BOJ 30921
N-Queen (Area)

#geometry

난이도 – Platinum IV

sorohue@sasa.hs.kr

BOJ 30921 N-Queen (Area)

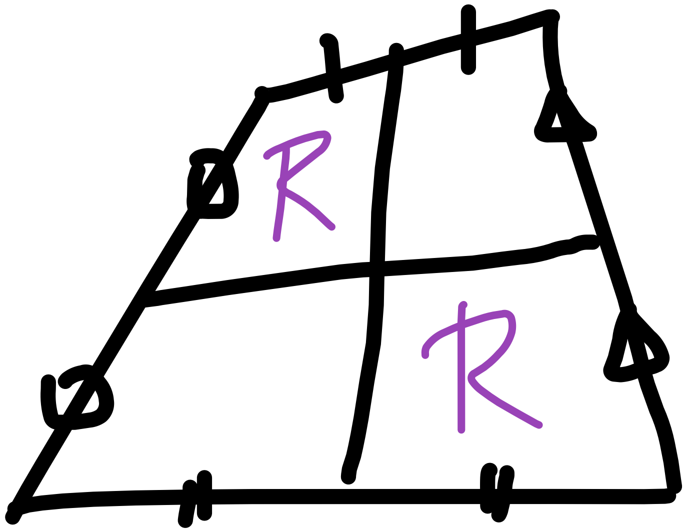
- 항상 가능한 방법이 존재함이 보장되니 일단 문제를 N-Rook으로 바꿔 생각해 봅시다.
- 각 행마다 하나의 룩을 놓아야 하고, 룩마다는 서로 열이 달라야 하므로 결국 우리는 어떤 배치를 하나의 순열로 나타낼 수 있습니다.

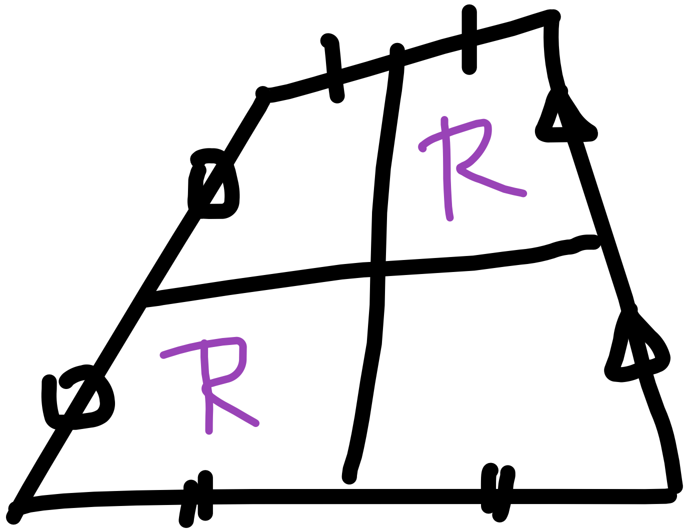
BOJ 30921 N-Queen (Area)

- N-Rook 문제는 (1 2 3 ... N) 이라는 자명한 해가 존재합니다.
- 모든 배치는 이 배치에서 어떤 두 행을 서로 바꾸는 것을 반복해 얻을 수 있습니다.

BOJ 30921 N-Queen (Area)

