UFPI – CCN – DM

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral – I

Prof. Mário

Limites infinitos, limites no infinito, assíntotas verticais e horizontais

[01] Determine cada um dos limites dados a seguir.

(a) $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{6}{x-5}$, (b) $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{6}{x-5}$, (c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^8}$,
(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2\,(x+2)}$, (e) $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2\,(x+2)}$, (f) $\lim_{x\to 5^+} \ln(x-5)$.

[02] Encontre as assíntotas verticais dos gráficos das funções

$$y = f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2} \qquad \text{e} \qquad y = g(x) = \frac{x}{x^2 - x + 2}.$$

[03] Verdadeiro ou falso? Se $y = f(x)$ não está definida em um ponto p, então a reta $x = p$ é uma assíntota vertical do gráfico de f. Justifique a sua resposta!

[04] Determine cada um dos limites dados a seguir.

(a) $\lim_{r\to +\infty} \dfrac{r^4 - r^2 + 1}{r^5 + r^3 - r}$, (b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+4\,x^2}}{4+x}$, (c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$,
(d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{9\,x^2 + x} - 3\,x\right)$, (e) $\lim_{x\to +\infty} \cos(x)$, (f) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}$,
(g) $\lim_{x\to +\infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$, (h) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}(x^2 - x^4)$, (i) $\lim_{x\to +\infty} e^{(-x^2)}$.

[05] Calcule $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)}{(x^2+1)^5}$.

[06] Determine, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais dos gráficos das funções dadas a seguir.

(a) $f(x) = \dfrac{3\,x}{x-1}$, (b) $f(x) = \dfrac{2\,x}{\sqrt{x^2+4}}$, (c) $f(x) = \dfrac{2\,x^2+1}{2\,x^2 - 3\,x}$,
(d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. (e) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+4}$. (f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$.

[07] O teorema do confronto continua válido para limites infinitos e no infinito. Use-o para calcular $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, sabendo que

$$\frac{4\,x-1}{x} < f(x) < \frac{4\,x^2 + 3\,x}{x^2}$$

para todo $x > 5$.

[08] Um tanque contém 5000 litros de água pura. Salmoura contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada dentro do tanque a uma taxa de 25 l/minuto. Nestas condições, a concentração de sal após t minutos (em gramas por litro) é dada por

$$C(t) = \frac{30\,t}{200 + t}.$$

O que acontece com a concentração de sal quando $t \to +\infty$?

[09] Diga se cada uma das sentenças a seguir é falsa ou verdadeira, justificando cuidadosamente a sua resposta.

(a) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$.

(b) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}(f(x)/g(x)) = 1$.

(c) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty}(1/f(x)) = +\infty$.

(d) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}(f(x) \cdot g(x)) = 0$.

(e) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}(f(x) \cdot g(x)) = +\infty$.

[10] Verdadeiro ou falso? Se $y = f(x)$ é uma função real cujo domínio é $D = \mathbb{R} - \{0\}$, então a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f. Justifique a sua resposta!

Respostas dos Exercícios

[01] (a) $+\infty$, (b) $-\infty$, (c) $+\infty$, (d) $-\infty$, (e) $-\infty$, (f) $-\infty$.

[02] As assíntotas verticais do gráfico da função f são as retas $x=-1$ e $x=2$. O gráfico da função g *não possui* assíntotas verticais, pois

$$\lim_{x\to p} g(x) = \lim_{x\to p} \frac{x}{x^2-x+2} = \frac{p}{p^2-p+2}$$

não é $+\infty$ e nem $-\infty$.

[03] A sentença é falsa. Considere, por exemplo, a função $y=f(x)=|x|/x$. Note que f não está definida em $p=0$, mas a reta $x=0$ *não é* uma assíntota vertical do gráfico de f, pois

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

[04] (a) 0, (b) 2, (c) -1, (d) $1/6$, (e) não existe (e não é $+\infty$ e nem $-\infty$), (f) $+\infty$, (g) $+\infty$, (h) $-\pi/2$, (i) 0.

[05] 1.

[06] (a) A assíntota vertical do gráfico da função é a reta $x=1$ e a assíntota horizontal é a reta $y=3$.

(b) O gráfico da função não possui assíntotas verticais, mas ele possui duas assíntotas horizontais: $y=-2$ e $y=2$.

(c) O gráfico da função possui duas assíntotas verticais: $x=0$ e $x=3/2$. Ele possui apenas uma única assíntota horizontal: $y=1$.

(d) O gráfico da função possui duas assíntotas verticais e duas assíntotas horizontais: $x=-2$, $x=2$, $y=-1$ e $y=1$.

(e) O gráfico da função não possui assíntotas verticais e nem assíntotas horizontais.

(f) O gráfico da função não possui assíntotas verticais, mas ele possui duas assíntotas horizontais: $y=-1$ e $y=1$.

[07] Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x-1}{x} = 4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x^2+3\,x}{x^2}$ e as desigualdades

$$\frac{4\,x-1}{x} < f(x) < \frac{4\,x^2+3\,x}{x^2}$$

valem para todo $x>5$, o teorema do confronto garante que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$.

[08] A concentração de sal se aproxima de $L=30$ g/litro por valores menores do que L.

[09] (a) A sentença é falsa. Como contra-exemplo, considere $f(x)=x+1$ e $g(x)=x$. Temos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, mas $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=1$.

(b) A sentença é falsa. Como contra-exemplo, considere $f(x)=2\,x$ e $g(x)=x$. Temos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, mas $\lim_{x\to+\infty}(f(x)/g(x))=2$.

(c) A sentença é falsa. Como contra-exemplo, considere a função $f(x)=-1/x^2$. Temos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, mas $\lim_{x\to+\infty}(1/f(x))=-\infty$.

(d) A sentença é falsa. Como contra-exemplo, considere $f(x)=1/x^2$ e $g(x)=x^2$. Temos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, mas $\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=1$.

(e) A sentença é falsa. Como contra-exemplo, considere $f(x) = 1/x^2$ e $g(x) = x^2$. Temos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, mas $\lim_{x \to +\infty}(f(x) \cdot g(x)) = 1$.

[10] A sentença é falsa! Considere, como contra-exemplo, a função $y = f(x) = |x|/x$. A reta $x = 0$ *não é* uma assíntota vertical do gráfico de f, pois $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.