

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

Образовательная программа "Квантовыеnanoструктуры, материалы и устройства"

**Направление подготовки:** 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)  
**Направленность (профиль) подготовки:** Фундаментальная и прикладная физика

Сорокин Вадим Сергеевич

КРОСС-РЕЗОНАНСНЫЕ ВЕНТИЛИ НА КУБИТЕ-ФЛУКСОНУМЕ  
(бакалаврская работа)

**Научный руководитель:**  
Устинов Алексей Валентинович, д.ф.-м.н.,  
**Научный консультант:**  
Беседин Илья Станиславович, к.ф.-м.н.

Москва — 2022

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Теоретические сведения о кубитах . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1 Кубит . . . . .	5
1.2 Сфера Блоха . . . . .	5
1.3 Джозефсоновский переход . . . . .	6
1.4 Сверхпроводящие кубиты . . . . .	7
1.5 Флаксониум . . . . .	8
1.6 Спектр флаксониума . . . . .	9
1.7 Флаксониум, емкостно связанный с резонаторами . . . . .	11
1.8 Дисперсионное приближение . . . . .	14
1.9 Взаимодействие с внешней средой . . . . .	16
1.9.1 Взаимодействие кубита с внешней средой . . . . .	17
1.9.2 Уравнение Линдблада . . . . .	19
1.10 Действие микроволнового сигнала на квантовую систему . . . . .	20
1.11 Действие микроволнового сигнала на резонатор при наличии затухания . . . . .	22
<b>Глава 2. GKP-код и протокол коррекции ошибок . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1 Квантовая коррекция ошибок . . . . .	24
2.2 Оператор смещения . . . . .	25
2.3 Оператор условного смещения . . . . .	25
2.4 Представления фазового пространства . . . . .	26
2.5 GKP-код . . . . .	28
2.6 Приближенный GKP-код . . . . .	31
2.7 Детектирование ошибок с помощью стабилизаторов . . . . .	31
2.8 Реализация CD . . . . .	32
2.9 Влияние измерения кубита на резонатор . . . . .	35
2.10 Марковская стабилизация . . . . .	36
<b>Глава 3. Моделирование работы GKP-кода коррекции ошибок . . . . .</b>	<b>39</b>
3.1 Проектирование чипа . . . . .	39
3.2 Моделирование . . . . .	42
3.3 Получение смешанного состояния . . . . .	43
3.4 Состояния логических операторов Паули . . . . .	44
3.4.1 Время жизни логического GKP-кубита . . . . .	46
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>48</b>

Список литературы . . . . .	49
-----------------------------	----

## Введение

Если рассмотреть исследования в области вычислительной техники и физики, которые сегодня считаются революционными, то квантовые компьютеры находятся на вершине списка и по праву считается одной из ключевых технологий XXI века. Квантовые компьютеры полагаются на эффекты квантовой механики (суперпозиция, квантовая запутанность) для передачи и обработки данных. В будущем квантовые компьютеры позволят решать некоторые задачи, которые не могут быть решены за разумное время на обычном, классическом компьютере. В частности, алгоритм Шора факторизации чисел и алгоритм Гровера решения задачи перебора могут быть выполнены сравнительно быстро на квантовом компьютере. Кроме того, квантовые вычисления могут помочь в симуляции задач квантовой химии, что потенциально сможет найти широкие приложения в медицине. К сожалению, в настоящее время квантовые компьютеры далеки от идеальных: современные квантовые процессоры очень чувствительны к окружающей среде и могут потерять свое квантовое состояние из-за квантовой декогеренции. По этой причине на данном этапе развития квантовых технологий необходимо производить квантовую коррекцию ошибок. Одним из подходов является использование т.н. логического кубита, состоящего из набора физических кубитов. Логический кубит — некий абстрактный кубит, который используется в квантовых алгоритмах и который обладает достаточно большими времена когерентности, чтобы его можно было использовать в гейтах. В данной дипломной работе исследуется логический кубит, состоящий из физического кубита (трансмона или флексониума) и связанного с ним резонатора. Вместе такая система позволяет корректировать ошибки, закодированные в фазовом пространстве осциллятора (резонатора), и называется GKP-кубитом в честь авторов, предложивших такой тип логического кубита Д. Готтесмана, А. Китаева и Дж. Прескилла.

## Глава 1. Теоретические сведения о кубитах

### 1.1 Кубит

Кубит представляет собой двухуровневую квантовомеханическую систему, состояние которой может быть представлено в виде суперпозиции двух базисных волновых функций, которые условно обозначим как  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ :

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle. \quad (1.1)$$

В отличие от обычного бита, принимающего лишь значения 0 либо 1, кубит может находиться в суперпозиции двух состояний одновременно.

### 1.2 Сфера Блоха

Состояние кубита (1.1) характеризуется двумя параметрами  $a$  и  $b$ . Из условия нормировки волновой функции следует, что эти параметры должны удовлетворять соотношению  $a^2+b^2 = 1$ . Часто переходят к другому набору параметров, вводя замену  $a = \cos \frac{\theta}{2}$ ,  $b = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . Легко видеть, что введение такой параметризации сохраняет нормированность. Таким образом,

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2}|1\rangle. \quad (1.2)$$

Такое представление ставит в соответствие состоянию кубита точку с координатами  $(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  на некой сфере, называемой сферой Блоха.

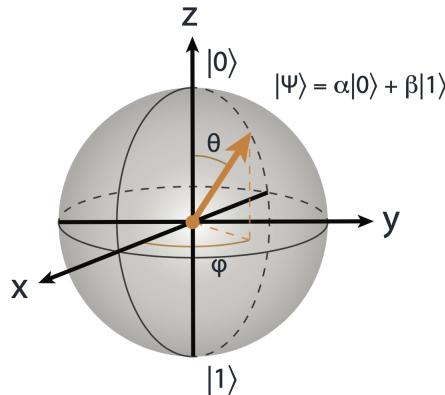


Рисунок 1.1 — Сфера Блоха

Состояние  $|0\rangle$  — точка на северном полюсе сферы Блоха,  $|1\rangle$  — на южном. По оси  $x$  расположены состояния  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  и  $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ , получаемые поворотом вокруг оси

$y$  на  $\pi/2$  и  $-\pi/2$  соответственно. На пересечении оси  $y$  со сферой Блоха находятся состояния  $|i\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$  и  $| - i\rangle = (|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ .

### 1.3 Джозефсоновский переход

Джозефсоновский переход представляет собой две сверхпроводящие обкладки, разделенные т.н. слабой связью, тонким слоем материала, где сверхпроводимость подавлена. В качестве слабой связи может выступать слой диэлектрика, сужение сверхпроводника или нормальный металл. В джозефсоновском контакте проявляется два эффекта, называемые стационарным и нестационарным эффектами Джозефсона.

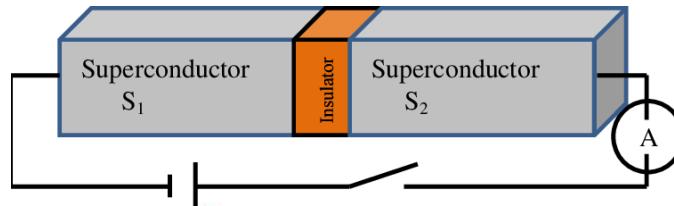


Рисунок 1.2 — Схематическое изображение джозефсоновского перехода

Стационарный эффект связывает ток, протекающий через джозефсоновский переход с разностью фаз сверхпроводящий волновых функций на его берегах

$$I = I_c \sin \varphi. \quad (1.3)$$

Нестационарный эффект дает разность напряжения на переходе через производную по времени от разности фаз

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.4)$$

Таким образом, можно получить энергию джозефсоновского перехода

$$E(\varphi) = \int_0^t IV dt = \int_0^\varphi \frac{\hbar I_c}{2e} \sin \varphi' d\varphi' = E_J(1 - \cos \varphi), \quad (1.5)$$

где  $E_J = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$  — энергия Джозефсона,  $\Phi_0 = h/2e$  — квант магнитного потока.

Джозефсоновский переход является нелинейным элементом. Найдем зависимость индуктивности джозефсоновского перехода от разности фаз  $\varphi$ . По определению индуктивности  $V = L \frac{dI}{dt}$ . Таким образом,

$$L_J(\varphi) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi}. \quad (1.6)$$

## 1.4 Сверхпроводящие кубиты

Кубиты можно построить на основе сверхпроводящих электрических схем, внедряя джозефсоновский переход в качестве нелинейного элемента. На рис.1.3 показан пример сверхпроводящей цепочки, состоящей из емкости, джозефсоновского перехода и индуктивности. Такая электрическая цепочка называется кубитом-флаксониумом.

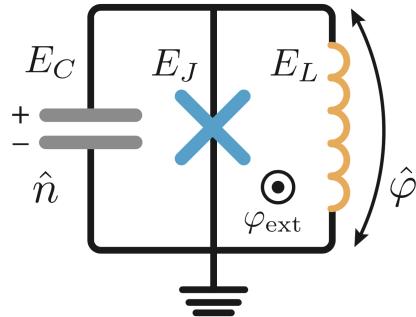


Рисунок 1.3 — Схема флаксониума

Для описания квантово-механического поведения сверхпроводящих цепочек используется метод вторичного квантования. Для того, чтобы проквантовать электрическую цепочку, необходимо сначала получить ее лагранжиан  $L(\Phi, \dot{\Phi})$ , проинтерпретировав электрическую энергию как кинетическую, а магнитную как потенциальную. Затем с помощью преобразования Лежандра перейти к гамильтониану и, воспользовавшись после этого методом вторичного квантирования, получить итоговый гамильтониан проквантованной цепочки. В качестве гамильтоновых переменных полученного гамильтониана будут служить канонически сопряженные заряд  $\hat{Q}$  в емкости и поток в индуктивности  $\hat{\Phi}$ , удовлетворяющие коммутационному соотношению  $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$ . Можно также перейти от заряда к количеству куперовских пар в емкости, а от потока через индуктивность к количеству квантов потока:  $\hat{n} = \hat{Q}/2e$ ,  $\hat{\varphi} = 2\pi\Phi/\Phi_0$ .

Находя спектр полученного гамильтониана, например, численными методами, можно получить набор уровней  $E_0, E_1, E_2, \dots$  и волновых функций кубита. Для кубита определяют величину

$$\alpha = E_{12} - E_{01}, \quad (1.7)$$

называемую ангармонизмом. Далее обсудим пример кубита, обладающего большим ангармонизмом в своем рабочем режиме.

## 1.5 Флаксониум

Рассмотрим более подробно изображенную на рис.1.3 схему кубита-флаксониума, впервые описанного В. Манучаряном в статье [1]. Применим описанный выше подход для получения гамильтониана флаксониума. Энергии конденсатора и индуктивности записываются как  $E_C = \frac{CU^2}{2}$ ,  $E_L = \frac{\Phi^2}{2L}$ . Из закона Фарадея:  $\Phi(t) = \int_0^t U(\tau)d\tau$ . Взяв в лагранжиане в качестве координаты поток через индуктивность и проинтерпретировав энергию конденсатора как потенциальную, а энергию индуктивности и джозефсоновского перехода как кинетическую, получим лагранжиан цепочки

$$L = \frac{C\dot{\Phi}^2}{2} - \frac{(\Phi - \Phi_{\text{ext}})^2}{2L} - E_J(1 - \cos(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0})), \quad (1.8)$$

где  $\Phi_{\text{ext}}$  - внешний поток в контуре,  $\Phi_0$  - квант потока. Роль обобщенного импульса играет обобщенный заряд  $q = \partial L / \partial \dot{\Phi}$ . Используя преобразование Лежандра

$$H(\vec{\Phi}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_i} - L, \quad (1.9)$$

перейдем к гамильтониану. Проквантовав его, получим

$$\hat{H}_f = 4E_C\hat{n}^2 + E_L \frac{(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{ext}})^2}{2} + E_J(1 - \cos \hat{\varphi}), \quad (1.10)$$

где  $E_C = e^2/2C$  — зарядовая энергия, необходимая для переноса одного из электронов куперовской пары с обкладки на обкладку,  $E_L = (\Phi_0/2\pi)^2/L$  — индуктивная энергия,  $\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0$ . Для того, чтобы кубит, описываемый гамильтонианом (1.10), работал в режиме флаксониума, необходимо выполнение соотношения  $E_J \gg E_L$ .

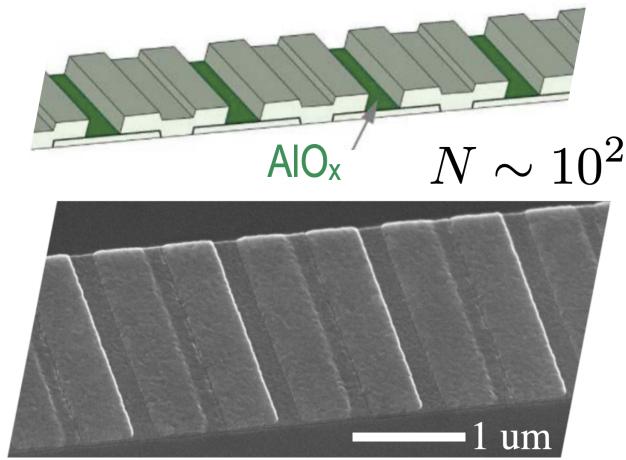


Рисунок 1.4 — Массив джозефсоновских переходов [1].

Для удовлетворения этим требованиям индуктивный элемент должен обладать довольно большой индуктивностью  $L \gg L_J$ . Чтобы получить такой индуктивный элемент, джозефсоновский переход в схеме флаксониума шунтируется массивом последовательно соединен-

ных джозефсоновских переходов. Такой массив из джозефсоновских элементов эффективно ведет себя как индуктивный провод. Выбрав достаточно большое количество элементов в массиве, можно получить индуктивность, превышающую индуктивность основного джозефсоновского перехода.

## 1.6 Спектр флаксониума

Флаксониум представляет особый интерес в режиме, когда внешний поток равен половине кванта потока  $\Phi_0$ . В таком случае флаксониум обладает большим ангармонизмом (1.7), что является полезным свойством для кубита. Малая величина ангармонизма  $\alpha$  вызывает возбуждение в состояниях с более высокой энергией, уменьшая производительность кубита.

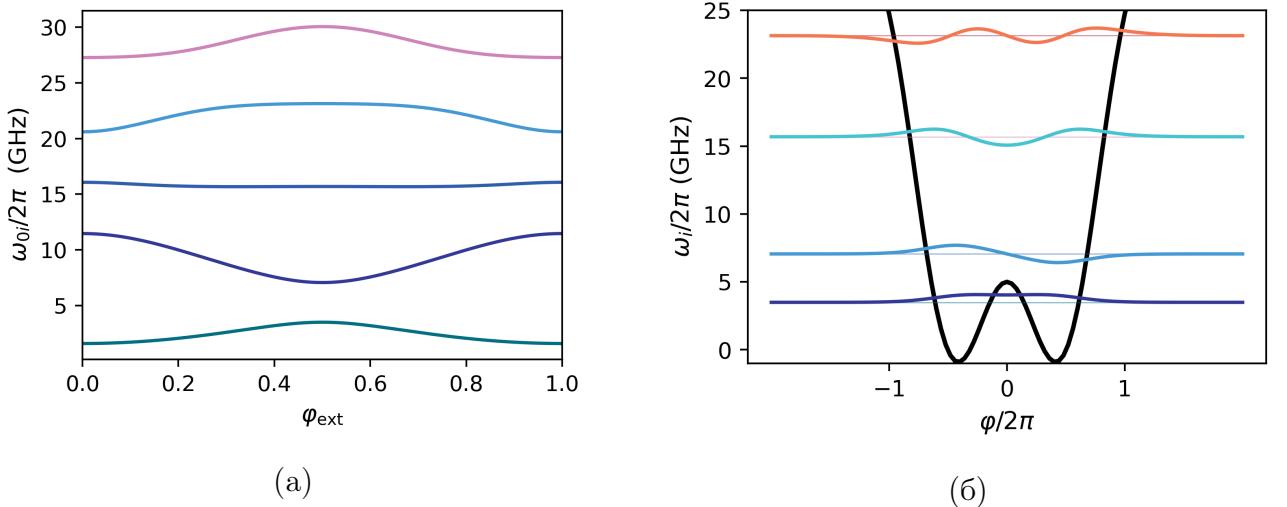


Рисунок 1.5 — (а) Уровни флаксониума в зависимости от внешнего потока. (б)  
Потенциальная энергия флаксониума, энергетические уровни и волновые функции,  
 $\varphi_{\text{ext}} = 0.5$ ,  $E_J = E_C = 5\Gamma\Gamma_{\text{ц}}$ ,  $E_L = 1\Gamma\Gamma_{\text{ц}}$ .

