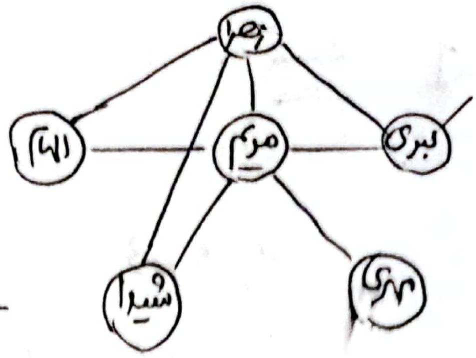
سروش حیدری ۹۶۲۲۲۰۳۱

۱-

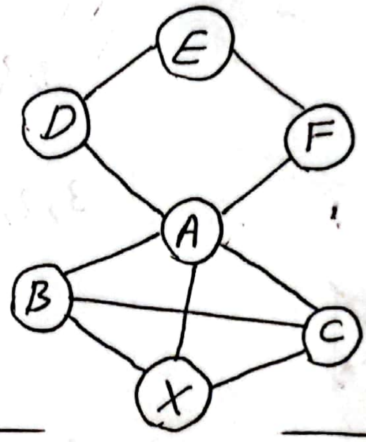
مرتبه گراف $|V(G)| = 6$

اندازه‌ی گراف $|E(G)| = 8$



- این ترتیب برای نشستن دور یک میز امکان پذیر نیست چرا که مهری با هیچکس جز مریم در ارتباط نیست و برای این ترتیب شرط لازم (و نه لزوما کافی) برای هر شخص داشتن حداقل ۲ دوست است

۲- ظروف را میتوان به شکل زیر تشکیل داد



E, X ، B, D ، C, F ، A

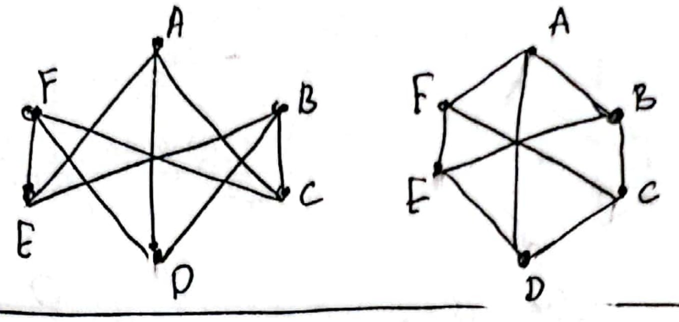
۳- گرافی با x رأس را فرض می‌کنیم و از برهان خلف استفاده می‌کنیم: برای اینکه هیچ دو رأسی درجه یکسان نداشته باشند دنباله درجات باید به شکل

$x-1, x-2, \dots, 1, 0$

باشد اما چنین دنباله‌ای ممکن نیست چرا که در یک گراف x راسی هر دو درجه ۰ و $x-1$ نمی‌توانند با هم وجود داشته باشند و در این صورت دو رأس مجبور هستند درجه‌ای یکسان اختیار کنند که یعنی فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌شود.

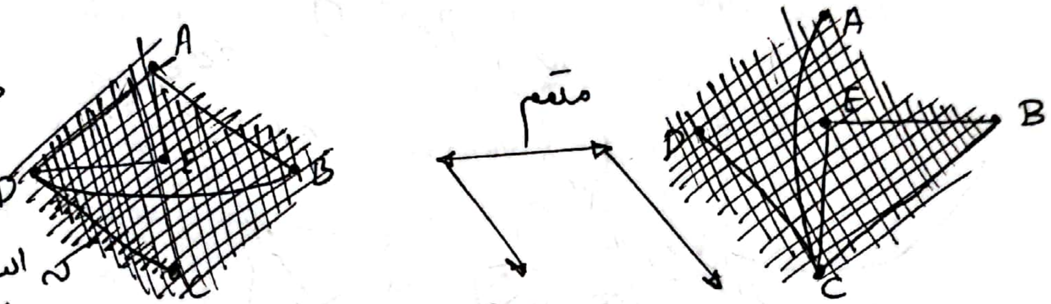
۴- چنین ادعاهایی همان فرض سوال قبلی را بیان می کند که یعنی غیر ممکن است
یعنی دروغگویی بسیار رمکار درون جمع میزبسته است.