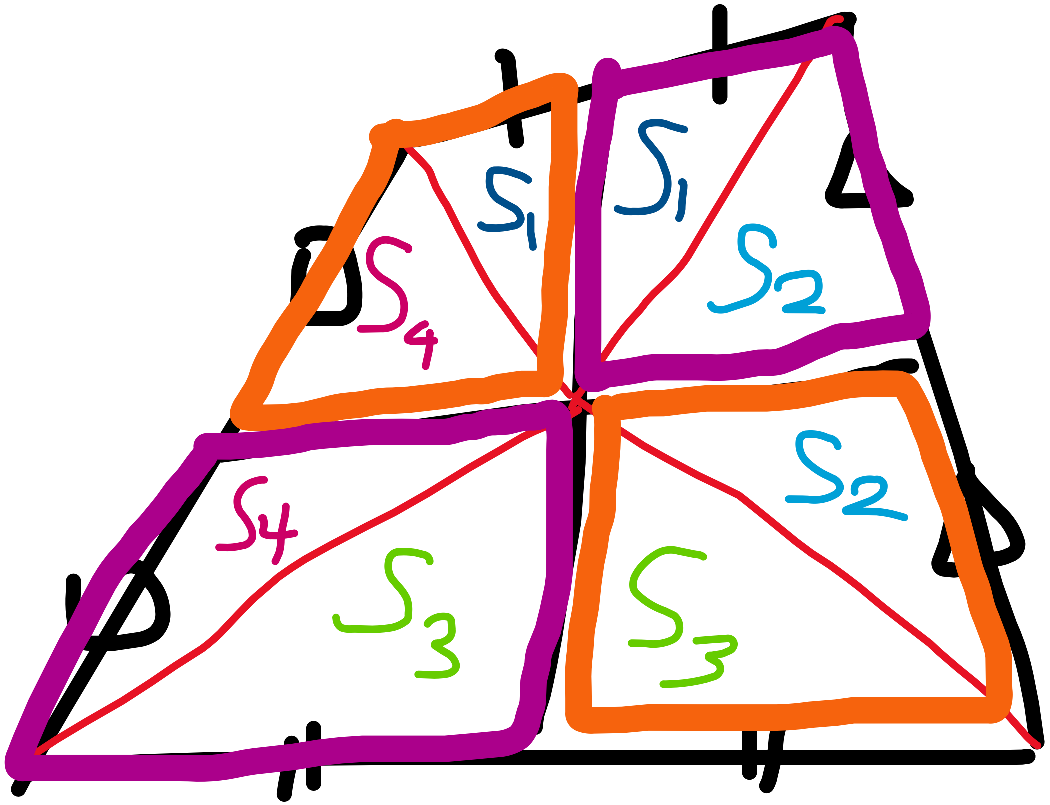
- 2×2 크기에서의 N-Rook (Area) 문제를 생각해 봅시다.
- 가능한 룩의 배치는 (1 2) 와 (2 1)의 두 가지가 있습니다.





BOJ 30921 N-Queen (Area)

- 그런데 이 두 가지 방법은 총 넓이가 동일합니다.



BOJ 30921 N-Queen (Area)

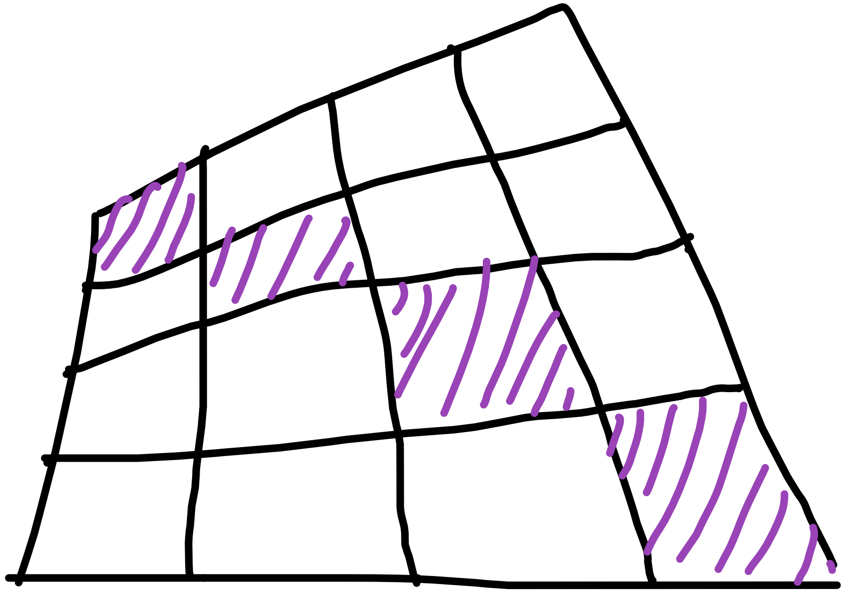
- 따라서 2-Rook (Area) 문제의 답은 전체 체스판 넓이의 ½ 입니다.
- 성급한 일반화를 해보면, N-Rook (Area) 문제의 답은
  전체 체스판의 넓이의 1/N 이 되지 않을까요?

