

Volume ray casting — basics & principles

MTE7101

Projektarbeit 1

Studiengang: Informatik
Autor: Sven Osterwalder¹
Betreuer: Prof. Claude Fuhrer²
Datum: 13.01.2016
Version: 1.0



Licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 License

¹sven.osterwalder@students.bfh.ch

²claude.fuhrer@bfh.ch

Versionen

Version	Datum	Autor(en)	Änderungen
0.1	25.09.2015	SO	Initiale Erstellung des Dokumentes
0.2	27.09.2015	SO	Entwickeln einer initialen Struktur, Aufbau der Dokumentation, Entwicklung Kapitel 4, Beschreibung von Ray Tracing in Kapitel 5, Hinzufügen des Kapitels 2, Einführen von TODO-Notizen
0.3	29.09.2015	SO	Einführen von Meeting Minutes A, Erweitern des Kapitels 5 um Beleuchtungsmodelle, Beschreiben von lokalen Beleuchtungsmodellen
0.4	04.10.2015	SO	Hinzufügen von Standards und Richtlinien 4.3.2, Erweitern des Kapitels 5 um globale Beleuchtungsmodelle 5.1.2 sowie Ray Casting 5.2.1, Entfernen der Schriftart ‘cm-bright’, Hinzufügen des Kapitels über (implizite) Oberflächen 6.1
0.5	11.10.2015	SO	Neuordnung des Kapitels 5: Hinzufügen des Kapitels über Ray Tracing 5.2 sowie über Darstellung von impliziten Oberflächen 6.2
0.6	14.10.2015	SO	Hinzufügen von TODO-Notizen, Anpassung der Textdarstellung in Formeln
0.7	16.10.2015	SO	Hinzufügen einer Illustration des Phong-Beleuchtungmodells in Kapitel 5.1.1, Abarbeiten von TODO-Notizen in diversen Kapiteln, Erweitern des Kapitels über (implizite) Oberflächen 6.1
0.8	17.10.2015	SO	Hinzufügen einer Illustration des Ray Tracing Algorithmus in Kapitel 5.1.2
0.9	19.10.2015	SO	Beginn Kapitel über Rendering von impliziten Oberflächen 6.3
0.10	21.10.2015	SO	Erweiterung Kapitel über Rendering von impliziten Oberflächen, Einführung Kapitel über die Umsetzung eines Prototypen 7
0.11	24.10.2015	SO	Umstrukturierung des Dokumentes, Anpassung der Dokumentvorlage, Nachführen der Versionshistorie, Ausführen der Meeting Minutes vom 18.10.2015, Erstellen der Vorlage für Meeting Minutes vom 25.10.2015
0.12	31.10.2015	SO	Nachführen der Versionshistorie, Ausführen der Meeting Minutes vom 25.10.2015, Erstellen der Vorlage für Meeting Minutes vom 02.11.2015, Erweiterung des Kapitels 7, Abarbeiten von TODO-Notizen
0.13	07.11.2015	SO	Ausführen der Meeting Minutes vom 02.11.2015, Erweiterung des Kapitels 7
0.14	15.11.2015	SO	Erarbeiten des Kapitels 6.3.3, Erweiterung des Kapitels 7 um weiche Schatten, Erstellen und Hinzufügen von Bildmaterial zu Kapiteln 6.2.1 und 6.2.2.
0.15	29.11.2015	SO	Komplette Überarbeitung des Bildmaterials zu Kapiteln 6.2.1 und 6.2.2.
0.16	06.12.2015	SO	Nachführen von Meeting Minutes und der Versionierung. Überarbeiten des Zeitplanes, weiter Überarbeitung des Bildmaterials. Hinzufügen des Kapitels 5.3, Hinzufügen einer Einleitung zu Kapitel 5.

0.17	17.12.2015	SO	Einführen des Kapitels über Modelle zur Schattierung 5.3, Fertigstellung der Beschreibung von Gouraud-Shading 5.3.2.
0.18	22.12.2015	SO	Erweiterung des Kapitels über Modelle zur Schattierung 5.3 um diverse Illustrationen.
0.19	28.12.2015	SO	Erweiterung des Kapitels über Modelle zur Schattierung 5.3 um diverse Illustrationen, Hinzufügen eines (bildlichen) Vergleiches der verschiedenen Modelle zur Schattierung, Abarbeiten von TODO-Noitzen, Hinzufügen eines Beispieles zur parametrischen Darstellung einer Kugel in Kapitel 6.1, Korrektur diverser Rechtschreibfehler in Kapitel 6.2.
0.20	03.01.2016	SO	Erweiterung des Kapitels 5.1.2 um Ray Casting und Ray Tracing Verfahren, Erstellen und Hinzufügen diverser Illustrationen zu Kapitel 5.1, Erweiterung des Kapitels 6.1 um Abschnitt 6.1.3 über Distanzfelder, Überarbeitung der L ^A T _E X-Vorlage.
0.21	04.01.2016	SO	Aufteilen des Kapitels Beleuchtungsmodelle in Unterkapitel, Erweiterung der Kapitel 5.2.1 Ray Casting und 5.2.2 Ray Tracing.
0.22	05.01.2016	SO	Fertigstellung des Kapitels 5.2.2 Ray Tracing.
0.23	07.01.2016	SO	Erstellen und Hinzufügen von diversen Illustrationen zu Kapitel 5.2.2 Ray Tracing, Hinzufügen eines Abschnittes über Shader in Kapitel 5.3 Modelle zur Schattierung (shading models), Korrektur des Beispiels zur parametrischen Darstellung einer Kugel in Kapitel 6.1, Abarbeiten von TODO-Notizen, Hinzufügen einer Einleitung zu Kapitel 6.3 Rendering von impliziten Oberflächen, Hinzufügen von Kommentaren zum Quellcode des Prototyps.
0.24	09.01.2016	SO	Einleitung der Projektarbeit 1 überarbeitet, Korrektur der Beschreibung und Referenz von impliziten Oberflächen in Kapitel 6.1.3, Erarbeiten des Fazits 8, Beschreibung der Aufgabenstellung 3.
0.25	10.01.2016	SO	Fertigstellung der Kapitel 3 Aufgabenstellung und 4 Vorgehen, Abarbeiten und Nachführen von verbleibenden TODO-Noitzen, Nachführen der Versionshistorie.
0.90	11.01.2016	SO	Überarbeitung der Dokumentation bis und mit Kapitel 5, Nachführen der Versionshistorie.
0.91	13.01.2016	SO	Überarbeitung der Dokumentation ab Kapitel 5, Verfassen von Abschnitt 8.1 Erweiterungsmöglichkeiten, Nachführen der Versionshistorie.
1.0	13.01.2016	SO	Überarbeitung von Kapitel 8 Schlusswort, Verfassen von Kapitel Abstract, Nachführen der Versionshistorie.

Abstract

Das Fachgebiet der Computergrafik hat seit jeher das Bestreben eine möglichst realistische Darstellung von Szenen und Modellen zu erzeugen. Eine Darstellung also, welche möglichst nahe an der Realität respektive der menschlichen Wahrnehmung liegt.

Im Laufe der Zeit entstanden verschiedene Ansätze um eine solche Darstellung zu erreichen. Ein Teilgebiet davon sind Beleuchtungsmodelle, welche die Beleuchtung einer Darstellung bzw. einer Szene berechnen.

Ein relativ realistisch wirkendes Beleuchtungsmodell ist Ray Tracing (zu Deutsch Strahlen-Verfolgung), welches auf den physikalischen Grundlagen von Licht und Materialien von Oberflächen basiert.

Möchte man jedoch mit auf Strahlen-Verfolgung basierenden Verfahren eine Darstellung in Echtzeit erreichen, so waren diese Verfahren lange Zeit zu langsam. Im Rahmen der Weiterentwicklung der Computer und vor allem durch die Weiterentwicklung der Grafikkarten (GPUs), ist Ray Tracing jedoch wieder in den Fokus der Darstellung von Szenen in Echtzeit gerückt.

Diese Projektarbeit stellt die (theoretischen) Grundlagen zur Erzeugung und Darstellung von Szenen und Modellen sowie ein spezielles Ray Tracing Verfahren zur Darstellung von Bildern in Echtzeit vor. Es handelt sich dabei um *Volume Ray Casting* bzw. *Sphere Tracing*.

Um die Hypothese zu stützen, dass die komplexen, realistischer wirkenden Verfahren wieder in den Fokus der Darstellung von Szenen in Echtzeit gerückt sind, wurde ein Prototyp entwickelt, der Sphere Tracing in Echtzeit auf der Grafikkarte (GPU) umsetzt.

Es konnte gezeigt werden, dass mit dem vorgestellten Verfahren mittels moderner Grafikkarten eine Darstellung von Szenen und Modellen in Echtzeit erreicht werden kann.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	v
1. Einleitung	1
2. Administratives	2
2.1. Beteiligte Personen	2
2.2. Aufbau des Dokumentes	2
2.3. Ergebnisse (Deliverables)	2
3. Aufgabenstellung	3
3.1. Motivation	3
3.2. Ziele und Abgrenzung	3
4. Vorgehen	5
4.1. Arbeitsorganisation	5
4.2. Projektphasen	5
4.3. Technologien	7
5. Theoretischer Hintergrund	9
5.1. Beleuchtungsmodelle	9
5.2. Ray Casting und Ray Tracing	12
5.3. Modelle zur Schattierung (shading models)	22
6. Oberflächen	26
6.1. Oberflächen	26
6.2. Darstellung von impliziten Oberflächen	30
6.3. Rendering von impliziten Oberflächen	39
7. Prototyp	44
7.1. Architektur	44
7.2. Umsetzung	46
8. Schlusswort	53
8.1. Erweiterungsmöglichkeiten	53
Glossar	55
Literaturverzeichnis	55
Abbildungsverzeichnis	55
Tabellenverzeichnis	55
Auflistungsverzeichnis	56
Anhang	58
A. Meeting minutes	59

1. Einleitung

Seit dem Bestehen moderner Computer existiert auch die Computergrafik. Ziel der Computergrafik ist es unter Anderem den dreidimensionalen Raum auf eine zweidimensionale Fläche abzubilden, da die Ausgabe meist auf den zweidimensionalen Raum limitiert ist.

Dabei wird zwischen statischen Bildern und dynamischen Bildern unterschieden. Statische Bilder werden bei Bedarf dargestellt und ändern sich in der Regel nicht. Dynamische Bilder können sich hingegen ständig ändern und müssen — bedingt durch das menschliche Auge — mit 25 Bildern pro Sekunde ausgegeben werden. Es bestand bereits früh das Bestreben eine möglichst realistische Darstellung zu erhalten. Eine Darstellung also, die möglichst nahe an der menschlichen Wahrnehmung liegt.

Im Laufe der Zeit entstanden verschiedene Ansätze um eine solche Darstellung zu erreichen. Ein Teilgebiet davon sind Beleuchtungsmodelle, welche die Beleuchtung einer Darstellung bzw. einer Szene berechnen. Dabei wird zwischen lokalen und globalen Beleuchtungsmodellen unterschieden.

Ein globales Beleuchtungsmodell ist Ray Tracing (zu Deutsch Strahlenverfolgung), welches seine Ursprünge in der 1968 von Appel vorgestellten Arbeit „Some Techniques for Shading Machine Renderings of Solids“ hat und 1980 in der Arbeit „An Improved Illumination Model for Shaded Display“ von Whitted verbessert wurde. Das Verfahren besticht durch seine Einfachheit und bietet dabei eine hohe Bildqualität mit perfekten Spiegelungen und Transparenzen. Mit entsprechenden Optimierungen ist das Verfahren auch relativ schnell.

Mit schnell ist dabei die Zeit gemeint, die benötigt wird um ein einzelnes Bild darzustellen. Möchte man jedoch eine Darstellung in Echtzeit erreichen, so war das Verfahren lange zu langsam.

Im Rahmen der Weiterentwicklung der Computer und vor allem durch die Weiterentwicklung der Grafikkarten (GPUs), ist Ray Tracing jedoch wieder in den Fokus der Darstellung von Szenen in Echtzeit gerückt.

Diese Projektarbeit stellt ein spezielles Ray Tracing Verfahren zur Darstellung von Bildern in Echtzeit vor: Volume Ray Casting bzw. Sphere Tracing.

2. Administratives

Einige administrative Aspekte der Projektarbeit werden angesprochen, obwohl sie für das Verständnis der Resultate nicht notwendig sind.

Im gesamten Dokument wird nur die männliche Form verwendet, womit aber beide Geschlechter gemeint sind.

2.1. Beteiligte Personen

Autor Sven Osterwalder¹
Betreuer Prof. Claude Fuhrer²

Begleitet den Studenten bei der Projektarbeit

2.2. Aufbau des Dokumentes

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit ist wie folgt:

- Einleitung zur Projektarbeit
- Beschreibung der Aufgabenstellung
- Vorgehen des Autors im Hinblick auf die gestellten Aufgaben
- Lösung der gestellten Aufgaben
- Verwendete Technologien

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Beschreibung der theoretischen Grundlagen (unter praktischen Aspekten) des Volume Ray Casting Verfahrens.

2.3. Ergebnisse (Deliverables)

Nachfolgend sind die abzugebenden Objekte aufgeführt:

- **Abschlussdokument**

Das Abschlussdokument beinhaltet die theoretischen Grundlagen (unter praktischen Aspekten) des Volume Ray Casting Verfahrens.

- **Prototyp**

Der Prototyp, welcher im Rahmen der Bearbeitung der Thematik entstanden ist. Es handelt sich um eine praktische Umsetzung des vorgestellten Verfahrens.

¹sven.osterwalder@students.bfh.ch

²claude.fuhrer@bfh.ch

3. Aufgabenstellung

3.1. Motivation

Seit der Entstehung der Computergrafik Ende der 1960er Jahre möchte man möglichst realitätsnahe, echte Bilder generieren können. Angefangen mit *Photon Tracing* (1968), über *Ray Tracing* (1980), bis hin zu *Photon Mapping* (1997/2001), haben sich immer realistischer wirkende Verfahren zur Darstellung von Bildern entwickelt.

Da der Aufwand möglichst realistisch wirkende Bilder zu erzeugen jedoch relativ hoch ist, wurden diese Verfahren in der Regel nur für statische Bilder verwendet. Und auch dort war und ist der Grad der Details begrenzt bzw. an Rechenzeit gebunden. Möchte man mehr Details, so wird mehr Rechenzeit benötigt. Daher wurde oder wird für eine Darstellung in Echtzeit — also eine Anzeige von mindestens 25 Bildern pro Sekunde — lange nur eine Näherung, basierend auf vereinfachten *Beleuchtungsmodellen* genutzt.

Durch die Weiterentwicklung der Computer und vor allem durch die Weiterentwicklung der Grafikkarten (GPUs), sind die komplexeren, realistischer wirkenden Verfahren, wie z.B. Ray Tracing, jedoch wieder in den Fokus der Darstellung von Szenen in Echtzeit gerückt.

Diese Projektarbeit beschreibt theoretische Grundlagen zur Erzeugung von möglichst realistisch wirkenden Bildern anhand *Beleuchtungsmodellen*, *praktischen Verfahren* (wie z.B. Ray Marching oder Ray Tracing), *Modellen zur Schattierung* und stellt schliesslich eine effiziente Methode des Ray Tracings, das so genannte *Sphere Tracing* vor.

Um die Hypothese zu stützen, dass die komplexen, realistischer wirkenden Verfahren wieder in den Fokus der Darstellung von Szenen in Echtzeit gerückt sind, wurde ein Prototyp entwickelt, der Sphere Tracing in Echtzeit auf der Grafikkarte (GPU) umsetzt.