Опишем используемый метод диагонализации гамильтониана флаксониума. Численная диагонализация гамильтониана может быть произведена в базисе гармонического осциллятора  $|m\rangle$ , диагонализующего гамильтониан  $\hat{H}_f|_{E_J=0}$ . Для того чтобы полученные в результате численной диагонализации энергетические уровни сходились к уровням флаксониума, необходимо достаточно большое число базисных функций  $|m\rangle$ . Соответствующие базисным состояниям  $|m\rangle$  энергии задаются выражениями  $\varepsilon_m = \hbar\omega_p(c^\dagger c + 1/2)$ , где  $\omega_p = \sqrt{8E_L E_c}$  и  $c^\dagger$  и  $c$  - повышающий и понижающий операторы. В данном базисе матрица гамильтониана флаксониума будет иметь вид

$$\begin{aligned} H_{mm'} = & \delta_{mm'}\varepsilon_m - E_J \cos(2\pi\Phi/\Phi_0)\langle m | \cos\varphi | m' \rangle, \\ & - E_J \sin(2\pi\Phi/\Phi_0)\langle m | \sin\varphi | m' \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Матричные элементы синуса и косинуса могут быть выражены при помощи обобщенных полиномов Лаггера

$$\langle m | \cos \varphi | m + 2p \rangle = (-2)^p \sqrt{\frac{m!}{(m+2p)!}} \varphi_0^{2p} e^{-\varphi_0^2/4} L_m^{2p}(\varphi_0^2/2), \quad (1.12)$$

$$\langle m | \sin \varphi | m + 2p + 1 \rangle = (-2)^p \sqrt{\frac{m!}{2(m+2p+1)!}} \varphi_0^{2p+1} e^{-\varphi_0^2/4} L_m^{2p+1}(\varphi_0^2/2).$$

После того, как гамильтониан был диагонализован,  $H_f = \sum_l \varepsilon_l |l\rangle\langle l|$ , можно получить матричные элементы оператора заряда  $\langle l | n | l' \rangle$ . В осцилляторном базисе  $|m\rangle$  оператор заряда представим в виде  $n = -\frac{i}{\sqrt{2}\varphi_0}(c - c^\dagger)$

$$\langle m | n | m' \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}\varphi_0} (\sqrt{m'} \delta_{m,m'-1} - \sqrt{m} \delta_{m,m'+1}). \quad (1.13)$$

Окончательно, получим

$$\langle l | n | l' \rangle = \sum_{mm'} \langle l | m \rangle \langle m | n | m' \rangle \langle m' | l' \rangle, \quad (1.14)$$

где  $\langle l | m \rangle$  и  $\langle m' | l' \rangle$  - собственные функции гамильтониана флексониума в осцилляторном базисе. Аналогичным образом получаются матричные элементы оператора потока.

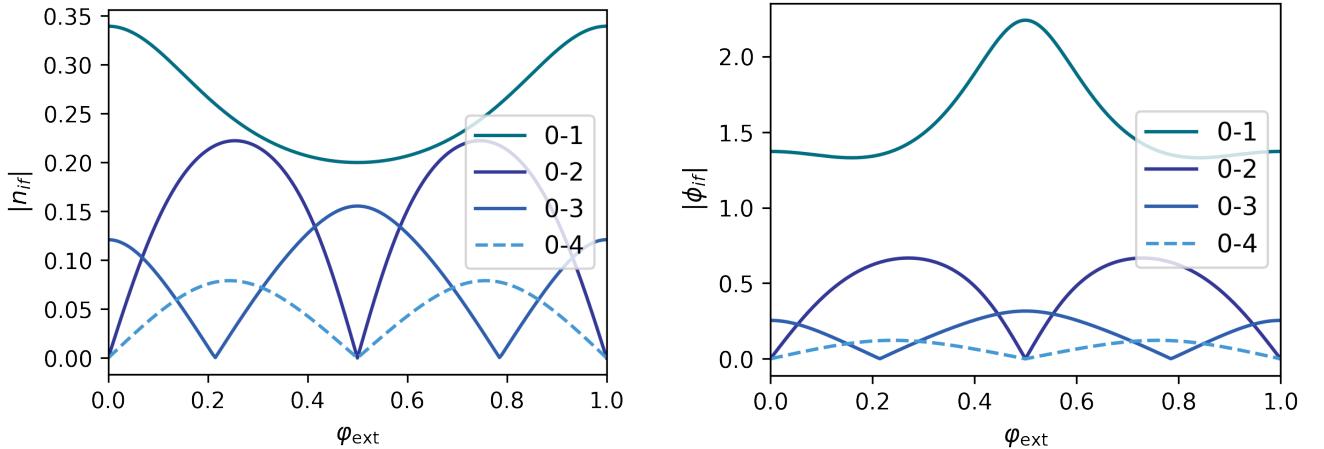


Рисунок 1.6 – Матричные элементы операторов заряда и потока для переходов 0-k

Описанный подход также позволяет производить численную диагонализацию гамильтониана системы флексониума и резонаторов.

## 1.7 Флаксониум, емкостно связанный с резонаторами

Для реализации GKP-кода коррекции ошибок необходимо построить квантовую цепочку, состоящую из кубита, в нашем случае являющегося флаксониумом, и двух емкостно связанных с ним резонаторов, при этом один из резонаторов будет служить для дисперсионного считывания состояния кубита, а второй будет играть роль хранилища логических GKP-состояний, на которых построена коррекция ошибок. На рис.1.7 представлена реализация такой цепочки: справа и слева изображены резонаторы, связанные при помощи емкостей  $C_{l1}$  и  $C_{r2}$  с кубитом, находящемся посередине.

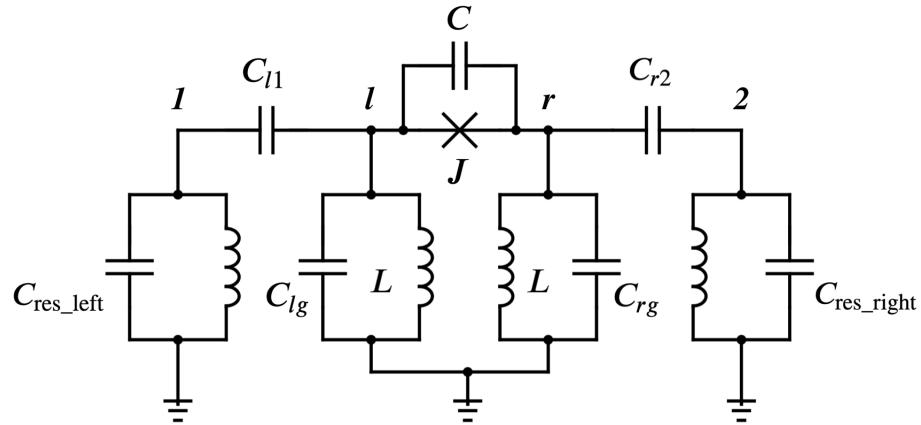


Рисунок 1.7 — Схема цепи для реализации GKP-кода.

Проквантуем эту цепочку. Для этого запишем лагранжиан  $L(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$

$$L = T - \Pi \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{1}{2} C_{lg} \dot{\varphi}_l^2 + \frac{1}{2} C_{rg} \dot{\varphi}_r^2 + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi}_l - \dot{\varphi}_r)^2 + \frac{1}{2} C_{l1} (\dot{\varphi}_l - \dot{\varphi}_1)^2 \\ &+ \frac{1}{2} C_{r2} (\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} C_{\text{res left}} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} C_{\text{res right}} \dot{\varphi}_2^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\hat{\Pi} = E_J (1 - \cos \left( \frac{2\pi(\varphi_l - \varphi_r)}{\Phi_0} \right)) + \frac{\varphi_l^2}{2L} + \frac{\varphi_r^2}{2L} + \frac{\varphi_1^2}{2L_{\text{res left}}} + \frac{\varphi_2^2}{2L_{\text{res right}}} \quad (1.17)$$

Перепишем  $\hat{T}$  через матрицу емкостей  $\hat{C}$

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \vec{\varphi}^T \hat{C} \vec{\varphi} \quad (1.18)$$

где  $\vec{\varphi} = (\varphi_l, \varphi_r, \varphi_1, \varphi_2)^T$  и  $\hat{C}$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C + C_{l1} + C_{lg} & -C & -C_{l1} & 0 \\ -C & C + C_{r2} + C_{rg} & 0 & -C_{r2} \\ -C_{l1} & 0 & C_{l1} + C_{\text{res left}} & 0 \\ 0 & -C_{r2} & 0 & C_{r2} + C_{\text{res right}} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Введем замену переменных:  $\varphi^+ = \varphi_l + \varphi_r$ ,  $\varphi^- = \varphi_l - \varphi_r$ . В матричном виде  $\vec{\varphi}' = \tilde{S}^{-1} \vec{\varphi}$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

где  $\vec{\varphi}' = (\varphi_+, \varphi_-, \varphi_1, \varphi_2)^T$ , при этом матрица емкостей преобразовывается как  $\hat{C}' = \tilde{S}^T \hat{C} \tilde{S}$ .

В новом базисе:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\varphi}}^T \hat{C}' \dot{\vec{\varphi}}' - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\varphi^+ - \varphi_{ext})^2}{2L} + \frac{(\varphi^- - \varphi_{ext})^2}{2L} + \frac{\varphi_1^2}{2L_{\text{res left}}} + \frac{\varphi_2^2}{2L_{\text{res right}}} \right\} \quad (1.21)$$

$$- E_J (1 - \cos \left( \frac{2\pi\varphi^-}{\Phi_0} \right)) \quad (1.22)$$

Из лагранжиана обобщенные импульсы  $q_i$  — канонически сопряженные переменные узловых потоков — являются узловыми зарядами:

$$q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \hat{C}'_{ij} \dot{\varphi}_j \quad (1.23)$$

Получим гамильтониан, используя преобразование Лежандра

$$H(\vec{\Phi}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_i} - L \quad (1.24)$$

В итоге получим квантово-механический гамильтониан, используя каноническое квантование:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \vec{q}'^T (\hat{C}')^{-1} \vec{q}' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\varphi^+ - \varphi_{ext})^2}{2L} + \frac{(\varphi^- - \varphi_{ext})^2}{2L} + \frac{\varphi_1^2}{2L_{\text{res left}}} + \frac{\varphi_2^2}{2L_{\text{res right}}} \right\} + E_J (1 - \cos \left( \frac{2\pi\varphi^-}{\Phi_0} \right)) \quad (1.25)$$

Данный гамильтониан условно можно разделить на пять частей:

$$\hat{H} = \hat{H}^+ + \hat{H}^- + \hat{H}_{\text{res left}} + \hat{H}_{\text{res right}} + \hat{V} \quad (1.26)$$

где

$$\hat{H}^- = 4E_{C-}(\hat{n}^-)^2 + E_J(1 - \cos(\theta^-)) + \frac{1}{2}E_L(\theta^- - \theta_{\text{ext}})^2 \quad (1.27)$$

$$\hat{H}^+ = 4E_{C+}(\hat{n}^+)^2 + \frac{1}{2}E_L(\theta^+ - \theta_{\text{ext}})^2 \quad (1.28)$$

Гамильтонианы  $\hat{H}_{\text{res right}}$ ,  $\hat{H}_{\text{res left}}$  — гамильтонианы правого и левого резонаторов — аналогичны по своей структуре  $\hat{H}^+$ , но при этом без внешнего потока  $\theta_{\text{ext}}$  в последнем слагаемом. В выражениях (1.27), (1.28) были введены безразмерные операторы потока  $\hat{\theta}_i = 2\pi\hat{\varphi}_i/\Phi_0$  и канонически сопряженные к ним  $\hat{n}_i = \hat{q}_i/2e$  — числа куперовских пар, а также использованы обозначения  $E_L = \frac{[\Phi_0/2\pi]^2}{2L}$ ,  $E_{Ci} = \frac{e^2}{2}((C')^{-1})_{ii}$ .  $\theta_{\text{ext}} = 2\pi\varphi_{\text{ext}}/\Phi_0$ .

Гамильтониан (1.27) по своей структуре является гамильтонианом флаксониума. Симметричная мода и резонаторы описываются гамильтонианом вида (1.28). Слагаемое  $\hat{V}$  в (1.26) описывает емкостное взаимодействие между различными модами  $\theta_\alpha$  и  $\theta_\beta$ , возникающее из недиагональных частей обратной матрицы емкостей  $(\hat{C}')^{-1}$

$$\hat{V}_{\beta\alpha} = \hat{V}_{\alpha\beta} = 2 \cdot \frac{1}{2}(2e)^2(\hat{C}')_{\alpha\beta}^{-1}\hat{n}_\alpha\hat{n}_\beta \quad (1.29)$$

При этом следует учесть, что в симуляции эксперимента мода  $\hat{H}^+$  не возбуждается: драйв кубита на ее частоте не происходит. Таким образом, избавляясь от нее в (1.26), получим окончательный гамильтониан, описывающий реализованную схему:

$$\hat{H} = \hat{H}^- + \hat{H}_{\text{res left}} + \hat{H}_{\text{res right}} + \hat{V} \quad (1.30)$$

Для дальнейших целей удобно будет разделить гамильтониан (1.30) на две части, каждая из которых описывает взаимодействие антисимметричной моды флаксониума с каждым из резонаторов по отдельности:  $\hat{H}_i = \hat{H}_i^{\text{res}} + \hat{H}^- + \hat{V}_i$ ,  $\hat{V}_i = \hat{n}_i\hat{n}_- \cdot 4e^2((C')^{-1})_{-,i}$ , где  $i = 1, 2$  — номерует резонаторы. Перепишем гамильтонианы резонаторов в терминах вторичного квантования, используя замену

$$\hat{\theta}_i = \theta_0^i(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i), \quad \hat{n}_i = \frac{i}{2}n_0^i(\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i). \quad (1.31)$$

где  $(\theta_0^i)^4 = \frac{2E_{Ci}}{E_{Li}}$  и  $(n_0^i)^4 = \frac{E_{Li}}{2E_{Ci}}$ . Тогда частота резонаторов будет выражаться как  $\omega_i = \sqrt{8E_{Ci}E_{Li}}$ , а гамильтониан резонатора примет знакомый вид

$$\hat{H}_i^{\text{res}} = \omega_i(\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \frac{1}{2}) \quad (1.32)$$

После диагонализации гамильтониана флаксониума, которую можно произвести при помощи численных методов, итоговый гамильтониан  $\hat{H}_i$  запишется в виде

$$\hat{H} = \omega_i\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \sum_l \varepsilon_l |l\rangle\langle l| + \hat{V}_i \quad (1.33)$$

где  $\varepsilon_l, |l\rangle$  - уровни энергии и собственные функции кубита-флаксониума. Слагаемое, описывающее взаимодействие между флаксониумом и резонатором, имеет вид

$$\hat{V}_i = \sum_{l,l'} g_{i;ll'} |l\rangle\langle l'| (a_i + a_i^\dagger) \quad (1.34)$$

где в качестве  $g_{i;ll'}$  обозначены матричные элементы связи  $g_{i;ll'} = \kappa_i \langle l|\hat{n}_-|l'\rangle$ , при этом  $\kappa_i = 2i \cdot n_0^i e^2 ((\hat{C}')^{-1})_{-,i}$ .

## 1.8 Дисперсионное приближение

Дисперсионный режим определяется условием  $|\varepsilon_{ll'} - \omega_i| \gg g_{i;ll'} \sqrt{\langle a_j^\dagger a_j \rangle + 1}$ , где  $\varepsilon_{ll'} = \varepsilon_l - \varepsilon_{l'}$ . Данное условие позволяет интерпретировать последнее слагаемое в (1.33) как возмущение. Преобразование

$$\hat{H}_{\text{disp}} = e^{\hat{S}} \hat{H} e^{-\hat{S}}, \quad \hat{S} = -i \sum_{ll'} \left[ \frac{g_{i;ll'} \hat{a}_i}{\varepsilon_{ll'} - \omega_i} - \frac{g_{i;l'l} \hat{a}_i^\dagger}{\varepsilon_{l'l} - \omega_i} \right] |l'\rangle\langle l| \quad (1.35)$$

приводит к гамильтониану [2]

$$\hat{H}_{\text{disp}} = e^{\hat{S}} \hat{H} e^{-\hat{S}} \simeq \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \sum_l (\varepsilon_l + \Lambda_l) |l\rangle\langle l| + \sum_l \chi_l \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |l\rangle\langle l|, \quad (1.36)$$

где

$$\Lambda_l = \sum_k \chi_{kl}, \quad \chi_l = \sum_k (\chi_{kl} - \chi_{lk}), \quad \chi_{kl} = \frac{|g_{i;kl}|^2}{\varepsilon_l - \varepsilon_k - \omega_i} \quad (1.37)$$

Выделяя первые два уровня кубита, получим т.н. дисперсионный гамильтониан:

$$\hat{H}_{\text{disp}} \simeq \tilde{\omega}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_q \hat{\sigma}_z - \chi \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\sigma}_z, \quad (1.38)$$

где преобразованные частоты  $\tilde{\omega}_i = \omega_i + (\chi_0 + \chi_1)/2$ ,  $\tilde{\varepsilon}_q = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \Lambda_1 - \Lambda_0$ , а  $\chi = (\chi_1 - \chi_0)/2$  - дисперсионный сдвиг.

Зависимость дисперсионного сдвига от внешнего потока можно получить при помощи второго порядка теории возмущений, где зависимость от внешнего потока  $\varphi_{\text{ext}}$  проявляется в зависимости матричных элементов заряда  $n_{kl}$ :

$$\chi = \kappa^2 \left[ \sum_{l \neq 0} |\hat{n}_{0l}|^2 \frac{2\varepsilon_{0l}}{\varepsilon_{0l}^2 - \omega_i^2} - \sum_{l \neq 1} |\hat{n}_{1l}|^2 \frac{2\varepsilon_{1l}}{\varepsilon_{1l}^2 - \omega_i^2} \right] \quad (1.39)$$

Полученный дисперсионный гамильтониан используется сразу в двух явлениях:

- Дисперсионное считывание состояния кубита за счет изменения частоты считающего резонатора в зависимости от состояния кубита, как это видно из гамильтониана (1.38)
- Реализация гейта условного смещения между вторым резонатором и кубитом (см. главу 2)

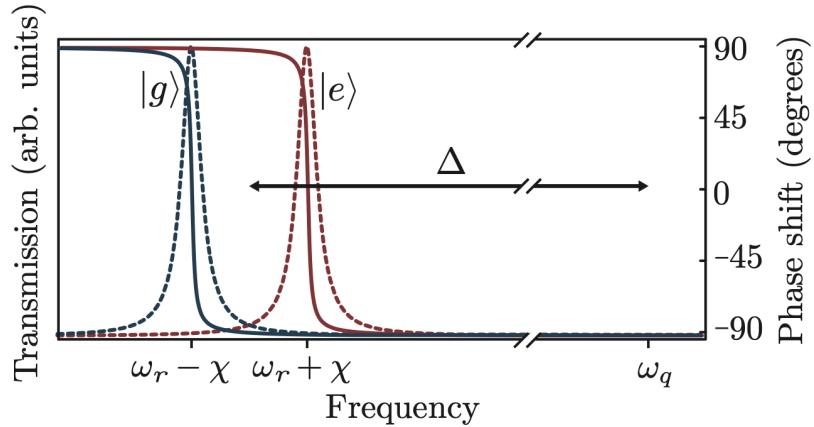


Рисунок 1.8 — Дисперсионное считывание. Амплитуда пропускания резонатора (штриховые линии) и соответствующие фазовые сдвиги (сплошные линии) для двух состояний кубита (синий цвет: земля, красный цвет: возбуждение). При возбуждении резонатора близко к его частотам отклики резонатора зависят от состояния кубита [3].