- 이를 증명하기 위해서는 다음 두 가지를 보여야 합니다.
  - 답이 1/N인 해가 존재함
  - 어떤 두 행을 서로 바꾸어도 결과가 같음

BOJ 30921 N-Queen (Area)

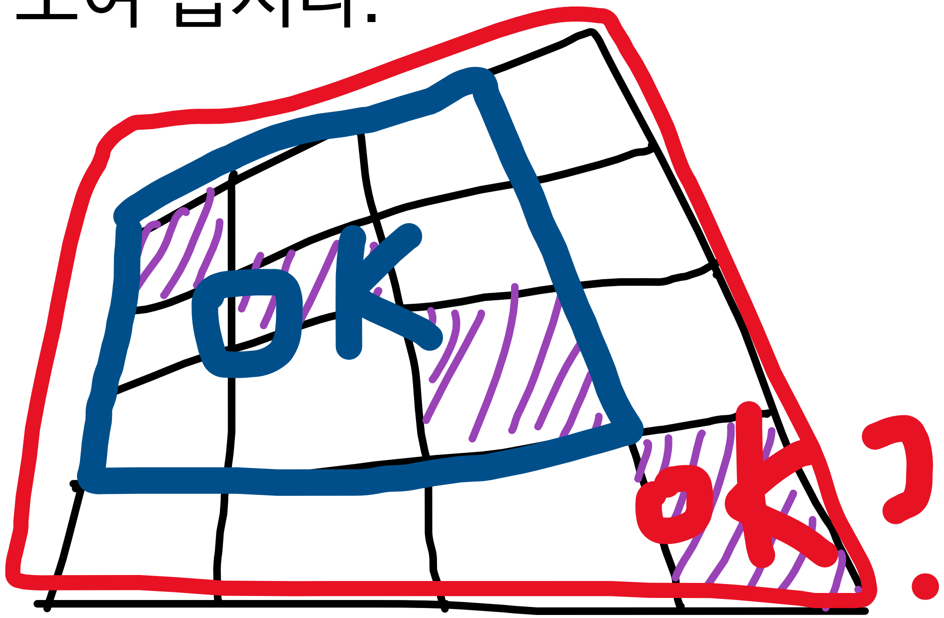
○ 답이 1/N인 해의 존재성

- 자명한 해 (1 2 ... N)을 다시 가져옵시다.