3.1.1. Demoszene

In den 1980er-Jahren entwickelte sich “unter Anhängern der Computerszene … während der Blütezeit der 8-Bit-Systeme” (Wikipedia Foundation 2015a) eine Bewegung namens Demoszene. “Ihre Mitglieder, die häufig Demoszener oder einfach Szener genannt werden, erzeugen mit Computerprogrammen auf Rechnern so genannte Demos – Digitale Kunst, meist in Form von musikalisch unterlegten Echtzeit-Animationen.” (Wikipedia Foundation 2015a)

Es handelt sich bei der Demoszene um ein sehr aktives und kreatives Umfeld, in dem die Technologie ständig an die Grenzen des technisch machbaren gelangt. In diesem Umfeld entstehen regelmässig neue Ideen zur Erzeugung von noch realistischer wirkenden Bildern. Dabei findet eine wechselseitige Beeinflussung zwischen dem akademischen Umfeld und der Demoszene statt.

So wurde auch das hier vorgestellte *Sphere Tracing* Verfahren relativ früh von in der Demoszene aktiven Personen aufgegriffen und behandelt.

3.2. Ziele und Abgrenzung

Diese Projektarbeit besteht aus drei Teilen. Der Beschreibung der theoretischen Grundlagen, der Beschreibung des als Sphere Tracing bekannten Verfahrens sowie der Umsetzung eines Prototypen.

Für diese Projektarbeit liegt der Fokus vor allem auf der (mathematischen) Beschreibung von Oberflächen und der Nutzung dieser, sowie der Darstellung von Szenen mittels Sphere Tracing. Bei dem erstellten

Prototypen handelt es sich um eine Art Machbarkeitsstudie, welche zeigt, dass Bilder mittels Sphere Tracing in Echtzeit erzeugt und dargestellt werden können.

Diese Projektarbeit dient als Vorarbeit und Grundlage für das MSE-Modul *MTE7102*.

3.2.1. Vorgängige Aktivitäten

Die Grundlagen dieser Projektarbeit waren dem Autor durch sein vorgängiges Studium an der Berner Fachhochschule mit Schwerpunkt *Computer Perception and Virtual Reality* bereits bekannt, jedoch nicht in dieser Tiefe.

Durch sein Interesse für die Demoszene wurde der Autor auf die Thematik dieser Arbeit aufmerksam, hatte sich aber zuvor nie eingehend damit auseinander gesetzt.

3.2.2. Neue Lerninhalte

Zusätzlich zu den formalen Lerninhalten hatte die Arbeit für den Autor die folgenden neuen Lerninhalte:

- Implizite Oberflächen
- Distanzfunktionen
- Distanzfelder
- Ray Marching
- Sphere Tracing
- Darstellung von (weichen) Schatten
- Praktische Umsetzung der vorgestellten Verfahren

4. Vorgehen

4.1. Arbeitsorganisation

4.1.1. Regelmässige Treffen

Regelmässige Besprechungen mit dem Betreuer der Arbeit halfen die gesteckten Ziele zu erreichen und Fehlentwicklungen zu vermeiden. Der Betreuer unterstützte den Autor dabei mit Vorschlägen. Die Treffen fanden mindestens alle zwei Wochen statt, sie wurden in Form eines Protokolles festgehalten. Das Protokoll findet sich in Abschnitt A im Anhang dieser Arbeit (8.1.4).

4.2. Projektphasen

4.2.1. Meilensteine

Um bei der Arbeit ein möglichst strukturiertes Vorgehen einzuhalten, wurden folgende Projektphasen gewählt:

- Start der Projektarbeit
- Erarbeitung und Festhalten der Anforderungen
- Erarbeitung der theoretischen Grundlagen
- Erstellung der abschliessenden Dokumentation
- Erstellung eines Prototypen

Die Phasen *Erarbeitung der theoretischen Grundlagen*, *Erstellung der abschliessenden Dokumentation* sowie *Erstellung eines Prototypen* liefen parallel ab. Erkenntnisse einer Phase flossen jeweils in die anderen Phasen ein.

4.2.2. Zeitplan / Projektphasen

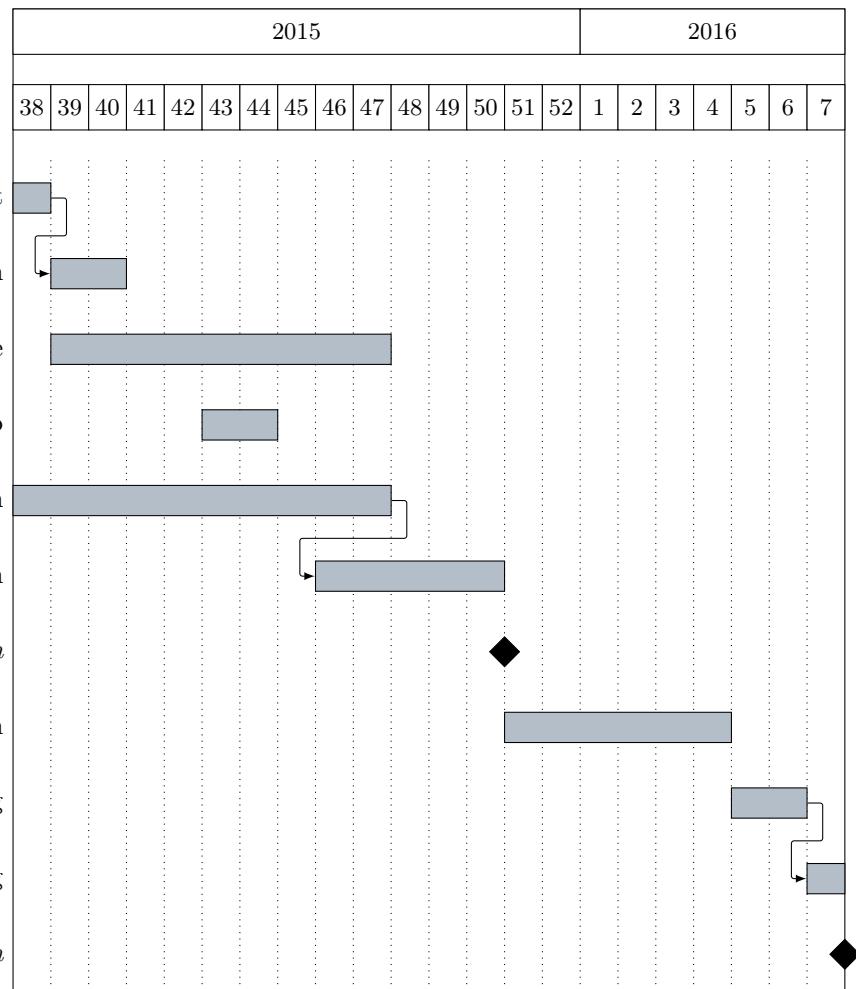


Abbildung 4.1.: Zeitplan; Der Titel stellt Jahreszahlen, der Untertitel Kalenderwochen dar

Projektstart

In der ersten Phase wurden die Meilensteine der Arbeit identifiziert und skizziert. Um Details der Aufgabe zu verstehen, wurde das notwendige Vorwissen über Algorithmen zur globalen Beleuchtung erarbeitet. Weiter wurde die Grundlage dieser Dokumentation erstellt.

Anforderungen

In dieser Phase wurde das Ziel dieser Projektarbeit festgelegt. Vom Ziel ausgehend wurden die dazu erforderlichen Projektpfhasen festgelegt.

Erarbeitung theoretische Grundlagen

In dieser Phase ging es darum, sich in die Materie einzulesen und sich diese anzueignen. Das Lesen und Bearbeiten von Publikationen führte zu vielen neuen Denkanstößen und immer wieder zu neuen Recherchen. Die Erkenntnisse dieser Phase flossen so stetig in die Dokumentation ein, ergänzten und beeinflussten diese.

Dokumentation

Die vorliegende Arbeit entspricht der Dokumentation. Sie wurde während der gesamten Projektarbeit stetig erweitert und diente zur Reflexion von fertiggestellten Teilen.

4.3. Technologien

4.3.1. Tools und Software

Dokumentation und Prototyp

L^AT_EX Eine Makro-Sammlung für das T_EX-System. Wurde zur Erstellung dieser Dokumentation eingesetzt. Diese Dokumentation wurde mittels L^AT_EX geschrieben.

Make Build-Automations-Werkzeug, wurde zur Erstellung dieses Dokumentes eingesetzt.

CMake Build-Automations-Werkzeug, wurde zur Erstellung des Prototypen eingesetzt.

zotero Ein freies, quelloffenes Literaturverwaltungsprogramm zum Sammeln, Verwalten und Zitieren unterschiedlicher Online- und Offline-Quellen (Wikipedia Foundation 2015b).

VIM Vi IMproved. Ein freier, quelloffener Texteditor zur Textbearbeitung. Wurde zum Verfassen der Dokumentation sowie zur Entwicklung des Prototypen eingesetzt.

LLVM Low Level Virtual Machine. Eine Compiler-Architektur zum Kompilieren von Applikationen. Wurde zur Kompilation des Prototypen eingesetzt.

clang Ein C-Sprachen-Frontend für LLVM. Wurde zur Kompilation des Prototypen eingesetzt.

Arbeitsorganisation

Git Freie Software zur verteilten Versionsverwaltung, wurde für die Entwicklung dieser Dokumentation sowie des Prototypen verwendet. Die Projektarbeit findet sich unter GitHub¹.

GitHub Eine freie Hosting-Platform für Git mit Weboberfläche.

4.3.2. Standards und Richtlinien

Programmcode

Der Programmcode des Prototypen, welcher in C++ geschrieben wurde, folgt den offiziellen Richtlinien für C++ von Google².

Pseudecode

Da der Autor dieser Arbeit bedingt durch seine tägliche Arbeit mit der Programmiersprache *Python* relativ bewandert ist, wird daher diese als Sprache zur Beschreibung von Pseudocode verwendet. Dabei wird aber kein Augenmerk auf die formale Korrektheit, geschweige denn der Lauffähigkeit des Pseudocodes gelegt.

¹ <https://www.github.com/sosterwalder/mte7101-project1>

² <https://google.github.io/styleguide/cppguide.html>

Projekt-Struktur

Um die Übersicht zu wahren und den Verwaltungsaufwand minimal zu halten, wurde eine entsprechende Projekt-Struktur gewählt. Diese ist in Auflistung 4.1 ersichtlich.

Projekt-Struktur	
23	bin/ -- Compiled, binary file of the prototype
24	build/ -- Temporary directory for build output
25	data/ -- GLSL shader files
26	doc/ -- Documentation
27	img/ -- Images used for the documentation
28	inc/ -- LaTeX files used for inclusion to maintain
29	readability and manageability
30	static/ -- Static files used for inclusion, e.g. the
31	bibliography, versioning of the document
32	and so on
33	attachment/ -- Attachments for the documentation,
34	e.g. the minutes of the held meetings
35	inc/ -- External source files for inclusion, needed by the
36	prototype
37	lib/ -- External libraries for linking against when building
38	the prototype
39	src/ -- Source code of the prototype

Auflistung 4.1: Projekt-Struktur.

5. Theoretischer Hintergrund

Sofern nicht anders vermerkt, basiert das folgende Kapitel auf Foley 1996, S. 721ff.

Um überhaupt Bilder generieren und darstellen zu können, braucht es zwei Faktoren: Was dargestellt werden soll und wie es dargestellt werden soll. Prinzipiell geht es darum zu bestimmen, welche Farbe eine Oberfläche an einem bestimmten Punkt hat. Dabei haben sich die Begriffe des *Beleuchtungsmodells* (*illumination model*) und des *Modèles zur Schattierung* (*shading model*) etabliert.

Foley nutzt den Begriff *shading model* als Überbegriff, welcher auch Beleuchtungsmodelle umfasst. Daher definiert ein *shading model*, wann ein Beleuchtungsmodell mit welchen Parametern angewendet wird. So nutzen manche *shading models* ein Beleuchtungsmodell für jeden Pixel, andere wiederum nur für einzelne Pixel und interpolieren dabei die Werte der anderen Pixel.

5.1. Beleuchtungsmodelle

Sofern nicht anders vermerkt, basiert der folgende Abschnitt auf Whitted 1980, S. 343, sowie auf Hughes et al. 2013.

Beleuchtungsmodelle beschreiben, wieviel Licht von einem sichtbaren Punkt einer Oberfläche zum Betrachter emittiert wird. In der Regel wird das Licht als Funktion in Abhängigkeit folgender Faktoren beschrieben:

- Richtung der Lichtquelle
- Lichtstärke
- Position des Betrachters
- Orientierung der Oberfläche
- Oberflächenbeschaffenheit
- Globale Umgebung

Es wird dabei zwischen lokalen und globalen Beleuchtungsmodellen unterschieden.

5.1.1. Lokale Beleuchtungsmodelle

Lokale Beleuchtungsmodelle aggregieren Daten von benachbarten, eben lokalen, Oberflächen. Diese Modelle sind in deren Umfang allerdings limitiert, da sie normalerweise nur Lichtquellen sowie die Orientierung einer Oberfläche einbeziehen. Sie ignorieren dabei aber die globale Umgebung, in welcher sich eine Oberfläche befindet. Dies ist dadurch bedingt, dass die traditionell verwendeten Algorithmen zur Berechnung der Sichtbarkeit von Oberflächen über keine globalen Daten verfügen.

Das bekannteste lokale Beleuchtungsmodell ist das *Phong-Beleuchtungsmodell*, welches 1975 von Phong Bui-Tong entwickelt wurde (Phong 1975). Es beschreibt nicht-perfekte Reflektoren wie zum Beispiel einen Apfel (Foley 1996, Kapitel 16, Seite 729).

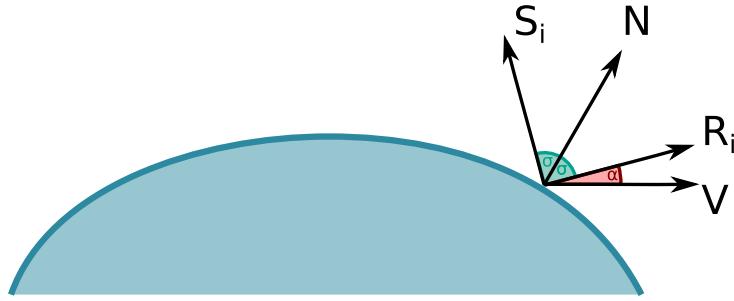


Abbildung 5.1.: Illustration des Phong-Beleuchtungsmodells¹

Das *Phong-Beleuchtungsmodell* beschreibt die reflektierte (Licht-) Intensität I als Zusammensetzung aus der ambienten, der diffusen und der ideal spiegelnden Reflexion einer Oberfläche:

$$I = I_{\text{ambient}} + I_{\text{diffuse}} + I_{\text{specular}} + I_{\text{emissive}} \quad (5.1)$$

Oder mathematisch ausgedrückt:

$$I(\vec{V}) = k_a \cdot L_a + k_d \sum_{i=0}^{n-1} L_i \cdot (\vec{S}_i \cdot \vec{N}) + k_s \sum_{i=0}^{n-1} L_i \cdot (\vec{R}_i \cdot \vec{V})^{k_e} \quad (5.2)$$

Wobei gilt:

- $I(\vec{V})$
Die reflektierte (Licht-) Intensität in Richtung des Vektors \vec{V} .
- n
Anzahl Lichtquellen.
- $k_a \cdot L_a$
Ambiente Komponente des Beleuchtungsmodells. Mittels diesem Faktor wird versucht allem indirekten Licht der Szene gerecht zu werden. Bei k_a handelt es sich um eine Konstante, welche den ambienten Anteils des Lichtes L_a skaliert.
- k_d
Konstante für die diffuse Komponente des reflektierten Lichtes, basierend auf der Wellenlänge bzw. der Frequenz.
- \vec{S}_i
Richtung, in welcher das Licht der i -ten Lichtquelle ankommt, normalisierter Einheitsvektor.
- \vec{N}
Einheitsnormale der Oberfläche.
- k_s
Koeffizient der spiegelnden Komponente, basierend auf der Wellenlänge bzw. Frequenz.
- $\vec{R}_i = \vec{S}_i + 2(\vec{S}_i \cdot \vec{N})\vec{N}$
Richtung, in welcher das Licht der i -ten Lichtquelle reflektiert wird, normalisierter Einheitsvektor.
- \vec{V}
Blickrichtung des Betrachters bzw. der Kamera.
- k_e
Exponent, welcher von der Rauheit bzw. Reflexion der Oberfläche abhängt.

