Grafos

August 18, 2020

1 Preliminares

Definición 1 *Un grafo dirigido G es un par ordenado (V,E), donde V es un conjunto y E es una relación binaria sobre V.*
Nota: A los elementos de V se les llama vértices y a los pares ordenados de E, aristas. Puede representarse como un conjunto de puntos marcados V con un conjunto de flechas E entre los puntos.

Definición 2 *Dada la arista (a,b), el vértice a es el vértice inicial y el vértice b, el vértice terminal.*
Nota: La arista (a,b) es incidente desde a y es incidente hasta b.

Definición 3 *Una arista que es incidente a partir y hacia el mismo vértice es un lazo.*
Nota: (c,c).

Definición 4 *Dos vértices son adyacentes si están unidos por una arista.*
Nota: En una arista (a,b), el vértice a es adyacente al vértice b y el vértice b es adyacente desde el vértice a.

Definición 5 *Un vértice es aislado si no hay una arista incidente con él.*

Definición 6 *Un grafo no dirigido G es un par ordenado (V,E), donde V es un conjunto y E es un multiconjunto de 2 elementos de V.*
Nota: Puede representarse con un conjunto de puntos marcados V con un conjunto de líneas E entre los puntos.

Ejemplo:
H=({a,b,c,d},{{a,b},{a,d},{b,c},{b,d},{c,c}}) es un grafo no dirigido.

G=({a,b,c,d},{(a,b),(a,d),(b,c),(b,d),(c,c)}) es un grafo dirigido.

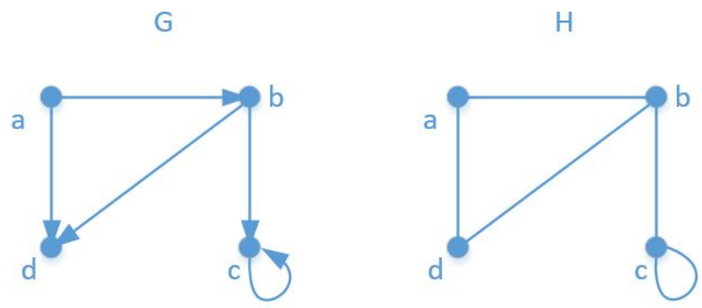

Figure 1: Ejemplo de los grafos G y H

Ejemplo: Sea V = { a,b,c,d } un conjunto de 4 jugadores de eliminación directa. Sea E = { (a,b),(a,d),(b,d),(c,a),(c,b),(d,c) } una relación binaria sobre V, de manera que (x,y)∈E significa que x venció a y en el encuentro.

Ejemplo: Sea V' = { 1,2,3,4 } el conjunto de 4 capítulos en un libro. Si E' = { (1,2),(2,3),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2) } es una relación binaria sobre V' tal que (x,y)∈E' significa que el material en el capítulo x hace referencia al material del capítulo y.

Definición 7 *Dos grafos son isomorfos si hay una correspondencia uno a uno entre sus vértices y entre sus aristas, de modo que las incidencias se conservan.*
Nota: Existe una arista entre 2 vértices de un grafo si y sólo si hay una arista correspondiente entre los vértices correspondientes en el otro grafo.

Ejemplo: Un par de grafos no dirigidos isomorfos.

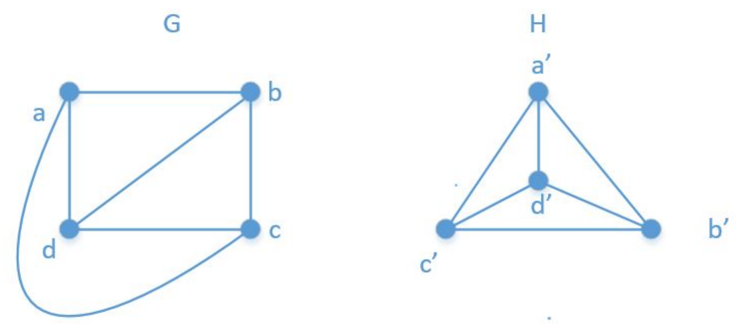

Figure 2: Ejemplo de los grafos no dirigidos isomorfos G y H

f:{ a,b,c,d } $\longrightarrow$ { a',b',c',d' }	g:E $\longrightarrow$ E'
f(a)=a'	g({a,b})={a',b'}
f(b)=b'	g({a,c})={a',c'}
f(c)=c'	g({a,d})={a',d'}
f(d)=d'	g({b,c})={b',c'}
	g({b,d})={b',d'}
	g({c,d})={c',d'}

