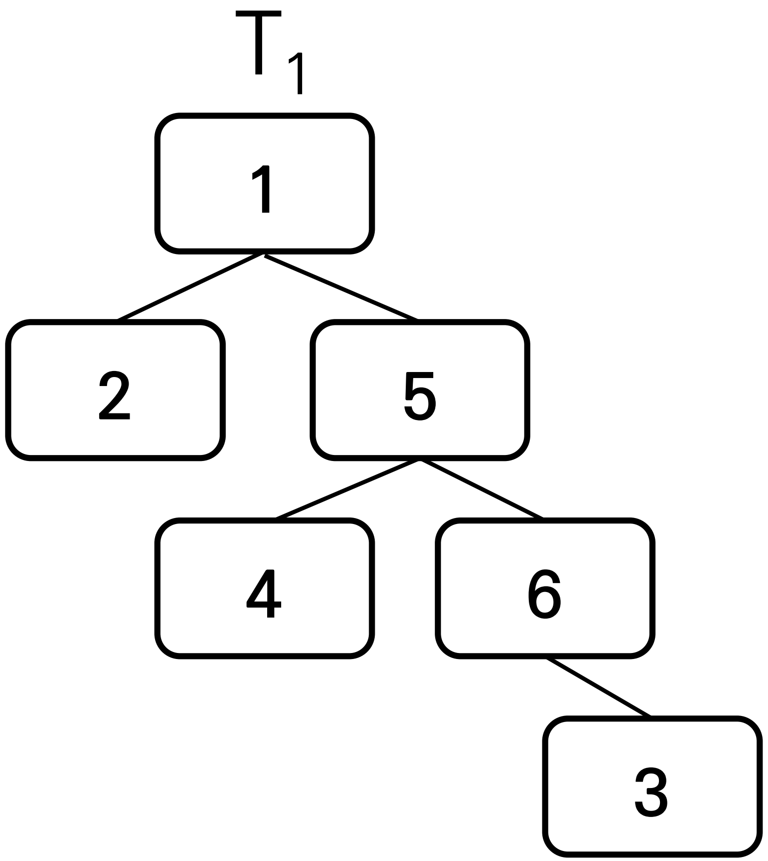
BOJ 28402 두 트리



순서	번호
1	1
2	2
3	5
4	4
5	6
6	3

- 예제의 트리를 오일러 투어 테크닉을 활용해 정렬하면 위와 같습니다.

BOJ 28402 두 트리



순서	번호	(번호)를 루트로 하는 서브트리	순서 구간
1	1	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	[1, 6]
2	2	{2}	[2, 2]
3	5	{3, 4, 5, 6}	[3, 6]
4	4	{4}	[4, 4]
5	6	{3, 6}	[5, 6]
6	3	{3}	[6, 6]

- 그러면 각 번호의 노드를 루트로 하는 서브트리가 위와 같이 나타납니다.

BOJ 28402 두 트리

인덱스	1	2	3	4	5	6
T_1	1	2	5	4	6	3
T_2	1	5	4	2	6	3

- 이 방법을 활용하면 두 트리가 다음과 같은 두 배열로 치환됩니다.

BOJ 28402 두 트리

- 이제 한 트리에 대한 노드 배열을 x축으로,
  다른 트리에 대한 노드 배열을 y축으로 두고 생각하면
  각 노드가 좌표평면 위의 한 점에 대응됩니다.

BOJ 28402 두 트리

- 예제의 상황에서 각 노드 및 그 노드에 대한 값을 점으로 찍으면 (1, 1)에 값이 7인 점, (2, 4)에 값이 10인 점, (6, 6)에 값이 5인 점, (4, 3)에 값이 14인 점, (3, 2)에 값이 8인 점, (5, 5)에 값이 100인 점으로 나타납니다.

인덱스	1	2	3	4	5	6
T_1	1 (7)	2 (10)	5 (8)	4 (14)	6 (100)	3 (5)
T_2	1 (7)	5 (8)	4 (14)	2 (10)	6 (100)	3 (5)