¹Eigene Darstellung mittels Geogebra, angelehnt an Foley 1996[Kapitel 16, Seite 731, Abbildung 16.12]

- L_i
Licht- bzw. Farbenintensität der i -ten Lichtquelle.

Der reflektive Vektor \vec{R}_i ist gegeben durch

$$\vec{R}_i = \vec{S}_i + 2(\vec{S}_i \cdot \vec{N})\vec{N} \quad (5.3)$$

Damit die Energieerhaltung gewährleistet ist, muss weiter $k_d + k_s < 1$ gelten. Der Winkel zwischen \vec{R} und \vec{V} wird mittels $\cos(\alpha)$ ermittelt.

In Gleichung 5.2 wurde der emissive Term bewusst weggelassen. Dieser wird meist eher für Spezialeffekte statt für die Beleuchtung "normaler" Objekte benutzt (Hughes et al. 2013).

5.1.2. Globale Beleuchtungsmodelle

Sofern nicht anders vermerkt, basiert der folgende Abschnitt auf Foley 1996, S. 775ff.

Globale Beleuchtungsmodelle beschreiben die reflektierte (Licht-) Intensität eines Punktes aufgrund direkter Einstrahlung des Lichtes durch Lichtquellen sowie durch alles Licht, welches diesen Punkt nach Reflexion von bzw. Durchdringen der eigenen oder anderer Oberflächen erreicht.

Bei globalen Beleuchtungsmodellen unterscheidet man zwischen Blickwinkel abhängigen Algorithmen, wie etwa Ray Tracing, und zwischen Blickwinkel unabhängigen Algorithmen, wie etwa Photon Mapping.

Blickwinkel abhängige Algorithmen verwenden eine Diskretisierung der sichtbaren Fläche bzw. Bildfläche um zu entscheiden, an welchen Punkten, in Blickrichtung des Betrachters, die Berechnung der Beleuchtung durchgeführt werden soll.

Blickwinkel unabhängige Algorithmen hingegen, nehmen eine Diskretisierung vor und verarbeiten die Umgebung um genügend Informationen für die Berechnung der Beleuchtung zu haben. Dies erlaubt ihnen die Berechnung der Beleuchtung an einem beliebigen Punkt aus einer beliebigen Blickrichtung.

Beide Arten von Algorithmen haben Vor- und Nachteile. So sind Blickwinkel abhängige Algorithmen gut geeignet um Spiegelungen, basierend auf der Blickrichtung des Betrachters, zu berechnen, eignen sich aber weniger um gleichbleibende diffuse Anteile über weite Flächen eines Bildes zu berechnen. Bei Blickwinkel abhängigen Algorithmen verhält es sich genau umgekehrt.

Renderinggleichung

Die unter 5.1.2 genannten Verfahren versuchen auszudrücken, wie sich Licht von einem Punkt im Raum zu einem anderen bewegt. Dabei beschreiben sie die Intensität des Lichtes, ausgehend vom ersten Punkt zum zweiten Punkt. Zusätzlich wird die Intensität des Lichtes, ausgehend von allen anderen Punkten, welche den ersten Punkt erreichen, und zum zweiten Punkt emittiert werden, beschrieben.

James (Jim) Kajiya stellte 1986 die so genannte Renderinggleichung auf, welche genau dieses Verhalten beschreibt (Kajiya 1986) (Foley 1996):

$$I(x, x') = g(x, x')[\varepsilon(x, x') + \int_S \rho(x, x', x'') I(x', x'') dx''] \quad (5.4)$$

Wobei gilt:

- x, x' und x''
Punkte in der Umgebung.
- $I(x, x')$
Intensität des Lichtes von Punkt x' nach Punkt x .

- $g(x, x')$
Ein auf die Geometrie bezogener Term
0: x und x' verdecken sich.
 $1/r^2$: x und x' sehen sich, wobei r die Distanz zwischen x und x' ist.
- $\epsilon(x, x')$
Intensität des Lichtes, welches von x' nach x emittiert wird.
- $\rho(x, x', x'')$
Intensität des Lichtes, welches von x'' durch die Oberfläche bei x' nach x gestreut wird.
- \int_S
Integral über die Vereinigung aller Flächen, daher $S = \bigcup S_i$.
Dies bedeutet, dass die Punkte x , x' und x'' über alle Flächen aller Objekte der Szene „streifen“. Wobei es sich bei S_0 um eine zusätzliche Fläche handelt, welche als Hintergrund verwendet wird. S_0 ist dabei eine Hemisphäre, welche die gesamte Szene umspannt.

5.2. Ray Casting und Ray Tracing

Sofern nicht anders vermerkt, basiert der folgende Abschnitt auf Hughes et al. 2013, Kapitel 15, S. 387ff.

Um ein Bild möglichst realistisch darzustellen muss berechnet werden, wieviel Licht zu jedem Pixel der sichtbaren Bildfläche (also dem Betrachter) transportiert wird. Da Photonen die Energie des Lichtes transportieren, möchte man das physikalische Verhalten dieser simulieren.

Es ist allerdings nicht möglich *alle* Photonen zu simulieren, da der Aufwand schlicht zu gross wäre. Daher macht es Sinn nur einige Photonen (exemplarisch) zu betrachten und dann eine Abschätzung des gesamten Lichtes vorzunehmen.

Jede Lichtquelle emittiert Photonen (als Welle und als Teilchen) in alle Richtungen. Man modelliert diese als Partikel, welche anhand Lichtstrahlen (*light rays*) auf Objekte einer Szene treffen.

Jedes Photon hat dabei eine spezifische Wellenlänge λ , welche die Farbe definiert, sowie eine Energie respektive Frequenz f , welche die Intensität der Farbe des Photons definiert.

Trifft ein Photon auf ein Objekt, wird ein Teil der Energie absorbiert, ein Teil reflektiert und ein Teil durchdringt das Objekt (Transmission). Photonen treffen solange auf Objekte, bis deren gesamte Energie absorbiert, sie die Szene verlassen oder sie auf die sichtbare Bildfläche treffen und somit zum eigentlichen Bild beitragen.

Bei *Ray Casting* bzw. *Ray Tracing* handelt es sich um zwei relativ einfache Verfahren um globale Beleuchtungsmodelle zu implementieren.

Die einfachste Art das oben genannte Verhalten von Licht zu modellieren ist das so genannte *Ray Casting*.

5.2.1. Ray Casting

Bei *Ray Casting* handelt es sich um eine Strategie zur Simulation, wieviel Licht anhand eines (Licht-)Strahles zu der sichtbaren Bildfläche (also dem Betrachter) transportiert wird.

Das Verfahren wurde erstmals in „Some Techniques for Shading Machine Renderings of Solids“ 1968 von Appel vorgeschlagen und auch 1968 von der Arlington Mathematical Applications Group, Inc in *AFIPS '68 (Fall, part I): Proceedings of the December 9-11, 1968, Fall Joint Computer Conference, Part I* erfolgreich umgesetzt.

Ein möglicher Algorithmus, wie Ray Casting umgesetzt werden kann, findet sich in Auflistung 5.1.

Bei dem Ray Casting Verfahren wird ein *Projektionszentrum* (das Auge eines Betrachters) sowie eine Region einer beliebigen Bildfläche gewählt. Dabei kann die Region als gerasterte Fläche angenommen

werden. Jedes Raster entspricht den Bildpunkten (Pixeln) der gewünschten Auflösung. Daher, je feiner die Rasterung, desto höher die Auflösung.

Für jeden Bildpunkt der gewählten Region wird ein Strahl generiert, welcher dann vom Projektionszentrum durch das Zentrum des Bildpunktes auf die Szene “geworfen” wird.

Es wird dann das Objekt gesucht, welches den nächsten Schnittpunkt mit dem Strahl bildet. Für jede Lichtquelle der Szene wird geprüft, ob die Lichtquelle vom Schnittpunkt aus sichtbar ist. Ist dies der Fall, wird schliesslich die Farbe und die Intensität der Farbe an diesem Schnittpunkt anhand eines Beleuchtungsmodells (z.B. dem Phong-Beleuchtungsmodell) berechnet. Ansonsten befindet sich der Punkt im Schatten, wird also nicht beleuchtet.

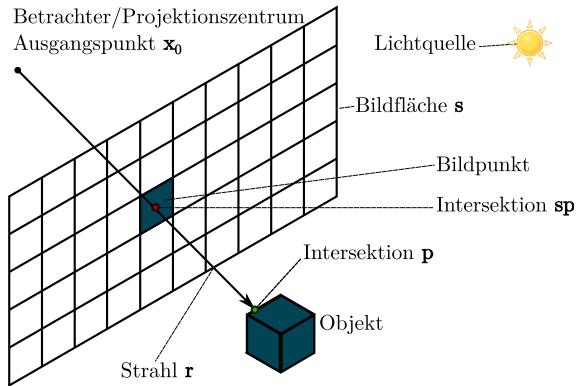


Abbildung 5.2.: Illustration des Ray Casting Verfahrens²

Die obenstehende Abbildung 5.2 zeigt das Prinzip des Ray Castings. Ausgangspunkt bildet der Betrachter mit $x_0 = (x_{x_0}, y_{x_0}, z_{x_0})$. Es wird ein Strahl $r = (x_0, d)$ in Richtung d der Bildfläche s “geworfen”. Der Strahl r schneidet die Bildfläche s an einem Punkt $sp = (x_{sp}, y_{sp}, z_{sp})$. Somit ergibt sich die Richtung des Strahles $d = sp - x_0 = (x_{sp} - x_{x_0}, y_{sp} - y_{x_0}, z_{sp} - z_{x_0}) = (x_d, y_d, z_d)$. Der Strahl r trifft und schneidet schliesslich ein Objekt am Punkt $p = r(t) = x_0 + t \cdot d$ wobei $t \in [1, \infty]$ ist. Dies führt dazu, dass das Raster respektive der Bildpunkt, durch welches der Strahl r hindurch geht, die Farbe des getroffenen Objektes annimmt.

Berechnung von Schnittpunkten

Um den Schnittpunkt eines Lichtstrahles mit einem Objekt zu berechnen wird grundsätzlich die mathematische Gleichung des Lichtstrahles in die des Objektes eingesetzt. Existiert eine reelle Lösung, so schneidet der Lichtstrahl das Objekt am nächsten Punkt zwischen dem Schnittpunkt und der Oberflächennormale des Objektes.

Glassner beschreibt mehrere Methoden zur Prüfung von Schnittpunkten, hier sei beispielhalber nur die Intersektion mit einer Kugel sowie mit einem Dreieck genannt.

Schnittpunkt mit einer Kugel

Um den Schnittpunkt bzw. die Schnittpunkte eines Lichtstrahles mit einer Kugel zu erhalten, wird die Gleichung des Lichtstrahles

$$r(t) = r_0 + t \cdot r_d \quad (5.5)$$

in die implizite Gleichung einer Kugel

²Eigene Darstellung mittels Inkscape

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 - r^2 = 0 \quad (5.6)$$

eingesetzt. Dies führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\|r(t) - \mathbf{c}\|^2 - r^2 = 0 \quad (5.7)$$

$$\|\mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{r}_d - \mathbf{c}\|^2 - r^2 = 0 \quad (5.8)$$

Das Auflösen dieses Gleichungssystems ergibt folgende Fälle:

- Zwei Lösungen: Der Strahl geht durch die Kugel hindurch.
- Eine Lösungen: Der Strahl streift die Kugel an einem Punkt als Tangente.
- Imaginäre Lösung: Der Strahl verfehlt die Kugel komplett.

Schnittpunkt mit einem Dreieck

Um den Schnittpunkt eines Lichtstrahles mit einem Dreieck zu erhalten, wird die Gleichung des Lichtstrahles 5.5 als Lösung der Gleichung eines Dreiecks mit baryzentrischen Koordinaten

$$x(\beta, \gamma) = \mathbf{v}_1 + \beta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \quad (5.9)$$

verwendet. Dies führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{r}_d = \mathbf{v}_1 + \beta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \gamma(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \quad (5.10)$$

Der Lichtstrahl schneidet das Dreieck genau dann, wenn gilt $\beta + \gamma \leq 1$, $\beta \geq 0$ und $\gamma \geq 0$.

Es ist leicht verständlich, dass es sehr aufwändig ist jegliche Objekte auf Schnittpunkte zu testen (so wie in Beispiel 5.1). So wurde eine Vielzahl an Methoden entwickelt um dies zu Beschleunigen. Eine Möglichkeit ist es, das Finden der Schnittpunkte zu Beschleunigen, z.B. durch Verwendung von Hüllköpern, oder die Anzahl der Berechnungen zu minimieren, z.B. durch Verwendung von Hierarchien von Objekten oder der Unterteilung des Raumes einer Szene. Das Kapitel “A Survey of Ray Tracing Acceleration Techniques” von Glassner in *An Introduction to Ray Tracing*, S. 202ff, bietet einen guten Überblick.

```

def ray_cast():
    # "pixels" is a list of all pixels of the image plane
    for pixel in pixels:
        # Save all intersections for given pixel
        intersections = []

        # Returns the ray passing through the given
        # pixel from the eye
        ray = ray_at_pixel(pixel)

        # "scene_triangles" is a list of all triangles
        # coming from meshes contained in the scene to render
        for triangle in scene_triangles:
            p = intersect(ray, triangle)
            sum = 0

            for light in incoming_lights_at_p:

```

```

    sum = sum + l.value
end

if is_smallest_intersection(p, intersections):
    pixel = sum
    intersections.append(p)

```

Auflistung 5.1: Eine abstrakte Umsetzung des Ray Casting Verfahrens³.

5.2.2. Ray Tracing

Sofern nicht anders vermerkt, basiert der folgende Abschnitt auf Glassner 1989, S. 1 bis 77.

Bei dem heute als Ray Tracing bekannten Verfahren, handelt es sich um eine verbesserte Version des unter 5.2.1 genannten Ray Casting Verfahrens. Whitted publizierte das Verfahren 1980 im Paper „An Improved Illumination Model for Shaded Display“.

Ein möglicher Algorithmus, wie Ray Tracing umgesetzt werden kann, findet sich in Auflistung 5.2.

Analog dem Ray Casting Verfahren wird wieder ein Projektionszentrum (das Auge eines Betrachters) sowie eine Region einer beliebigen Bildfläche gewählt.

Jeder Bildpunkt der gewählten Region erhält Licht aus nur einer Richtung — der Richtung der Lichtstrahlen (*light rays*), welche durch die gewählte Region und die sichtbare Bildfläche gehen. Somit trägt jedes Photon, welches aus dieser Richtung kommt, zum Farbwert bzw. der Intensität der Farbe eines Bildpunktes bei. Bei Strahlen, welche das Licht direkt zur sichtbaren Bildfläche transportieren, spricht man von *Pixel-* bzw. *Augen-Strahlen* (Glassner 1989, S. 10).

