Sammanfattning

Michael Sörsäter

1 Fel

Typer av fel:

- R_X fel i resultatet, som härrör från fel i indata
- R_{XF} fel i resultatet, som härrör från fel i de använda funktionsvärdena
- R_B avrundningsfel
- R_T trunkeringsfel

Närmevärde till x: $\bar{x}$

Absolut fel: $\Delta x = \bar{x} - x$

Relativt fel: $\frac{\Delta x}{x}$

1.1 Korrekta decimaler

Om $|\Delta a| \leq 0.5 * 10^{-t}$ sägs $\bar{a}$ ha t korrekta decimaler

1.2 Fortplantning av fel

Beräkning	Absolut Fel	Relativt fel	Felgräns
$y = x_1 + x_2$	$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$		$\lvert\Delta y\rvert \leq \lvert\Delta x_1\rvert + \lvert\Delta x_2\rvert$
$y = x_1 - x_2$	$\Delta y = \Delta x_1 - \Delta x_2$		$\lvert\Delta y\rvert \leq \lvert\Delta x_1\rvert + \lvert\Delta x_2\rvert$
$y = x_1 * x_2$		$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$	$\lvert\frac{\Delta y}{y}\rvert \leq\approx \lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}\rvert + \lvert\frac{\Delta x_2}{x_2}\rvert$
$y = x_1 / x_2$		$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2}$	$\lvert\frac{\Delta y}{y}\rvert \leq\approx \lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}\rvert + \lvert\frac{\Delta x_2}{x_2}\rvert$

Table 1: Fortplantning av fel

1.3 Maximalfelsuppskattning

För att uppskatta felet när en dator räknar utförs beräkningsanalys på varje del. Följande summa skrivs upp:

$$|\Delta f| \leq\approx \sum_{k=1}^{n} |\frac{\delta f}{\delta x_k}||\Delta x_k|$$

Varje beräkning (+,-,*,/...) ersätts av en bokstav. Derivatan beräknas med avseende på sin bokstav:

$|\Delta f| \leq |\frac{\delta f}{\delta a}||\Delta a| + |\frac{\delta f}{\delta b}||\Delta b| + \ldots$

För att uppskatta absoluta felet används: (μ = maskinkonstant)

$\frac{\Delta a}{a} \approx \mu \Leftrightarrow \Delta a \approx a\mu$

2 Talsystem och flyttalsrepresentation

Talsystem beskrivs på formen (β, t, L, U)

- β är basen
- t är precisionen (antalet decimaler)
- L är undre gränsen på exponenten
- U är övre gränsen på exponenten

Med 32 bitar representeras ett flyttal som: (2, 23, -126, 127)

s (1 bit) positivt/negativt

e (8 bitar) exponenten för talet

f (23 bitar) decimaldelen för talet

$$x = (-1)^s (1.f)_2 * 2^{e-127}$$

Felet från det talet man lagrar till det riktiga talet:

$$\frac{|x - x_r|}{|x|} \leq \frac{1}{2}\beta^{-t}$$

där x_r är det talet som ligger närmast x.

Jämför med formeln i 1.1.

2.1 Roten ur

För att beräkna roten ur av ett tal. $x = \sqrt{a}$ används funktionen $f(x) = x^2 - a$.
Med Newton-Raphsons fås: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n})$
I flyttalssystemet skrivs tal som:

$$x = (1.f)_2 2^e \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(1.f)_2}\sqrt{2^e}$$

Resulterar i två fall:

$$\sqrt{2^e} = \begin{cases} e\,\text{jämn}, 2^{\frac{e}{2}} \\ e\,\text{udda}, \sqrt{2}\;2^{\frac{e-1}{2}} \end{cases}$$

Termen $(1.f)_2$ ligger alltid i intervallet $[1, 2]$. Då e är udda, multipliceras tvåan in i den roten och uttrycket blir:

$$\sqrt{x} = \sqrt{(1.f)_2 2}\;2^{\frac{e-1}{2}}$$

Vilket göra att samma term ligger i intervallet $[1, 4]$ och det blir då det enda intervallet som måste beräknas.

3 Summa - restterm

Summa som är konvergent

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\; S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

Hur uppskattas R_N utan att räkna ut den?

3.1 Alternerande

Är serien konvergent och alternerande:

$$|R_N| \leq |a_{N+1}|$$

Alltså, felet är mindre än nästa term.

3.2 Postiv monotont avtagande

Om funktionen avtar, går mot 0.

$$R_N = \sum_{N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(x)dx$$

Alltså, integrera funktionen och beräkna integralen. Lägg märke till att man beräknar en extra term då man i integralen börjar på N istället för N+1.

4 Iterationsmetoder

4.1 Konvergerar

För att undersöka om en iterationsmetod konvergerar mot en lösning med ett givet startvärde x_0 måste den uppfylla två krav:

1. Måste kunna skrivas om på originalform
2. $|\varphi'(x_0)| < 1$ för att den ska konvergera

Exempel:

$f(x) = xe^x - 1 = 0$

$x_{n+1} = \underbrace{\frac{1 + x_n}{1 + e^{x_n}}}_{\varphi(x)}$

Genom att multiplicera upp nämnaren och flytta runt fås samma orginalfunktion (krav 1). Genom att derivera och sätta in x_0 fås ett värde som är < 1 (krav 2).