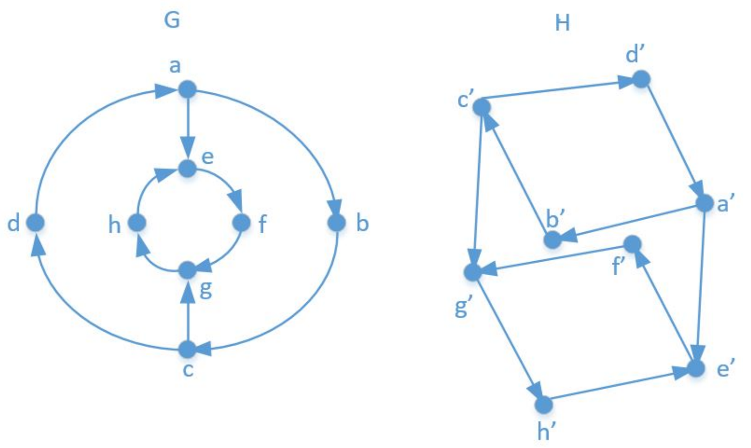

Figure 3: Ejemplo de los grafos dirigidos isomorfos G y H

f:V $\longrightarrow$ V'	g:E $\longrightarrow$ E'
f(a)=a'	g((a,b))=(a',b')
f(b)=b'	g((a,e))=(a',e')
f(c)=c'	g((b,c))=(b',c')
f(d)=d'	g((c,d))=(c',d')
f(e)=e'	g((c,g))=(c',g')
f(f)=f'	g((d,a))=(d',a')
f(g)=g'	g((e,h))=(e',h')
f(h)=h'	g((h,g))=(h',g')
	g((g,f))=(g',f')
	g((f,e))=(f',e')

Definición 8 *Dado G=(V,E) un grafo. Un grafo G'=(V',E') es un subgrafo de G si E'$\subseteq$E y V'$\subseteq$V tal que las E' son incidentes sólo con los vértices de V'.*

Ejemplo: Un subgrafo del grafo.

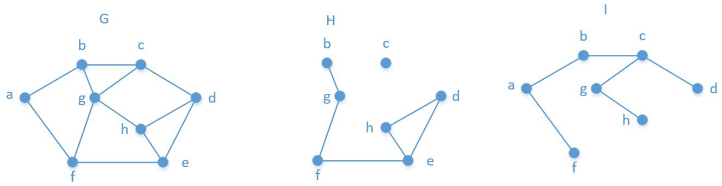

Figure 4: I y H son subgrafos del grafo G

Definición 9 *Un subgrafo de G es un subgrafo generador si éste contiene todos los vértices de G.*

Definición 10 *El complemento de un subgrafo G'=(V',E') con respecto al grafo G es otro subgrafo G"=(V",E") tal que E"=E$\setminus$E' y V" sólo contiene a los vértices con los cuales las aristas de E" son incidentes.*

<u>Ejemplo</u>: El complemento del subgrafo.

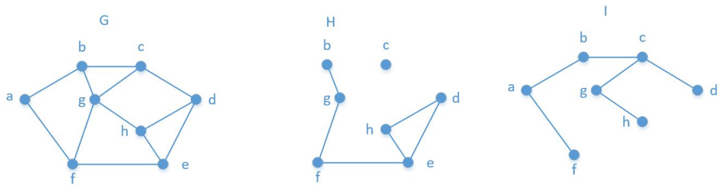

Figure 5: I es el complemento del subgrafo H con respecto al grafo G

Definición 11 *El grafo completo no dirigido de n vértices, denotado por K_n, es un grafo con n vértices, en el cual existe una arista entre cada par de n vértices distintos.*

Definición 12 *El complemento de un grafo G de n vértices es su complemento respecto a K_n y se denota por $\overline{G}$.*

<u>Ejemplo</u>: Supóngase que los n vértices de G representan n personas, y el conjunto de aristas de G, representa una relación de compatibilidad tal que una arista entre 2 vértices significa que las 2 personas correspondientes pueden trabajar cooperando mutuamente. El conjunto de aristas de $\overline{G}$ representará la relación de incompatibilidad entre las n personas.

Definición 13 *Un grafo dirigido completo de n vértices es un grafo con n vértices, en el cual existe una flecha entre cada par de vértices distintos.*

Definición 14 *Dado G=(V,E), donde V es un conjunto y E es multiconjunto de pares ordenados de V$\times$V. G es un muligrafo dirigido.*
Nota: Puede representarse como un conjunto de puntos marcados V con un conjunto de flechas E entre los puntos, donde no existe restricción en el número de flechas de un punto a otro punto (la multiplicidad de un par ordenado de vértices en el multiconjunto E es el número de flechas entre los puntos marcados correspondientes).

Nota: La noción de un multigrafo no dirigido puede definirse de manera similar. Para enfatizar que se refiere a un grafo, en lugar de un multigrafo, se usará el término grafo lineal.

Definición 15 *Un grafo pesado es una cuádrupla ordenada (V,E,f,g), o una tripleta ordenada (V,E,f) o una tripleta ordenada (V,E,g), donde V es el conjunto de vértices, E es el conjunto de aristas, f es una función cuyo dominio es V y g es una función cuyo dominio es E. La función f es una asignación de pesos a los vértices, y la función g es una asignación de pesos a las aristas.*
Nota: Los pesos pueden ser números, símbolos o cualquier cantidad que se desee asignar a los vértices y a las aristas.