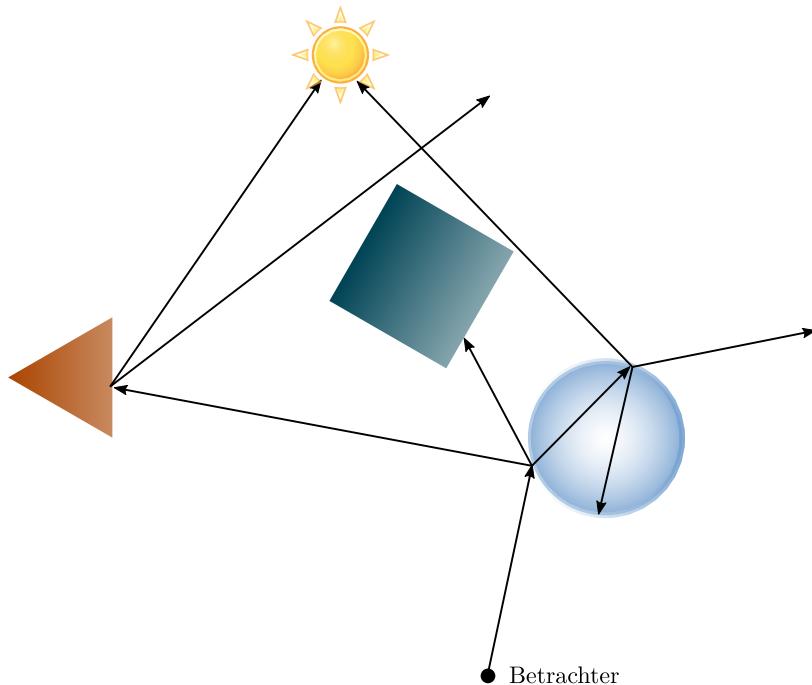


Abbildung 5.3.: Illustration des Prinzips des Ray Tracing Verfahrens⁴

Die Strahlen werden in dieser Richtung verfolgt, um festzustellen wie das Licht “erzeugt” wird. Trifft der Strahl auf nichts, wird die Verfolgung des Strahles beendet und der Bildpunkt wird mit der Farbe des

³Algorithmus in Pseudocode gemäss Hughes et al. 2013, Kapitel 15, Seite 391, Auflistung 15.2

⁴Eigene Darstellung mittels Inkscape angelehnt an Glassner 1989[S. 16]

Hintergrundes eingefärbt. Trifft der Strahl direkt auf eine Lichtquelle wird die Verfolgung des Strahles beendet und der Bildpunkt wird mit der Farbe und Intensität der Lichtquelle eingefärbt. Trifft der Lichtstrahl auf eine Oberfläche, wird der Prozess von diesem Punkt aus neu gestartet um festzustellen, wie das Licht dort “erzeugt” wurde.

Wie der letzte Punkt zeigt, handelt es sich um ein rekursives Verfahren und wird daher teilweise auch rekursives Ray Tracing genannt. Und genau dies ist der Unterschied zu Ray Casting, letzteres kennt keine Rekursion.

Zur Berechnung des emittierten Lichtes an einem gewissen Punkt auf der Oberfläche eines Objektes, wird in einem ersten Schritt die Intensität des Lichtes dieses Punktes bestimmt. Man spricht dabei von *Licht-* bzw. *Schatten-Strahlen* (Glassner 1989, S. 10).

In einem weiteren Schritt wird berechnet, wie die Oberfläche an diesem Punkt Licht in eine spezifische Richtung weitergibt. Dies geschieht durch die Intensität des Lichtes des Punktes sowie dessen physikalischen Eigenschaften.

Trifft ein Lichtstrahl auf eine Oberfläche, wird dieser zu gewissen Teilen *absorbiert*, *reflektiert* und *gebrochen*. Die jeweiligen Anteile hängen dabei vom Medium der Oberfläche bzw. des Objektes, der Frequenz des Lichtes sowie zwischen dem eingehenden Winkel des Lichtstrahles und der Oberflächennormale ab. Licht kann je nach Medium auch gestreut werden.

Man unterscheidet zwischen vier verschiedenen Mechanismen wie Licht transportiert wird: Perfekt diffuse, perfekt spiegelnde, perfekt brechende und total interne Reflexion (Glassner 1989, S. 130 bis 137). In der Realität bzw. der Natur kann es sein, dass mehrere der Mechanismen gemischt auftreten. So wird z.B. ein Teil des Lichtes reflektiert, wohingegen ein anderer Teil das Objekt durchdringt.

Die von diesen Mechanismen emittierten Strahlen können gemäß Glassner in *Reflexion-Strahlen*, welche die perfekte diffuse und die perfekt spiegelnde Reflexion beschreiben, und *Transparenz-Strahlen*, welche die perfekt brechende und die totale interne Reflexion beschreiben, unterteilt werden (Glassner 1989, S. 10).

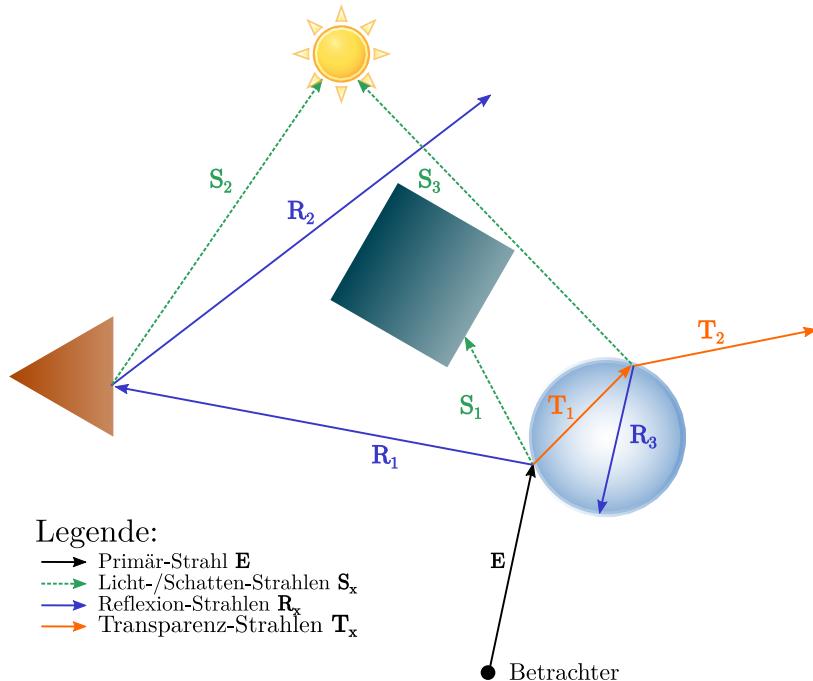


Abbildung 5.4.: Illustration der einzelnen Strahlen und deren Verhalten ausgehend von der Szene in Abbildung 5.3.⁵ Das im Bild ersichtliche, orange-farbige Dreieck hat eine undurchlässige, reflexive Oberfläche. Der türkis-farbige Würfel hat eine diffuse Oberfläche. Bei der Kugel, rechts im Bild, handelt es sich um eine Kugel aus Glas, welche das Licht teilweise bricht und reflektiert.

Nachfolgend werden die oben genannten Strahlen im Einzelnen beschrieben.

Augen- oder Pixel-Strahlen

Augen- oder Pixel-Strahlen sind Strahlen, welche das Licht von einer Lichtquelle durch einen Bildpunkt direkt zu der sichtbaren Bildfläche (also dem Betrachter) transportieren.

Die Gleichung solcher Strahlen lautet:

$$r(t) = x_0 + t \cdot (S - x_0) \quad (5.11)$$

Wobei x_0 der Ausgangspunkt (also der Betrachter), t ein Skalierungsfaktor zwischen $[1, \infty]$ und S der Schnittpunkt mit der Bildfläche ist.

Licht- oder Schatten-Strahlen

Bei Licht- bzw. Schatten-Strahlen handelt es sich um Strahlen, welche das Licht von einer Lichtquelle direkt zu der Oberfläche eines Objektes transportieren. Bei jedem Schnittpunkt eines Primär-Strahles (also ein Strahl welcher vom Betrachter aus in die Szene “geworfen” wird) mit einem Objekt wird ein Schatten- bzw. Licht-Strahl in Richtung jeder Lichtquelle der Szene “geworfen”. Trifft der Schatten- bzw. Licht-Strahl die Lichtquelle, wird das Licht zur Berechnung der Farbe und Intensität des Lichtes genutzt. Trifft der Schatten-Strahl keine Lichtquelle, so wird das Licht nicht berücksichtigt. Schatten-Strahlen generieren keine weiteren Strahlen.

Die Gleichung von Licht- bzw. Schatten-Strahlen lautet:

$$r(t) = p_0 + t \cdot (L_i - p_0) \quad (5.12)$$

Wobei p_0 der Ausgangspunkt (also ein Punkt auf einer Oberfläche eines Objektes), t ein Skalierungsfaktor zwischen $[\epsilon, 1]$ und L_i der Ort der i -ten Lichtquelle ist. Bei ϵ handelt es sich um einen Faktor zur Steuerung der Präzision, welcher verhindert, dass ein Objekt lokal auf sich selbst Schatten wirft.

Reflexion-Strahlen

Die Eigenschaften von Licht, welches auf ein Objekt trifft und dann an diesem gespiegelt wird, werden durch *Reflexion-Strahlen* bestimmt. Wie bereits vorhergehend beschrieben, werden zwei Arten der Reflexion unterschieden: Perfekt diffuse und perfekt spiegelnde Reflexion.

Perfekt spiegelnde Reflexion

Bei der perfekt spiegelnden Reflexion verlässt der ausgehende Strahl die Oberfläche in demselben Winkel des eingehenden Strahles. Der Ausfallswinkel entspricht also dem Einfallswinkel.

Die Gleichung eines Strahles, welcher von einer perfekt spiegelnden Reflexion ausgeht, lautet (Glassner 1989, S. 132):

$$r(t) = p_0 + t \cdot R \quad (5.13)$$

$$R = I - 2(I \cdot N)N \quad (5.14)$$

Wobei p_0 der Ausgangspunkt (also ein Punkt auf einer Oberfläche eines Objektes), t ein Skalierungsfaktor zwischen $[\epsilon, 1]$, I der eingehende Vektor, also $S - x_0$, und N die Oberflächennormale ist. Bei Epsilon handelt

⁵Eigene Darstellung mittels Inkscape angelehnt an Glassner 1989, S. 16

es sich wiederum um einen Faktor zur Steuerung der Präzision, welcher verhindert, dass ein Objekt lokal in sich selbst gespiegelt wird.

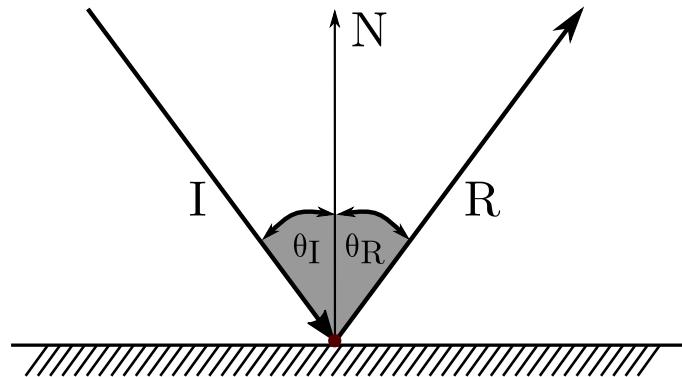


Abbildung 5.5.: Illustration einer perfekt spiegelnden Reflexion.⁶ I ist der eingehende Strahl, welcher am Normalenvektor N der schraffierten Oberfläche in Richtung R reflektiert wird. Der Winkel des eingehenden Strahles θ_I ist gleichgross wie der Winkel des ausgehenden Strahles θ_R .

Perfekt diffuse Reflexion

Bei der perfekt diffusen Reflexion wird das eingehende Licht mit gleicher Amplitude (also Stärke) gleichmässig in alle Richtungen gestreut. Die Amplitude ist dabei proportional zum Kosinus des Einfallswinkels und der Oberflächennormale.

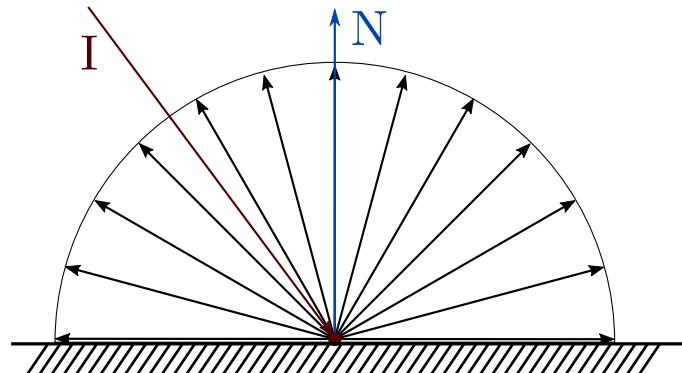


Abbildung 5.6.: Illustration einer perfekt diffusen Reflexion.⁷ I ist der eingehende Strahl, welcher am Ort des Normalenvektors N der schraffierten Oberfläche auftrifft. Das Licht wird gleichmässig in alle Richtungen gestreut.

Transparenz-Strahlen

Und schliesslich werden die Eigenschaften von Licht, welches durch ein Objekt hindurch geht und vielleicht von diesem gebrochen wird, durch die *Transparenz-Strahlen* beschrieben. Auch hier werden zwei Arten der Reflexion unterschieden: Perfekt brechende und total interne Reflexion.

Perfekt brechende Reflexion

Tritt Licht von einem Medium (z.B. Luft) in ein anderes Medium (z.B. Glas), so wird das Licht umgelenkt. Die Umlenkung des Lichtes bei Eintritt in ein neues Medium wird auch Transmission oder Refraktion genannt. Jedes Medium hat dabei einen eignen Index der Refraktion, welcher Lichtgeschwindigkeit in dem

⁶Eigene Darstellung mittels Inkscape angelehnt an Glassner 1989, S. 131

⁷Eigene Darstellung mittels Inkscape angelehnt an Glassner 1989[S. 134]

Medium gegenüber Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beschreibt. Um zu entscheiden wie Licht umgelenkt wird, werden die Refraktion-Indizes der Medien sowie der Einfalls- bzw. Ausfallswinkel verglichen.

Die Beziehung zwischen dem Einfalls- und Ausfallswinkel sowie dem übertragenen Licht wird durch das Gesetz von "Snell" beschrieben:

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \eta_{21} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (5.15)$$

Wobei θ_1 der Einfallswinkel, θ_2 der Ausfallwinkel, η_1 der Refraktion-Index des ersten Mediums in Abhängigkeit zu Vakuum, η_2 der Refraktion-Index des zweiten Mediums in Abhängigkeit zu Vakuum und η_{21} der Refraktion-Index des zweiten Mediums in Abhängigkeit des ersten Mediums ist (Glassner 1989, S. 134 bis 135).

