

BOJ 3501

최대공약수 맞추기 게임

#number_theory #greedy

난이도 - **Platinum II**

BOJ 3501 최대공약수 맞추기 게임

- N 이하의 자연수 중 하나를 최소한의 질문으로 특정해야 합니다.
- 질문을 통해 N 이하의 어떤 수와의 최대공약수를 알 수 있습니다.
- 1부터 N 까지의 그룹을 소인수에 따라 분류할 수 있습니다.
- 질문을 통해 질문한 수에 포함된 각각의 소인수가 정인이가 정한 수에 포함되는 지 않는 지를 알 수 있습니다.

BOJ 3501 최대공약수 맞추기 게임

- 만약 내가 2를 질문한다면, 답변에 따라 후보군을 홀수인 $N/2$ 개의 수 또는 짝수인 $N/2$ 개의 수로 줄일 수 있습니다.
- 3을 질문한다면, 답변에 따라 후보군을 3의 배수인 $N/3$ 개의 수 또는 3의 배수가 아닌 $N/3$ 개의 수로 줄일 수 있습니다.
- 즉 어떤 소수 P 를 질문한다면, 후보군을 P 를 소인수로 갖는 N/P 개의 수 또는 P 를 소인수로 갖지 않는 $(P-1)N/P$ 로 줄일 수 있습니다.

BOJ 3501 최대공약수 맞추기 게임

- 어떤 소수 P 와 서로소인 N/P 이하의 자연수 K 에 대해,
 KP 가 K 보다 질문을 통해 찾기 쉽습니다. 만약 내가 P 를 질문한다면,
 KP 는 N/P 개의 수 중 하나로 후보군이 좁혀지지만
 K 는 $(P-1)N/P$ 로 후보군이 좁혀지기 때문에 KP 쪽의 후보군이 더 작습니다.
- 따라서 N 의 값에 관계없이 가장 찾기 어려운 수는 1입니다.

BOJ 3501 최대공약수 맞추기 게임

- 1을 찾기 위해서는 질문한 수들의 소인수로 N 이하의 모든 소수가 한 번 이상 나타나야 합니다.
- 이때 질문할 수 있는 수는 N 이하로 한정되어 있으므로 가능한 질문할 수의 크기를 줄이는 것이 유리합니다.
- 따라서 모든 질문한 수들의 곱이 N 이하의 소수를 정확히 한 번씩 곱한 것인 경우가 최선이 됩니다.

BOJ 3501 최대공약수 맞추기 게임

- 최소한의 수로 문제를 해결하기 위해 다음 전략을 사용할 수 있습니다.
 - 질문하지 않은 소수 중 가장 큰 것을 선택합니다.
 - 질문하지 않은 소수 중 가장 작은 것을 곱해도 N 을 넘지 않는다면, 해당 소수를 곱합니다.
 - 그 수를 질문합니다.
 - 모든 소수에 대한 질문을 할 때까지 이를 반복합니다.

BOJ 3501 최대공약수 맞추기 게임

- 해당 전략을 사용하면 최대한 효율적으로 질문을 할 수 있습니다.
- N 이하의 소수 리스트를 만들고 상술한 전략을 사용했을 때 1을 찾기 위해 질문해야 하는 수를 구하면 됩니다.