Ejemplo: Se considera modelar el comportamiento de una máquina de ventas, la cual vende caramelos por 15 centavos la pieza. Por simplicidad, supóngase que la máquina acepta sólo modenas de 5 centavos y 10 centavos, y no regresa cambio.
a: 0 centavos depositados
b: 5 centavos depositados
c: 10 centavos depositados
d: 15 centavos o más depositados
En cualquier momento, un cliente puede hacer una de las 3 cosas: depositar una moneda de 5 centavos, una de 10 centavos y presionar un botón para un caramelo de su gusto. Es claro que cuando se está en los vértices a, b y c nada pasará cuando se presione el botón para seleccionar un caramelo; la máquina liberará un caramelo sólo cuando el vértice d ha sido alcanzado.

Ejemplo: Considérese reconocer enunciados que constan de un artículo, seguido de uno, dos o tres adjetivos, un sujeto y por último un verbo.
Las oraciones son: El tren se detiene; una niña pequeña ríe; las nubes, grandes, blancas, aborreagadas aparcecen.
Si el vértice g es alcanzado, el enunciado tiene la forma. Para simplificar el diagrama

del grafo, se usan flechas punteadas para indicar palabras fuera de orden.
Nota: Ejemplos ilustran un modelo general conocido como modelo de estado finito.

2 Trayectorias y circuitos

Definición 16 *En un grafo dirigido, un paseo o una trayectoria es una secuencia de aristas* $(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k})$ *tal que el vértice terminal de* e_{i_j} *coincide con el vértice inicial de* $e_{i_{j+1}}$ *para* $1 \leq j \leq k$*-1.*
Nota: Para simplificar, se identifican las aristas de un grafo mediante los nombres e_1*,* e_2*,* $\cdots$*.*

Definición 17 *Un paseo es simple si no incluye la misma arista 2 veces.*

Definición 18 *Un paseo es elemental si no encuentra el mismo vértice 2 veces.*
Nota: No hay 2 aristas en la sucesión que tenga el mismo vértice terminal o vértice inicial.

Ejemplo: (e_1, e_2, e_3, e_4) es un paseo simple y elemental.
(e_1, e_2, e_3, e_5, e_8, e_3, e_4) es un paseo, pero no es simple ni elemental.
(e_1, e_2, e_3, e_5, e_9, e_{10}, e_{11}, e_4) es un paseo simple, pero no elemental.

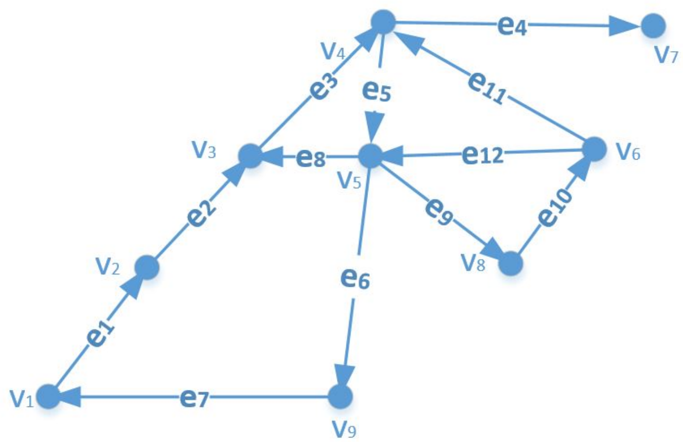

Figure 6: Paseos y Circuitos

Ejemplo: En el mapa de autopistas, un paseo de un vértice hasta otro vértice en un grafo que representa las conexiones de las autopistas es exactamente una ruta de autopistas entre ciudades correspondientes.

Definición 19 *Un circuito es un paseo* $(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k})$ *, en el cual el vértice terminal de* e_{i_k} *coincide con el vértice inicial* e_{i_1}*.*

Definición 20 *Un circuito es simple si no incluye la misma arista 2 veces.*

Definición 21 *Un circuito es elemental si no encuentra el mismo vértice dos veces.*
Nota: No hay 2 aristas en la sucesión que tenga el mismo vértice terminal o vértice inicial.

Ejemplo:
(e_1, e_2, e_3, e_5, e_9, e_{10}, e_{12}, e_6, e_7) es un circuito simple, pero no es elemental.
(e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7) es un circuito elemental y simple.

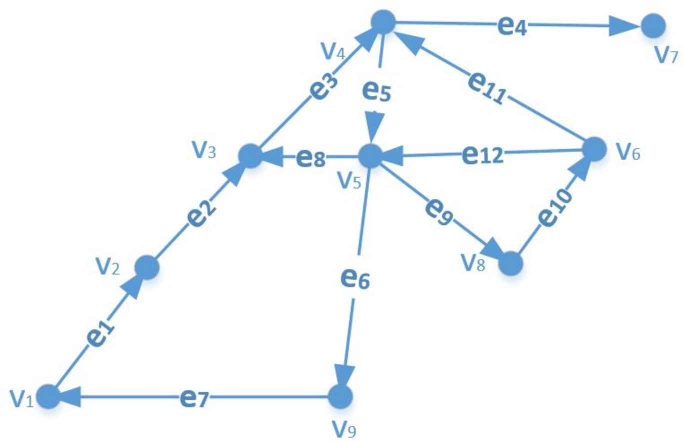

Figure 7: Paseos y Circuitos

Nota: Se puede representar un paseo o un circuito por la sucesión de vértices que el paseo o circuito encuentra, cuando se traza.