4.2 Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

4.3 Metodoberoende feluppskattning

Används för att uppskatta hur nära x är x^*.

$$|x^* - \bar{x}| \leq \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

5 Interpolation och splines

5.1 Interpolation

Beräkna polynomet:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$

Beräkna konstanterna C genom att först sätta in x_1 (gör alla delar till 0 förutom c_0) och sedan vidare likadant.

Felet är den “Extra term” som inte ingår i interpolationen, R_T. För en linjär interpolation är det termen vid c_2.

Vid en fullständig feluppskattning ska tre delar tas med. Alla delar är absolutbelopp.

- R_B Avrundningsfel. Efter beräkningen P(a), har svaret t korrekta decimaler.
  Ger felet: $R_B = 0.5 \cdot 10^{-t}$
- R_T Trunkeringsfel. (är ofta den dominerande delen) Använd termen c_n för att beräkna felet. Ex: $R_T \leq |c_2(x - x_1)(x - x_2)|$
- R_{XF} Fel i indatan. Likadant som för R_B antalet t decimaler som lägst givna i indatan. $R_{XF} = 0.5 \cdot 10^{-t}$

Svaret blir sedan $R_{TOT} = |R_B| + |R_T| + |R_{XF}|$

5.1.1 Fel indata

Ibland har även den punkt som uppskattas en felmarginal:

$A = \bar{A} \pm \Delta A$

Vad blir felet i $f(A)$?

Använd maximalsfelsuppskattning.

$|\Delta f| \leq |\frac{\delta f}{\delta A}||\Delta A| \approx |\frac{\delta P_n}{\delta x}||\Delta A| \approx$ /om linjär/$\approx |c_1||\Delta A|$

5.2 Spline

Låt

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$$

5.3 Lineär spline

En funktion s sägs vara en lineär splinefunktion på intervallet [a,b] om:

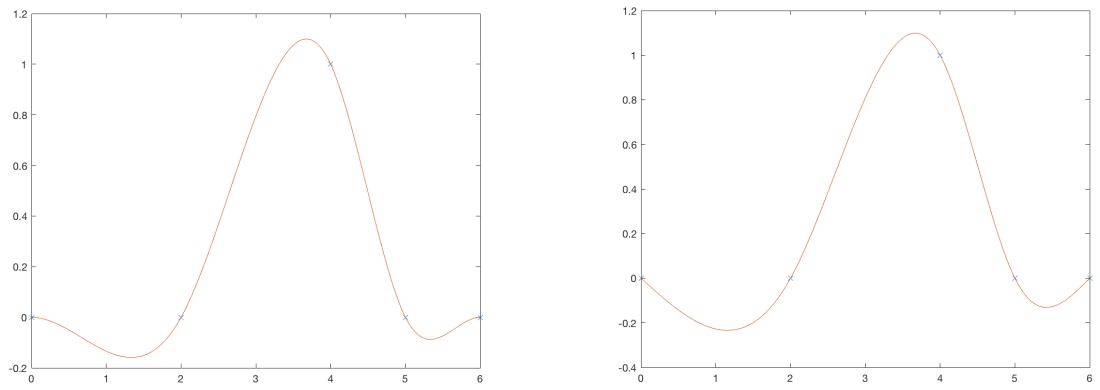
- s är kontinuerlig på [a,b]
- s är en rät linje på varje delintervall $[x_i, x_{i+1}], i = 1, \ldots, n-1$

5.4 Kubisk spline

En funktion s sägs vara en kubisk splinefunktion på intervallet [a,b] om:

- s, s', s" är kontinuerlig på [a,b]
- s är ett polynom av grad ≤ 3 på varje delintervall $[x_i, x_{i+1}], i = 1, \ldots, n-1$

Finns två typer av kubiska splines. Antingen är derivatan i ändpunkterna 0 (rak linje), eller så knyter den ihop med nästa spline. För formler om hur man formeln är, se sida 130 i kursboken.



(a) Derivatan 0 (b) Mjuk övergång till nästa spline

Figur 1: Kubiska Splines

6 LU-faktorisering

Från matrisen A, beräkna $PA = LU$ där P är en permutationsmatris (ändrar om raderna).

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Används för att kunna lösa Ax=b.

$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb$

Sätt $Ux = y$, lös $Ly = Pb$ och sedan $Ux = y$

7 Feluppskattning Ax = b

$\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty \frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty}$

Matrisnormen defineras som:

$||A||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$

Alltså, för varje rad, ta absolutvärdet av varje element och addera dem. Maximala värdet för alla rader är matrisnormen.

Matrisnormen är ett mått på hur störningar i högerledet (b) förstoras och påverkar x.

8 Minsta kvadratmetoden

Minsta kvadratmetoden används för att hitta en modell för data som inte har exakta lösningar.

För att lösa ekvationen $Ax = b$ används A^T för att skapa normalekvationen:

$$A^T Ax = A^T b$$

Det går att visualisera det som att det finns ett plan som spänns upp av kolonnerna i A och en vektor b, som ej ligger i planet. Vi vill då hitta en vektor, x, som placeras ortogonalt mot b (vilket då är närmast). För att “få ner” b i planet multipliceras b med matrisen A^T och då även vänsterledet. Detta resulterar i normalekvationen, som alltid har en lösning.

9 Deriveringsregler

$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

10 Taylor & Maclaurin

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!} h^n = f(x) + f(x)h + \frac{f^{(2)}(x)}{2!} h^3 + \dots$$