

# Sammanfattning

Michael Sörsäter

## 1 Fel

Typer av fel:

- $R_X$  fel i resultatet, som härrör från fel i indata
- $R_{XF}$  fel i resultatet, som härrör från fel i de använda funktionsvärdena
- $R_B$  avrundningsfel
- $R_T$  trunkeringsfel

Närmevärde till  $x$ :  $\bar{x}$

Absolut fel:  $\Delta x = \bar{x} - x$

Relativt fel:  $\frac{\Delta x}{x}$

### 1.1 Korrekta decimaler

Om  $|\Delta a| \leq 0.5 * 10^{-t}$  sägs  $\bar{a}$  ha  $t$  korrekta decimaler

### 1.2 Fortplantning av fel

Beräkning	Absolut Fel	Relativt fel	Felgräns
$y = x_1 + x_2$	$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$		$ \Delta y  \leq  \Delta x_1  +  \Delta x_2 $
$y = x_1 - x_2$	$\Delta y = \Delta x_1 - \Delta x_2$		$ \Delta y  \leq  \Delta x_1  +  \Delta x_2 $
$y = x_1 * x_2$		$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$	$ \frac{\Delta y}{y}  \leq \approx  \frac{\Delta x_1}{x_1}  +  \frac{\Delta x_2}{x_2} $
$y = x_1 / x_2$		$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2}$	$ \frac{\Delta y}{y}  \leq \approx  \frac{\Delta x_1}{x_1}  +  \frac{\Delta x_2}{x_2} $

Table 1: Fortplantning av fel

### 1.3 Maximalfelsuppskattning

$$|\Delta f| \leq \approx \sum_{k=1}^n \left| \frac{\delta f}{\delta x_k} \Delta x_k \right|$$

## 2 Talsystem och flyttalsrepresentation

Talsystem beskrivs på formen  $(\beta, t, L, U)$

- $\beta$  är basen
- $t$  är precisionen (antalet decimaler)
- $L$  är undre gränsen på exponenten
- $U$  är övre gränsen på exponenten

Med 32 bitar representeras ett flyttal som: (2, 23, -126, 127)

s (1 bit) positivt/negativt

e (8 bitar) exponenten för talet

f (23 bitar) decimaldelen för talet

$$x = (-1)^s (1.f)_2 * 2^{e-127}$$

Felet från det talet man lagrar till det riktiga talet:

$$\frac{|x - x_r|}{|x|} \leq \frac{1}{2} \beta^{-t}$$

där  $x_r$  är det talet som ligger närmast  $x$ .

Jämför med formeln i 1.1.

## 3 Summa - restterm

Summa som är konvergent

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

Hur uppskattas  $R_N$  utan att räkna ut den?

### 3.1 Alternerande

Är serien konvergent och alternerande:

$$|R_N| \leq |a_{N+1}|$$

Alltså, felet är mindre än nästa term.

### 3.2 Postiv monotont avtagande

Om funktionen avtar, går mot 0.

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(x) dx$$

Alltså, integrera funktionen och beräkna integralen. Lägg märke till att man beräknar en extra term då man i integralen börjar på  $N$  istället för  $N+1$ .

## 4 Iterationsmetoder

### 4.1 Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### 4.2 MetODOberoende feluppskattning

$$|x^* - \bar{x}| \leq \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

## 5 Interpolation

Beräkna polynomet:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

Beräkna konstanterna  $C$  genom att först sätta in  $x_1$  (gör alla delar till 0 förutom  $c_0$ ) och sedan vidare likadant.

Felet är den "Extra term" som inte ingår i interpolationen,  $R_T$ . För en linjär interpolation är det termen vid  $c_2$

Vid en fullständig feluppskattning ska tre delar tas med. Alla delar är absolutbelopp.