Ejemplo: El paseo (e_1, e_2, e_3, e_4) en el grafo anterior puede representarse con (v_1, v_2, v_3, v_4, v_7) y el circuito (e_5, e_9, e_{10}, e_{11}) puede representarse como (v_4, v_5, v_8, v_6, v_4).

Nota: Las nociones de paseos y circuitos en un grafo no dirigido pueden definirse en forma similar.

Nota: Existen algunos problemas, en los cuales se requiere determinar si existe un paseo de un vértice a otro vértice.

Teorema 1 *En un grafo (dirigido o no dirigido) con n vértice, si existe un paseo desde el vértice v_1 hasta el vértice v_2, entonces existe un paseo con no más de n-1 aristas desde el vértice v_1 hasta el vértice v_2.*

Definición 22 *Un grafo no dirigido es conexo si existe un paseo entre cualquiera 2 vértices y es no conexo en cualquier otro caso.*

Definición 23 *Un grafo dirigido es conexo si el grafo no dirigido derivado de éste, al ignorar las direcciones de las aristas, es conexo y es no conexo en cualquier otro caso.*
Nota: Entonces, se tiene que un grafo no conexo consiste en 2 o más componentes cada una de las cuales es un grafo conexo.

Definición 24 *Un grafo dirigido es fuertemente conexo si para cualesquiera 2 vértices a y b en el grafo existe un paseo desde a hasta b, así como también un paseo desde b hacia a.*

Ejemplo: Un grafo conexo que no es fuertemente conexo y un grafo no conexo.

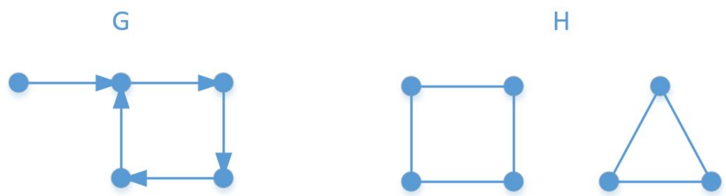

Figure 8: Grafo G conexo y grafo H no conexo

3 Trayectorias más cortas en grafos pesados

Nota: Sea G=(V,E,w) un grafo pesado, donde w es una función (w: E$\longrightarrow \mathbb{R}^+$).

Ejemplo: Considérese V como un conjunto de ciudades y E como un conjunto de autopistas que conectan estas ciudades. El peso de una arista {i,j}, se escribe w({i,j}), que denota la longitud entre las dos ciudades i y j (otras interpretaiones como costo anual t del mantenimiento de la autopista o el número de accidentes mensuales sobre la autopista).

Definición 25 *La longitud de un paseo en G es la suma de las longitudes de las aristas del paseo.*
Nota: Un problema de gran interés es determinar el paseo más corto de un vértice hasta otro vértice en V. Existen varios procedimeintos para solucionar este problema (se presentará el procedimeinto de E. W. Dijkstra para grafos no dirigidos, pero funciona para grafos dirigidos).

Nota: Supóngase que se determinará un paseo corto del vértice a hasta el vértice z en G. En el procedimiento, se determina un paseo más corto desde a hasta algún otro vértice, y luego, un paseo más corto desde a hacia algún otro vértice, y así sucesivemante. Llega el momento en que el procedimiento finaliza, cuando un paseo más corto desdes a hasta z es determinado (algoritmo voraz).

Nota: El procedimiento se sustenta en las siguientes observaciones:
Sea $T \subseteq V$ tal que $a \notin T$ y sea $P = V \setminus T$. Un paseo más corto del vértice a hasta uno de los vértices de T puede determinarse como: $\forall$ $t \in T$, sea l(t) la longitud del paseo más corto entre todos los paseos de a hacia t que no incluyen ningún otro vértice de T (obsérvese que l(t) no necesariamente es la distancia más corta de a hasta t, ya que podría haber un paseo más corto de a hasta t que incluya otros vértices de T). Se llama l(t) el índice de t con respecto a P. Entre todos los vértices de T, sea t_1 el vértice que posee el índice más pequeño. Se asegura que la distnacia más corta entre a y t_1 es igua a $l(t_1)$. Para demostrarlo, supóngase que existe un paseo de a hasta t_1, cuya longitud es menor que $l(t_1)$. En este caso tal paseo debe incluir uno o más de los vértices en $T \setminus \{t_1\}$. Sea t_2 el primer vértice en $T \setminus \{t_1\}$ que se encuentra al trazar este paseo de a hasta t_1. Se sigue que $l(t_2) < l(t_1)$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, si al calcular l(t), se graba la sucesión de vértices del paseo que origina l(t), $\forall t \in T$, también se podría haber determinado un paseo más corto desde a hasta t_1.

Ejemplo: Sea P={a,b} y sea T={c,d,e,z}. Luego l(c)=3, l(d)=8, l(e)=6 y l(z)=∞.