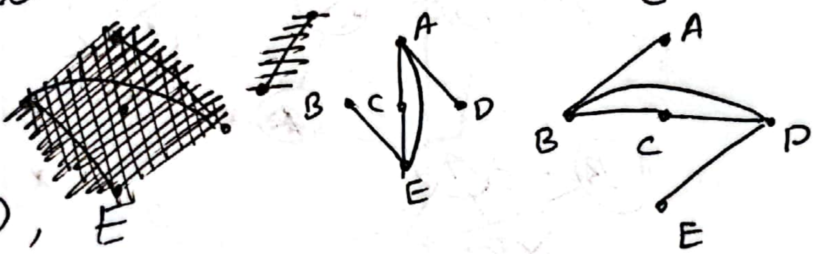
۵-



۶-

می توان تابعی داشت که اسم راس ها را به شکل زیر نگاشت کرد



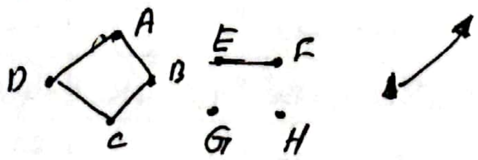


A, B, C, D, E
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
D ~~B~~A C ~~B~~E B

۷- الف) یک دنباله گرافی است. با اعمال قضیه خواهیم داشت

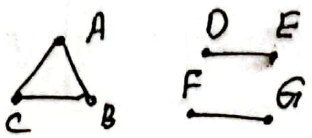
~~5~~,5,4,4,3,3,3,1,0,0

4,3,3,3,2,2,1,0,0 ⟶ 2,2,2,2,1,1,0,0



ب) یک دنباله گرافی است

~~5~~, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1 ⟶ 2,2,2,1,1,1,1



۸- با توجه به غیر نزولی بودن $1, 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, x, 8$

دنباله x تنها باید مقادیر 7 یا 8 را اختیار کند و با توجه به فرد بودن تعداد درجات فرد

x باید 7 باشد تا تعداد درجات فرد، زوج شوند.

۹- طبق فرض داریم $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$ ، برای اینکه ثابت کنیم با این شرط

گراف ما همبند است باید ثابت کنیم بین هر دو رأس دلخواه (V_i, V_j) باید

یک مسیر وجود داشته باشد.

اثبات: با توجه به فرض داریم $D_{V_i} + D_{V_j} \geq 2\delta(G) \geq \left(\frac{n-1}{2}\right) \times 2$

یعنی $n-1 \leq D_{V_i} + D_{V_j}$

حال دو حالت وجود دارد V_i و V_j همسایه هستند، یعنی با یک یال به هم وصل هستند

V_i و V_j اصطلاحا non Adjacent هستند در این صورت ثابت

می‌کنیم با فرض $D_{V_i} + D_{V_j} \geq n-1$ در حالت دوم همیشه رأسی مانند W وجود دارد

که در یال W با $V_j W$ وجود داشته باشد.

داریم $V_i V_j \notin E$ ← وقتی V_j و V_i به هم وصل نباشند (و واضحاً به خود نیز وصل نیستند)

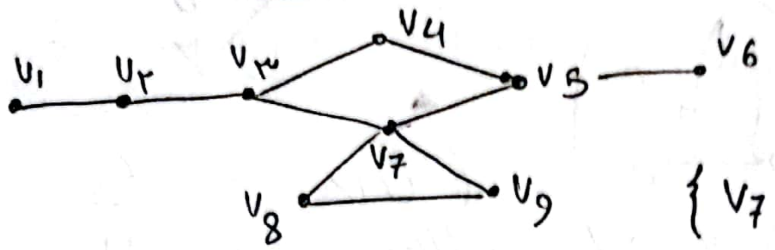
پس $n-2$ رأس باقی می‌ماند که V_j و V_i به آن‌ها وصل شوند و داریم $D_{V_i} + D_{V_j} \geq n-1 > n-2$

که بطور مستقیم می‌توان نتیجه گرفت که V_i و V_j از طریق رأسی (مانند W) باید به هم وصل

شوند که یعنی مسیری وجود دارد (V_i, W, V_j).