Umgekehrt kann das Verhältnis des ausgehenden Strahles zum eingehenden Strahl beschreiben werden (Glassner 1989, S. 137 bis 140):

$$\eta_{12} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\sin(\eta_2)}{\sin(\eta_1)} \quad (5.16)$$

Mithilfe dieses Verhältnisses kann der gebrochene Strahl wie folgt berechnet werden (Glassner 1989, S. 137 bis 140):

$$r(t) = p_0 + t \cdot T \quad (5.17)$$

$$T = \eta_{12}I + (\eta_{12} \cdot C_1 - \sqrt{C_2})N \quad (5.18)$$

$$C_1 = -I \cdot N \quad (5.19)$$

$$C_2 = 1 + \eta_{12}^2(C_1^2 - 1) \quad (5.20)$$

Wobei p_0 der Ausgangspunkt (also ein Punkt auf einer Oberfläche eines Objektes), t ein Skalierungsfaktor zwischen $[\epsilon, 1]$, I der eingehende Vektor, also $S - x_0$, N die Oberflächennormale und η_{12} das oben beschriebene Verhältnis ist. Bei Epsilon handelt es sich wiederum um einen Faktor zur Steuerung der Präzision, welcher verhindert, dass ein Objekt lokal in sich selbst gespiegelt wird.

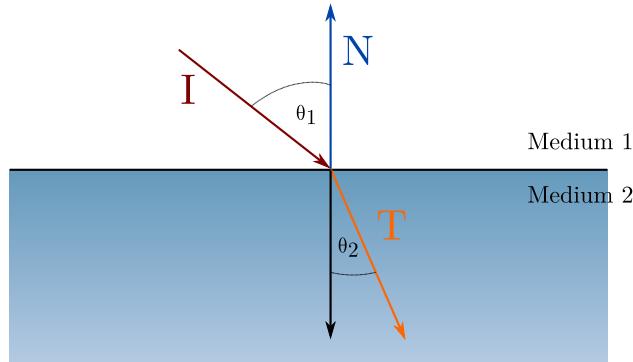


Abbildung 5.7.: Illustration einer perfekt brechenden Reflexion.⁸ I ist der eingehende Strahl, welcher am Ort des Normalenvektors N im Winkel von θ_1 von Medium 1 in Medium 2 übergeht und entsprechend mit Winkel θ_2 anhand T gebrochen wird.

Total interne Reflexion

⁸Eigene Darstellung mittels Inkscape angelehnt an Glassner 1989, S.135

Die totale interne Reflexion tritt dann auf, wenn Licht unter einem zu flachen Winkel versucht von einem dichten Medium in ein weniger dichtes Medium zu gelangen. Das Licht „prallt“ am Übergang der beiden Medien ab und wird gespiegelt anstatt in das andere Medium einzutreten (Glassner 1989, S. 136 bis 137).

Dies geschieht dann, wenn der Term C_2 (siehe Gleichung 5.20) negativ ist und somit das Ergebnis der Wurzel aus C_2 in 5.18 eine imaginäre Zahl wird (Glassner 1989, S. 137 bis 138).

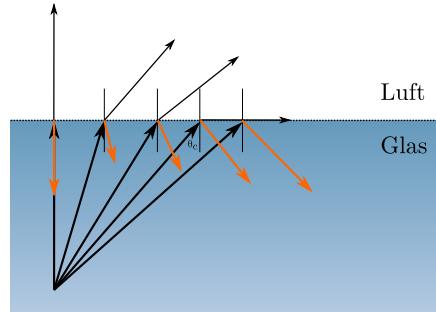


Abbildung 5.8.: Illustration der totalen internen Reflexion.⁹ Ist der kritische Winkel θ_c beim Übertritt eines Strahles von einem Medium (hier Glas) zu einem anderen Medium (hier Luft) nicht überschritten, so wird der Strahl bzw. Licht sowohl gebrochen als auch reflektiert. Wird der kritische Winkel überschritten, so findet nur noch eine Reflexion statt.¹⁰

Modelle zur Schattierung (shading models)

Glassner beschreibt auf der Physik basierende Modelle zur Schattierung (shading models, welche heute unter dem Begriff PBRT — Physically Based Rendering bekannt sind). Diese hier aufzuführen würden den Rahmen dieser Projektarbeit sprengen, daher wird darauf verzichtet. Dem geneigten Leser sei auf *An Introduction to Ray Tracing*, S. 143ff, sowie *Physically Based Rendering, Second Edition: From Theory To Implementation* empfohlen.

Rekursion und Strahlen-Baum

Sofern nicht anders vermerkt, basiert der folgende Abschnitt auf Glassner 1989, S. 16 bis 17.

Wie zu Beginn des Kapitels bereits angesprochen wurde, handelt es sich bei Ray Tracing um ein rekursives Verfahren. Es stellt sich somit die Frage, wie tief die Rekursion gehen soll und auch kann.

Zusätzlich zu dem genannten Fall, dass ein Strahl auf kein Objekt innerhalb der Szene trifft, schlagen Whitted wie auch Glassner den Abbruch in folgenden Fällen vor:

- Nach Erreichen einer festgelegten, maximalen Tiefe, sofern die Rekursion rein auf reflexive Oberflächen trifft.
- Nach dem Auftreffen auf eine rein diffuse Oberfläche.
- Nach Unterschreiten eines minimalen Energiewertes des Lichtes.

Aus den genannten Abbruch-Kriterien ergibt sich nach Heckbert folgende, auf einem regulären Ausdruck basierende Lichtweg-Notation: **LD?S*E**.

Diese beschreibt den Weg, welchen ein Photon ausgehend von einer Lichtquelle **L** zum Auge eines Betrachters **E** nehmen kann. Es kann auf null oder genau eine diffuse Oberfläche (**D?**) so wie auf 0 oder theoretisch unendlich viele reflektierende Oberflächen (**S***) treffen (Heckbert 1990, S. 148).

Ausgehend von der sichtbaren Bildfläche, also dem Auge des Betrachters der Szene, kann so ein Strahlenbaum (*ray tree*) aufgebaut werden.

⁹Eigene Darstellung mittels Inkscape angelehnt an Glassner 1989, S. 137

¹⁰Glassner 1989, S. 137

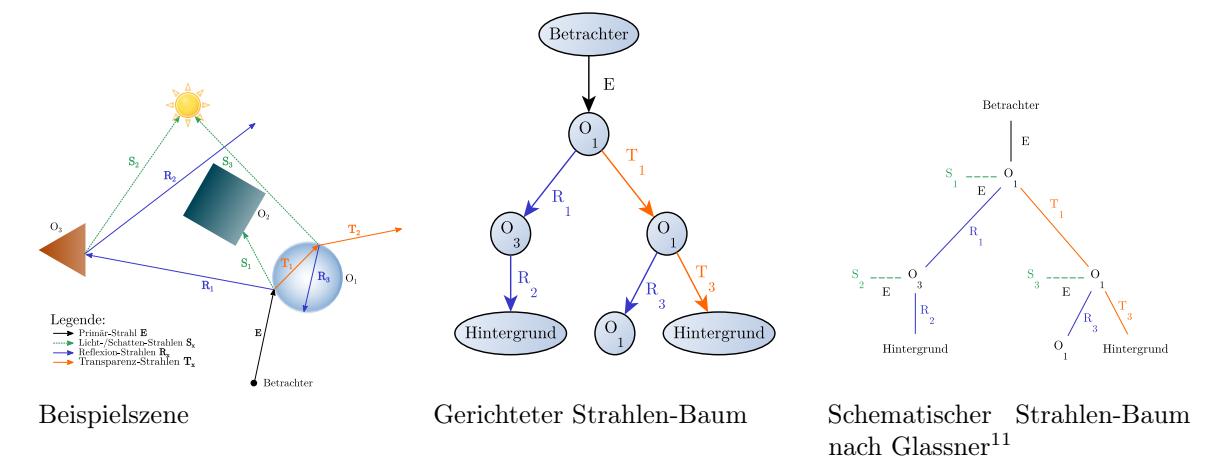
Jeder Schnittpunkt eines Strahles mit einem Objekt kann Sekundär-Strahlen generieren und so bilden reflektierte und gebrochene Strahlen den Strahlen-Baum.

Dabei sind die *Knoten* des Baumes die Schnittpunkte und die *Kanten* sind die reflektierten oder gebrochenen Strahlen.

Wie bereits erwähnt wird bei jedem Schnittpunkt ein Schatten-Strahl ausgesendet, welcher aber keine zusätzlichen Strahlen und somit auch keine zusätzlichen Kanten generiert.

Der Strahlen-Baum kann so schliesslich von unten nach oben (*bottom-up*) traversiert werden, was einer Tiefensuche (depth-first traversal) entspricht. Die Farbe eines Knoten wird aufgrund der Farbe der Kindes-Knoten berechnet.

Tabelle 5.1.: Darstellung des Strahlen-Baumes anhand einer Beispielszene



```
def ray_trace(current_point, direction):
    """Traces light rays from current point in space in given direction.

    :param current_point: current point in space
    :type current_point: three dimensional point object
    :param direction: the direction to trace
    :type direction: three dimensional vector

    :return: the color for the given point
    :rtype: float
    """

    # Set color to currently set background color
    color = self.background_color

    # "pixels" is a list of all pixels of the image plane
    for pixel in pixels:

        # Returns the ray passing through the given
        # pixel from the eye
        ray = ray_at_pixel(pixel)

        # object_list is a list containing all the meshes contained in
        # the scene to render
```

¹¹Glassner 1989, S. 17

```

for object in object_list:
    p = intersect(ray, object)

    if object.is_reflective:
        reflection_vector = reflect(direction, object)
        reflected_color = ray_trace(p, reflection_vector)
        color = color + object.coeff * reflected_color

    if object.is_refractive:
        refracted_vector = refract(direction, object)
        refracted_color = ray_trace(p, refracted_vector)
        color = color + object.coeff * refracted_color

    for light in incoming_lights_at(p):
        if not is_shadow_ray(p, light.position):
            color = color + calc_lighting(p, direction, light, object)
end
end

return color

```

Auflistung 5.2: Eine abstrakte Umsetzung des Ray Tracings¹².

5.3. Modelle zur Schattierung (shading models)

Sofern nicht anders vermerkt, basieren die nachfolgenden Abschnitte auf Foley 1996, S. 734–739, sowie Hughes et al. 2013.

Bei der Anwendung von Modellen zur Schattierung (*shading models*) geht es grundsätzlich darum die emittierte Intensität des Lichtes bzw. die Farbe einer Oberfläche an einem bestimmten Punkt zu berechnen. Es wäre naheliegend dies für jeden sichtbaren Punkt der Oberfläche zu berechnen, dies ist jedoch häufig viel zu aufwändig. Viele Modelle zur Schattierung berechnen daher die Intensität des Lichtes bzw. der Farbe nur an gewissen Schlüssel-Punkten und wenden dann vereinfachte Modelle zur Berechnung an, um so Rechenzeit zu sparen.

Als Beispiel zur Anwendung der Modelle zur Schattierung wird nachfolgend angenommen, dass mittels einem Beleuchtungsmodell an jedem Eckpunkt einer Oberfläche (Polygon) die Farbe berechnet wird. Als Beispiel dienen hier die Eckpunkte V_1 , V_2 , V_3 und V_4 .

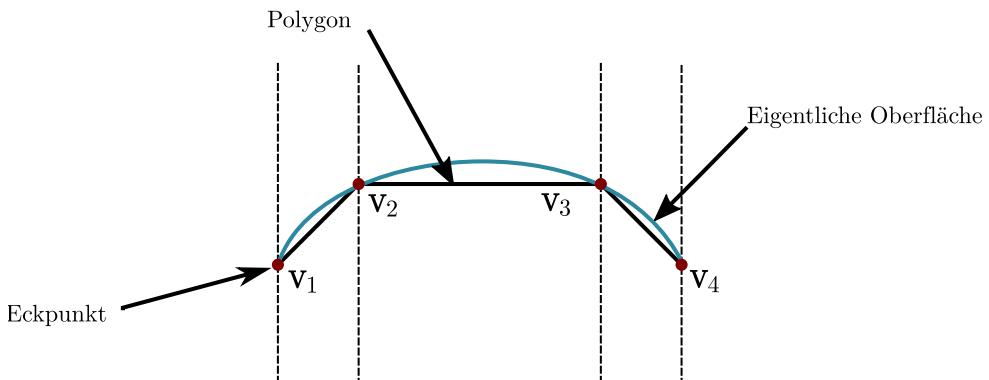


Abbildung 5.9.: Illustration der Ausgangslage¹³

¹²Algorithmus in Pseudocode gemäss Glassner 1989, Seite 283

Um die Intensität der Farbe für einen Eckpunkt V_1 zu berechnen, wird der Normalenvektor des Eckpunktes (*vertex normal*) benötigt. Es handelt sich dabei um den Normalenvektor der Oberfläche N an der Position des Eckpunktes V_1 .

Im Laufe der Zeit hat sich die Schattierung so weit entwickelt, dass diese praktisch ausschliesslich auf der Grafikkarte (GPU) statt findet. Man spricht hier vom Begriff "Shader". Es handelt sich dabei mittlerweile um eigene (Grafik-) Applikationen, deren Zweck weit über die reine Berechnung von Schattierungen hinausgeht. Man unterscheidet dabei zwischen Shadern für geometrische Berechnungen (*geometry shaders* oder *vertex shaders*) sowie Shader für Berechnungen bezüglich Pixeln oder (Bild-) Fragmenten (*pixel shaders* oder *fragment shaders*) (Hughes et al. 2013, Kapitel 33).

Der interessierte Leser sei für weitere Details auf Hughes et al. 2013, Kapitel 33, OpenGL foundation 2015, sowie Fernando und Kilgard 2003 verwiesen.

5.3.1. Flat-Shading — per vertex lighting

Bei Flat-Shading wird pro Oberfläche (Polygon) ein Eckpunkt V_1 als Schlüssel-Punkt für die Farbe bzw. die Intensität bestimmt. Danach wird die Farbe des Punktes als Farbe für die gesamte Oberfläche angenommen (Foley 1996, S. 734).

Diese Annahme ist unter den folgenden Voraussetzungen gültig (Foley 1996, S. 734):

1. Die zugrundeliegende Lichtquelle befindet sich unendlich weit entfernt, so dass der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Oberfläche n und der Lichtquelle l , also $n \cdot l$, für die gesamte Oberfläche konstant ist.
2. Der Betrachter sich unendlich weit entfernt von der Oberfläche befindet, so dass der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Oberfläche und dem Betrachter $n \cdot v$ für die gesamte Oberfläche konstant ist.
3. Das Polygon ist eine effektive Repräsentation der Oberfläche und nicht nur eine Näherung einer runden Oberfläche.

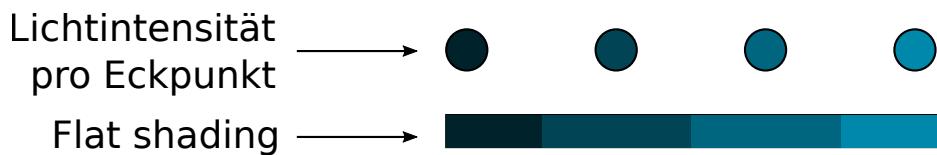


Abbildung 5.10.: Illustration des Flat-Shadings¹⁴

Ist eine der ersten beiden Annahmen falsch, so muss für den Vektor der Lichtquelle l bzw. den Vektor des Betrachters v ein konstanter Wert berechnet werden. Foley gibt hier als Beispiele das Zentrum des Polygones oder den ersten Eckpunkt des Polygones an (Foley 1996, S. 735).

5.3.2. Gouraud-Shading — face interpolated lighting

Bei Gouraud-Shading handelt es sich um ein Shading-Verfahren, welches die Intensität der Farbe der Eckpunkte von Oberflächen eines Meshes interpoliert.

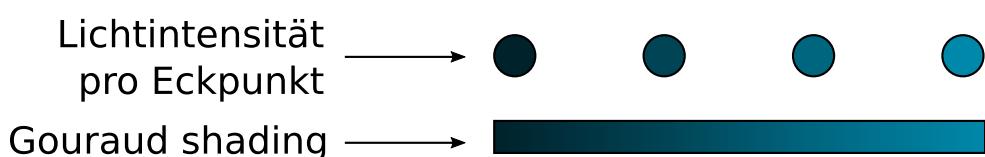


Abbildung 5.11.: Illustration des Gouraud-Shadings¹⁵.