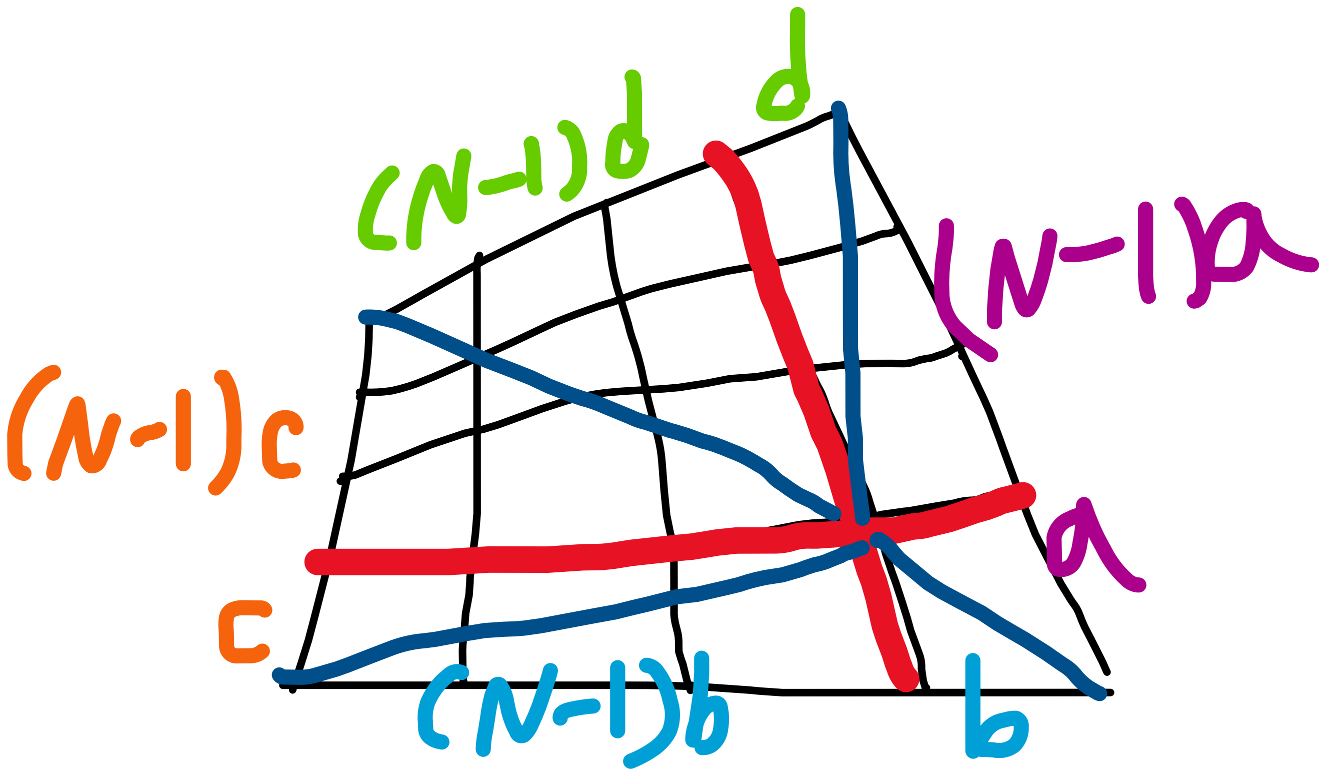
BOJ 30921 N-Queen (Area)

- 2×2 크기의 판에서 해당 해의 넓이가 전체의 ½임을 보였으니, 수학적 귀납법을 이용해 N×N 크기의 판에서 넓이가 전체의 1/N임을 보여 봅시다.



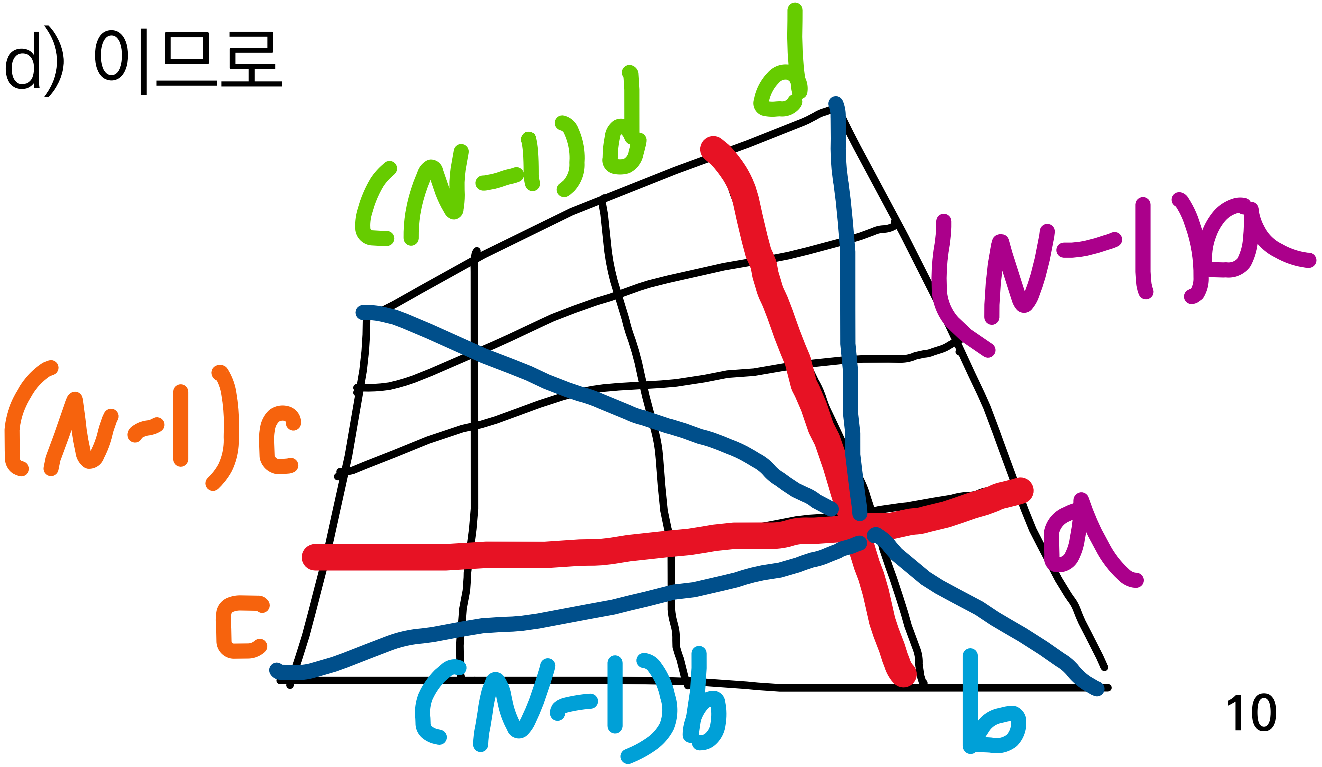
BOJ 30921 N-Queen (Area)