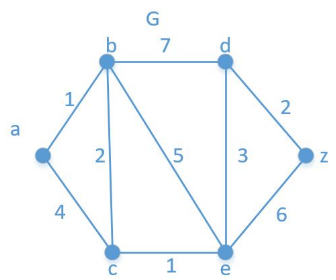

Figure 9: Grafo

Nota: Se debe encontrar una manera eficiente para calcular l(t), $\forall t \in T$. A l(t) se llamara índice de t con respecto a P.

De nuevo, sea $T \subseteq V$ y sea $P=V\setminus T$. Supóngase que para cualquier vértice $p \in P$, existe un camino más corto de a a p que incluye sólo vértices en P. Además, supóngase que $\forall t \in T$, ya se ha calculado su índice con respecto a P, l(t).
Sea $x \in T$, sea P'= $P \cup \{x\}$ y $T'=T\setminus\{x\}$ y l'(t) el índice de t respecto de P'. Se tiene que: l'(t) = min{ l(t),l(x)+w(x,t)}.
Para demostrarlo, se observa que existen 2 maneras posibles de obtener un paseo más corto desde a hasta t que no incluya ningún vértice en T':
1o. Tener un paseo que no incluya ni un vértice de T' ni tampoco del vértice x. En este caso, el índice de t con respecto a P' es l'(t)=l(t).
2o. Tener un paseo que vaya desde a hasta x que no incluya vértices de T, seguido por el lado {x,t}. En este caso, l'(t)=l(t)+w(x,t).
Se debe indicar que no se necesita considerar la posibilidad de tener un paseo que va desde a hasta x, luego hacia algún $p_1 \in P$, y entonces hacia t. Si se presentara este caso, mientras exista un paseo más corto desde a hasta p_1 que incluya a x, también existe uno que no incluya a x y que puede remplazarlo. Con lo cual, esto se reduce a la primera posibilidad considerada.

Ejemplo: Sea P={a,b} y T={c,d,e,z}. Supóngase P'={ a, b, c} y T'={ d, e, z}, se tiene: l'(d)=mín$\{8,3+\infty\}$=8, l'(e)=min{6,3+1}=4 y l'(z)=min$\{\infty,3+\infty\}=\infty$.

Nota: Estas observaciones conducen al siguiente procedimiento para el cálculo de la distancia más corta desde a hacia cualquier vértice de G.

1. Sea P={a} y $T=V\setminus\{a\}$. $\forall t \in T$, l(t)=w(a,t).

2. Seleccione el vértice en T que tiene el índice más pequeño con respecto a P. Denote a este vértice x.

3. Si x es el vértice que se desea alcanzar desda a, se termina. Si no , haga $P'=P \cup \{x\}$ y $T'=T\setminus\{x\}$. $\forall t \in T'$, calcule su índice con respecto a P' de acuerdo con l'(t)=min{ l(t), l(x)+w(x,t)}.

4. Repita los pasos 2 y 3, y use P' como P y T' como T (P=P' y T=T').

Ejemplo: Para el grafo pesado del ejemplo anterior. La distancia mínima entre a y z es 9. Además, el paseo más corto es (a,b,c,e,d,z).

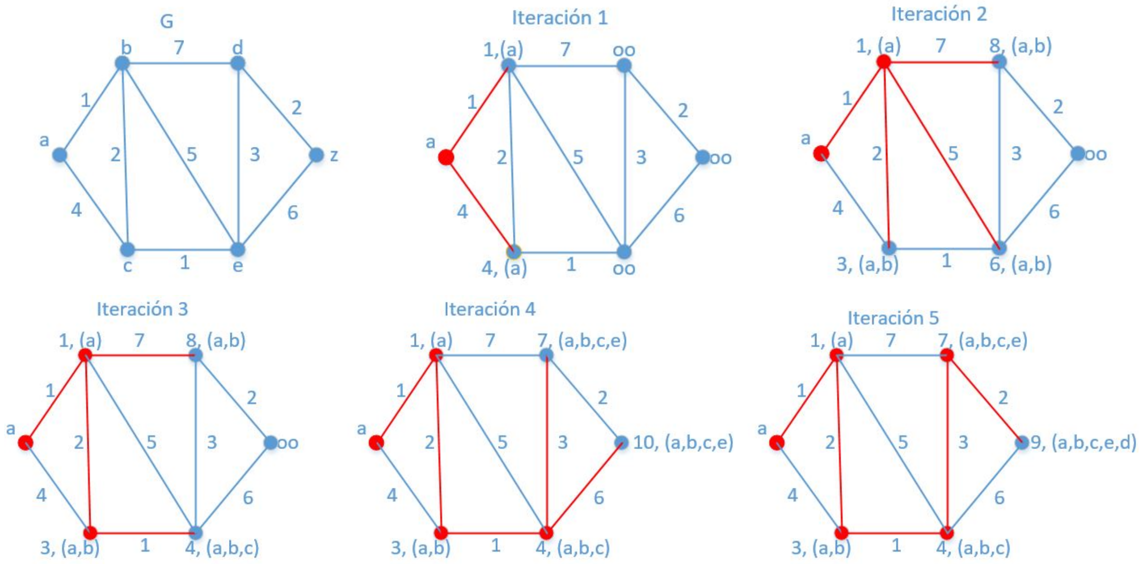

Figure 10: Procedimiento cálculo de distancia más corta

4 Trayectorias de Euler y de Hamilton

Definición 26 *Un paseo euleuriano en un grafo es el paseo que pasa a través de cada lado o arista en el grafo una y sólo una vez.*
Nota: El grafo no tiene vértices aislados o las aristas pasa por todos los vértices.