¹³Eigene Darstellung mittels Inkscape, angelehnt an Hughes et al. 2013

¹⁴Eigene Darstellung mittels Inkscape, angelehnt an Hughes et al. 2013

Um die Farbe eines Eckpunktes von Oberflächen zu berechnen, schlägt **gouraud_continuous_1971** in seiner Arbeit **gouraud_continuous_1971** von **gouraud_continuous_1971** die Berechnung des Durchschnittswertes der Normalenvektoren der Oberflächen zweier adjazenter Liniensegmente (im 2D-Raum) bzw. aller adjazenter Dreiecke (im 3D-Raum) vor.

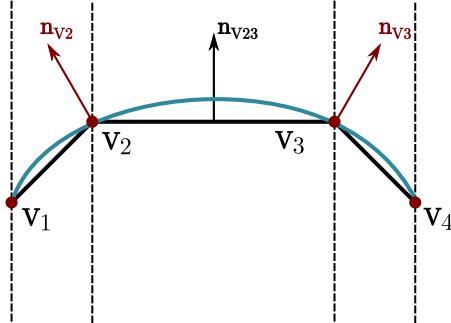


Abbildung 5.12.: Illustration der berechneten Normalenvektoren n_{v_2} und n_{v_3} an den Eckpunkten v_2 und v_3 sowie des Normalenvektors $n_{v_{23}}$ der Kante v_2v_3 ¹⁶.

Die Berechnung des Normalenvektors eines Eckpunktes via Durchschnittswert ist üblicherweise eine genügend gute Näherung an die Oberflächennormale der eigentlichen Oberfläche. Die Präzision hängt dabei aber klar von der Granularität des Modells (Mesh) ab.

5.3.3. Phong-Shading — normal interpolated lighting

Phong-Shading ist eine Verbesserung des Gouraud-Verfahrens und bietet eine bessere Annäherung an die Schattierung bzw. Darstellung von glatten Oberflächen. Das Verfahren eignet sich vor allem dann besser, wenn ein Beleuchtungsmodell verwendet wird, welches kleine spiegelnde Reflexionen bietet, wie z.B. das Phong-Beleuchtungsmodell.

Bei Phong-Shading wird ein Normalenvektor linear an einer Oberfläche (eines Polygons) interpoliert, ausgehend von den Normalenvektoren der Kanten der Oberfläche (im obigen Beispiel wäre dies $n_{v_2v_3}$). Die Oberflächennormale wird an jedem Pixel interpoliert und normalisiert und kommt dann für die Berechnung der Farbwerte anhand eines Beleuchtungsmodells, wie zum Beispiel das Phong-Beleuchtungsmodell, zum Einsatz. Daher ist Phong-Shading viel rechenintensiver als Gouraud-Shading, da das Beleuchtungsmodell für jeden Pixel anstatt für jede Kante berechnet werden muss.

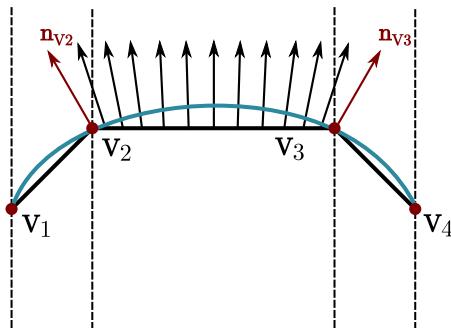


Abbildung 5.13.: Stark vereinfachte Illustration der interpolierten Normalenvektoren anhand der Kante v_2v_3 ¹⁷.

¹⁵Eigene Darstellung mittels Inkscape, angelehnt an Hughes et al. 2013

¹⁶Eigene Darstellung mittels Inkscape, angelehnt an Hughes et al. 2013

¹⁷Eigene Darstellung mittels Inkscape, angelehnt an Hughes et al. 2013

Tabelle 5.2.: Vergleich der genannten Shading-Verfahren anhand einer Beispielszene¹⁸.

Flat-Shading	Gouraud-Shading	Gouraud-Shading mit Phong-Beleuchtungsmodell	Phong-Shading mit Phong-Beleuchtungsmodell

¹⁸brian_danchilla_beginning_2014

6. Oberflächen

6.1. Oberflächen

Sofern nicht anders vermerkt, basiert der folgende Abschnitt auf Menon 1996, S. 1ff, sowie auf Glassner 1989, S. 79 bis 115.

Um mittels Computergrafiken überhaupt etwas darstellen zu können, muss erst einmal definiert werden, was dargestellt werden soll. Häufig orientiert sich die Computergrafik dabei an der realen Welt. In der realen Welt haben Oberflächen von Objekten häufig keine starken Übergänge (Kanten) sondern sind eher glatter Natur (Foley 1996, S. 471).

Die Darstellung von Kurven und Oberflächen führt zu zwei Fällen: Modellierung von bestehenden Objekten und Modellierung von Grund auf.

Zur Modellierung von Oberflächen werden hauptsächlich zwei Techniken verwendet: Parametrische Modellierung und implizite Modellierung.

6.1.1. Parametrische Darstellung von Oberflächen

Bei der parametrischen Darstellung wird eine Oberfläche üblicherweise als eine Menge von Punkten definiert, so zum Beispiel:

$$\mathbf{p}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \quad (6.1)$$

So kann eine Kugel mittels sphärischen Koordinaten wie folgt parametrisch dargestellt werden:

$$x(s, t) = r \cdot \cos(s) \cdot \sin(t) \quad (6.2)$$

$$y(s, t) = r \cdot \sin(s) \cdot \sin(t) \quad (6.3)$$

$$z(s, t) = r \cdot \cos(t) \quad (6.4)$$

Wobei r der Radius der Kugel, s der Azimutwinkel $\in [0, 2\pi]$ und t der Polarwinkel $\in [0, \pi]$ ist.

Die parametrische Darstellung bringt Vorteile wie die Unabhängigkeit von einem Koordinatensystem oder eine effiziente Berechnung von Punkten auf einer Oberfläche.

6.1.2. Implizite Darstellung von Oberflächen

Bei der impliziten Darstellung wird eine Oberfläche üblicherweise als Kontur einer Funktion mit Wert 0 definiert (Menon 1996, S. 1), so zum Beispiel:

$$f(\mathbf{p}) = f(x, y, z) = 0 \quad (6.5)$$

Wobei \mathbf{p} ein Punkt (x, y, z) auf der Oberfläche, welche durch die Funktion f beschrieben wird, ist.

Am Beispiel einer Kugel:

$$f(\mathbf{p}, r) = f(x, y, z, r) = 0 \quad (6.6)$$

$$f(\mathbf{p}, r) = \mathbf{p}^2 - r^2 = 0 \quad (6.7)$$

$$f(\mathbf{p}, r) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad (6.8)$$

Wobei \mathbf{p} ein Punkt (x, y, z) auf der Oberfläche, welche durch die Funktion f beschrieben wird, und r der Radius der Kugel ist (Glassner 1989, S. 91).

Die implizite Darstellung erlaubt aus mathematischer Sicht eine grössere Einflussnahme als die parametrische Darstellung und ist daher sehr nützlich für Operationen wie Biegung, Vermischung, Schnitte (Intersektion) oder Boolesche Operationen.

6.1.3. Implizite Oberflächen

Wie in Gleichung 6.5 beschrieben, ist eine implizite Oberfläche gemäss Menon typischerweise als Kontur einer Funktion mit Wert 0 definiert. Wobei John C Hart eine implizite Oberfläche als Funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Es wird also jedem Punkt einer Menge $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ ein skalarer Wert $s \in \mathbb{R}$ zugewiesen. Dabei besteht die Oberfläche aus der Menge von Punkten $\mathbf{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (John C. Hart 1994, S. 527).

Angenommen \mathbf{A} ist ein geschlossener Festkörper, welcher durch die Funktion f beschrieben wird, dann kann gemäss John C Hart Folgendes angenommen werden:

$$x \in \overset{\circ}{\mathbf{A}} \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) < 0 \quad (6.9)$$

$$x \in \partial \mathbf{A} \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.10)$$

$$x \in \mathbb{R}^3 - \mathbf{A} \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) > 0 \quad (6.11)$$

Dies bedeutet, dass sich ein Punkt \mathbf{x} :

- $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$

Genau dann *innerhalb* des Körpers \mathbf{A} befindet, wenn die implizite Funktion $f(\mathbf{x})$ *negativ* ist.

- $\partial \mathbf{A}$

Genau dann *auf der Oberfläche* des Körpers \mathbf{A} befindet, wenn die implizite Funktion $f(\mathbf{x})$ *0* ist.

- $\mathbb{R}^3 - \mathbf{A}$

Nicht in oder auf dem Körper \mathbf{A} befindet, wenn die implizite Funktion $f(\mathbf{x})$ *positiv* ist.

Dies gilt, da es sich bei \mathbf{x} um eine Menge von Punkten mit topologischer Struktur handelt (John C Hart 1993, S. 1).

Gemäss Menon finden hauptsächlich drei Methoden zur Beschreibung impliziter Oberflächen Anwendung: Algebraische Oberflächen, Blobby-Objekte sowie die funktionale Repräsentation (Menon 1996, S. 1).

John C. Hart gibt jedoch an, dass die gebräuchlichste Form von impliziten Oberflächen die algebraischen Oberflächen sind (John C. Hart 1994, S. 527). Diese werden implizit durch polynomiale Funktionen definiert.

Algebraische und geometrische implizite Oberflächen

Ein Beispiel für eine algebraische Oberfläche ist die Beschreibung der Einheitskugel anhand einer impliziten algebraischen Gleichung zweiten Grades:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (6.12)$$

Wobei es sich bei dem letzten Parameter um den Radius r handelt, welcher — bedingt durch die Einheitskugel — den Wert 1 hat.

Menon gibt an, dass algebraische Methoden Oberflächen als implizite Polynome beschreiben, so ist $F(x, y, z)$ beispielsweise ein Polynom in x , y und z (Menon 1996, S. 2). Üblicherweise handelt es sich dabei um Polynome tiefen Grades (2, 3 oder 4) (Menon 1996, S. 2). Bei den gebräuchlichsten Oberflächen handelt es sich um quadratisch implizite Oberflächen (vom Grad 2), welche häufig als “Quadrik” (*quadratics*) bezeichnet werden (Menon 1996, S. 2).

John C. Hart gibt an, dass — unter Nutzung einer Metrik — die Einheitskugel durch die implizite Gleichung geometrisch beschrieben werden kann:

$$\|\mathbf{x}\| - 1 = 0 \quad (6.13)$$

Unter Anwendung der allgemeinen Form einer impliziten Gleichung (siehe 6.5) führt dies zu folgender Gleichung:

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| - 1 \quad (6.14)$$

Dabei ist $\|\mathbf{x}\|$ als euklidische Metrik definiert und entspricht $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Die Gleichung 6.12 gibt die algebraische Distanz zurück, Gleichung 6.13 gibt die geometrische Distanz zurück.

Gemäß John C. Hart wird die geometrische Darstellung von quadrischen Oberflächen bevorzugt, da deren Parameter unabhängig von Koordinaten und sie robuster und intuitiver sind.

Implizite Oberflächen werden bei Gleichungen der Form 6.14 durch *Distanzfunktionen* repräsentiert. Diese messen oder binden gemäß John C. Hart die geometrische Distanz zu deren impliziten Oberflächen (John C. Hart 1994, S. 529).

Distanzfunktionen

Wie anfangs erwähnt, definiert John C. Hart die allgemeine Form zur Beschreibung bzw. Darstellung von impliziten Oberflächen als Zuweisung von Punkten zu einem skalaren Wert: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (John C. Hart 1994, S. 527).

Unter Anwendung der unter Gleichung 6.9 definierten Bedingungen kann geschlossen werden, dass eine Menge von Punkten A existiert, welche Teil von \mathbb{R}^n , also $A \subset \mathbb{R}^n$ ist. Dies heisst, dass alle Punkte in A die folgende Bedingung erfüllen:

$$A = \{x : f(x) \leq 0\} \quad (6.15)$$

John C. Hart liefert folgende zwei Definition, welche der Beschreibung von Distanzfunktionen dienen.

Definition 6.1.1. Point-to-set distance

Die Distanz eines Punktes zu einer Menge von Punkten definiert die Distanz eines Punktes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ zu einer Menge von Punkten $A \subset \mathbb{R}^3$ als Distanz von \mathbf{x} zum nächsten Punkt in A :

$$d(\mathbf{x}, A) = \min_{\mathbf{y} \in A} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \quad (6.16)$$

Definition 6.1.2. Signed distance bound

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Vorzeichen abhängige Obergrenze ihrer impliziten Oberfläche $f^{-1}(0)$, wenn gilt:

$$|f(\mathbf{x})| \leq d(\mathbf{x}, f^{-1}(0)) \quad (6.17)$$

Wenn die Gleichung 6.17 für eine Funktion f gilt, dann ist f eine *Vorzeichen abhängige Distanzfunktion (signed distance function)*.

Distanzfelder (distance fields)

Sofern nicht anders vermerkt, basiert der folgende Abschnitt auf Jones, Baerentzen und Sramek 2006.

Bei einem Distanzfeld handelt es sich um eine Repräsentation respektive eine Datenstruktur, bei welcher von jedem Punkt aus die geringste Distanz zu einem beliebigen Objekt der Domäne bekannt ist.

Zusätzlich zu der Distanz können aus einem Distanzfeld andere Parameter, wie beispielsweise die Richtung einer Oberfläche, abgeleitet werden.

Handelt es sich bei einem Distanzfeld um ein Vorzeichen behaftetes Distanzfeld, so kann bei jedem Punkt bestimmt werden, ob sich dieser innerhalb, ausserhalb oder genau auf einem Objekt befindet. Dies verhält sich analog zu Unterabschnitt 6.1.3.

Distanzfelder bilden somit die Grundlage der Algorithmen zur Darstellung von impliziten Oberflächen. Siehe dazu auch Abschnitt 6.3. Die unter Abschnitt 6.1.3 genannte *Point-to-set distance*-Funktion liefert bereits die nächste Distanz zu einer Menge von Punkten und somit auch zu Objekten ausgehend von einem Punkt der Domäne.

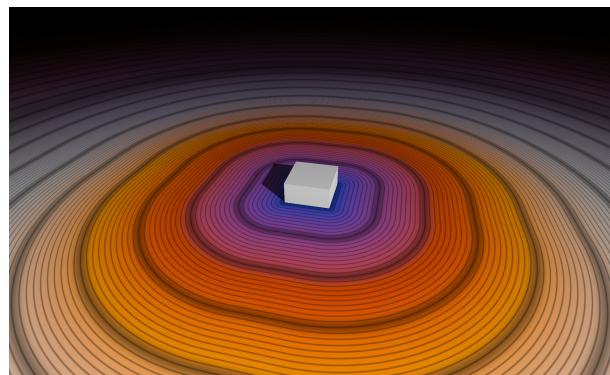


Abbildung 6.1.: Darstellung des Distanzfeldes einer dreidimensionalen Szene anhand Farbwerten¹

¹Eigene Darstellung

6.2. Darstellung von impliziten Oberflächen

Wie John C. Hart angibt, existieren verschiedene Möglichkeiten zur Darstellung (zum Rendering) von impliziten Oberflächen. So wandeln indirekte Methoden implizite Oberflächen in Polygon-Modelle um, was die Nutzung bestehender Techniken und Hardware zur Darstellung von polygonalen Modellen erlaubt. Obwohl die Umwandlung der impliziten Oberflächen mit gängigen Systemen zur Darstellung problemlos dargestellt werden kann, ist die Umwandlung jedoch nicht in jedem Fall gegeben und kann zu nicht zusammenhängenden Flächen oder einer Verminderung des Detaillierungsgrades führen (John C. Hart 1994, S. 528).