Построим зависимость  $\chi_{01}(\varphi_{\text{ext}})$

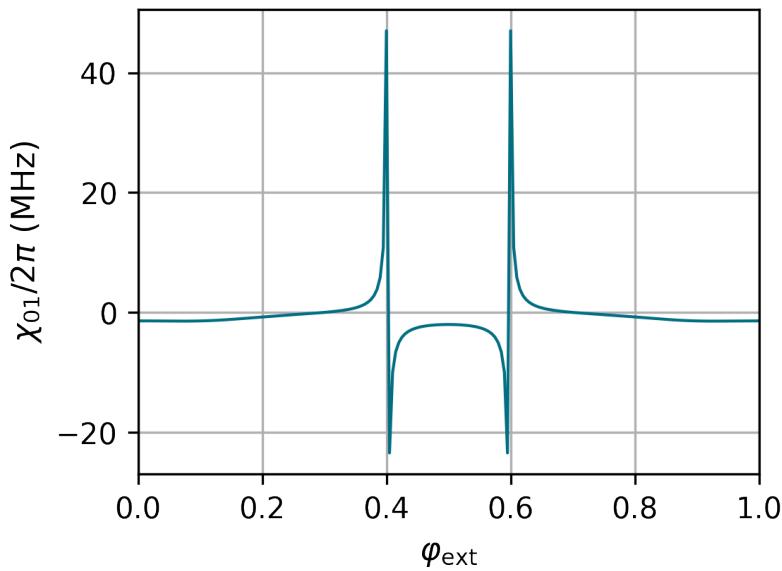


Рисунок 1.9 — Дисперсионный сдвиг,  $E_J = E_C = 5\Gamma\Gamma_{\text{Ц}}$ ,  $E_L = 1\Gamma\Gamma_{\text{Ц}}$ ,  $\kappa = 0.1\Gamma\Gamma_{\text{Ц}}$ ,  $E_{\text{res}} = 4\Gamma\Gamma_{\text{Ц}}$

## 1.9 Взаимодействие с внешней средой

Квантовая система в общем случае не является полностью изолированной. Все, что является внешним по отношению к системе, определяется как внешняя среда. Часть этой среды контролируется во время проведения эксперимента, однако квантовые системы также испытывают неподконтрольные экспериментатору изменения. Примером служит дефазировка и диссипативные потери в кубитах. Для описания таких ошибок будем использовать формализм матрицы плотности. Если кубит находится в неком состоянии  $|\psi\rangle$ , то матрица плотности определяется, как

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.40)$$

В таком случае состояние называется чистым. После взаимодействия с окружающей средой часть информации о том, в каком состоянии находится кубит, теряется, и матрица плотности записывается в общем случае как

$$\rho = \sum_k \lambda_k |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1.41)$$

такое состояние называется смешанным. Для матрицы плотности справедливо выражение  $\text{Tr}(\rho) = \sum_k \lambda_k = 1$ . Кроме того,  $\text{Tr}(\rho^2) = \sum_k \lambda_k^2 \leq 1$ , при этом значение 1 достигается только для чистого состояния. Используя матрицу плотности, можно найти среднее значение наблюдаемой:

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho). \quad (1.42)$$

В случае кубита матрица плотности может быть выражена как

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \langle\sigma_x\rangle\sigma_x + \langle\sigma_y\rangle\sigma_y + \langle\sigma_z\rangle\sigma_z) = \frac{1}{2}(I + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}). \quad (1.43)$$

Для описания взаимодействия квантовой системы с окружающей средой введем набор преобразований  $\{L_k\}$ , которые внешняя среда производит над квантовой системой в единицу времени  $dt$  с вероятностями  $\{p_k\}$ . Матрица плотности через промежуток времени  $dt$

$$\rho(t + dt) = \sum_k p_k L_k \rho(t) L_k^\dagger = \sum_k E_k \rho(t) E_k^\dagger, \quad (1.44)$$

где был введен оператор  $E_k = \sqrt{p_k} L_k$ . Эволюция матрицы плотности должна сохранять ее след, поэтому

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = 1. \quad (1.45)$$

Далее опишем основные взаимодействия кубита и резонатора с окружающей системой, приводящие к ошибкам и рассматриваемые в моделировании ГКР-кода коррекции ошибок.

### 1.9.1 Взаимодействие кубита с внешней средой

Случайные неконтролируемые физические процессы, происходящие в оборудовании для управления и измерения кубитов или во внешней среде, являются источниками шума, который приводит к декогеренции и снижает точность работы кубитов. В замкнутой системе динамика состояния кубита является детерминированной: если мы знаем начальное состояние кубита и его гамильтониан, то мы можем предсказать состояние кубита в любой момент в будущем. Однако в открытых системах ситуация меняется: теперь кубит взаимодействует с неконтролируемыми степенями свободы окружающей среды, которые приводят к флюктуациям. При наличии флюктуаций с течением времени состояние кубита все меньше и меньше похоже на предсказанное изначально и, в конце концов, теряется. Обсудим основные типы ошибок в двухуровневых системах.

#### Фазовая релаксация

Окружающая кубит среда состоит из большого количества квантовых степеней свободы, которые могут быть связаны с  $\sigma_z$  кубита. Шум вызывают неконтролируемые вращения кубита вокруг оси  $z$ . В сверхпроводящих цепочках этот шум может быть связан, например, с локальными изменениями электрического поля, вызывающими зарядовый шум, с локальными изменениями магнитного поля, вызывающими шум потока, или с конечной температурой локальной окружающей среды. Объединим все эти источники ошибок, учтя их в коэффициенте  $\Gamma_\varphi$  - фазовой скорости релаксации кубита.

Запишем вероятность того, что фазовая релаксация кубита произошла за интервал времени  $dt$  как  $\frac{\Gamma_\varphi dt}{2}$ . Тогда первый оператор эволюции запишется как

$$E_1 = \sqrt{\frac{\Gamma_\varphi dt}{2}} \sigma_z. \quad (1.46)$$

Для сохранения следа матрицы плотности равным единице введем дополнительный оператор  $E_0$ , чтобы выполнялось соотношение (1.45)

$$E_0^\dagger E_0 = I - E_1^\dagger E_1 = \left(1 - \frac{\Gamma_\varphi dt}{2}\right) I. \quad (1.47)$$

Эволюция матрицы плотности задается уравнением

$$\rho(t + dt) = \left(1 - \frac{\Gamma_\varphi dt}{2}\right) \rho(t) + \frac{\Gamma_\varphi dt}{2} \sigma_z \rho(t) \sigma_z, \quad (1.48)$$

$$\partial_t \rho(t) = \frac{\Gamma_\varphi}{2} (\sigma_z \rho(t) \sigma_z - \rho(t)). \quad (1.49)$$

Домножая левую и правую часть уравнения (1.49) на  $\sigma_i, i = x, y, z$ , и используя свойство матриц Паули  $\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} I$ , получим эволюцию на ожидаемые значения  $\sigma_i$ :

$$\partial_t \langle \sigma_z \rangle = 0, \quad (1.50)$$

$$\partial_t \langle \sigma_x \rangle = -\Gamma_\varphi \langle \sigma_x \rangle, \quad (1.51)$$

$$\partial_t \langle \sigma_y \rangle = -\Gamma_\varphi \langle \sigma_y \rangle. \quad (1.52)$$

Уравнения выше показывают, что неконтролируемые зашумленные взаимодействия внешней среды с  $\sigma_z$  кубита приводят к тому, что фаза  $\varphi$  кубита, находившегося в произвольном состоянии  $\cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + \sin(\frac{\theta}{2})e^{i\varphi}|1\rangle$  на сфере Блоха, теряется со скоростью  $\Gamma_\varphi$ . При этом  $\theta$  остается постоянной.

## Энергетическая релаксация

Когда двухуровневая система находится в возбужденном состоянии, ее связь бесконечным количеством электромагнитных мод, изначально находящимся в вакуумном состоянии, приводит к спонтанному излучению фотона в одной из этих мод, что сопровождается переходом двухуровневой системы из возбужденного состояния в основное. Этот тип ошибки кубита называется энергетической релаксацией. Обозначим скорость энергетической релаксации как  $\Gamma_\downarrow$ .

Вероятность того, что за время  $dt$  произошла релаксация запишется через коэффициент энергетической релаксации как  $\Gamma_\downarrow dt$ . Тогда оператор эволюции, действующий на матрицу плотности

$$E_1 = \sqrt{\Gamma_\downarrow dt} \sigma_-, \quad (1.53)$$

где  $\sigma_- = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2}$  - оператор уничтожения. Для сохранения следа матрицы плотности введем оператор

$$E_0 = I - (1 - \sqrt{1 - \Gamma_\downarrow dt}) \sigma_+ \sigma_-, \quad (1.54)$$

чтобы выполнялось соотношение (1.45):  $E_0^\dagger E_0 = I - \Gamma_\downarrow dt \sigma_+ \sigma_-$ . Раскладывая  $1 - \sqrt{1 - \Gamma_\downarrow dt} = \frac{\Gamma_\downarrow dt}{2} + O((\Gamma_\downarrow dt)^2)$ , получим уравнение на динамику матрицы плотности:

$$\partial_t \rho = \frac{\Gamma_\downarrow}{2} (2\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \rho(t) \sigma_+ \sigma_-). \quad (1.55)$$

Эволюция ожидаемых значений операторов Паули:

$$\partial_t \langle \sigma_z \rangle = -\Gamma_{\downarrow} (1 - \langle \sigma_z \rangle), \quad (1.56)$$

$$\partial_t \langle \sigma_x \rangle = -\frac{\Gamma_{\downarrow}}{2} \langle \sigma_x \rangle, \quad (1.57)$$

$$\partial_t \langle \sigma_y \rangle = -\frac{\Gamma_{\downarrow}}{2} \langle \sigma_y \rangle. \quad (1.58)$$

Уравнения показывают, что фаза  $\varphi$  при энергетической релаксации теряется со скоростью  $\Gamma_{\downarrow}/2$ , а амплитуда  $\theta$  со скоростью  $\Gamma_{\downarrow}$ . Часто вводятся характерные времена энергетической и фазовой релаксации как

$$T_1 = \frac{1}{\Gamma_{\downarrow}}, \quad T_{\varphi} = \frac{1}{\Gamma_{\varphi}}. \quad (1.59)$$

Кроме того, вводится время когерентности  $T_2$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_{\varphi}}. \quad (1.60)$$

На рисунке изображены различные типы шумов, действующие на кубит и то, к возникновению каких ошибок они приводят.

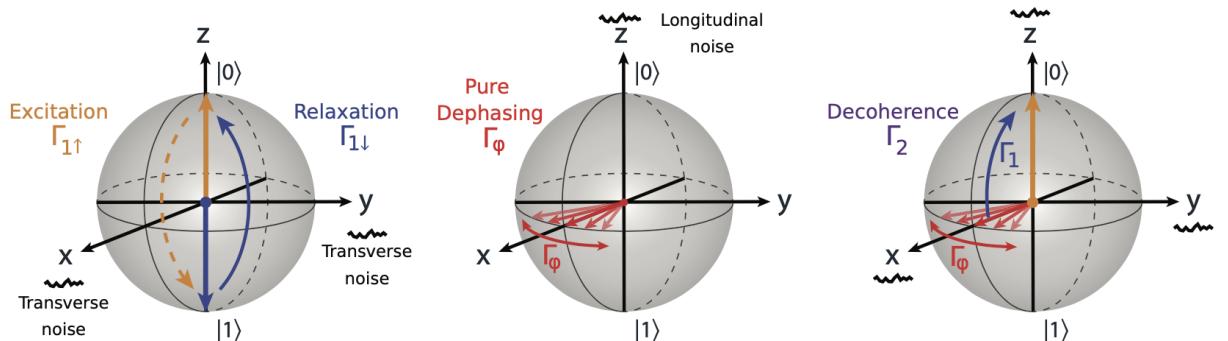


Рисунок 1.10 — Поперечные и продольные шумы, представленные на сфере Блоха [4].

## 1.9.2 Уравнение Линдблада

Для описания действия окружающей среды на квантовую систему необходимо уравнение на динамику матрицы плотности системы  $\rho$ , которое учитывало бы преобразования матрицы плотности  $\{L_k\}$ , вызываемые окружающей средой. Уравнение, которое позволяет это сделать, называется уравнением Линдблада

$$\partial_t \rho(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_{k \neq 0} \frac{\Gamma_k}{2} (2L_k \rho(t) L_k^\dagger - \{L_k^\dagger L_k, \rho(t)\}) \quad (1.61)$$

Второе диссипативное слагаемое часто записывается в форме диссипатора

$$\mathcal{D}[L_k]\rho = 2L_k\rho L_k^\dagger - \{L_k^\dagger L_k, \rho\}, \quad (1.62)$$

где  $\{\bullet, \bullet\}$  обозначает антисимметрическую коммутацию. Основным рассматриваемым эффектом взаимодействия резонатора с внешней средой является потеря фотонов резонатором с коэффициентом затухания  $\kappa$ . Уравнение Линдблада, описывающее этот процесс, записывается следующим образом:

$$\partial_t\rho = -i[H_{\text{res}}, \rho] + \frac{\kappa}{2}\mathcal{D}[a]\rho \quad (1.63)$$

где  $H_{\text{res}} = \omega_{\text{res}}a^\dagger a$ ,  $a$  — понижающий оператор. Комбинируя это слагаемое со слагаемыми, описывающими динамику матрицы плотности кубита (1.49) и (1.55), получим итоговое уравнение на динамику системы кубит+резонатор:

$$\partial_t\rho = -i[H, \rho] + \frac{1}{T_{\text{res}}}\mathcal{D}[a]\rho + \frac{1}{T_1}\mathcal{D}[\sigma_-]\rho + \frac{1}{2T_\varphi}\mathcal{D}[\sigma_z]\rho, \quad (1.64)$$

где  $\rho$  — общая матрица плотности кубита и резонатора,  $1/T_1 \equiv \Gamma_1 \equiv \Gamma_\downarrow$ .

## 1.10 Действие микроволнового сигнала на квантовую систему

Рассмотрим как микроволновый сигнал действует на резонатор или кубит. Уравнение Линдблада хорошо описывает неконтролируемое влияние внешней среды на квантовую систему, однако часть окружающей среды контролируется экспериментатором: например, для контроля над кубитом или резонатором необходимо подавать микроволновый сигнал через передающие линии. Для описания такого рода взаимодействий была разработана т.н. теория ввода-вывода. В данной теории гамильтониан передающей линии, играющей роль окружающей среды, записывается в виде гамильтониана бесконечной цепочки  $LC$ -контуров с всеми возможными резонансными частотами

$$H_{\text{tml}} = \int_0^\infty d\omega' \omega b^\dagger(\omega) b(\omega) \quad (1.65)$$

где понижающий и повышающий операторы мод удовлетворяют соотношению  $[b(\omega), b^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$ .

Будем считать, что передающая линия связана с резонатором через емкость  $C_\kappa$ . Таким образом, заряды в каждом из  $LC$ -контуров взаимодействуют с зарядом  $\hat{n}$  в резонаторе, поэтому

$$H_{\text{int}} = - \int_0^\infty d\omega \lambda(\omega) (b^\dagger(\omega) - b(\omega)) (a^\dagger - a), \quad (1.66)$$

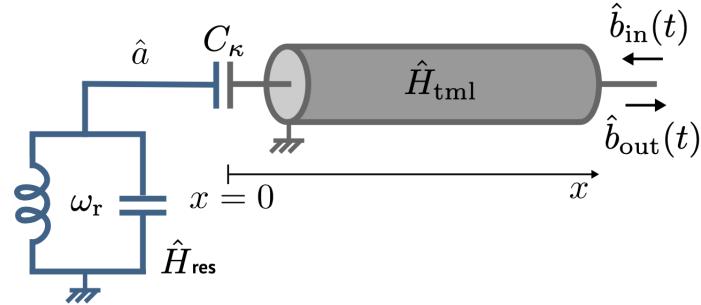


Рисунок 1.11 — Резонатор, емкостно связанный с передающей линией

где  $\lambda(\omega) = (C_\kappa/\sqrt{cC_r})\sqrt{\omega_r\omega/2\pi v}$  — сила взаимодействия, зависящая от моды,  $\omega_r$  — частота резонатора,  $C_r$  — емкость резонатора. Полный гамильтониан системы запишется в виде

$$H = H_r + H_{\text{tml}} - \int_0^\infty d\omega \lambda(\omega) (b^\dagger(\omega) - b(\omega)) (a^\dagger - a), \quad (1.67)$$

где  $H_r = \omega_r a^\dagger a$  — гамильтониан резонатора.