Definición 27 *Un circuito euleuriano en un grafo es un circuito que pasa a través de cada arista del grafo una y sólo una vez.*

Ejemplo: Un mapa de los puentes de Könisberg, en el cual se representa por el grafo, donde las aristas representan los puentes y los vértices las islas y las dos riberas. Es claro que el problema de cruzar cada uno de los puentes de Könisberg una y sólo una vez es equivalente a encontrar un paseo en el grafo que pase a través de cada arista una y sólo una vez.

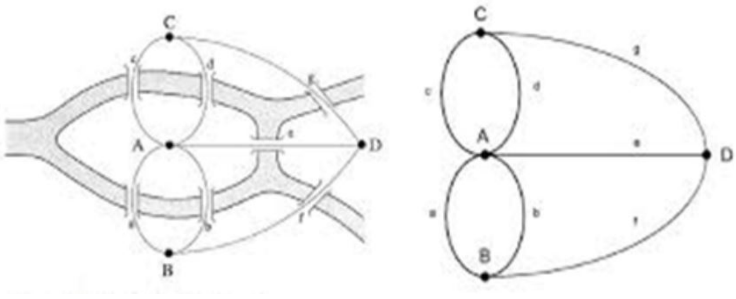

Figure 11: Puentes de Könisberg

Definición 28 *El grado de un vértice es el número de aristas incidentes en él (se señala que un lazo contribuirá con 2 al grado de un vértice).*
Nota: En un grafo cualquiera, hay un número par de vértices de grado impar, ya que cada arista contribuye con 1 al grado de cada uno de los 2 vértices con los cuales es incidente, la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de las arista de un grafo. De esto se sigue que debe existir un número par de vértices de grado impar.

Teorema 2 *Un grafo no dirigido tiene un paseo euleuriano* $\iff$ *éste es conexo y tiene cero o 2 vértices de grado impar.*

Corolario 3 *Un grafo no dirigido tiene un circuito euleuriano* $\iff$ *éste es conexo y sus vértices son todos de grado par.*

Ejemplo: Se tiene un paseo euleuriano, pero no tiene circuito euleuriano, ya que es conexto tiene dos vértices de grado impar (d y c).

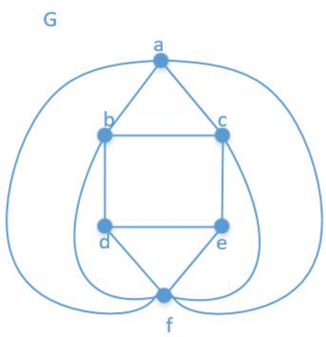

Figure 12: Paseo Euleuriano

Ejemplo: Se tiene un circuito euleuriano, debido que es conexo y todos sus vértices son de grado par.

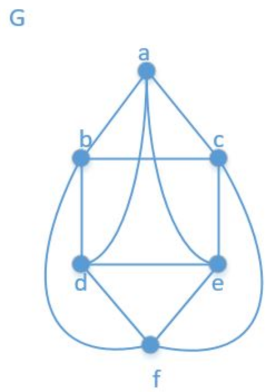

Figure 13: Circuito Euleuriano

Ejempo: El reto de determinar la posibilidad de dibujar una figura dada con un trazo continuo de manera que ninguna parte de la figura sea repetida. Se determina con la existencia de un paseo euleuriano en el grafo. Para este ejemplo como es conexo y tiene 2 vértices de grado impar, se tiene un paseo euleuriano.

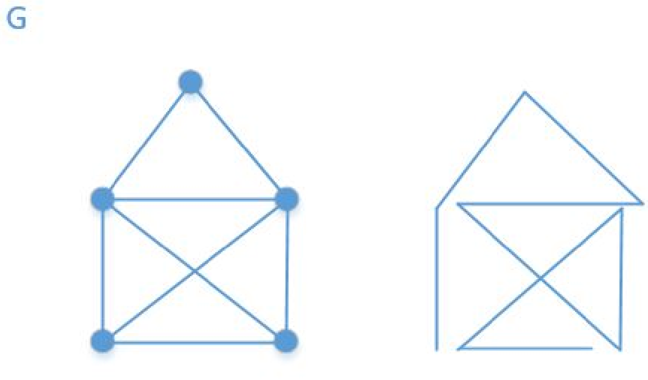

Figure 14: Reto

Ejemplo: Pueden dibujarse por un trazo continuo sin que se repita ninguna parte de las figuras.