Eine andere Methode zur Darstellung von impliziten Oberflächen ist das in Unterabschnitt 5.2.2 vorgestellte Ray Tracing Verfahren.

Ein (Licht-) Strahl wird dabei parametrisch als

$$r(t) = r_0 + t \cdot r_d \quad (6.18)$$

beschrieben. Der Strahl startet dabei bei Punkt r_0 in Richtung des Einheitsvektors r_d , wobei t die zurückgelegte Distanz des Strahles ist. Dabei ist $r(t)$ der Punkt im Raum, welchen der Strahl nach dem Zurücklegen der Distanz t — ausgehend von seinem Ursprung r_0 — erreicht (John C. Hart 1994, S. 528).

Um nun die Schnittpunkte eines Strahles mit einer impliziten Oberfläche zu finden, wird die Gleichung des Lichtstrahles r (6.18) in die Funktion einer impliziten Oberfläche f (6.5) eingesetzt. Wobei $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dies ergibt die zusammengesetzte Funktion $F = f \circ r$ wobei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (John C. Hart 1994, S. 528).

Die Lösungen dieser Gleichung sind alle Distanzen t , welche ein gegebener Strahl zurücklegt und welche die folgende Bedingung erfüllen (John C. Hart 1994, S. 528):

$$F(t) = f \circ r = f(r(t)) = 0 \quad (6.19)$$

Um Gleichung 6.19 zu lösen, können numerische Verfahren zur Suche von Nullstellen angewendet werden, wobei die Verfahren vom Typ der Funktion $F(t)$ abhängig sind. Bei polynomialem Funktionen bis zum vierten Grad existieren analytische Lösungen, für eine beliebige Funktion muss jedoch ein generisches, robustes Verfahren zur Suche von Nullstellen verwendet werden. Dies bedingt jedoch meist, dass mehr Informationen über die Funktion zur Verfügung stehen, was beispielsweise durch Ableiten dieser gelöst werden kann (John C. Hart 1994, S. 528).

Die erwähnten Verfahren zur Suche von Nullstellen haben jedoch häufig den Nachteil, dass sie mehrere Schnittpunkte eines Strahles mit einer impliziten Oberfläche liefern. Um diese Problematik zu umgehen, wird nur der kleinste Wert von t berücksichtigt. Die Ray Marching und Sphere Tracing Algorithmen gehen hier sogar noch einen Schritt weiter, in dem sie nur die kleinste positive Nullstelle der Gleichung 6.19 betrachten (John C. Hart 1994, S. 528).

6.2.1. Ray Marching

Perlin und Hoffert schlagen eine Abtastung des Strahles mit fixen Abständen $\Delta\mu$ vor (Perlin und Hoffert 1989, S. 259):

$$x = x_{\mu_0} + k \cdot \Delta x_\mu \quad (6.20)$$

wobei $k = 0, 1, 2, \dots$ und $\mu_0 + k\Delta\mu \leq \mu_1$ ist.

Auf die parametrische Darstellung eines (Licht-) Strahles, Gleichung 6.19, angewendet, ergibt dies folgende Gleichung:

$$r(k) = r_0 + \Delta t \cdot k \cdot r_d \quad (6.21)$$

wobei Δt die Grösse der Abstände und $k = 0, 1, 2, \dots$ die Nummer der Schritte darstellt. Wie J. C. Hart, Sandin und Kauffman schreiben, bildet das Abtasten des (Licht-) Strahles mit fixen Abständen die Basis für gewisse Verfahren des volumetrischen Renderings (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 291).

Ein möglicher Algorithmus, wie solch ein Verfahren umgesetzt werden kann, findet sich in Auflistung 6.1.

```
def ray_march():
    step = 0
    intersection = 0
    max_steps = 10

    while step < max_steps:
        intersection = test_intersection(k)

        if intersection <= 0:
            # An intersection has happened
            # intersection < 0: ray is inside surface
            # intersection == 0: ray is exactly on surface
            return ray_travel_distance(step)

        step = step + 1

    # When we reach this step, after max_steps, no intersection
    # has happened, so distance is 0
    return 0
```

Auflistung 6.1: Eine abstrakte Umsetzung des Ray Marchings².

Dabei ist jedoch zu beachten, dass der Abstand zur Abtastung eines Strahles Δt so gering als möglich sein sollte um eine Menge von Punkten bzw. ein Objekt — definiert durch implizite Oberflächen — A möglichst gut abschätzen zu können. Ist der gewählte Abstand zu gross gewählt, so findet ggf. eine Abtastung weit im Inneren des Objektes statt und somit geht Präzision verloren. Es ist auch möglich dass der erste eigentliche Punkt gar nicht abgetastet wird und erst der zweite abgetastete Punkt das Objekt “erkennt”.

²Algorithmus in Pseudocode gemäss Perlin und Hoffert 1989[S. 259, Abschnitt 3.1]

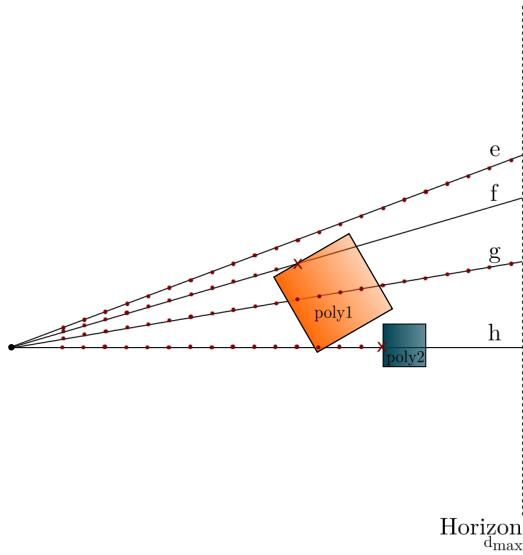


Abbildung 6.2.: Illustration des Ray Marching Verfahrens und dessen Problematiken.³

Abbildung 6.2 veranschaulicht diese Problematiken. Zu sehen sind vier Primärstrahlen, e , f , g und h , sowie zwei Objekte, $poly1$ und $poly2$.

Bei den Strahlen e und f handelt es sich um “normale” Fälle: Der Strahl e geht komplett an den Objekten vorbei, das Ray Marching wird also nach erreichen der maximalen Distanz d_{max} abgebrochen, der Strahl f trifft das Objekt $poly1$ nach 12 Schritten.

Bei den Strahlen g und h handelt es sich um Spezialfälle: Der Strahl g trifft das Objekt $poly1$ nicht, obwohl der Strahl durch das Objekt hindurch geht. Dies geschieht aufgrund der gewählten Distanz zum Abtasten der Strahlen (Δt).

Der Strahl h trifft das Objekt $poly2$, obwohl er eigentlich das Objekt $poly1$ treffen müsste. Das getroffene Objekt $poly2$ dürfte so gar nicht zu sehen sein. Dieser Fehler tritt wiederum aufgrund der gewählten Distanz zur Abtastung der Strahlen (Δt) auf.

John C. Hart weist darauf hin, dass Ray Marching durch den möglichst geringen Abstand zwischen den Abtastungen entsprechend langsam und paralleles Abtasten praktisch unumgänglich ist (John C. Hart 1994, S. 528). In der von John C. Hart vorgestellten Technik des Sphere Tracings ist der Abstand zwischen den Abtastungen nicht konstant sondern variiert in Abhängigkeit der Geometrie (John C. Hart 1994, S. 538 bis 540).

6.2.2. Sphere Tracing

Das von John C. Hart vorgeschlagene Sphere Tracing Verfahren ist ein Ray Tracing Verfahren für implizite Oberflächen. Es handelt sich nach wie vor um Ray Marching, die Distanz der Schritte zum Abtasten eines (Licht-) Strahles wird jedoch aufgrund einer Distanzfunktion bestimmt. Das Verfahren wurde erstmalig 1989 in „Ray Tracing Deterministic 3-D Fractals“ von J. C. Hart, Sandin und Kauffman vorgestellt.

Ein möglicher Algorithmus, wie Sphere Tracing umgesetzt werden kann, findet sich in Auflistung 6.2.

John C. Hart verweist auf den Term “*unbounding volumes*”, welcher in „Ray Tracing Deterministic 3-D Fractals“ von J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989 eingeführt wurde. “*Unbounding volumes*” (zu Deutsch etwa “negativer Hüllkörper”) wird von J. C. Hart, Sandin und Kauffman genutzt, um das Sphere

³Eigene Darstellung mittels Inkscape.

Tracing Verfahren zu beschreiben und darzustellen. Der Term steht im Gegensatz zu dem gängigen Konzept des Hüllkörpers (“bounding volumes”) — ein Volumen, welches einen Körper umschliesst: Ein “negativer Hüllkörper” (“unbounding volume”) umschliesst eine Fläche im Raum, welche den Körper *nicht* beinhaltet (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 291).

Man möchte für einen abzutastenden Punkt im Raum ein Volumen finden, dessen Zentrum im abzutastenden Punkt liegt. Ist der Abstand des Punktes zum nächsten Punkt der Oberfläche eines Objektes bekannt, kann dieser Abstand als Radius einer Kugel angenommen werden. Diese Kugel dient als negativer Hüllkörper (“unbounding Volume”) und ist *garantiert nicht* Teil des Objektes und schneidet dieses auch nicht (ist also nicht $\overset{\circ}{A}$) — nur der äusserste Punkt des Abstandes (also des Radius der Kugel) liegt genau auf der Oberfläche des Objektes (∂A). Der Radius solch einer Kugel wird durch Evaluation der Distanzfunktion eines abzutastenden Punktes im Raum bestimmt.

Gemäss John C. Hart kommt daher auch der Name Sphere Tracing: Die Schnittpunkte eines (Licht-)Strahles werden durch eine Folge von negativen Hüllkörpern (“unbounding volumes”) — bzw. in diesem Fall Kugeln (“unbounding spheres”) — beschrieben (John C. Hart 1994, S. 530).

Da J. C. Hart, Sandin und Kauffman die Darstellung von Fraktalen im dreidimensionalen Raum beschreiben, wird dort von einer Abschätzung der Distanz gesprochen. Dies ist dadurch bedingt, dass die Distanz für Fraktale nicht effizient berechnet werden kann (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 291). Betrachtet man jedoch die Darstellung von “regulären” Objekten, wie zum Beispiel eine Kugel, kann der zur Oberfläche am nächsten gelegene Punkt von einem beliebigen Punkt derselben Domäne exakt berechnet werden (John C. Hart 1994, S. 530). Dies ist durch die implizite Gleichung 6.14 gegeben.

Gemäss J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 291 - 292 verläuft die Verfolgung der Strahlen bei Sphere Tracing wie folgt: Ein Strahl wird vom Betrachter (Auge bzw. Lochkamera) durch die Bildebene zu einem Objekt geschossen. Dabei wird bei dem initialen Ausgangspunkt der Radius eines negativen Hüllkörpers in Form einer Kugel — so wie oben beschrieben — berechnet. Dies ist die Distanz, welche der Strahl in einem ersten Schritt effektiv zurücklegen wird. Bei jedem Schnittpunkt der Kugel mit dem Strahl wird dasselbe Verfahren wiederholt.

Dies geschieht so lange, bis der Strahl schliesslich von einem Schnittpunkt des negativen Hüllkörpers aus auf die Oberfläche eines Objektes trifft. Ein weiteres Kriterium für den Abbruch ist eine definierte maximale Distanz des Strahles. Ist diese erreicht und der Strahl erreicht die Oberfläche des Objektes nicht — weil der Strahl das Objekt nicht schneidet oder das Objekt zu weit weg ist — wird abgebrochen. Somit ist auch ersichtlich, dass Sphere Tracing nicht die unter 6.2.1 genannten Problematiken aufweist.

Die folgenden Abbildungen 6.3 und 6.4 veranschaulichen das Sphere Tracing Verfahren.

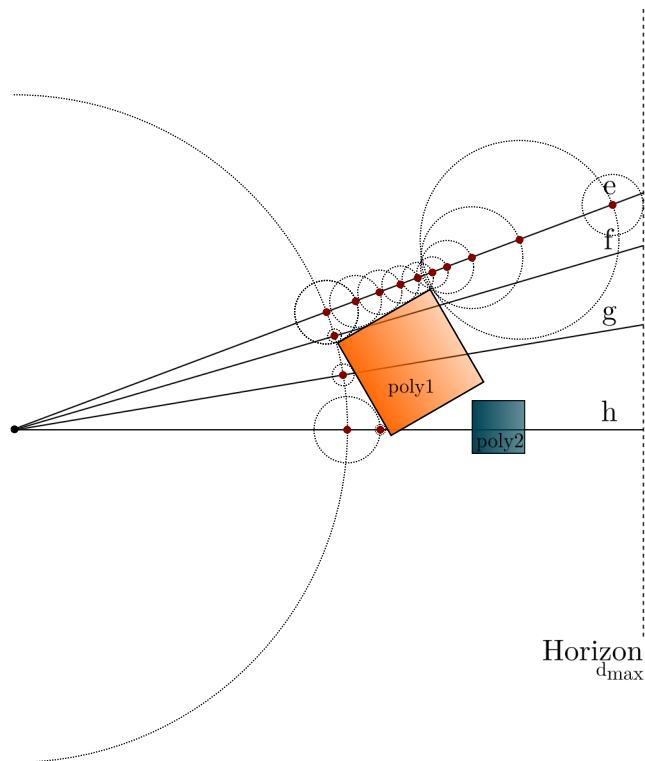


Abbildung 6.3.: Illustration des Sphere Tracing Verfahrens.⁴

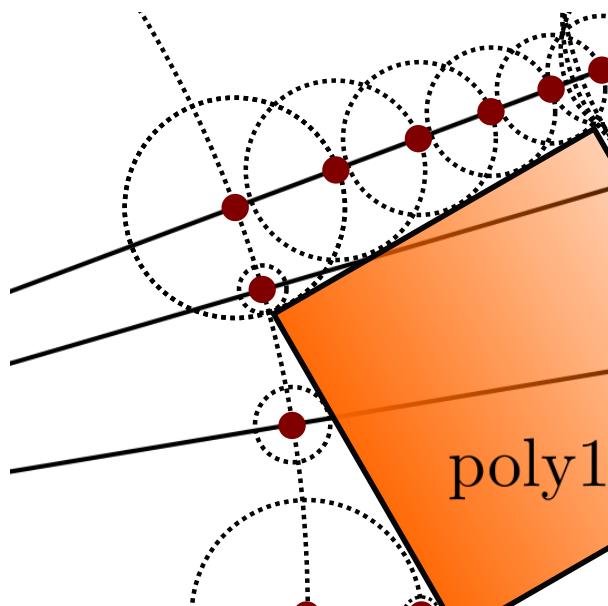


Abbildung 6.4.: Illustration des Sphere Tracing Verfahrens, Nahaufnahme.⁵

Ausgehend von der parametrischen Beschreibung eines (Licht-) Strahles (Gleichung 6.18), beschrieben J. C. Hart, Sandin und Kauffman die Richtung r_d eines Strahles als Einheitsvektor (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 291):

⁴Eigene Darstellung mittels Inkscape.

⁵Eigene Darstellung mittels Inkscape.

$$r_d = \frac{p_{x,y} - r_0}{|p_{x,y} - r_0|} \quad (6.22)$$

wobei r_0 der Ursprung eines Strahles und $p_{x,y}$ ein Punkt der Bildebene ist.