Будем считать, что  $\lambda(\omega)$  достаточно мало по отношению к  $\omega_r$ , так что гамильтониан взаимодействия  $H_{\text{int}}$  можно считать малым возмущением. В таком случае добротность системы велика, и резонатор реагирует на микроволновый сигнал только в небольшом промежутке частот вблизи  $\omega = \omega_r$ . В таком случае можно принять  $\lambda(\omega) \approx \lambda(\omega_r)$ . Кроме того, будем использовать приближение вращающейся волны, пренебрегая слагаемыми с большой частотой. Гамильтониан системы запишется как

$$H = H_r + H_{\text{tml}} - \int_0^\infty d\omega \lambda(\omega_r) (ab^\dagger(\omega) - a^\dagger b(\omega)). \quad (1.68)$$

Запишем уравнение Гейзенберга на поникающий оператор резонатора

$$\partial_t a = -i [a, H] \quad (1.69)$$

$$= -i\omega_r a - i \int_0^\infty d\omega \lambda(\omega_r) b(\omega). \quad (1.70)$$

Для того, чтобы решить это уравнение, необходимо записать также уравнение Гейзенберга на  $b(\omega)$ . Разделим эволюцию  $b(\omega)$  на ее свободную эволюцию под действием  $H_{\text{tml}}$  и эволюцию, обусловленную связью с  $a$ , так что проинтегрированные решения от момента времени  $t_0$  до  $t$  равны

$$b(\omega) = b_0(\omega) e^{-i\omega(t-t_0)} - i\lambda(\omega_r) \int_{t_0}^t dt' a(t') e^{i\omega t'}, \quad (1.71)$$

где  $b_0$  — оператор уничтожения моды  $\omega$  в момент времени  $t_0 < t$ . Подставим полученное выражение для  $b(\omega)$  в (1.69), получим

$$\partial_t a = -i\omega a - \frac{\kappa}{2} a - \sqrt{\kappa} a_{\text{in}}, \quad (1.72)$$

где  $a_{\text{in}}(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega b_0(\omega) e^{-i\omega(t-t_0)}$  соответствует полю, приходящему в резонатор,  $\kappa = 2\pi\lambda^2(\omega_r)$ . Можно так же получить аналогичное уравнение для связи  $a$  с выходным сигналом

$$\partial_t a = -i\omega a + \frac{\kappa}{2} a - \sqrt{\kappa} a_{\text{out}}, \quad (1.73)$$

где  $a_{\text{out}}(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega b_1(\omega) e^{-i\omega(t-t_0)}$ ,  $b_1(\omega)$  — оператор уничтожения моды  $\omega$  в момент времени  $t_1 > t$ . В итоге получаем т.н. уравнение ввода-вывода

$$a_{\text{out}}(t) - a_{\text{in}}(t) = \sqrt{\kappa} a(t) \quad (1.74)$$

Это уравнение показывает, что выходящее поле представляет собой сумму входящего поля и текущего поля внутри схемы. Гамильтониан, связанный с драйвом, таким образом выглядит

$$H_d = (\varepsilon(t)a^\dagger + \varepsilon^*(t)a) \quad (1.75)$$

## 1.11 Действие микроволнового сигнала на резонатор при наличии затухания

Эволюция матрицы плотности резонатора под воздействием микроволнового сигнала  $\varepsilon(t)$  при условии наличия однофотонных потерь, описываемых коэффициентом затухания  $\kappa$ , подчиняется уравнению Линдблада (1.61):

$$\partial_t \rho = -i[H, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a]\rho, \quad (1.76)$$

$$H = H_0 + \varepsilon(t)a^\dagger + h.c., \quad (1.77)$$

где  $\mathcal{D}[L] = L\rho L^\dagger - \frac{1}{2}\{LL^\dagger, \rho\}$  — оператор Линдблада, а  $H_0 = \omega a^\dagger a$  — гамильтониан осциллятора. Осуществим унитарное преобразование матрицы плотности резонатора при помощи т.н. оператора смещения  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ ,  $\alpha$  — комплексный зависящий от времени параметр:  $\tilde{\rho} = D^\dagger(\alpha)\rho D(\alpha)$ . Эволюция преобразованной матрицы плотности описывается уравнением:

$$\partial_t \tilde{\rho} = -i[\tilde{H}, \tilde{\rho}] + \kappa \mathcal{D}[a + \alpha]\tilde{\rho}, \quad (1.78)$$

$$\tilde{H} = D^\dagger(\alpha)H_0D(\alpha) + (-i\partial_t\alpha + \varepsilon(t))a^\dagger + h.c., \quad (1.79)$$

где действие оператора Линдблада  $\mathcal{D}[a + \alpha]$  в новой системе отсчета запишется как

$$\mathcal{D}[a + \alpha]\tilde{\rho} = \mathcal{D}[a]\tilde{\rho} - i\left[i\frac{\kappa}{2}(\alpha^*a - \alpha a^\dagger), \tilde{\rho}\right] \quad (1.80)$$

Путем введения нового эффективного гамильтониана  $\tilde{\tilde{H}}$  уравнение (1.78) преобразовывается к виду обычного уравнения Линдблада (1.76):

$$\partial_t \tilde{\rho} = -i[\tilde{\tilde{H}}, \tilde{\rho}] + \kappa \mathcal{D}[a]\tilde{\rho}, \quad (1.81)$$

$$\tilde{\tilde{H}} = D^\dagger(\alpha)H_0D(\alpha) + (-i\partial_t\alpha + \varepsilon(t) - i\frac{\kappa}{2}\alpha)a^\dagger + h.c. \quad (1.82)$$

Зафиксировав желаемое смещение  $\alpha$ , подберем  $\varepsilon(t)$  таким образом, чтобы последнее слагаемое в (1.82) занулялось. Таким образом, смещение  $\alpha(t)$  при воздействии микроволнового сигнала на резонатор подчиняется уравнению

$$i\partial_t\alpha = \varepsilon(t) - i\frac{\kappa}{2}\alpha, \quad (1.83)$$

называющемуся уравнением Ланжевена. Гамильтониан в новой системе отсчета получается из гамильтониана резонатора в лабораторной системе путем унитарного преобразования  $\tilde{\tilde{H}} = D^\dagger(\alpha)H_0D(\alpha)$ . Таким образом, приходим к важному выводу: воздействие микроволнового сигнала на резонатор приводит к смещению состояния резонатора на параметр  $\alpha$ , подчиняющийся уравнению (1.83).

## Глава 2. GKP-код и протокол коррекции ошибок

### 2.1 Квантовая коррекция ошибок

Квантовая коррекция ошибок играет важную роль при реализации надежных отказоустойчивых систем для квантовых вычислений. На данный момент предпринимаются усилия по созданию сверхпроводящих трансмоновых кубитов [5], соединенных с микроволновыми резонаторами для реализации архитектуры т.н. поверхностного кода, в которой логические кубиты — абстрактные кубиты, на которых происходит выполнение алгоритмов — состоят из десятков или сотен элементарных кубитов-трансмонов и сверхпроводящих резонаторов [6]. Одним из недостатков поверхностных кодов является то, что их реализация подразумевает использование большого количества физических кубитов, в связи с чем возникает вопрос, существуют ли альтернативные подходы к коррекции ошибок. В 2001 году Д.Готтесманом, А.Китаевым и Д.Прескиллом была опубликована работа, в которой описывалось кодирование дискретной квантовой информации в непрерывной квантовой системе, другими словами, кубита в осцилляторе [7]. GKP-код (Gottesman-Kitaev-Preskill) дает возможность использовать микроволновый резонатор для хранения состояния одного логического кубита, а вспомогательный кубит, связанный с ним, может использоваться для управления состоянием резонатора.

В системе резонатор+кубит возникают ошибки, связанные с однофотонными потерями в резонаторе, керровским слагаемым, а также дефазировкой и затуханием в кубите. В своей основополагающей статье Готтесман, Китаев и Прескилл подчеркнули тот факт, что все эти ошибки непрерывны в фазовом пространстве логического кубита. Это означает, что сдвиг состояний в фазовом пространстве будет незначительным на малых временах. Таким образом, чтобы код коррекции ошибок мог исправить любую из указанных выше ошибок за малое время, ему нужно уметь детектировать небольшие сдвиги в фазовом пространстве резонатора и уметь сдвигать их обратно, чтобы скорректировать ошибку. GKP-состояния, живущие в осцилляторе, на которых и производится коррекция ошибок, при этом будем также называть логическими состояниями. На логические состояния действуют логические операторы Паули  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  и  $\bar{Z}$ .

Стоит добавить, что недавно вышли работы, в которых описывается подход к масштабированию GKP-кода на основе поверхностных кодов [8], а также реализация двухкубитных гейтов Клиффорда на GKP-кубитах [9].

## 2.2 Оператор смещения

Для того, чтобы определить ГКР-код, введем в рассмотрение оператор смещения, определяемый, как

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}), \quad (2.1)$$

где  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  – лестничные операторы гармонического осциллятора, а  $\alpha$  – комплексное число. Используя формулу Бейкера – Кэмбелла – Хаусдорфа, можно получить, что операторы смещения удовлетворяют свойству

$$\hat{D}(\beta)\hat{D}(\alpha) = e^{(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)/2}\hat{D}(\alpha + \beta) = e^{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha}\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = e^{2i\text{Im}(\beta\alpha^*)}\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta). \quad (2.2)$$

В сверхпроводящих квантовых цепочках этот оператор описывает унитарную эволюцию сверхпроводящего резонатора, на который действует микроволновый сигнал (см.главу 1). Фаза и амплитуда параметра  $\alpha$  зависят от амплитуды и фазы сигнала. Оператор смещения позволяет создавать когерентные состояния квантового гармонического осциллятора:

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle, \quad \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.3)$$

Для когерентных состояний выполняются свойства  $\langle\alpha|\hat{Q}|\alpha\rangle = \text{Re}(\alpha)$ ,  $\langle\alpha|\hat{P}|\alpha\rangle = \text{Im}(\alpha)$ , откуда можно получить среднее число фотонов в резонаторе через аргумент оператора смещения  $\alpha$ :  $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = \langle\hat{Q}^2 + \hat{P}^2\rangle = |\alpha|^2$ .

## 2.3 Оператор условного смещения

Введем также т.н. оператор условного смещения, действующий на гильбертовом пространстве осциллятора и кубита. Оператор условного смещения определяется как

$$C\hat{D}(\beta) = \hat{D}(\beta\hat{\sigma}_z)) = \hat{D}\left(\frac{\beta}{2}\right)|0\rangle\langle 0| + \hat{D}\left(-\frac{\beta}{2}\right)|1\rangle\langle 1|, \quad (2.4)$$

где  $|0, 1\rangle$  - состояния кубита. Оператор условного смещения можно представить в виде

$$\hat{D}\left(\alpha\hat{\sigma}_z\right) = \sum_k \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})^k}{k!} \hat{\sigma}_z^k = \hat{\Sigma}(\alpha)\hat{I} + \hat{\Delta}(\alpha)\hat{\sigma}_z \quad (2.5)$$

где  $\hat{\Sigma}(\beta) = \frac{1}{2}(\hat{D}(\beta) + \hat{D}(-\beta))$  и  $\hat{\Delta}(\beta) = \frac{1}{2}(\hat{D}(\beta) - \hat{D}(-\beta))$  соответствуют четным и нечетным слагаемым.

## 2.4 Представления фазового пространства

В классической механике координатами в фазовом пространстве являются координата и импульс. Большой ансамбль частиц будет иметь распределение в фазовом пространстве, которое отражает статистические особенности распределения частиц. В квантовой механике состояние не может иметь определенные координату и импульс. В этом случае функция, называемая функцией Вигнера, отображает свойства состояний квантового гармонического осциллятора. Для того, чтобы построить эту функцию, сначала необходимо понятие характеристической функции. Для чистого состояния  $|\psi\rangle$  характеристическая функция  $C(\alpha)$  определяется, как:

$$C(\alpha) = \langle \psi | \hat{D}(\alpha) | \psi \rangle. \quad (2.6)$$

Таким образом, характеристическая функция представляет собой среднее значение оператора смещения. В более общем случае, для матрицы плотности  $\rho$

$$C(\alpha) = \langle \hat{D}(\alpha) \rangle = \text{Tr}(\hat{D}(\alpha)\rho). \quad (2.7)$$

$C(\alpha)$  — комплекснозначная функция, при этом

$$C(-\alpha) = \langle \hat{D}(-\alpha) \rangle = \langle \hat{D}^\dagger(\alpha) \rangle = C(\alpha)^*. \quad (2.8)$$

Для того, чтобы измерить характеристическую функцию осциллятора, необходима вспомогательная двухуровневая система, связанная с ним (связка кубит+резонатор). Для этого необходимо инициализировать вспомогательный кубит в состоянии  $|+\rangle$  и использовать определенный выше оператор условного смещения  $C\hat{D}$ (2.4). Найдем матрицу плотности кубита после действия оператора условного смещения на систему осциллятор + кубит с матрицей плотности  $\rho_{\text{osc}} \otimes |+\rangle\langle+|$ . Для этого посчитаем след по осциллятору у преобразованной матрицы плотности

$$\rho_q = \text{Tr}_{\text{osc}} \left( \hat{D}(\alpha \hat{\sigma}_z) \rho_{\text{osc}} \otimes |+\rangle\langle+| \hat{D}(-\alpha \hat{\sigma}_z) \right). \quad (2.9)$$

Выражая оператор условного смещения  $C\hat{D}$  через  $\hat{\Sigma}$  и  $\hat{\Delta}$  из (2.5), получим

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha \hat{\sigma}_z) \rho_{\text{osc}} |+\rangle\langle+| \hat{D}(-\alpha \hat{\sigma}_z) &= \hat{\Sigma}(\alpha) \rho_{\text{osc}} \hat{\Sigma}(\alpha) |+\rangle\langle+| \\ &\quad - \hat{\Delta}(\alpha) \rho_{\text{osc}} \hat{\Delta}(\alpha) |-\rangle\langle-| \\ &\quad + \hat{\Delta}(\alpha) \rho_{\text{osc}} \hat{\Sigma}(\alpha) |-\rangle\langle+| \\ &\quad - \hat{\Sigma}(\alpha) \rho_{\text{osc}} \hat{\Delta}(\alpha) |+\rangle\langle-|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя выражения для  $\hat{\Sigma}$  и  $\hat{\Delta}$ , получим несколько типов слагаемых. Первый тип слагаемых имеет вид  $\hat{D}(\alpha)\rho_{\text{osc}}\hat{D}(-\alpha) + \text{h.c.}$ , который соответствуют унитарному преобразованию матрицы плотности осциллятора оператором смещения. Следовательно, при взятии следа по осциллятору это слагаемое обращается в 1. Другой тип слагаемых имеет вид  $\hat{D}(\alpha)\rho_{\text{osc}}\hat{D}(\alpha)$  и  $\hat{D}(-\alpha)\rho_{\text{osc}}\hat{D}(-\alpha)$ . Используя свойство следа  $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$ , получим, что

$$\begin{aligned}\text{Tr}_{\text{osc}}(\hat{D}(\alpha)\rho_{\text{osc}}\hat{D}(\alpha)) &= \text{Tr}_{\text{osc}}(\hat{D}(2\alpha)\rho_{\text{osc}}) = C(2\alpha), \\ \text{Tr}_{\text{osc}}(\hat{D}(-\alpha)\rho_{\text{osc}}\hat{D}(-\alpha)) &= \text{Tr}_{\text{osc}}(\hat{D}(-2\alpha)\rho_{\text{osc}}) = C(-2\alpha).\end{aligned}\quad (2.11)$$

В итоге, из свойства (2.8) получим

$$\begin{aligned}\rho_q &= \text{Tr}_{\text{osc}}\left(\hat{D}(\alpha\hat{\sigma}_z)\rho_{\text{osc}} \otimes |+\rangle\langle+|\hat{D}(-\alpha\hat{\sigma}_z)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \text{Re}(C(2\alpha))\right)|+\rangle\langle+| \\ &\quad + \left(1 - \text{Re}(C(2\alpha))\right)|-\rangle\langle-| + i\text{Im}(C(2\alpha))(|-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|) \\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{I} + \text{Re}(C(2\alpha))\hat{\sigma}_x + \text{Im}(C(2\alpha))\hat{\sigma}_y\right).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Таким образом, измерение вспомогательного кубита вдоль  $\hat{\sigma}_x$  даст действительную часть характеристической функции осциллятора, а измерение вдоль  $\hat{\sigma}_y$  — мнимую

$$\begin{aligned}\langle\hat{\sigma}_x\rangle &= \text{Tr}(\rho_q\hat{\sigma}_x) = \text{Re}(C(2\alpha)), \\ \langle\hat{\sigma}_y\rangle &= \text{Tr}(\rho_q\hat{\sigma}_y) = \text{Im}(C(2\alpha)).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Определим функцию Вигнера осциллятора как двумерное преобразование Фурье от характеристической функции

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\tilde{\alpha} C(\tilde{\alpha}) e^{\alpha\tilde{\alpha}^* - \alpha^*\tilde{\alpha}}. \quad (2.14)$$

Из свойства (2.8) следует, что определенная таким образом функция Вигнера всегда действительна. Также она нормируется на 1:

$$\int d^2\alpha W(\alpha) = C(0) = 1. \quad (2.15)$$

Вводя координату  $Q = \text{Re}(\alpha)$  и импульс  $P = \text{Im}(\alpha)$ , можно выразить распределения  $P(Q)$  и  $P(P)$  для осциллятора

$$\begin{aligned}P(Q) &= \langle Q|\rho|Q\rangle = \int dQ W(P, Q), \\ P(P) &= \langle P|\rho|P\rangle = \int dP W(P, Q).\end{aligned}\quad (2.16)$$

## 2.5 GKP-код

Воспользуемся свойством (2.2) операторов смещения. В частности, операторы смещения антисимметричны, если для комплексных параметров  $\alpha$  и  $\beta$  верно равенство

$$\beta\alpha^* - \beta^*\alpha = i\pi. \quad (2.17)$$

Два оператора коммутируют, если, в частности,

$$\beta\alpha^* - \beta^*\alpha = 2i\pi. \quad (2.18)$$

Для определения GKP-кода сначала выберем операторы  $\bar{X} = \hat{D}(\alpha)$  и  $\bar{Z} = \hat{D}(\beta)$ , где комплексные параметры удовлетворяют свойству (2.17). Для удобства рассмотрим  $\alpha = \sqrt{\pi/2}$ ,  $\beta = i\sqrt{\pi/2}$ . Такой выбор обеспечивает выполнение соотношения  $\bar{X}\bar{Z} = -\bar{Z}\bar{X}$  для логических операторов Паули. Логический оператор Паули  $\bar{Y}$  определим как  $\bar{Y} = i\bar{X}\bar{Z} = \hat{D}(\alpha+\beta)$ . Чтобы обеспечить выполнение свойств логических операторов Паули  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  аналогичных свойствам обычных матриц Паули  $2 \times 2$ , определим базис состояний GKP-кода как общие собственные состояния, соответствующие собственному значению  $+1$  двух операторов, называемых операторами стабилизации GKP-кода или стабилизаторами

$$\hat{S}_q = \bar{X}^2 = \hat{D}(2\alpha), \quad \hat{S}_p = \bar{Z}^2 = \hat{D}(2\beta). \quad (2.19)$$

Из такого определения следует, что  $\bar{X}^2 = \bar{Y}^2 = \bar{Z}^2 = \hat{I}$ , при этом антисимметричные соотношения гарантируются свойством (2.17). Из уравнения (2.18) следует, что  $S_p$  и  $S_q$  коммутируют друг с другом, а также с операторами  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ .

Мы можем выразить базис GKP-состояний напрямую через собственные состояния двух обобщенных квадратур  $\hat{Q} = i(\beta^*\hat{a} - \beta\hat{a}^\dagger)/\sqrt{\pi}$ ,  $\hat{P} = -i(\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger)/\sqrt{\pi}$ , так, что  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i$  и  $\hat{X} = e^{-i\sqrt{\pi}\hat{P}}$ ,  $\hat{Z} = e^{i\sqrt{\pi}\hat{Q}}$ ,  $\hat{Y} = e^{i\sqrt{\pi}(\hat{Q}-\hat{P})}$ . При этом стабилизаторы выражаются как  $\hat{S}_p = e^{2i\sqrt{\pi}\hat{Q}}$ ,  $\hat{S}_q = e^{-2i\sqrt{\pi}\hat{P}}$ . Для этого рассмотрим состояния  $|l\rangle_L$ , где  $l = 0, 1$ , определяемые как

$$|l\rangle_L = \sum_n |2n\sqrt{\pi} + l\sqrt{\pi}\rangle_Q, \quad (2.20)$$

где обозначение  $|q\rangle_Q$  соответствует собственному состоянию оператора  $\hat{Q}$ , соответствующему собственному значению  $q$ . Рассмотрим как оператор  $\bar{Z}$  действует на  $|2n\sqrt{\pi}\rangle_Q$  и  $|(2n+1)\sqrt{\pi}\rangle_Q$

$$\bar{Z}|2n\sqrt{\pi}\rangle_Q = e^{i\sqrt{\pi}\hat{Q}}|2n\sqrt{\pi}\rangle_Q = e^{2n\pi i}|2n\sqrt{\pi}\rangle_Q = |2n\sqrt{\pi}\rangle_Q, \quad (2.21)$$

$$\bar{Z}|(2n+1)\sqrt{\pi}\rangle_Q = -|(2n+1)\sqrt{\pi}\rangle_Q. \quad (2.22)$$

Таким образом, состояния  $|l\rangle_L, l = 0, 1$  являются собственными состояниями  $\bar{Z}$  с собственными значениями  $\pm 1$ . Так как  $\hat{S}_p = \bar{Z}^2$ , то эти состояния также являются собственными

$+1$  состояниями стабилизатора  $\hat{S}_p$ . С другой стороны,  $\hat{S}_q|q'\rangle_Q = |q' + 2\sqrt{\pi}\rangle_Q$ . Следовательно, общие собственные состояния  $\bar{Z}, \hat{S}_q, \hat{S}_p$  являются суперпозицией состояний, инвариантных относительно сдвига на  $2\sqrt{\pi}$ , т.е. состояний  $|l\rangle_L$ . Аналогично можно увидеть, что собственные состояния  $\bar{X}$  в импульсном базисе имеют вид:

$$|+\rangle_L \propto \sum_n |2n\sqrt{\pi}\rangle_P, \quad |-\rangle_L \propto \sum_n |(2n+1)\sqrt{\pi}\rangle_P. \quad (2.23)$$

При этом

$$\begin{aligned} |0\rangle_L &\propto \sum \delta(Q - 2n\sqrt{\pi})|Q\rangle = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{ip2n\sqrt{\pi}}|P\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \delta(p - n\sqrt{\pi})|P\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_L + |-\rangle_L) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Аналогично

$$|1\rangle_L \propto \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_L - |-\rangle_L) \quad (2.25)$$

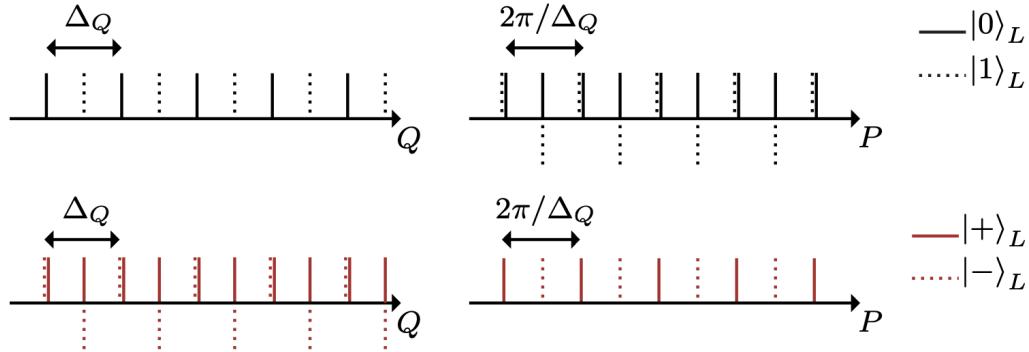


Рисунок 2.1 — Волновые функции идеального GKP-кода. Состояния  $|0\rangle_L$  и  $|1\rangle_L$  изображены на верхних картинках сплошной и пунктирной черной линией для соответственно.

Действительные части их суперпозиций  $|\pm\rangle_L$  показаны снизу. Слева волновые функции построены в координатном пространстве, справа — в импульсном.  $\Delta_Q = \sqrt{\pi}$

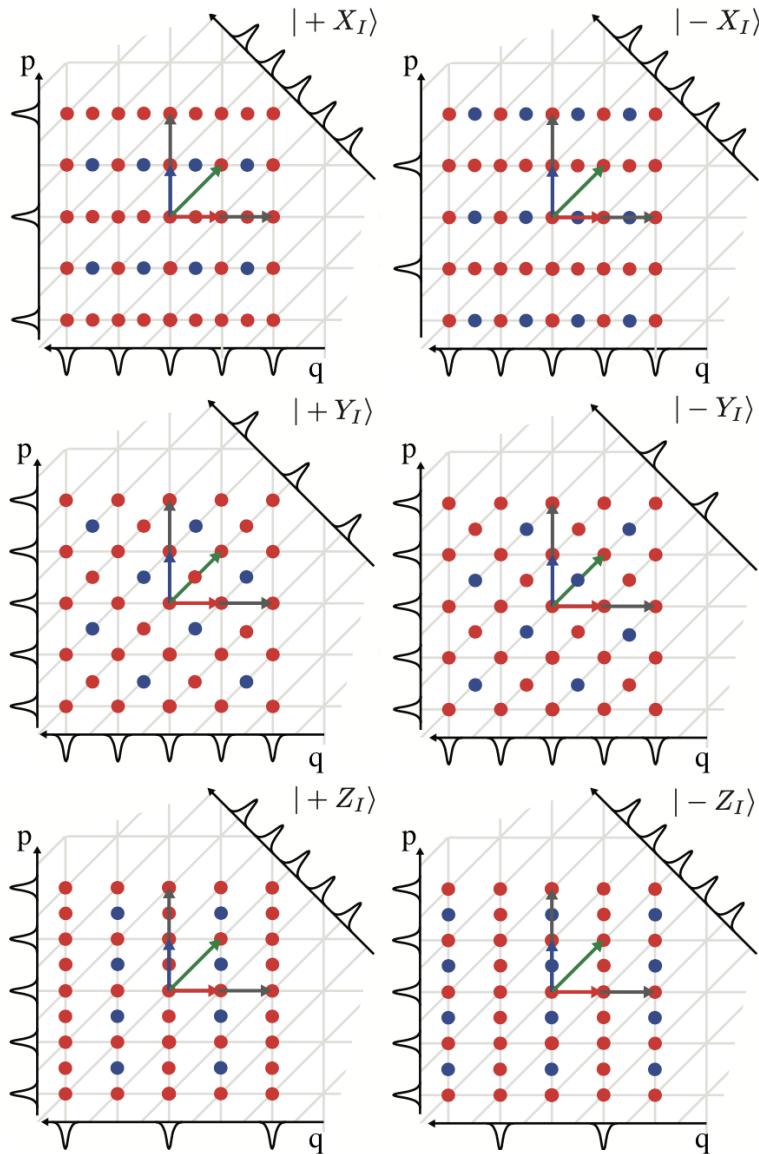


Рисунок 2.2 — Схематические изображения функций Вигнера GKP-кодов собственных функций различных логических операторов Паули.  $|\pm P\rangle$  означает собственное состояние логического оператора Паули  $P$ , соответствующего собственному значению  $\pm 1$  [10]. По осям изображены маргинальные распределения вероятностей, найденные по формулам

$$P(Q) = \langle Q | \rho | Q \rangle = \int dQ W(P, Q), P(P) = \langle P | \rho | P \rangle = \int dP W(P, Q)$$

Данные состояния не являются нормируемыми. Для того, чтобы получить более физические состояния, необходимо аппроксимировать идеальные GKP-состояния.

## 2.6 Приближенный GKP-код

Одним из методов определения приближенных GKP-состояний является:

$$|\tilde{\xi}\rangle_L \approx \frac{1}{\sqrt{N_\xi}} \sum_j e^{-\Delta^2 \pi (2j + \xi)^2 / 2} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-\frac{u^2}{2\Delta^2}} |(2j + \xi)\sqrt{\pi} + u\rangle_Q, \quad (2.26)$$

где  $N_\xi = \sqrt{\pi/2} + O(e^{-\pi/\Delta^2})$ .

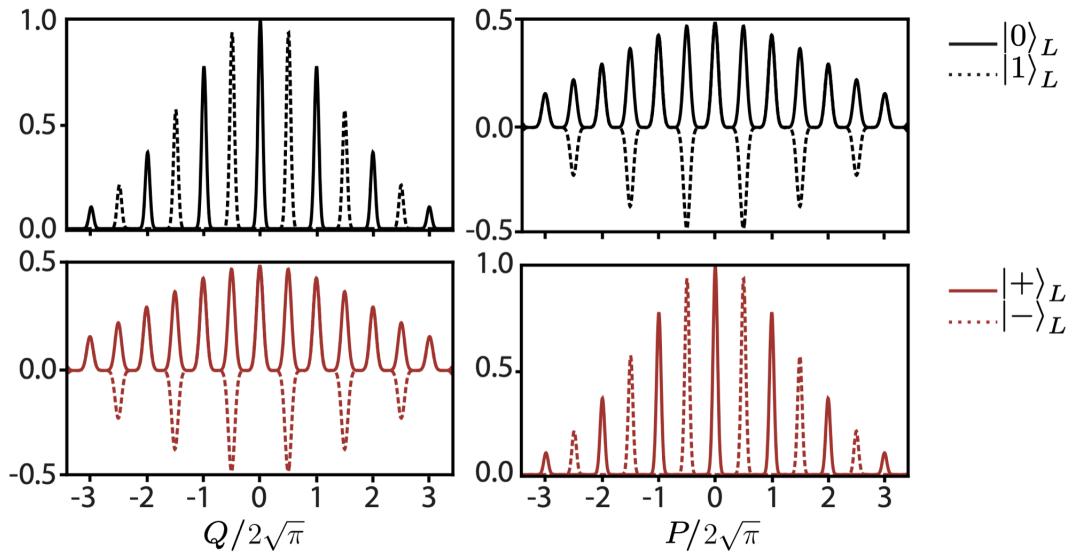


Рисунок 2.3 — Волновые функции приближенного GKP-кода.

Волновая функция таких состояний выглядит как решетка сжатых состояний с гауссовой огибающей. Стоит отметить, что приближенные состояния не являются соответствующими собственному значению +1 состояниями операторов стабилизации, и равенство будет лишь приближенным.

## 2.7 Детектирование ошибок с помощью стабилизаторов

GKP-код был создан таким образом, чтобы быть устойчивым к малым сдвигам в фазовом пространстве. Такие сдвиги можно обнаружить при помощи операторов стабилизации, а затем скорректировать их. Рассмотрим произвольное логическое GKP-состояние в резонаторе  $|\psi\rangle_L = a|0\rangle_L + b|1\rangle_L$ . Состояние  $|\psi\rangle_L$  является собственным состоянием  $S_q$  и  $S_p$ , соответствующим собственному значению 1. Предположим теперь, что в результате ошибки GKP-состояние сдвинулось в фазовом пространстве на малую величину  $\varepsilon$ . Подействуем одним из стабилизаторов, например  $S_q$ , на сдвинутое состояние  $|\psi\rangle_{\text{res}} \equiv D(\varepsilon)|\psi\rangle_L$

$$S_q D(\varepsilon) |\psi\rangle_L = e^{2i\varphi_{\varepsilon,q}} D(\varepsilon) S_{q,p} |\psi\rangle_L = e^{2i\varphi_{\varepsilon,q}} D(\varepsilon) |\psi\rangle_L, \quad (2.27)$$

где было использовано коммутационное соотношение (2.2) для операторов смещения, а также то, что  $|\psi\rangle_L$  является собственным для  $S_q$ ,  $\varphi_{\varepsilon,q} = \text{Im}(\sqrt{2\pi}\varepsilon^*)$ .

Как видно, сдвинутое на  $\varepsilon$  собственное состояние стабилизаторов тоже является собственным, но уже с фазовым множителем  $e^{2i\varphi_\varepsilon}$ . Связанный с резонатором вспомогательный кубит служит для того, чтобы каким-либо образом извлечь информацию об этой фазе. Это можно сделать при помощи т.н. квантового протокола оценки фазы, разработанного Алексеем Китаевым в 1995 году [11]. Рассмотрим подробнее данный протокол.

Рассмотрим систему резонатор+вспомогательный кубит, инициализированный в состоянии  $|+\rangle$ . Волновая функция системы  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi\rangle_{\text{res}}$ . Подействуем на  $|\psi_0\rangle$  оператором условного смещения  $CS_q$  таким, что при действии на  $|0\rangle \otimes |\psi\rangle_{\text{res}}$  оператор даст тоже самое состояние, а при действии на  $|1\rangle \otimes |\psi\rangle_{\text{res}} - |1\rangle \otimes S_q |\psi\rangle_{\text{res}}$

$$\begin{aligned} CS_q |\psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} CS_q (|0\rangle \otimes |\psi\rangle_{\text{res}}) + \frac{1}{\sqrt{2}} CS_q (|1\rangle \otimes |\psi\rangle_{\text{res}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{2i\varphi_{\varepsilon,q}} |1\rangle) \otimes |\psi\rangle_{\text{res}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Таким образом, получаем, что на выходе состояние резонатора просто сдвигается в результате набежавшей ошибки  $D(\varepsilon)$ , а состояние вспомогательного кубита будет находиться в суперпозиции состояний, сдвиг фаз которых зависит от ошибки  $\varepsilon$ . Информация об ошибке оказалась сохраненной в состоянии кубита.

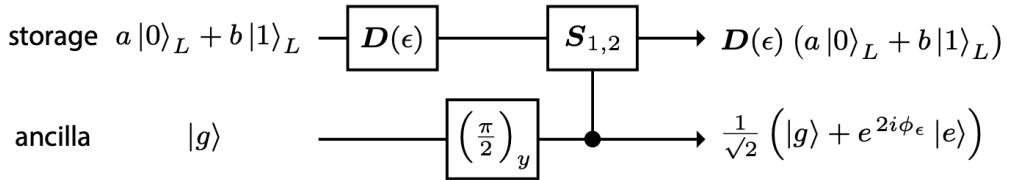


Рисунок 2.4 — Протокол оценки фазы

Оценка фазы может быть выполнена многократным повторением протокола, изображенного на рисунке, путем измерения кубита после каждого раунда [12]. При этом в разных алгоритмах используется измерение разных операторов Паули вспомогательного кубита.

## 2.8 Реализация CD

Рассмотрим, каким образом можно реализовать гейт условного смещения  $CD$ . Оказывается, получить его можно, подавая определенную последовательность импульсов на вспо-

могательный кубит и резонатор-хранилище логических ГКР-состояний. Рассмотрим дисперсионный гамильтониан кубита и резонатора (1.38), на который подается микроволновый сигнал

$$H = H_{\text{disp}} + H_{\text{drive}} = \omega a^\dagger a - \frac{1}{2} \varepsilon_q \sigma_z - \chi a^\dagger a \sigma_z + (\varepsilon a^\dagger + \varepsilon^* a), \quad (2.29)$$

Перейдем в систему отсчета микроволнового сигнала. Согласно (1.11), переход сводится к унитарному преобразованию  $D(\alpha)$  над дисперсионным гамильтонианом, где  $\alpha(t)$  удовлетворяет уравнению (1.83). В результате перехода в новую систему отсчета слагаемое, отвечающее за подающийся на резонатор сигнал, пропадет, а итоговый гамильтониан в новой системе запишется как

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= D^\dagger(\alpha(t)) \chi a^\dagger a \sigma_z D(\alpha(t)) = \chi(a^\dagger + \alpha^*(t))(a + \alpha(t))\sigma_z \\ &= \chi a^\dagger a \sigma_z + \chi |\alpha(t)|^2 \sigma_z + \chi(\alpha(t)a^\dagger + \alpha^*(t)a)\sigma_z \end{aligned} \quad (2.30)$$

Последнее слагаемое в данном выражении напоминает по своей структуре генератор оператора условного смещения  $CD(\alpha)$ . Для того, чтобы получить чистое условное смещение, необходимо каким-то образом избавиться от первых двух слагаемых. Для этого будем подавать специальную последовательность сигналов не только на резонатор, но и на кубит таким образом, чтобы при изменении знака  $\alpha(t)$  кубит переворачивался, и знак при  $\sigma_z$  менялся на противоположный. Таким образом, первые два слагаемых эффективно будут зануляться, становясь то отрицательными, то положительными, в то время как последнее слагаемое будет оставаться положительным все время и таким образом сохранится. Рассмотрим такую последовательность импульсов

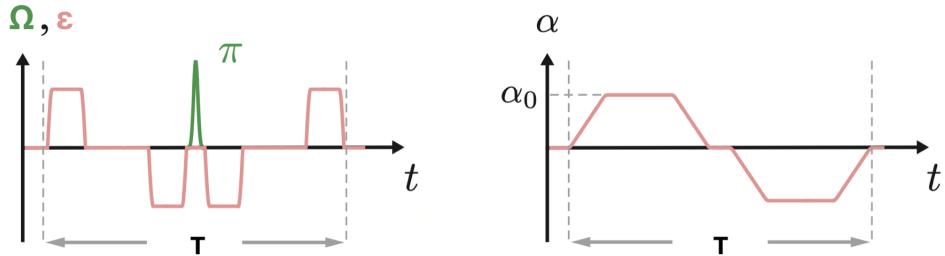


Рисунок 2.5 — Последовательность импульсов.  $\Omega$  действует на кубит, переворачивая его  $\pi$ -импульсом на половине периода  $T$  гейта условного смещения,  $\varepsilon$  — на резонатор,  $\alpha$  — аргумент оператора смещения. Здесь был использован тот факт, что  $\kappa$  мало в формуле (1.83), поэтому  $\alpha(t) \approx i \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ .

Рассчитаем напрямую унитарную эволюцию  $U$  под действием зависящего от времени гамильтониана (2.30). Обозначим  $\varepsilon = \frac{\chi T}{2N}$  и  $t_k = k\varepsilon$ . В пределе  $N \rightarrow \infty$  оператор эволюции можно записать как

$$U = \prod_{k=1}^N e^{i\varepsilon(H_1(t_k) + H_2(t_k) + H_3(t_k))}, \quad (2.31)$$

где

$$H_1(t) = a^\dagger a s(t) \sigma_z \quad (2.32)$$

$$H_2(t) = (\alpha(t)a^\dagger + \alpha(t)^*a) s(t) \sigma_z \quad (2.33)$$

$$H_3(t) = |\alpha(t)|^2 s(t) \sigma_z, \quad (2.34)$$

где  $s(t) = 1 - 2\theta(t - T/2)$  — знак перед  $\sigma_z$ , меняющийся в момент времени  $T/2$ . Операторы эволюции под знаком произведения применяются в хронологическом порядке:  $\prod_{k=0}^N U_k = U_N U_{N-1} \dots U_1$ . Гамильтониан  $H_3(t)$  коммутирует с  $H_1(t_l), H_2(t_l)$  и  $H_3(t_l)$  для всех  $t_l$  и, следовательно, может быть вынесен из-под экспоненты. Кроме того,  $\prod_{k=1}^N e^{i\varepsilon H_3(t_k)} = I$ , поэтому  $H_3$  никак не влияет на эволюцию. Используя формулу Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа, получим

$$U = \prod_{k=1}^N e^{i\varepsilon H_1(t_k)} e^{i\varepsilon H_2(t_k)} U_{nc}(t_k) \quad (2.35)$$

где  $U_{nc}$  содержит все слагаемые второго порядка малости и выше ( $\ln U_{nc}(t_k) = O(\varepsilon^2)$ ). Используем формулу Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа еще раз для оставшихся членов в (2.35)

$$U = \left( \prod_{k=1}^N \prod_{l=1}^{k-1} e^{-\varepsilon^2 G(t_l)} \right) \left( \prod_{k=1}^N e^{i\varepsilon H_2(t_k)} \right) \left( \prod_{k=1}^N e^{i\varepsilon H_1(t_k)} \right), \quad (2.36)$$

где  $G(t) = [H_1(t), H_2(t)] = \alpha(t)a^\dagger - \alpha^*(t)a$  — генератор условного смещения. Используя  $[H_1(t_k), H_1(t_l)] = [H_2(t_k), H_2(t_l)] = [G(t_k), G(t_l)] = 0$  для любых  $k, l$  получим

$$U = e^{-\frac{\chi^2}{4} \int_{t=0}^T \int_{t'=0}^t G(t') dt' dt} e^{i\frac{\chi}{2} \int_{t=0}^T H_2(t) dt} e^{i\frac{\chi}{2} \int_{t=0}^T H_1(t) dt}. \quad (2.37)$$

Последний множитель в этом выражении уходит при интегрировании из-за знака  $s(t)$ . Второй множитель дает условное смещение  $CD(\beta)$ , где  $\beta = i\sqrt{2}\chi \left( \int_t^{T/2} \alpha(t) dt - \int_{T/2}^T \alpha(t) dt \right)$ . Первое слагаемое дает обычное смещение  $D(\gamma)$ ,  $\gamma = -\frac{\chi^2}{2\sqrt{2}} \int_{t=0}^T \int_{t'=0}^t \alpha(t') dt' dt$ . Окончательно получим

$$U = D(\gamma)CD(\beta) \quad (2.38)$$

Стоит отметить, что в пределе быстрого времени взаимодействия кубита и резонатора  $T \rightarrow 0$  и  $\int |\alpha| dt \rightarrow \infty$  выполняется соотношение  $|\gamma/\beta| \rightarrow 0$ , поэтому смещением  $D(\gamma)$  можно пренебречь. Таким образом, используя специально подобранный последовательность импульсов, направляемых на кубит и резонатор, можно получить гейт условного смещения.

## 2.9 Влияние измерения кубита на резонатор

Рассмотрим на примере, как каждое измерение вспомогательного кубита проецирует состояние резонатора. Целью является нахождение эволюции распределения вероятностей волновой функции резонатора по координате. Запишем матрицу плотности резонатора в координатном базисе

$$\rho_{\text{res}} = \int dQ_1 dQ_2 c(Q_1, Q_2) |Q_1\rangle \langle Q_2|, \quad (2.39)$$

с нормировкой  $\int dQ c(Q, Q) = 1$ . Распределение вероятностей задается выражением  $P(Q) = \langle Q | \rho_{\text{osc}} | Q \rangle = c(Q, Q)$ . Когда вспомогательный кубит инициализирован в состоянии  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ , полная матрица плотности системы записывается как

$$\rho_{\text{tot}} = \int dQ_1 dQ_2 c(Q_1, Q_2) |Q_1\rangle \langle Q_2| \otimes |+\rangle \langle +|. \quad (2.40)$$

Подействовав оператором условного смещения на матрицу плотности (2.40), получим

$$\begin{aligned} D\left(i\frac{\alpha}{2}\sigma_z\right)\rho_{\text{tot}}D\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z\right) &= \int dQ_1 dQ_2 c(Q_1, Q_2) e^{i\alpha Q \sigma_z} |Q_1\rangle \langle Q_2| \otimes \\ |+\rangle \langle +| e^{-i\alpha Q \sigma_z} &= \frac{1}{2} \int dQ_1 dQ_2 c(Q_1, Q_2) |Q_1\rangle \langle Q_2| \otimes \\ (e^{i\alpha(Q_2-Q_1)}|0\rangle \langle 0| + e^{-i\alpha(Q_2-Q_1)}|1\rangle \langle 1| + e^{i\alpha(Q_1+Q_2)}|1\rangle \langle 0| + e^{-i\alpha(Q_1+Q_2)}|0\rangle \langle 1|) \\ &= \int dQ_1 dQ_2 c(Q_1, Q_2) |Q_1\rangle \langle Q_2| \otimes \\ (\cos(\alpha(Q_2 - Q_1))I_L + i\sin((\alpha(Q_2 - Q_1))\Pi_z + \cos(\alpha(Q_2 + Q_1))\Pi_x + \cos(\alpha(Q_2 + Q_1))\Pi_y), \end{aligned} \quad (2.41)$$

где  $\Pi_x, \Pi_y, \Pi_z$  — матрицы Паули в пространстве матриц плотности. Из данного выражения, взяв след по кубиту, можно получить распределение состояния резонатора по координате. Финальный вид распределения в зависимости от оси, вдоль которой измеряется кубит и результата, полученного при его измерении, приведен в таблице

ось	результат	$P(Q) = \langle Q   \rho_s   Q \rangle$
$x$	+1	$c(Q, Q) \cos^2(\alpha Q)$
	-1	$c(Q, Q) \sin^2(\alpha Q)$
$y$	+1	$c(Q, Q) \sin^2(\alpha Q - \frac{\pi}{4})$
	-1	$c(Q, Q) \sin^2(\alpha Q + \frac{\pi}{4})$
$\varphi$	+1	$c(Q, Q) \cos^2(\alpha Q + \frac{\varphi}{2})$
	-1	$c(Q, Q) \sin^2(\alpha Q + \frac{\varphi}{2})$

Такой связанный с измерением кубита эффект лежит в основе протоколов, реализующих коррекцию ошибок GKP-состояний. Благодаря тому факту, что новое распределение матрицы плотности резонатора по координате получается из старого путем домножения на некоторую периодическую функцию, можно, подбирая параметры, сдвигать распределение в координатном и импульсном пространстве и таким образом предотвращать сдвиги в фазовом пространстве, вызванные ошибками.

## 2.10 Марковская стабилизация

При принятии решений о коррекции набежавшей в резонаторе ошибки GKP-состояния протокол стабилизации может учитывать только результаты конечного числа измерений кубита для оценки его фазы, в которой и зашифрована ошибка. Опишем экстремальный случай марковской стабилизации, когда протокол использует лишь результат последнего измерения и принимает решение на его основе.

Рассмотрим состояние, которое установилось по прошествии многократного повторения марковского протокола стабилизации. Ввиду наличия диссипации в резонаторе через некоторое время установится смешанное состояние  $|0\rangle_L$  и  $|1\rangle_L$ , даже несмотря на наличие стабилизирующего протокола. Кроме того, в течение конечного промежутка времени между двумя этапами стабилизации это смешанное состояние искажается из-за однофотонных потерь, которые уширяют пики GKP-состояний и стараются сдвинуть их ближе к центру.

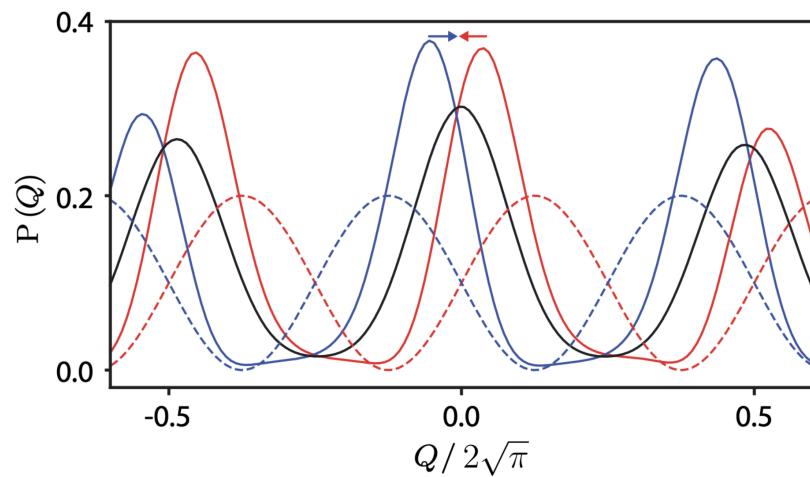


Рисунок 2.6 — Заострение пики. Черной линией показано вероятностное распределение по координате до применения гейта  $CS$  и измерения кубита, синей и красной линиями — сразу после, синяя линия соответствует состоянию резонатора при получении значения  $+1$  на кубите, красная —  $-1$ , пунктирные линии соответствуют функции  $\sin^2(2\sqrt{\pi}Q \pm \frac{\pi}{4})$ , на которые домножается изначальное распределение [10].

Как было показано в параграфе 2.7, после применения оператора условного смещения  $CS$  состояние  $|1\rangle$  кубита приобретает фазу:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\varphi_\varepsilon}|1\rangle)$ . В таком случае при измерении  $\sigma_x$  в данном состоянии результат будет пропорционален  $\cos 2\varphi_\varepsilon$ , при измерении  $\sigma_y - \sin 2\varphi_\varepsilon$ . В первом порядке измерение  $\sigma_y$  дает больше информации о  $\varepsilon$ , чем измерение  $\sigma_x$ . Кроме того, при измерении  $\sigma_y$  распределение вероятностей по координате для смешанного состояния в резонаторе домножается на  $\sin^2(2\sqrt{\pi}Q \pm \frac{\pi}{4})$ , что сужает пики и центрирует их около максимумов распределения смешанного состояния. Таким образом, действие гейта условного смещения  $CS = CD(\alpha)$  с аргументом  $\alpha = 2\sqrt{\pi}, 2i\sqrt{\pi}$ , соответствующему одному из стабилизаторов  $S_{p,q}$ , заостряет пики около максимумов распределения по  $Q$  или  $P$  соответственно. После этого заостренные пики оказываются немного сдвинутыми на  $\varepsilon_c$ . Этот сдвиг затем корректируется обычным оператором смещения  $D(\varepsilon_c)$ . Таким образом происходит коррекция сдвигов в фазовом пространстве резонатора.

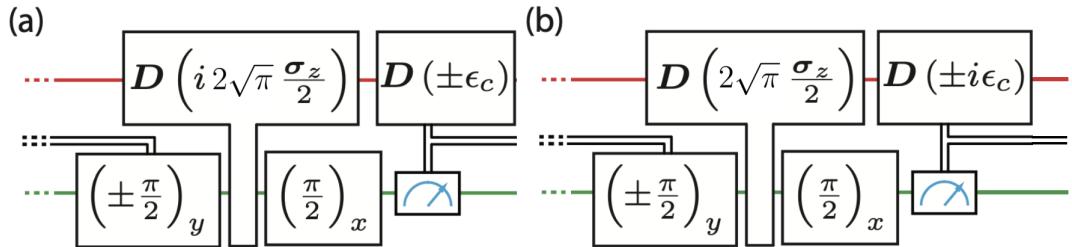


Рисунок 2.7 — Марковский протокол по заострению пиков по  $Q$  и  $P$ . Вспомогательный кубит инициализируется в состоянии  $|+\rangle$  поворотом на  $(\pi/2)_y$ , затем применяется гейт условного смещения  $CS = CD(2\sqrt{\pi})$ , приводящий к изменению состояния кубита:  $1/\sqrt{2}(|0\rangle + e^{2i\varphi_\varepsilon}|1\rangle)$ . После этого кубит измеряется, что приводит к заострению пиков GKP-состояний в резонаторе и побочному сдвигу  $\varepsilon_c$ . Затем сдвиг корректируется на  $\pm\varepsilon_c$  в зависимости от того, получили мы  $-1$  или  $+1$  при измерении кубита.

Как было обнаружено в работе [10], для получения устойчивого GKP-состояния недостаточно просто центрировать и сужать пики распределения вероятностей, важно также сужать огибающую этих пики (см. параграф 2.6). Авторы связывают это с тем фактом, что далекие пики больше подвержены сдвигам при однофотонных потерях, что приводит к большим ошибкам. Процесс сужения огибающей не сильно отличается от процесса заострения пики: единственное отличие заключается в том, что в качестве аргумента гейта условного смещения теперь выступает малый параметр  $\delta$ .

Таким образом, полный протокол коррекции ошибок состоит из четырех этапов: заострение пики по  $Q$ , заострение пики по  $P$ , сужение пики по  $Q$ , сужение пики по  $P$ . Каждый такой четырехступенчатый раунд позволяет с некоторой степенью точности скорректировать ошибку набежавшую за время между двумя раундами четырехступенчатой стабилизации и приводящую к сдвигу GKP-состояний в резонаторе.

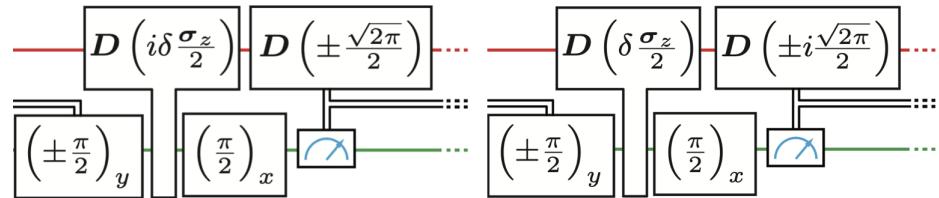


Рисунок 2.8 — Марковский протокол по сужению огибающей пиков по  $Q$  и  $P$ .

Вспомогательный кубит инициализируется в состоянии  $|+\rangle$  поворотом на  $(\pi/2)_y$ , затем применяется гейт условного смещения  $D(i\delta\sigma_z)$ , приводящий к изменению состояния кубита:  $1/\sqrt{2}(|0\rangle + e^{2i\varphi_e}|1\rangle)$ . После этого кубит измеряется, что приводит к сужению огибающей пиков GKP-состояний в резонаторе и побочному сдвигу  $\sqrt{\pi}$ . Затем сдвиг корректируется в зависимости от того, получили мы -1 или +1 при измерении кубита.

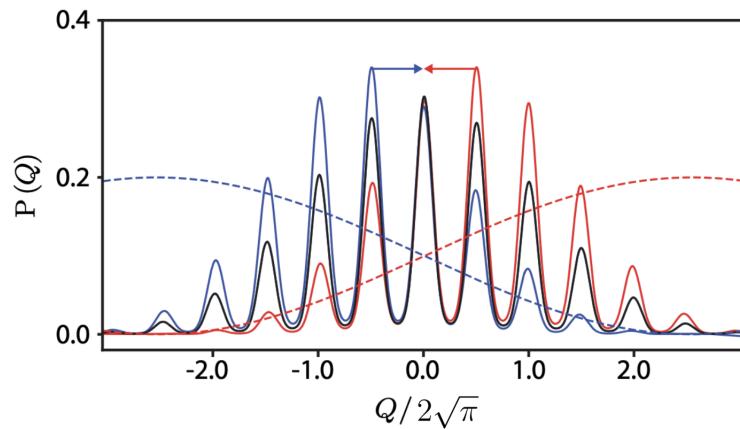


Рисунок 2.9 — Сужение огибающей. Черной линией показано вероятностное распределение по координате до применения гейта  $D(i\delta\sigma_z)$  и измерения кубита, синей и красной линиями — сразу после, синяя линия соответствует состоянию резонатора при получении значения +1 на кубите, красная соответствует -1, пунктирные линии соответствуют функции  $\sin^2(\delta Q \pm \frac{\pi}{4})$ , на которые домножается изначальное распределение.