- $R_B$  Avrundningsfel. Efter beräkningen  $P(a)$ , har svaret  $t$  korrekta decimaler.  
Ger felet:  $R_B = 0.5 * 10^{-t}$
- $R_T$  Trunkeringsfel. (är ofta den dominerande delen) Använd termen  $c_n$  för att beräkna felet. Ex:  $R_T \leq |c_2(x - x_1)(x - x_2)|$
- $R_{XF}$  Fel i indatan. Likadant som för  $R_B$  antalet  $t$  decimaler som lägst givna i indatan.  $R_{XF} = 0.5 * 10^{-t}$

Svaret blir sedan  $R_{TOT} = |R_B| + |R_T| + |R_{XF}|$

### 5.1 Spline

Låt

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$$

### 5.2 Lineär spline

En funktion  $s$  sägs vara en lineär splinefunktion på intervallet  $[a, b]$  om:

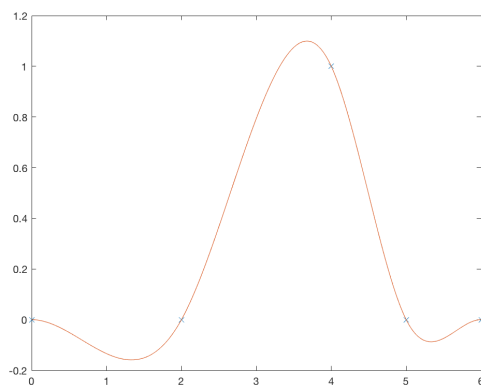
- $s$  är kontinuerlig på  $[a, b]$
- $s$  är en rät linje på varje delintervall  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$

### 5.3 Kubisk spline

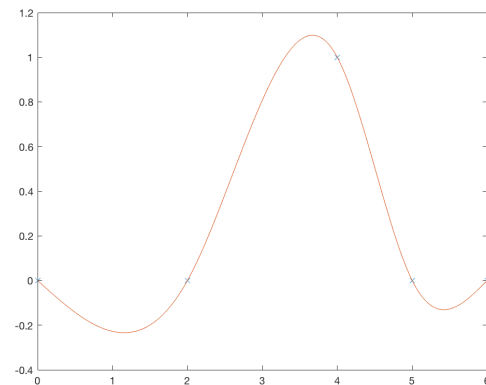
En funktion  $s$  sägs vara en kubisk splinefunktion på intervallet  $[a, b]$  om:

- $s, s', s''$  är kontinuerlig på  $[a, b]$
- $s$  är ett polynom av grad  $\leq 3$  på varje delintervall  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n-1$

Finns två typer av kubiska splines. Antingen är derivatan i ändpunkterna 0, rak linje, eller så knyter den ihop med nästa spline.



(a) Derivatan 0



(b) Mjuk övergång till nästa spline

Figur 1: Kubiska Splines

### 5.4 Fel i funktionsvärdet

$$A = \bar{A} \pm \Delta A$$

Vad blir felet i  $f(A)$

Använd maximalsfelsuppskattning:

$$|\Delta f| \leq \left| \frac{\delta f}{\delta A} \right| |\Delta A| \approx \left| \frac{\delta P_n}{\delta A} \right| |\Delta x| = |c_1| |\Delta A|$$

## 6 LU-faktorisering

Från matrisen  $A$ , beräkna  $PA = LU$  där  $P$  är en permutationsmatris (ändrar om raderna).

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

## 6.1 Feluppskattning för $\mathbf{x}$ i $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

Används för att kunna lösa  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ .

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb$$

Sätt  $Ux = y$ , lös  $Ly = Pb$  och sedan  $Ux = y$

Använd maximalsfelsuppskattning:

$$|\Delta f| \leq \left| \frac{\delta f}{\delta a} \right| |\Delta a| \left| \frac{\delta f}{\delta b} \right| |\Delta b|$$

## 7 Derivering

$$f = \frac{u}{v}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

## 8 Maclaurin

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$|\Delta f| \leq \left| \frac{\delta f}{\delta A} \right| |\Delta A| \approx \left| \frac{\delta P_n}{\delta A} \right| |\Delta x| = |c_1| |\Delta A|$$