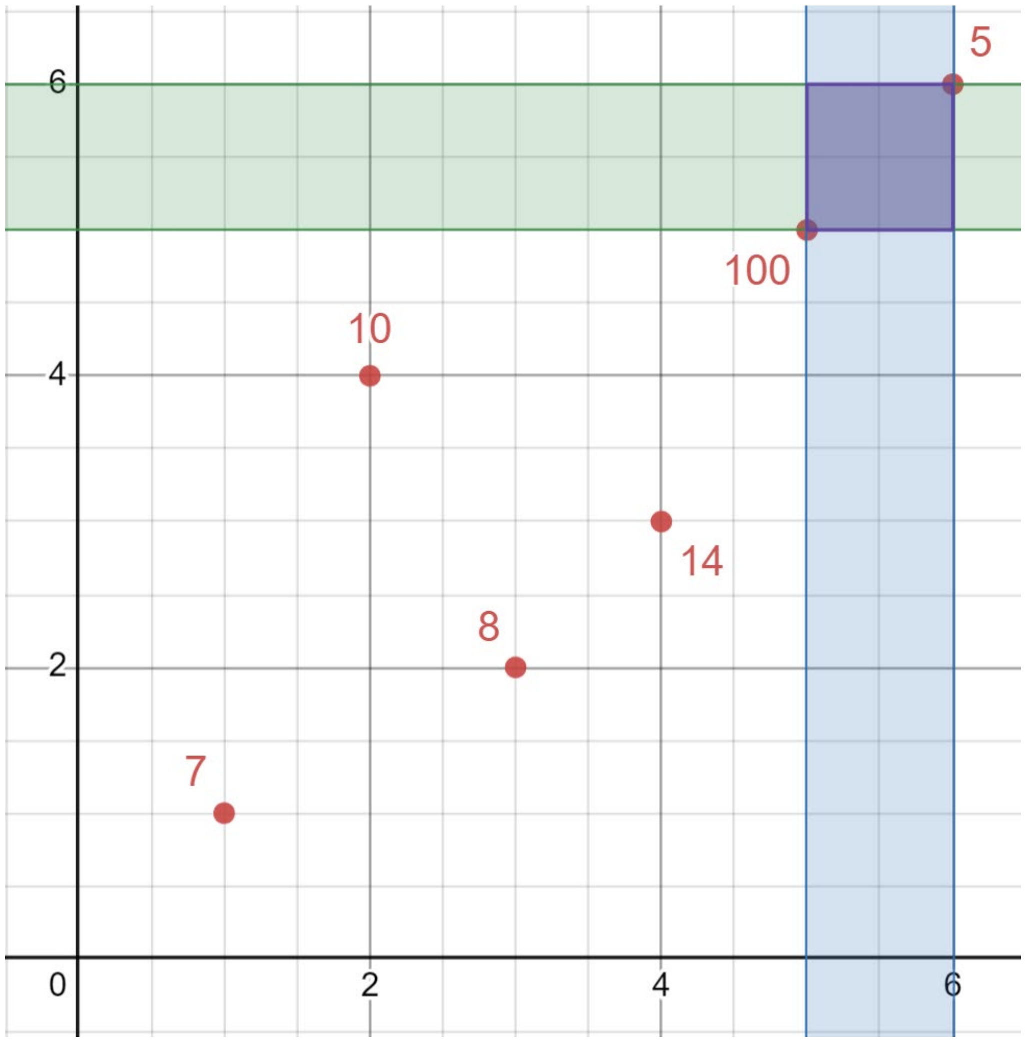
BOJ 28402 두 트리

- 각 트리의 서브트리가 연속한 구간에 대응되므로, 두 서브트리의 교집합에 해당하는 노드는 좌표평면 상에서 각 서브트리의 구간이 만드는 직사각형에 포함됩니다.

인덱스	1	2	3	4	5	6
T_1	1 (7)	2 (10)	5 (8)	4 (14)	6 (100)	3 (5)
T_2	1 (7)	5 (8)	4 (14)	2 (10)	6 (100)	3 (5)

BOJ 28402 두 트리

- 이 방법을 이용하면 예제에서 m_6을 오른쪽 그림의 보라색 영역에 포함된 점들 중 최댓값을 구하는 것으로 알아낼 수 있습니다.



BOJ 28402 두 트리

- 이제 주어진 문제가 직사각형 내의 점들 중
  최댓값을 구하는 문제로 치환되었습니다.
- 이 문제는 다양한 방법으로 해결 가능합니다.
  머지 소트 트리, 2차원 세그먼트 트리, 1차원 세그먼트 트리 + 분할 정복 등..

- 2차원 세그먼트 트리를 이용하는 풀이로 설명하겠습니다.

BOJ 28402 두 트리

- 1차원 세그먼트 트리는 구간을 반으로 쪼개면서 내려가는 형태입니다.
- 이걸 그대로 2차원에 적용해, 직사각형 구간을 가로세로로 반씩 쪼개 4개의 작은 구간으로 만들어 주는 방법을 사용할 수 있습니다.

BOJ 28402 두 트리

- 모든 칸에 대한 구간을 만들면 메모리를 많이 잡아먹기 때문에, 업데이트가 이루어질 때마다 필요한 칸만 만들어 주어야 합니다.
- 한 번 업데이트 할 때마다 최대 lg N개의 칸을 업데이트해야 하기 때문에, 공간 복잡도는 O(N lg N)이 됩니다.
- 한 번의 쿼리를 처리할 때 x에 대해 lg N, y에 대해 lg N개의 칸을 처리해야 하기 때문에 시간 복잡도는 $O(N \lg^2 N)$이 됩니다.