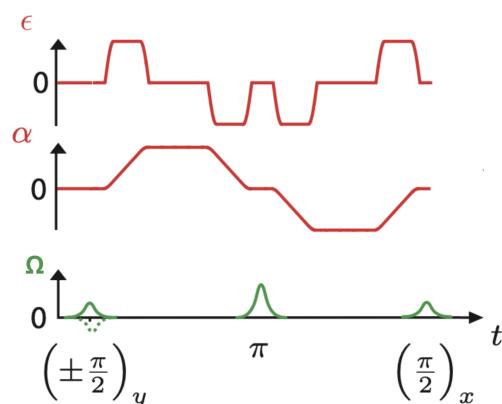


Рисунок 2.10 — Итоговая последовательность импульсов, реализующая один из раундов.

## Глава 3. Моделирование работы GKP-кода коррекции ошибок

### 3.1 Проектирование чипа

Для реализации GKP-кода коррекции ошибок при помощи скрипта на языке Python была создана схема, состоящая из двух резонаторов, емкостно связанных с флаксониумом. Один из них служит хранилищем логических GKP-состояний, на которых реализуется протокол коррекции ошибок, другой — для дисперсионного считывания состояния кубита.

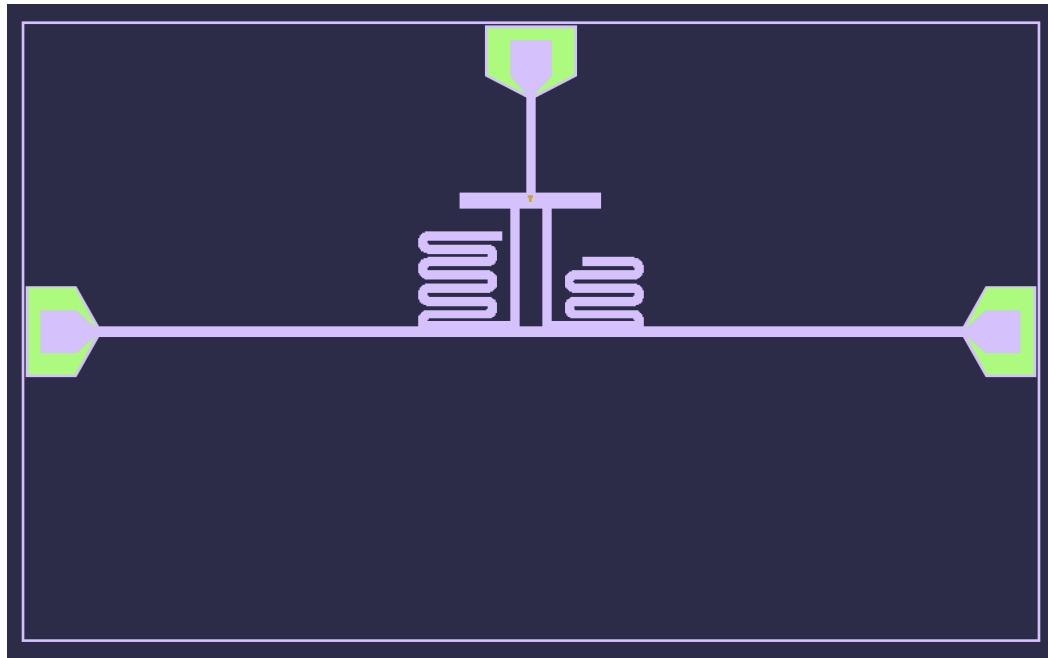


Рисунок 3.1 — Схема спроектированного чипа

Микроволновые резонаторы в схеме реализованы как копланарные волноводы

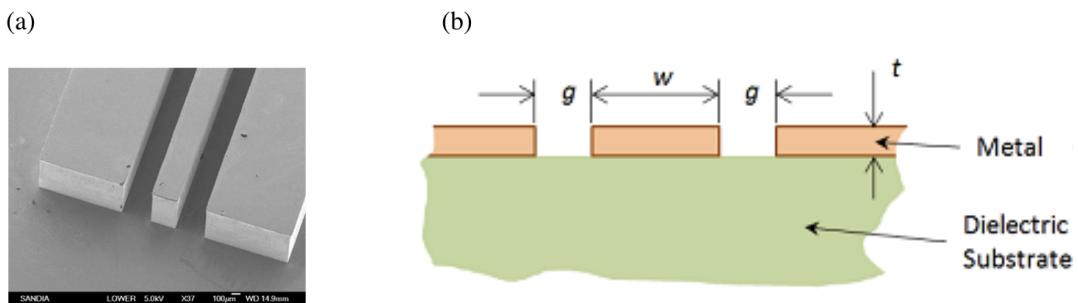


Рисунок 3.2 — (a) изображение копланарного волновода, (b) сечение

Параметры  $w$  и  $g$  подобраны так, чтобы импедансы передающих линий и резонаторов составляли  $50 \Omega$  во избежание возникновения отраженных волн. В нашем случае  $s = 20\mu m$ ,  $w = 10\mu m$ ,  $g = 6\mu m$ . В таком случае емкость на единицу длины составляет  $423.6 \text{ nH/m}$ ,

индуктивность — 167.4 pF/m. Эффективный характеристический импеданс  $Z_0 = \sqrt{L/C} \approx 50.3\Omega$ . Расчеты проводились с помощью сайта ([smm.misis.ru/CPW-resonator-coupling/](http://smm.misis.ru/CPW-resonator-coupling/)).

Один из концов обоих резонаторов заземлен, второй связан с кубитом. Частота такого резонатора определяется как

$$\nu = \frac{2n - 1}{4l\sqrt{LC}}, \quad (3.1)$$

где  $L$  и  $C$  — индуктивность и емкость единицы длины копланарного волновода.

Резонатор можно разъединить на 3 сегмента: меандр длиной  $l_1$ , часть, связанная с передающей линией  $l_2$ , часть, идущая к кубиту длиной  $l_3$ . Занесем длины в таблицу и посчитаем итоговую резонансную частоту резонаторов

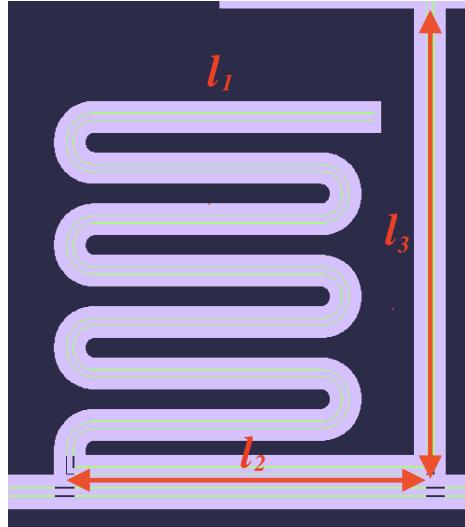


Рисунок 3.3 — Сегменты резонатора

Таблица 1

Резонатор	$l_1, \mu\text{м}$	$l_2, \mu\text{м}$	$l_3, \mu\text{м}$	$\omega, \text{GHz}$
Левый	4000	650	840	5.4
Правый	2700	650	840	7.0

Оба резонатора емкостно связаны с передающей линией для того, чтобы на них можно было подавать необходимые импульсы.

Для отрисовки кубита-флаксониума в формате GDS на высокоразвитом языке Python был написан класс, совместимый с уже написанным ранее сотрудниками лаборатории модулем для симуляции квантовых цепочек. Дополнительно была написана программа для автоматического расчета емкостей планарных структур на основе Fastcap, которую можно использовать напрямую в файле, где происходит отрисовка, тем самым облегчая процесс видоизменения схемы для подбора различных параметров, необходимых, например, для расчета емкостной связи между резонатором и кубитом. Там же вычисляются необходимые частоты элементов схемы, спектры гамильтонианов, а также остальные параметры цепочки, включая дисперсионные сдвиги.

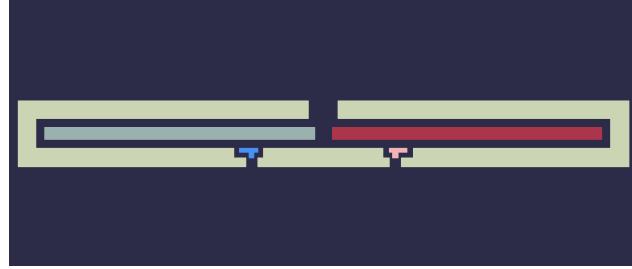


Рисунок 3.4 — Пример разбиения кубита на массив проводников

Программа разбивает схему на  $N$  проводников и выдает матрицу емкостей, определяемую как

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N C_{m,1i} & -C_{m,12} & \cdots & -C_{m,1N} \\ -C_{m,21} & \sum_{i=1}^N C_{m,2i} & \cdots & -C_{m,2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{m,N1} & -C_{m,N2} & \cdots & \sum_{i=1}^N C_{m,Ni} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$$

где  $Q_i$  — заряд  $i$ -го проводника,  $V_i$  — разности потенциалов относительно земли. Значения емкостей, полученные при помощи программы:  $C_{lg} = 68.1$  fF,  $C_{rg} = 68.1$  fF,  $C_{l1} = 1.48$  fF,  $C_{r2} = 1.49$  fF,  $C_{lr} = 1.03$  fF. Полученные при помощи скриптов энергии для флаксониума:  $E_J = 2.02$  GHz,  $E_C = 0.55$  GHz,  $E_L = 0.84$  GHz. После диагонализации получаем частоты флаксониума:  $\omega_{01} = 0.68$ GHz,  $\omega_{12} = 1.78$ GHz. Посчитаем дисперсионные сдвиги для каждого из резонаторов. Параметры, использовавшиеся при моделировании, занесены в таблицу

$\omega_{\text{left}}/2\pi$ , GHz	5.4
$\omega_{\text{right}}/2\pi$ , GHz	7.0
$E_C$ , GHz	0.55
$E_J$ , GHz	2.02
$E_L$ , GHz	0.84
$\omega_{01}/2\pi$ , GHz	0.55
$\omega_{12}/2\pi$ , GHz	1.78
$\chi_{\text{left}}/2\pi$ , MHz	0.73
$\chi_{\text{right}}/2\pi$ , MHz	0.32
$T_1$ , $\mu s$	90
$T_2$ , $\mu s$	70
$\kappa_r/2\pi$ , MHz	7.0

Построим уровни флаксониума и волновые функции при внешнем потоке, равном половине кванта потока

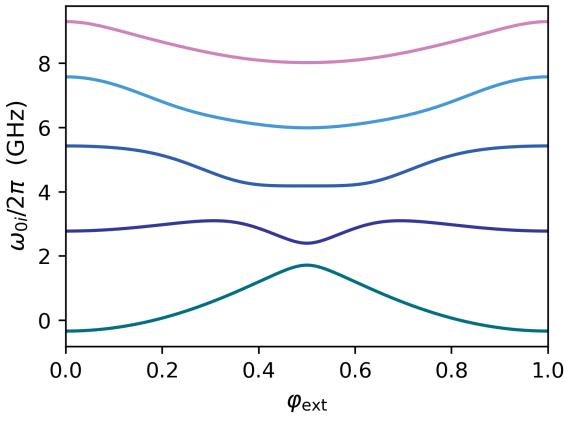


Рисунок 3.5 — Энергетические уровни флаксониума в зависимости от  $\varphi_{\text{ext}}$

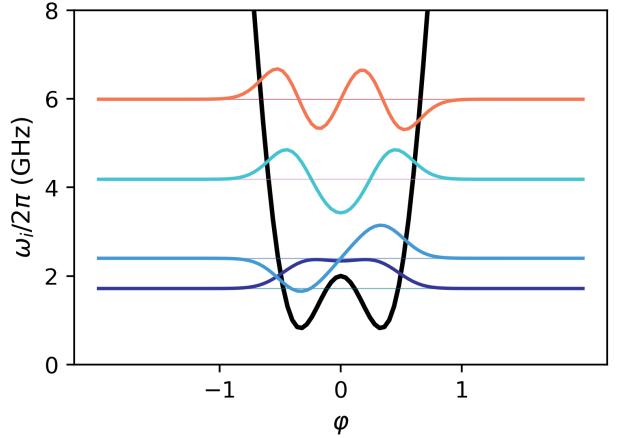


Рисунок 3.6 — Потенциал, волновые функции и уровни энергии при  $\varphi_{\text{ext}}=0.5$

## 3.2 Моделирование

Моделирование динамики системы происходило численно путем моделирования уравнения Линдблада при помощи библиотеки Qutip языка Python на протяжении каждого раунда коррекции ошибок

$$\partial_t \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}, \rho(t)] + \frac{1}{T_s} \mathcal{D}[a] \rho(t) + \frac{1}{T_1} \mathcal{D}[\sigma_-] \rho(t) + \frac{1}{2T_\varphi} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho(t) \quad (3.2)$$

где гамильтониан записан во врачающейся системе отсчета (см.главу 1)

$$\frac{\tilde{H}}{\hbar} = \chi(a^\dagger + a^*)(a + a)\sigma_z \quad (3.3)$$

а  $\rho$  — объединенная матрица плотности резонатора и кубита  $200 \times 200$  (отсечка по размерности гильбертова пространства резонатора 100).

Импульсы, подающиеся на вспомогательный кубит (для реализации вращений) и чистые смещения  $D(\alpha)$  состояния резонатора моделировались как мгновенное унитарное преобразование над матрицей плотности. Считывание кубита моделировалось как мгновенная проекция, происходящая в середине импульса, посыпаемого для считывания состояния длиной  $t_1 \equiv t_{\text{readout}}/2$ . Затем происходил расчет новой матрицы плотности  $\rho_{\pm}(t_1) = M_{\pm}\rho(t_1)M_{\pm}^\dagger$  в зависимости от результата  $\pm 1$ , полученного на кубите. По истечении времени  $t_2$  (включает в себя вторую половину  $t_{\text{readout}}/2$  и некое время, связанное с задержкой на обработку сигнала с измерения аппаратурой) применялись операторы  $U_{\pm}$ , связанные с корректировкой сдвига состояния резонатора (фидбек с кубита). Итоговая матрица плотности:  $\rho(t_1+t_2) = U_+ \rho_+(t_1+t_2) U_+^\dagger + U_- \rho_-(t_1+t_2) U_-^\dagger$ . Во всех полученных симуляциях использовались следующие параметры модели:  $t_{\text{readout}} = 0.6\mu\text{s}$  считывания состояния кубита,  $t_{\text{gate}} = 1.2\mu\text{s}$  работы CD-гейта,  $t_{\text{delay}} = 0.6\mu\text{s}$ , связанное с задержкой на обработку сигнала. Таким образом, полное время, необходимое на выполнение одного раунда  $t_{\text{1 round}} = 2.4\mu\text{s}$ .  $\delta = 0.25$  - аргумент

сдвига состояния резонатора после получения фидбека со вспомогательного кубита в раунде заострения пиков,  $\varepsilon = 0.25$  — аргумент оператора  $CD$  в раунде сужения огибающей (см.главу 2).

### 3.3 Получение смешанного состояния

Проведем симуляцию эксперимента по получению смешанного ГКР-состояния. Запустим 4-ступенчатый протокол. Для каждого раунда стабилизаторы измеряются с помощью квантового протокола оценки фазы, результаты измерения кубита усредняются по 50 проведенным симуляциям. Результаты симуляции приведены на картинках ниже.

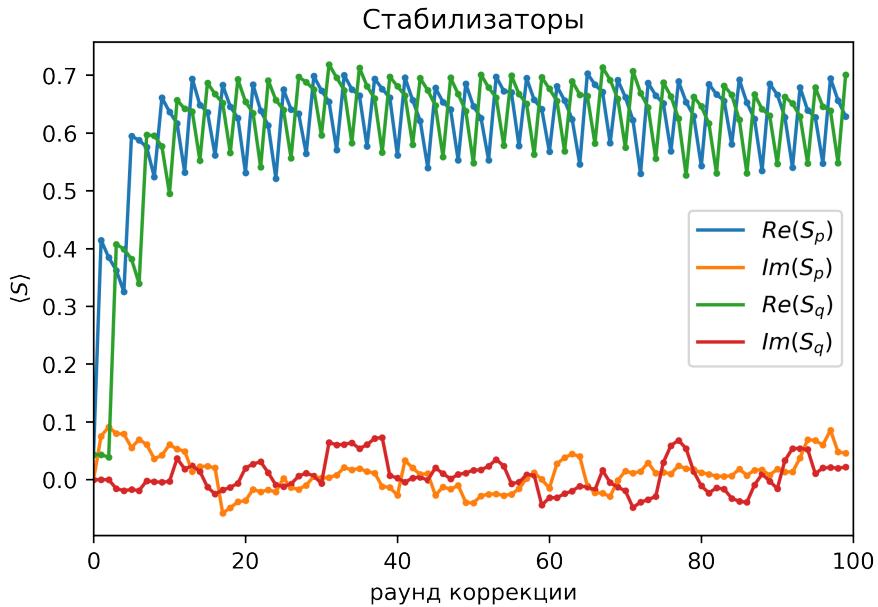


Рисунок 3.7 — Зависимость измеренного значения стабилизаторов  $S_{p,q}$  от числа раундов коррекции. Начальное состояние резонатора — вакуум. Каждая точка представляет собой усреднение по 50 экспериментам.  $\delta = 0.25$ ,  $\varepsilon = 0.25$ .

Как видно, стабилизация кода происходит примерно за 20 раундов коррекции. После этого средние значения стабилизаторов колеблются в районе значения 0.6. Для идеального ГКР-кода это значение составляло бы ровно 1, но ввиду ограничения на размер огибающей, а также утолщения пиков распределения максимальное усредненное значение стабилизаторов не превышает 0.7. Хорошо виден четыреступенчатый характер протокола, при этом минимум  $\langle S_p \rangle$  соответствует максимуму  $\langle S_q \rangle$ , что связано с тем фактом, что в первых двух раундах делается акцент на коррекции по  $q$ , а во вторых — по  $p$ .

