

BOJ 16889

# 중복 없는 님 게임

#dp #sprague\_grundy

난이도 – **Platinum I**

## BOJ 16889 중복 없는 님 게임

- 한 돌 더미에서 똑같은 개수의 돌을 두 번 이상 꺼낼 수 없습니다.
- 각각의 돌 더미는 독립적입니다. 스프라그-그런디 정리에 의해,  
모든 돌더미의 그런디 넘버를 XOR한 값이 0이 아니라면 구사과가 이깁니다.
- 한 돌더미에 쌓인 돌은 최대 60개입니다.

## BOJ 16889 중복 없는 님 게임

- 그냥 1부터 60까지 그런디 넘버를 전부 구하면 됩니다.
- 구하는 방법은 간단합니다. 각 돌더미에 대해 가능한 경우를 무식하게 전부 시도해 보면서 그런디 넘버를 기록해 주면 됩니다.
- 돌이 최대 60개라 길어야 12번 돌면 끝납니다.

## BOJ 16889 중복 없는 님 게임

- 조금 더 최적화된 방법이 있긴 합니다.
- 근데 저 무식한 방법으로 작은 경우에 대해 찾아보면  
그런디 넘버에 대한 규칙을 찾을 수는 있습니다.

## BOJ 16889 중복 없는 님 게임

- 그룬디 넘버의 정의에 의해, 그룬디 넘버가  $K$ 인 돌 더미가 있으면 그 돌 더미에서 출발해서  $K-1, K-2, \dots, 2, 1, 0$ 의 그룬디 넘버를 거쳐 모든 돌을 가져가는 방법이 항상 존재합니다.
- 매번 다른 개수의 돌을 가져가야 하므로, 한 돌 더미에서 최대한 많은 턴을 쓰려면 1개, 2개, ...,  $K$ 개의 돌을 가져가는 게 최선입니다.
- 즉 돌이  $N$ 개인 더미의 그룬디 넘버  $K$ 는  $K(K-1)/2 \leq N$ 를 만족해야 합니다. 이러한  $K$ 를  $f(N)$ 으로 부르도록 하겠습니다.

## BOJ 16889 중복 없는 님 게임

- 이제 수학적 귀납법을 사용해 돌이  $N$ 개인 더미의 그런디 넘버  $K$ 가  $f(N)$  이상임을 보일 것입니다.
- $N=1$ 인 경우,  $f(1)$ 은 1이고 그런디 넘버 역시 1입니다.
- $f(N) = K$ 라고 합시다. 그러면  $f(N') < K$ 을 만족하는 어떤  $N'$ 이 존재해,  $N'$ 에 어떤 개수의 돌을 추가해  $N$ 으로 가는 방법이 항상 존재합니다.
- 이러한  $N'$ 이 모든 음이 아닌 정수  $f(N')$ 에 대해 존재함을 보일 수 있습니다.

## BOJ 16889 중복 없는 님 게임

- 앞의 두 페이지에서 서술한 바에 의해,  
돌의 개수가  $N$ 인 더미의 그런디 넘버는  
 $f(N) := 1 + \dots + K \leq N$ 을 만족하는 양의 정수  $K$ 의 최댓값  
으로 정의할 수 있습니다.