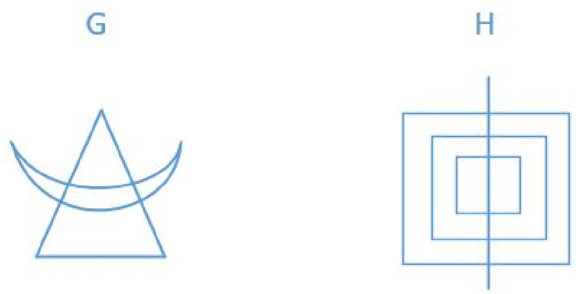

Figure 15: Dibujar por un trozo continuo

Definición 29 *En un grafo dirigido, el grado de entrada de un vértice es el número de aristas que son incidentes hacia éste.*

Definición 30 *En un grafo dirigido, el grado de salida de un vértice es el número de aristas que son incidentes desde éste.*

Teorema 4 *Un grafo dirigido tiene un circuito euleriano* $\iff$ *es conexo y el grado de entrada de cualquier vértice es igual a su grado de salida. Un grafo dirigido tiene un paseo euleuriano* $\iff$ *es conexo y el grado de entrada de cualquier vértice es igual a su grado de salida, con la posible excepción de 2 vértices. Para estos dos vértices, el grado de entrada de uno de ellos es mayor en uno que su grado de salida y el grado de entrada del otro es menor en uno que su grado de salida.*

Definición 31 *Un paseo (circuito) hamiltoniano es un paseo (circuito) que pasa a través de cada uno de los vértices de un grafo exactamente una vez.*

Ejemplo: Sir William Hamilton inventó el juego ”alrededor de todo el mundo”, en el cual el jugador es invitado a determinar una ruta a lo largo de un dodecaedro tal que pase a través de cada vértice una y sólo una vez.

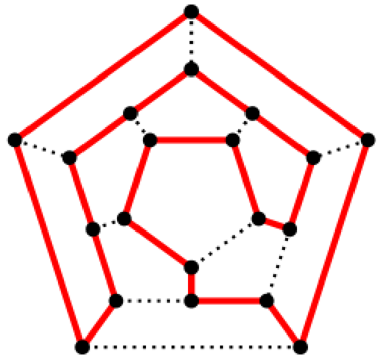

Figure 16: Dodecaedro

Teorema 5 *Sea G un grafo no dirigido lineal de n vértices. Si la suma de los grados para cada par de vértices de G es n-1 o mayor, entonces existe un paseo hamiltoniano en G.*

Ejemplo: Considérese el problema de programar 7 exámenes en 7 días, de manera que dos exámenes aplicados por el mismo instructor no se programen en días consecutivos. Si ningún instructor aplica más de 4 exámenes, se mostrará que siempre será posible programar los exámenes.
Si existe una arista entre cualesquiera dos vértices, la cual corresponde a 2 exámenes aplicados por diferentes instructores. Como el grado de cada vértice es al menos 3, la suma de los grados de cualesquiera 2 vértices es al menos 6. Por lo tanto, G tiene un paseo hamiltoniano que corresponde a una programación adecuada para los 7 exámenes.

Teorema 6 *Existe siempre un paseo hamiltoniano en un grafo dirigido completo.*

Ejemplo: Considérese el problema de clasificar a los jugadores de un torneo de tenis de eliminación directa, de modo que el jugador a se clasificará mejor que el jugador b si a vence a b, o si a vence al jugador que venció a b, o si a vence a un jugador que venció a otro jugador que venció a su vez a b y así sucesivamente. Como resultado de los encuentros pueden representarse como un grafo dirigido completo, la existencia de un paseo hamiltoniano en el grafo significa que siempre es posible clasificar a los jugadores linealmente (no necesariamente única).

5 Grafos planares

Definición 32 *Un grafo es aplanable si puede ser dibujado sobre un plano de manera que ninguna arista se cruce con otra, excepto en los vértices comunes.*

Ejemplo: Grafos aplanable y no aplanable.

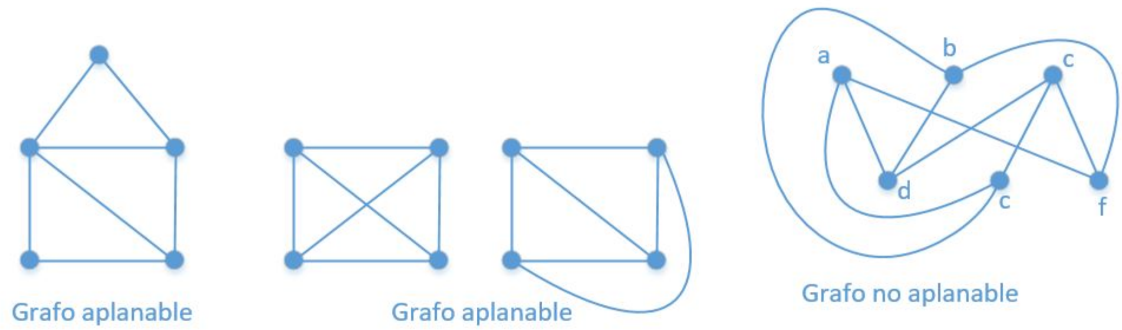

Figure 17: Ejemplos

El último grafo corresponde al problema de determinar si es posible conectar 3 casas a, b y c a 3 servicios públicos d, e y f, tal que no haya 2 línea de conexión que se crucen una a otra.