- 판을 아래와 같이 쪼개면 각 조각의 넓이를 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.



BOJ 30921 N-Queen (Area)

- 왼쪽 위 조각의 (1 2 .. N−1)에 대한 넓이는 전체 조각의 1/(N−1)이므로 c+d가 됩니다. 따라서 (1 2 ... N)의 넓이는 a+b+c+d가 되고,
  전체 판의 크기는 N(a+b+c+d) 이므로
  수학적 귀납법에 의해
  해 (1 2 ... N)의 넓이는
  전체 체스판 넓이의
  1/N 입니다.



BOJ 30921 N-Queen (Area)

○ 넓이의 합의 보존성

- 자명한 해 (1 2 ... i−1 i i+1 ... j−1 j j+1 ... N) 와
  다른 해 (1 2 ... i−1 j i+1 ... j−1 i j+1 ... N)의 넓이의 합이 동일하다면
  모든 해의 넓이의 합은 서로 같습니다.
- 이러한 치환은 인접한 행끼리의 치환을 여러 번 해 얻을 수 있기 때문에,
  결국 인접한 행끼리 치환해도 넓이가 같은지를 보이면 됩니다.

BOJ 30921 N-Queen (Area)

- 즉 어떤 해 (… i j …) 를 (… j i …) 로 바꾸어도 넓이가 같다면 보존성이 성립한다고 말할 수 있습니다.
- 이를 증명하기 위해 2×2 크기의 판에서 2×N 크기의 판으로 확장시켜 (1 N) 과 (N 1)의 넓이가 서로 같음을 수학적 귀납법을 이용해 보입시다.

BOJ 30921 N-Queen (Area)

- (1 N−1)과 (N−1 1)의 넓이는 서로 같습니다.
- 또한 (N−1 N)과 (N N−1)의 넓이도 서로 같습니다.
- i행 j열에 해당하는 칸의 넓이를 {i, j}로 나타내면, 두 조건을 각각
  - {1, 1} + {2, N−1} = {1, N−1} + {2, 1}
  - {1, N−1} + {2, N} = {1, N} + {2, N−1} 으로 나타낼 수 있습니다.
- 두 식의 차를 구하면 {1, 1} − {1, N} = {2, 1} − {2, N}이 됩니다.
- 정리하면 {1, 1} + {2, N} = {1, N} + {2, 1} 입니다.

BOJ 30921 N-Queen (Area)

- 따라서 말의 배치에 관계없이 N-Rook (Area) 문제의 답은 항상 전체 체스판의 넓이의 1/N 입니다.
- N-Queen의 답에 해당하는 배치는 모두 N-Rook 문제의 답이 됩니다. 따라서 N-Queen 문제의 답 역시 전체 체스판 넓이의 1/N입니다.