МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»**

КАФЕДРА ИНЖЕНЕРНОЙ КИБЕРНЕТИКИ

ЗАЧЁТНОЕ ЗАДАНИЕ

по курсу: Численные методы

Выполнил: Группа: БПМ-18-2

Студент: Соседка Артём Валерьевич

Проверил: преподаватель: Рубчинский Александр Анатольевич

Москва, 2020 г.

Содержание

[Постановка задания 3](#_Toc59139479)

[Описание метода итерации 3](#_Toc59139480)

[Преобразование системы 3](#_Toc59139481)

[Сходимость 5](#_Toc59139482)

[Процесс итерации 6](#_Toc59139483)

[Условие остановки 6](#_Toc59139484)

[Результат 7](#_Toc59139485)

# Постановка задания

В работе рассматривается метод решения СЛАУ, записываемых в виде

где *A* – квадратная матрица размера *5*×*5*, *b* – заданный вектор с *5* компонентами, *x* – неизвестный вектор той же размерности.

Метод итерации – численный метод решения математических задач: приближённый метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Суть такого метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения (являющегося более точным).

Матрица в варианте:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2.34169 | -4.78072 | -4.41084 | 1.55797 | 0.141912 |
| -5.63402 | 5.62853 | -9.79614 | 4.30952 | -0.263374 |
| -1.807 | 3.65032 | 6.20716 | -9.62523 | 6.48732 |
| 1.54027 | -0.580767 | 2.07495 | -8.56929 | 2.79092 |
| 5.8916 | -0.756554 | 5.35203 | 9.18882 | -1.770592 |

Для удобства, изменим матрицу, увеличив элементы по диагонали на 20, приблизив её к диагональному виду (для того, чтобы новая матрица сходилась, необходимо произвести линейные преобразования с текущей матрицей, но так как было разрешено видоизменить наши варианты таким образом, чтобы соблюдалась сходимость, я решил сделать так, а не приводить матрицу «правильным» способом):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 22.34169 | -4.78072 | -4.41084 | 1.55797 | 0.141912 |
| -5.63402 | 25.62853 | -9.79614 | 4.30952 | -0.263374 |
| -1.807 | 3.65032 | 26.20716 | -9.62523 | 6.48732 |
| 1.54027 | -0.580767 | 2.07495 | -28.56929 | 2.79092 |
| 5.8916 | -0.756554 | 5.35203 | 9.18882 | -21.770592 |

Вектор в варианте:

|  |
| --- |
| -8.25007 |
| 6.50858 |
| 9.91028 |
| 6.23646 |
| -9.65819 |

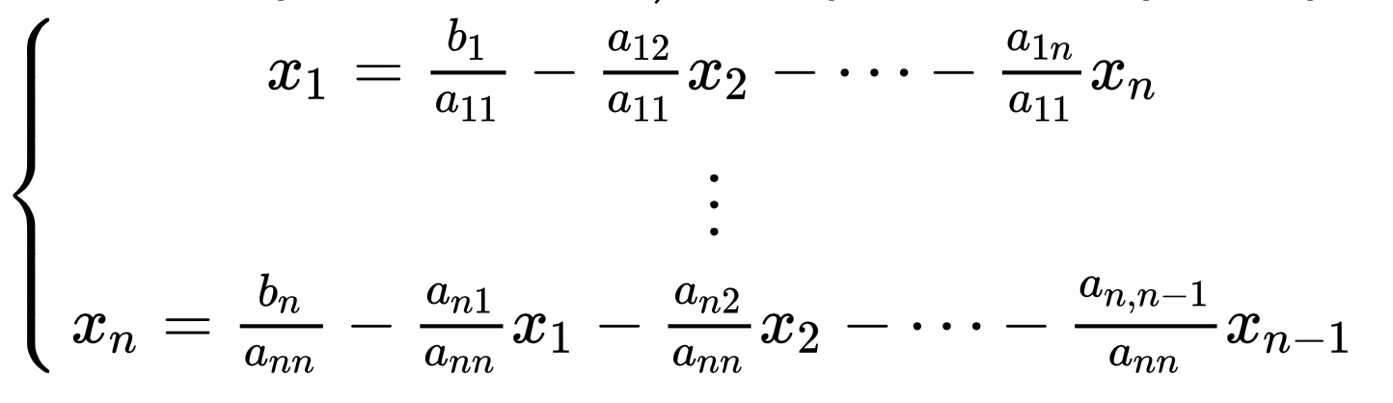
# Описание метода итерации

## Преобразование системы

Для того, чтобы воспользоваться методом итерации, необходимо привести нашу изначальную систему в вид:

Где – вектор неизвестных, а и – некоторые новые матрица и вектор соответственно. Способов преобразования системы к такому виду существует бесконечно, но я решил рассмотреть наиболее простой – так называемый метод Якоби.

Так как , то выразим через первое уравнение, – через второе и т.д.



Обозначим

при

Тогда, матрица примет следующий вид (берём числа из системы выше, подставляя уже найденные значения, так, и т.д.):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0.21398202 | 0.19742643 | -0.06973376 | -0.00635189 |
| 0.21983391 | 0 | 0.38223573 | -0.16815323 | 0.01027659 |
| 0.06895062 | -0.13928713 | 0 | 0.36727482 | -0.24753999 |
| 0.05391349 | -0.02032837 | 0.07262869 | 0 | 0.09768951 |
| 0.27062195 | -0.03475119 | 0.2458376 | 0.42207488 | 0 |

Вектор примет следующий вид (это свободные члены в системе выше, т.е. и т.д.):

|  |
| --- |
| -0.36926795 |
| 0.25396228 |
| 0.37815162 |
| -0.21829244 |
| 0.4436347 |

## Сходимость

Метод итерации применяют в случае, если сходится последовательность приближений по указанному алгоритму. Условие сходимости следующее: в частности, при выборе нормы, подчинённой векторной приобретает вид . Как мы видим из матрицы B, , из чего следует, что условие сходимости выполняется.

Доказательство сходимости выводится из следующих теорем:

Теорема 1) Необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций при любом начальном векторе к решению системы является требование, чтобы все собственные числа матрицы B были по модулю меньше 1. (Теорема 3.1, Вержбицкий, стр. 93)

Теорема 2) Пусть . Тогда при любом начальном векторе Метод Простых Итераций (коротко МПИ) сходится к единственному решению задачи и при всех справедливы следующие оценки погрешности: (теорема 3.2, Вержбицкий, стр. 94)

1. – апостериорная (“из опыта”)
2. – априорная (“до опыта”)

Из них, в силу соотношения , наша проверка сходимости корректна.

## Процесс итерации

Непосредственно процесс последовательного приближения по методу простых итераций может быть построен в соответствии с формулами:

где за начальное приближение можно взять вектор свободных членов:

Ввиду сходимости , наша последовательность сходится по норме к истинному решению , т.е.

Решим нашу систему с точностью . Для этого, найдём

Так, к примеру

Вектор получится следующим:

|  |
| --- |
| -0.22786303 |
| 0.35859336 |
| 0.12732605 |
| -0.17256049 |
| 0.33570533 |

## Условие остановки

Апостериорная оценка удобна для остановки метода итерации, т.е., процесс итерации можно остановить, когда выполнится неравенство:

|  |
| --- |
| 0.14140492 |
| 0.10463108 |
| -0.25082557 |
| 0.04573195 |
| -0.10792937 |

|||| = 0.25082557

Подставив наши значения для k = 1, получим:

То есть, после первого шага итерации, мы не достигли желаемой точности. Значит, нужно провести ещё итерации, пока не выполнится неравенство выше.

## Результат

Написав программу, я нашёл, что 5 приближение (k=5) даёт желаемую точность и мы получили следующее решение:

|  |
| --- |
| -0.261 |
| 0.297 |
| 0.168 |
| -0.195 |
| 0.322 |