Definición 33 *Una región de un grafo aplanable es un área del plano que está acotada por aristas y no puede continuar dividiéndose en subáreas.*

Ejemplo: El grafo planar define 5 regiones.

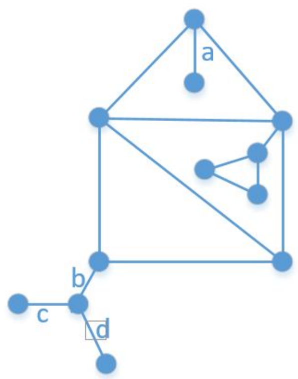

Figure 18: Grafo

Definición 34 *Una región es finita si su área es finita e infinita si su área es infinita.*
Nota: Es evidente que un grafo aplanable tiene exactamente una región infinita.

Teorema 7 *Para cualquier grafo aplanable conexo, v-e+r=2, donde v es el número de vértices, e es el número de aristas y r es el número de regiones que define el grafo.*
Nota: v-e+r se conoce como la fórmula de Euler para grafos aplanables.
Todos los grafos aplanables conexos deben cumplir esta fórmula.

Nota: Si G es un grafo aplanable conexo sin lazos y con $e \geq 2 \implies 3v-6 \geq e$.

Ejemplo: Nótese que v=5 y e=10 $\implies$ 3v-6=15-6=9 $\ngeq$10. Por lo que el grafo no es planar.

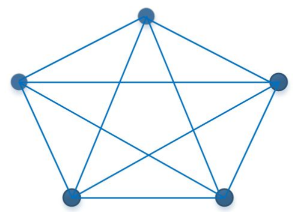

Figure 19: Kuratowski con v=5

Ejemplo: Nótese que v=6 y e=9 $\implies$ 3v-6=18-6=12$\geq$9=e. Por lo que no se puede concluir que el grafo sea planar.

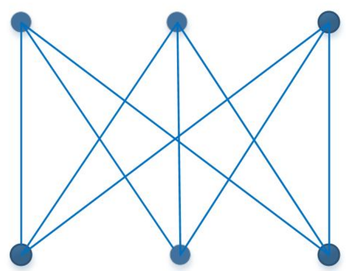

Figure 20: Kuratowski con v=6

Nota: Si el grafo fuera aplanable cada región estaría acotada por 4 o más aristas, es decir, $2e \geq 4r \implies e \geq 2r \implies v-e+\frac{e}{2} \geq 2$ o $2v-4 \geq e$. Luego, el ejemplo anterior, 2(6)-4<9. Por lo que el grafo no es planar.

Nota: La planaridad de un grafo no se ve afectada si una arista es dividida en 2 por la inserción de un nuevo vértice de grado 2, o si 2 aristas que son incidentes a un vértice de grado 2 son combinadas como en una arista simple por la eliminación de este vértice.

Figure 21: División aristas

Definición 35 *Dos grafos $G1$ y G_2 son isomorfos bajo vértices de grado 2 si son isomorfos o si pueden transformarse en grafos isomorfos mediante repetición de inserciones y/o eliminaciones de vértices de grado 2.*

Ejemplo: Los 2 grafos son isomorfos bajo vértices de grado 2.

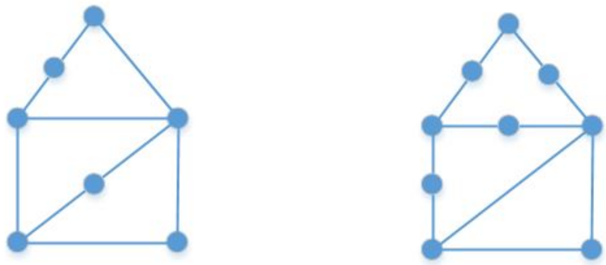

Figure 22: Grafos isomorfos bajo vértices de grado 2

Teorema 8 (Kuratoski) *Un grafo es aplanable $\iff$ éste no contiene cualquier subgrafo que sea isomorfo bajo vértices de grado 2 a cualquier de los grafos:*

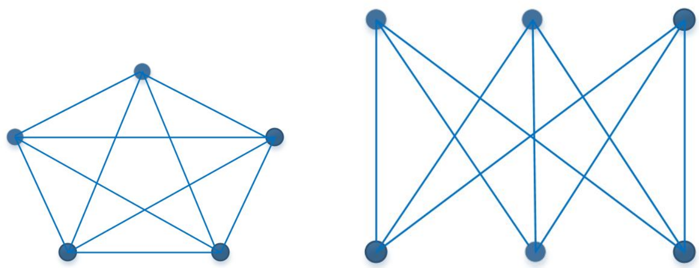

Figure 23: Kuratowski con v=5 y v=6

(llamados grafos Kuratowski)
Nota: Un grafo no es aplanable $\iff$ éste contiene un subgrafo que sea isomorfo bajo vértices de grado 2 a cualquiera de los grafos de Kuratowski.

6 Bibliografía

- Grimaldi, R. (1998), Matemáticas Discretas y Combinatoria. Addison Wesley Longman. México.

- Liu, C. (1995), Elementos de Matemáticas Discretas. McGraw-Hill. México.