Как и ожидалось, мнимая часть измеренных значений стабилизаторов приближительно равняется нулю. Это связано с тем, что для характеристической функции  $\mathcal{C}(\beta) = \langle D(\beta) \rangle = \text{Tr}(D(\beta)\rho)$  выполнено свойство  $\mathcal{C}(-\beta) = \mathcal{C}^*(\beta)$ , но т.к. характеристические функции всех состояний симметричны, то  $\mathcal{C}(-\beta) = \mathcal{C}(\beta)$ . Характеристическая функция может

быть измерена, используя гейт условного смещения и измерение кубита вдоль разных осей  $\langle \sigma_x - i\sigma_y \rangle = \langle D(\beta) \rangle$ . Можно измерить либо действительную, либо мнимую часть  $C(\beta)$  путем измерения  $\langle \sigma_x \rangle$  или  $\langle \sigma_y \rangle$  соответственно.

### 3.4 Состояния логических операторов Паули

Допустим, мы получили устойчивое смешанное состояние путем применения четырехступенчатой стабилизации. Теперь необходимо получить логические состояния  $|0\rangle_L, |1\rangle_L, |\pm\rangle_L, |\pm i\rangle_L$  в резонаторе. Сделать это можно путем использования еще одного дополнительного раунда, аналогичного заострению пиков, но немного видоизмененного.

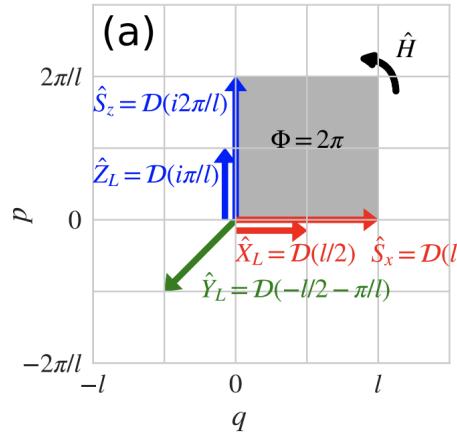


Рисунок 3.8 — Соотношение между стабилизаторами и логическими операторами Паули [13].  $l = \sqrt{2\pi}$

Как было показано в предыдущей главе, операторы Паули являются смещениями на половину величины стабилизаторов. Таким образом, аналогично стабилизаторам, можно закодировать ожидаемые значения логических операторов Паули  $X, Y, Z$  в кубите, используя гейт условного смещения с аргументом, соответствующим оператору Паули ( $\sqrt{\pi/2}$  для  $X$ ,  $(1+i)\sqrt{\pi/2}$  для  $Y$ ,  $i\sqrt{\pi/2}$  для  $Z$ ). При этом схема получения будет аналогична раунду заострения пиков, но с новым аргументом  $CD$ .

Такой подход позволяет получить из смешанного устойчивого состояния GKP-кода одно из собственных состояний оператора Паули, но лишь приближенно, т.к. усредненные результаты измерений вспомогательного кубита будут давать только  $+1$  и  $-1$  лишь для идеального бесконечно сжатого GKP-кода. Например, можно послать в  $CD$  аргумент  $i\sqrt{\pi/2}$  и, таким образом, реализовать оператор  $Z$ . Допустим, в результате измерения кубита вышло значение  $+1$ , тогда в резонаторе приблизительно будет состояние  $|0\rangle_L$ . Из него можно получить состояние  $|1\rangle_L$  путем применения  $CD$  с аргументом  $\sqrt{\pi/2}$ , т.е. подействовав  $X$  на логическое состояние резонатора. Таким образом, можно получить любое из логических состояний

$|0\rangle_L, |1\rangle_L, |\pm\rangle_L, |\pm i\rangle_L$  вне зависимости от того, получили мы  $+1$  или  $-1$  на вспомогательном кубите.

Функции Вигнера после симуляции 100 раундов применения четырехступенчатого алгоритма, а затем дополнительного раунда для получения собственных состояний логических операторов Паули, показаны на рисунке

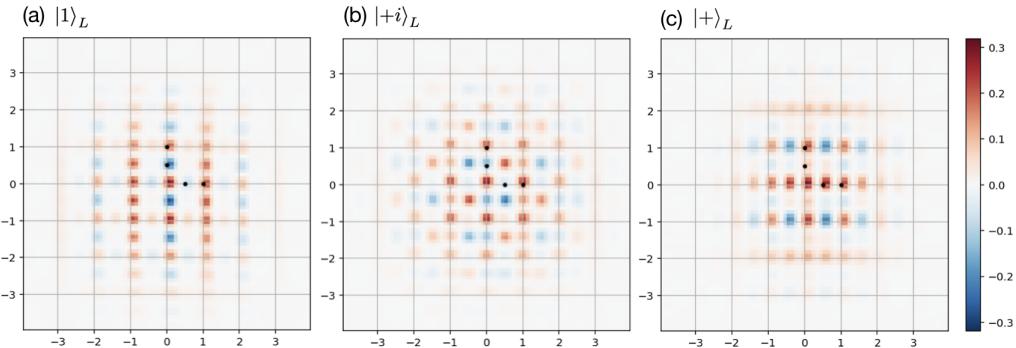


Рисунок 3.9 — Симуляция функций Вигнера идеальных собственных состояний логических операторов Паули (а)  $|1\rangle_L$ , (б)  $|+i\rangle_L$ , (с)  $|+\rangle_L$ . Клетка имеет площадь  $\sqrt{2\pi} \times \sqrt{2\pi}$ .

После приготовления собственного состояния логического оператора  $Z$  включим 4-ступенчатый протокол еще раз и будем мерить стабилизаторы. Результаты показаны на рисунке 3.10.

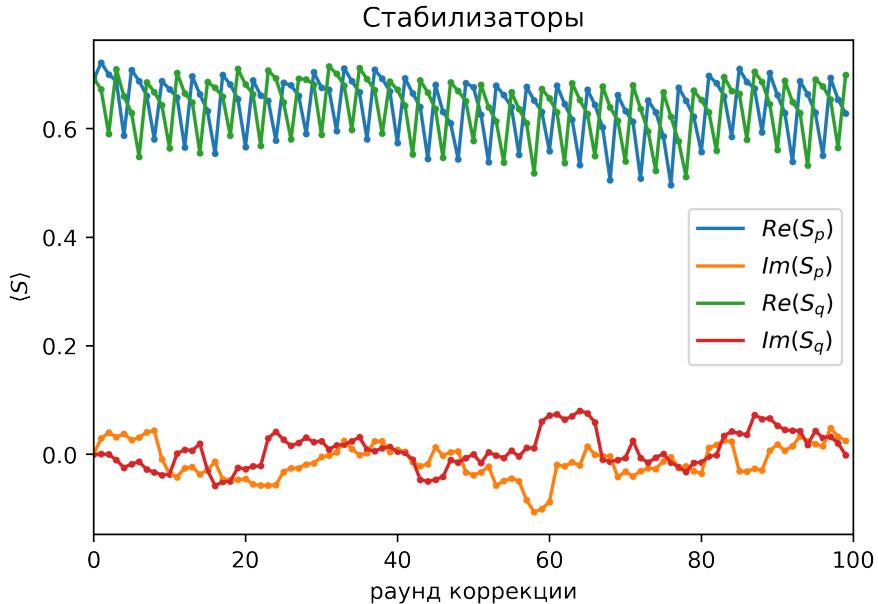


Рисунок 3.10 — Зависимость измеренного значения стабилизаторов  $S_{p,q}$  от числа раундов коррекции. Начальное состояние резонатора —  $|1\rangle_L$ . Каждая точка представляет собой усреднение по 50 экспериментам. Видно, что уже стабилизированное состояние, являющееся собственным для  $S_{q,p}$ , остается стабилизированным.

### 3.4.1 Время жизни логического GKP-кубита

Было продемонстрировано, что протокол помогает достичь устойчивого состояния, из которого можно получить собственное состояние логических операторов Паули GKP-кубита. На протяжении каждого из раундов стабилизации происходит диссипация, которая в конечном итоге приведет к тому, что состояние логического оператора Паули перейдет обратно в смешанное. Проведем моделирование динамики логического кубита после приготовления одного из состояний оператора Паули. Для этого инициализируем логический кубит в одном из собственных состояний операторов  $X, Y, Z$ , соответствующим собственному значению +1. Затем включается протокол стабилизации. Моделирование такого процесса путем численного решения уравнения Линдблада показано на картинке 3.11. Симуляции томографии состояний резонатора приведена на рисунке 3.12.

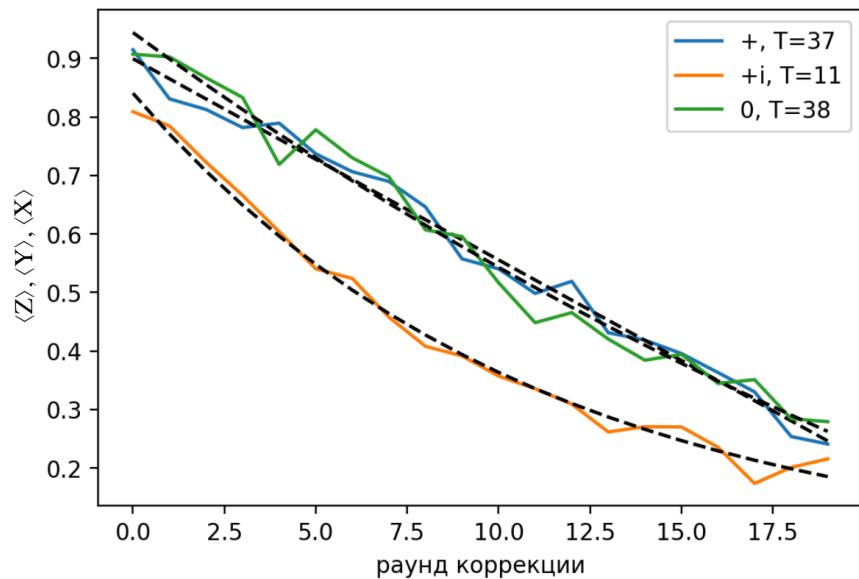


Рисунок 3.11 — Зависимость ожидаемых значений логических операторов Паули на состояниях в резонаторе от числа раундов коррекции ошибок. Изначально приготовленные состояния являются приближенными собственными состояниями логических операторов Паули  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , соответствующими собственному значению +1. Наблюдается экспоненциальный спад с показателем экспоненты  $-t/T$ . Рассчитанное значение  $T$  приведено для каждого из логических операторов.

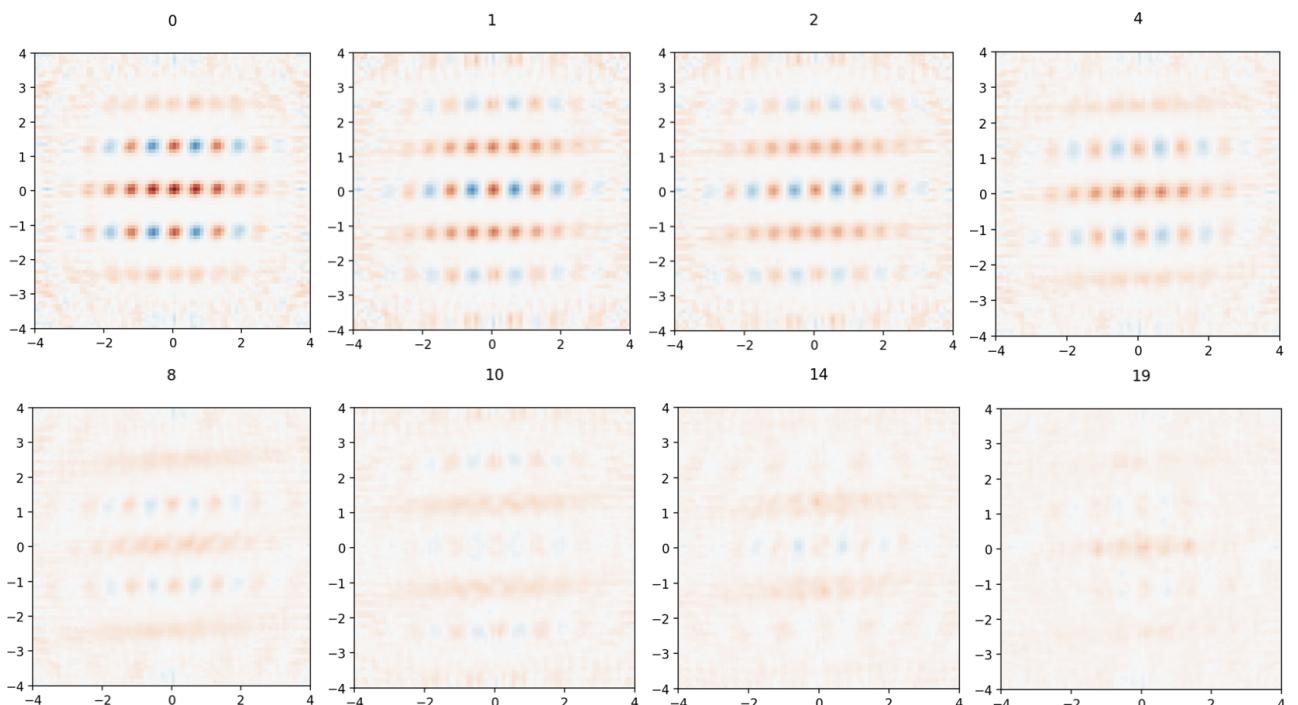


Рисунок 3.12 — Симуляция перехода от собственного состояния  $|+\rangle_L$  логического оператора Паули  $X$  к смешанному состоянию. Томография после  $n$  раундов коррекции.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Реализована схема кубит+2 резонатора для получения логических GKP-состояний, разработаны скрипты для рисования таких схем в GDS-формате и для расчета параметров схемы напрямую из ее отрисовки
2. С помощью скрипта в том числе были рассчитаны дисперсионные коэффициенты для симуляции кросс-резонансных гейтов условного смещения между кубитом и резонатором.
3. Была проведена симуляция работы гейтов условного смещения в моделировании эксперимента, реализующего протокол 4-ступенчатой коррекции ошибок GKP-кода.
4. Были получены функции Вигнера GKP-состояния для различного числа раундов коррекции ошибок, проведена симуляция измерения стабилизаторов GKP-кода. В симуляции были получены функции Вигнера логических операторов Паули GKP-кода, а также их времена жизни.

В качестве продолжения работы планируется произвести симуляции работы гейтов Клиффорда на системе двух логических GKP-кубитов, а также произвести фабрикацию чипа для экспериментального подтверждения полученных в данной дипломной работе результатов.

## Список литературы

1. Fluxonium: Single Cooper-Pair Circuit Free of Charge Offsets / V. E. Manucharyan [и др.] // Science. — 2009. — Окт. — Т. 326, № 5949. — С. 113—116. — DOI: [10.1126/science.1175552](https://doi.org/10.1126/science.1175552). — URL: [https://doi.org/10.1126%2Fscience.1175552](https://doi.org/10.1126/science.1175552).
2. Circuit QED with fluxonium qubits: Theory of the dispersive regime / G. Zhu [и др.] // Phys. Rev. B. — 2013. — Янв. — Т. 87, вып. 2. — С. 024510. — DOI: [10.1103/PhysRevB.87.024510](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.87.024510). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.87.024510>.
3. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics / A. Blais [и др.] // Phys. Rev. A. — 2007. — Март. — Т. 75, вып. 3. — С. 032329. — DOI: [10.1103/PhysRevA.75.032329](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.032329). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.032329>.
4. A quantum engineer’s guide to superconducting qubits / P. Krantz [и др.] // Applied Physics Reviews. — 2019. — Июнь. — Т. 6, № 2. — С. 021318. — DOI: [10.1063/1.5089550](https://doi.org/10.1063/1.5089550). — URL: <https://doi.org/10.1063%2F1.5089550>.
5. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch [и др.] // Phys. Rev. A. — 2007. — Окт. — Т. 76, вып. 4. — С. 042319. — DOI: [10.1103/PhysRevA.76.042319](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.042319). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.042319>.
6. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation / A. G. Fowler [и др.] // Phys. Rev. A. — 2012. — Сент. — Т. 86, вып. 3. — С. 032324. — DOI: [10.1103/PhysRevA.86.032324](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.032324). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.032324>.
7. *D. Gottesman A. K., Preskill J.* Encoding a qubit in an oscillator, Phys. Rev. A 64, 012310 (2001).
8. *Noh K., Chamberland C.* Fault-tolerant bosonic quantum error correction with the surface–Gottesman-Kitaev-Preskill code // Phys. Rev. A. — 2020. — Янв. — Т. 101, вып. 1. — С. 012316. — DOI: [10.1103/PhysRevA.101.012316](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.012316). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.101.012316>.
9. *Grimsmo A. L., Puri S.* Quantum Error Correction with the Gottesman-Kitaev-Preskill Code // PRX Quantum. — 2021. — Июнь. — Т. 2, вып. 2. — С. 020101. — DOI: [10.1103/PRXQuantum.2.020101](https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.2.020101). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.2.020101>.
10. Quantum error correction of a qubit encoded in grid states of an oscillator / P. Campagne-Ibarcq [и др.] // Nature 584, 368–372. — 2020. — DOI: [10.1038/s41586-020-2603-3](https://doi.org/10.1038/s41586-020-2603-3).
11. *Kitaev A. Y.* Quantum measurements and the Abelian Stabilizer Problem // Electron. Colloquium Comput. Complex. — 1996. — Т. 3.
12. *Terhal B. M., Weigand D.* Encoding a qubit into a cavity mode in circuit QED using phase estimation // Phys. Rev. A. — 2016. — С. 012315. — DOI: [10.1103/PhysRevA.93.012315](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.012315). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.012315>.

13. Encoding a qubit in a trapped-ion mechanical oscillator / C. Fluehmann [и др.]. — 2018. — Июль.