۱۰- سؤال برایم ناواضح است

۱۱-

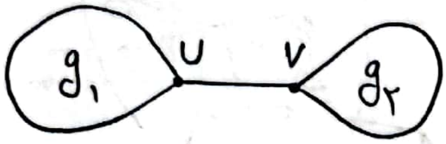


رئوس برشی : { v_7 , v_2 , v_5 , v_3 }

یال های برشی : { (v_5v_6) , (v_2v_3) , (v_1v_2) }

۱۲- فرض می کنیم گراف r منتظم G با $r=2k$ یک یال برشی (UV) دارد.

می توان تصور کرد گراف G به شکل زیر رسم می شود



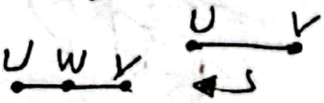
با توجه به شکل بالا با حذف یال UV خواهیم داشت

$$\sum deg(g_1) = 2k+1 , \quad \sum deg(g_2) = 2k+1$$

چرا که همه رئوس در g_1 درجه ی برابر با $r=2k$ دارند جز U که فرد است و مجموع را فرد می کند، این گزاره به کل غلط است چرا که طبق قضایای گراف مجموع درجات یک دنباله درجات در گراف G باید زوج باشد اما در g_1 و g_2 نیست یعنی فرض خلف باطل است و حکم اثبات می شود.

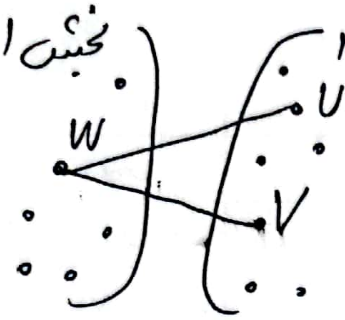
اما زمانی که r عددی فرد باشد اثبات بالا درست نخواهد بود چرا که دیگر نمی توان ادعا کرد مجموع درجات g_1 یا g_2 عددی فرد است.

۱۳- اثبات واضح است، برای ساخت یک زیرتقسیم از گراف G هر یال برای مثال UV را تبدیل به دو یال WV و UW می شود که یعنی



U و V دیگر باهم همسایه نیستند (مسیری با طول ۱ به هم ندارند) با این روند می توان تمامی رئوس بوجود آمده (برای UV در ارتباط با یال UV) که از هر یال دلخواهی ساخته می شود را

در یک بخش تمامی رئوسی که متعلق به G هستند را در بخش دوم قرار داد. با این روش می‌توان ادعا کرد که تمام رئوس ای که در بخش ۲ وجود دارند (متعلق به G بوده اند) به هم دیگر هیچ مسیری با طول یک ندارند و هر مسیری بین این رئوس (برای مثال v و v) توسط یک راس (در اینجا w) از بخش یک به هم وصل می‌شوند.



این استدلال بر هر انتخاب دوتایی از رئوس G صادق است.

۱۴_

$$|V_{G_1\times G_2}| = p_1 \times p_2$$

$$V_{G_1} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

$$V_{G_2} = \{v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_m\}$$

$$V_{G_1\times G_2} = \{(v_1,v'_1),(v_1,v'_2),\dots(v_1,v'_m),\ (v_2,v'_1),(v_2,v'_2),\dots,(v_2,v'_m),\ \vdots\ (v_n,v'_1),(v_n,v'_2),\dots,(v_n,v'_m)\}$$

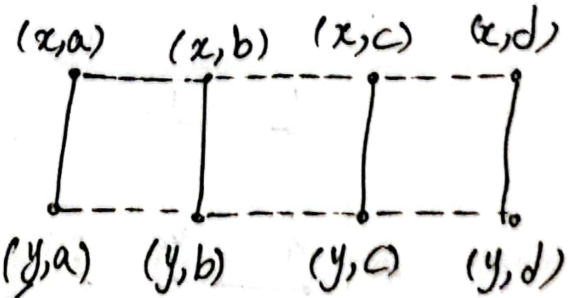
← به تعداد $p_1 \cdot p_2$ عضو دارد.

$$|E_{G_1\times G_2}| = |q_1\cdot p_2| + |q_2 \cdot p_1|$$

مثال

$G_1 =$  $G_2 =$ 

حال $G_1 \times G_2 \Rightarrow$



← یال هایی که با خط (—) نشان داده شده اند به دلیل اینکه مولفه های اول آن در گراف G_1 متصل بوده اند بوجود آمده اند. و یال هایی که با خط چین (----) هستند به دلیل اینکه مولفه های دوم آن در G_2 در ارتباط بوده اند کشیده شده اند. (مثال از youtube برداشته شده است!)