Um nun den Schnittpunkt eines Strahles r_d mit der Oberfläche eines Objektes zu finden, muss Gleichung 6.19, $F(t) = f \circ r = 0$, gelöst werden. Dabei ist — wie oben definiert — die Funktion $f(x)$ nun eine Distanzfunktion, wie zum Beispiel die geometrische Distanzfunktion zur Beschreibung einer Kugel (Gleichung 6.13).

Evaluiert man nun die Gleichung $F(t)$ unter Anwendung der eben beschriebenen Verfolgung der Strahlen, findet man so die erste positive Nullstelle der Gleichung $F(t)$. Diese Nullstelle ist die Grenze der Folge von negativen Hüllkörpern (“unbounding spheres”), welche durch die rekursive Gleichung:

$$t_{i+1} = t_i + F(t_i) \quad (6.23)$$

definiert ist. Der Ursprungspunkt ist dabei als t_0 definiert. Diese Folge konvergiert genau dann — und nur dann — wenn der Strahl auf die implizite Oberfläche eines Objektes trifft. Diese Folge bildet den Kern des Algorithmus zur Darstellung von geometrisch definierten, impliziten Oberflächen.

```
def sphere_trace():
    ray_distance = 0
    estimated_distance = 0
    max_distance = 9001
    convergence_precision = 0.000001

    while ray_distance < max_distance:
        # sd_sphere is a signed distance function defining the implicit surface
        # cast_ray defines the ray equation given the current travelled /
        # marched distance of the ray
        estimated_distance = sd_sphere(cast_ray(ray_distance))

        if estimated_distance < convergence_precision:
            # the estimated distance is already smaller than the desired
            # precision of the convergence, so return the distance the ray has
            # travelled as we have an intersection
            return ray_distance

    ray_distance = ray_distance + estimated_distance

    # When we reach this point, there was no intersection between the ray and a
    # implicit surface, so simply return 0
    return 0
```

Auflistung 6.2: Eine abstrakte Umsetzung des Sphere Tracings⁶.

6.2.3. Operationen für implizite Oberflächen

Um mit impliziten Oberflächen nicht nur einfache Objekte, wie zum Beispiel eine Kugel, darstellen zu können, möchte man diese auch transformieren können.

⁶Algorithmus in Pseudocode gemäß John C. Hart 1994[S. 531, Fig. 1]

Wie John C. Hart beschreibt, werden implizite Oberflächen durch die Invertierung des Raumes, in welchem sich eine Oberfläche befindet, transformiert (John C. Hart 1994, S. 543). Der Raum, in dem sich eine implizite Oberfläche befindet, ist die Domäne der impliziten Funktion der Oberfläche.

Sei $T(\mathbf{x})$ eine Transformation und $f(\mathbf{x})$ eine Distanzfunktion, welche eine implizite Oberfläche definiert. Somit ist die transformierte implizite Oberfläche (John C. Hart 1994, S. 534):

$$f(T^{-1}(\mathbf{x})) = 0 \quad (6.24)$$

Bei Transformationen handelt es sich um von dem Vorzeichen abhängige Distanzfunktionen (*signed distance functions*).

Es werden folgende Arten von Transformationen unterschieden (John C. Hart 1993, S. 14):

- Distanz-Operationen
Zum Beispiel Vereinigung, Subtraktion oder Intersektion.
- Domänen-Operationen
Zum Beispiel Wiederholung, Rotation, Translation und Skalierung.
- Distanz-Deformationen
Zum Beispiel Versatz (displacement) und Vermengung/Vermischung. (*blend*)
- Domänen-Deformationen
Zum Beispiel “Verdrehung” (*twist*) und Biegung (*bend*).

Isometrien

Nicht alle Transformationen erhalten dabei die Distanz, welche die Distanzfunktion der transformierten Oberfläche zurückgeben würde. In solch einem Falle ist die zurückgegebene Distanz nicht die Distanz eines beliebigen Punktes im Raum zu dem ihm nächsten Punkt einer impliziten Oberfläche.

Transformationen, welche die Distanz hingegen erhalten, bezeichnet John C. Hart als *Isometrien* (John C. Hart 1994, S. 534). Dazu zählen Rotationen, Translationen aber auch Reflexionen.

Ist \mathbf{I} eine Isometrie, dann benötigt die zurückgegebene Distanz der Distanzfunktion $f(\mathbf{x})$ *keine Anpassung*.

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{I} \circ f^{-1}(0)) = d(\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{x}), f^{-1}(0)) \quad (6.25)$$

Wobei \mathbf{I} eine Isometrie und $f^{-1}(0)$ eine implizite Oberfläche ist.

Uniforme Skalierung

Eine Skalierung erhält die Distanz, welche die Distanzfunktion der skalierten Oberfläche zurückgeben würde, *nicht*. Somit muss die zurückgegebene Distanz entsprechend angepasst werden.

John C. Hart gibt die uniforme Skalierung als Transformation $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ der Form (John C. Hart 1994, S. 534):

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = s \cdot \mathbf{x} \quad (6.26)$$

an, wobei s der Skalierungsfaktor ist. Die Invertierung der Skalierung ist gegeben als (John C. Hart 1994, S. 534):

$$S^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{s} \cdot \mathbf{x} \quad (6.27)$$

Somit ist die Distanz zu der skalierten impliziten Oberfläche (John C. Hart 1994, S. 534):

$$d(\mathbf{x}, S(f^{-1}(0))) = s \cdot d(S^{-1}(\mathbf{x}), f^{-1}(0)) \quad (6.28)$$

Dabei wird die von der Distanzfunktion der skalierten impliziten Oberfläche zurückgegebene Distanz mit dem Skalierungsfaktor s multipliziert, was die eigentliche Information der Distanz erhält und die Skalierung somit isometrisch macht.

“Verdrehung” (Twist)

Gemäss John C. Hart werden bei der “Verdrehung” (Twist) einer impliziten Oberfläche zwei Achsen (z.B. x und y) anhand einer linearen Funktion $a(\cdot)$ in Abhängigkeit der dritten Achse (z.B. z) rotiert (John C. Hart 1994, S. 543):

$$\text{twist}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x \cdot \cos a(z) - y \cdot \sin a(z), \\ x \cdot \sin a(z) + y \cdot \cos a(z), \\ z \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

Vereinigung

Die Vereinigung zweier impliziter Oberflächen A und B wird von John C. Hart als minimale Distanz der jeweiligen, vom Vorzeichen abhängigen Distanzfunktion f_A respektive f_B definiert (John C. Hart 1994, S. 531 bis 532):

$$d(\mathbf{x}, A \cup B) = \min(f_A(\mathbf{x}), f_B(\mathbf{x})) \quad (6.30)$$

wobei \mathbf{x} den abzutastenden Punkt im Raum darstellt.

Wie John C. Hart schreibt, ist die Distanz zu einer Liste von impliziten Oberflächen die kleinste Distanz der jeweiligen Distanzfunktion. Somit erlaubt es die Vereinigung — neben der eigentlichen Vereinigung von Objekten — mehrere implizite Oberflächen zu kombinieren, ohne dass diese miteinander in Kontakt stehen müssen. So kann beispielsweise eine komplexe Szene modelliert werden.

Subtraktion

Um die Operation der Subtraktion zu definieren, wird die Distanz zum Komplement eines Objektes A verwendet. Dabei wird die Eigenschaft der Abhängigkeit von dem Vorzeichen von entsprechenden Distanzfunktionen genutzt (John C. Hart 1994, S. 532):

$$d(\mathbf{x}, \mathbb{R}^3 \setminus A) = -f_A(\mathbf{x}) \quad (6.31)$$

Somit kann die Subtraktion zweier impliziter Oberflächen A und B gemäss John C. Hart als Intersektion eines Objektes A mit der Subtraktion des Raumes bzw. der Domäne mit einem Objekt B angesehen werden, daher folgt (John C. Hart 1994, S. 532):

$$d(\mathbf{x}, A - B) = A \cap (\mathbb{R}^3 \setminus B) \quad (6.32)$$

$$\geq \max(f_A(\mathbf{x}), -f_B(\mathbf{x})) \quad (6.33)$$

wobei \mathbf{x} den abzutastenden Punkt im Raum darstellt.

Intersektion

Die Intersektion zweier impliziter Oberflächen A und B wird von John C. Hart 1994 als minimale Distanz der jeweiligen vorzeichenabhängigen Distanzfunktion f_A respektive f_B definiert (John C. Hart 1994, S. 532):

$$d(\mathbf{x}, A \cap B) \geq \max(f_A(\mathbf{x}), f_B(\mathbf{x})) \quad (6.34)$$

wobei \mathbf{x} den abzutastenden Punkt im Raum darstellt.

6.2.4. Primitive

John C. Hart führt in seiner Arbeit einige (geometrische) Primitive auf, welche nachfolgend erläutert werden (John C. Hart 1994, S. 540ff).

Ebene

Die von dem Vorzeichen abhängige Distanz zu einer Ebene P mit einer Einheitsnormalen \mathbf{n} , welche sich mit dem Punkt $\mathbf{n} \cdot r$ schneidet ist wie folgt definiert:

$$d(\mathbf{x}, P) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - r \quad (6.35)$$

wobei r die relative Positionierung der Ebene — unter Einbezug der Normalen der Ebene im Verhältnis zur Einheitsnormalen \mathbf{n} — im Raum darstellt.

Kugel

Eine Kugel ist als eine Menge von Punkten (Locus) in fixem Abstand eines gegebenen Punktes. Die von dem Vorzeichen abhängige Distanz zu einer Kugel S , ausgehend vom Ursprung, ist wie folgt:

$$d(\mathbf{x}, S) = \|\mathbf{x}\| - r \quad (6.36)$$

wobei r den Radius der Kugel darstellt.

Zylinder

Die Distanz zu einem um die Z-Achse zentrierten Zylinder mit Einheitsradius wird durch Projektion auf die XY-Ebene und Messung der Distanz zum Einheitskreis berechnet:

$$d(\mathbf{x}, Cyl) = \|(x, y)\| - r \quad (6.37)$$

wobei r den Radius des Zylinders und \mathbf{x} den Punkt (x, y, z) im Raum darstellt.

Kegel

Die Distanz zu einem Kegel, welcher am Ursprung zentriert und entlang der Z-Achse orientiert ist, wird wie folgt berechnet:

$$d(\mathbf{x}, \text{Cone}) = \|(\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| - |z|) \cdot \sin(\phi)\| \quad (6.38)$$

wobei ϕ den Winkel zur Z-Achse darstellt.

Torus

Beim Torus handelt es sich um das Produkt zweier Kreise, sowie den Abstand der Kreise:

$$d(\mathbf{x}, T) = \|(\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| - R, z)\| - r \quad (6.39)$$

wobei R den äusseren Radius und r den inneren Radius des Torus darstellt. Der Torus ist am Ursprung zentriert und dreht sich um die Z-Achse.

6.3. Rendering von impliziten Oberflächen

Nachdem in den vorherigen Abschnitten Methoden zur Modellierung von impliziten Oberflächen behandelt wurden, zeigt folgendes Kapitel wie implizite Oberflächen gerendert werden können. Foley beschreibt Rendering als Erstellung von Bildern ausgehend von Modellen (Foley 1996, S. 606).

6.3.1. Beleuchtungsmodell

Um implizite Oberflächen darstellen zu können, ist es notwendig ein Beleuchtungsmodell zu wählen. Ansonsten wäre das dargestellte Bild nur schwarz. Der Einfachheit halber wird im Rahmen dieser Projektarbeit das in Unterabschnitt 5.1.1 vorgestellte Phong-Beleuchtungsmodell verwendet.

Daher wird die resultierende Farbe eines Punktes im Raum $I(\mathbf{x})$ aus ambienten, diffusen und reflektierenden Anteilen berechnet:

$$I(\mathbf{x}) = I_{\text{ambient}} + I_{\text{diffuse}} + I_{\text{specular}} \quad (6.40)$$

Wie bereits zuvor in Unterabschnitt 5.1.1 erwähnt, wird der emissive Term bewusst weggelassen, da keine emissiven Materialien dargestellt werden sollen. Als Lichtquelle wird eine einzelne direktionale Lichtquelle gewählt. Analog zu den vorherigen Abschnitten ist \mathbf{x} in den folgenden Abschnitten ein Punkt (x, y, z) auf einer impliziten Oberfläche A .

Der *ambiente Anteil* I_{ambient} ergibt sich dann wie folgt:

$$I_{\text{ambient}} = k_{\text{ambient}}(\mathbf{x}) \cdot L_{\text{ambient}} \quad (6.41)$$

wobei $k_{\text{ambient}}(\mathbf{x})$ den ambienten Faktor des Punktes \mathbf{x} und L_{ambient} die Farbe des eingehenden ambienten Lichtes ist (Glassner 1989, S. 723; Fernando und Kilgard 2003, Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1).

Der *diffuse Anteil* I_{diffuse} ergibt sich wie folgt:

$$I_{\text{diffuse}} = k_{\text{diffuse}}(\mathbf{x}) \cdot L_{\text{diffuse}} \cdot \max(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}, 0) \quad (6.42)$$

wobei $k_{\text{diffuse}}(\mathbf{x})$ den diffusen Faktor am Punkt \mathbf{x} und L_{diffuse} die Farbe des eingehenden diffusen Lichtes ist. Die Richtung der Lichtquelle, ausgehend von Punkt \mathbf{x} , ergibt sich durch das Produkt zwischen der Einheitsnormalen \mathbf{n} der Oberfläche an dem Punkt und der Richtung der Lichtquelle \mathbf{l} (Glassner 1989, S. 724; Fernando und Kilgard 2003, Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1).

Der *reflektierende Anteil* I_{specular} ergibt sich wie folgt:

$$I_{\text{specular}} = n_{\text{facing}} \cdot k_{\text{specular}}(\mathbf{x}) \cdot L_{\text{specular}} \cdot \max(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}, 0)^{k_e} \quad (6.43)$$

wobei $k_{\text{specular}}(\mathbf{x})$ den reflektierenden Faktor des Punktes \mathbf{x} und L_{specular} die Farbe des eingehenden Lichtes ist. Bei \mathbf{h} handelt es sich um einen Einheitsvektor, welcher in der Hälfte zwischen der Blickrichtung des Betrachters bzw. der Kamera (\vec{V}) und \mathbf{l} der Richtung der Lichtquelle ausgehend von dem Punkt \mathbf{x} ist (Glassner 1989, S. 731). Der Exponent k_e gibt an, wie rau bzw. wie spiegelnd die Oberfläche am Punkt \mathbf{x} ist (Fernando und Kilgard 2003, Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1). Der Faktor n_{facing} definiert, ob die Oberfläche überhaupt einen reflektierenden Anteil hat (Fernando und Kilgard 2003, Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1):

$$n_{\text{facing}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \leq 0 \\ 1 & \text{if } \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} > 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

Für die Berechnung der Intensität des Lichtes bzw. der Farbe einer Oberfläche wird die Normale der Oberfläche benötigt. Gemäß J. C. Hart, Sandin und Kauffman kann diese mittels des Gradienten des Distanzfeldes eines Punktes einer impliziten Oberfläche berechnet werden:

$$\mathbf{n}_x = f(x + \varepsilon, y, z) - f(x - \varepsilon, y, z) \quad (6.45)$$

$$\mathbf{n}_y = f(x, y + \varepsilon, z) - f(x, y - \varepsilon, z) \quad (6.46)$$

$$\mathbf{n}_z = f(x, y, z + \varepsilon) - f(x, y, z - \varepsilon) \quad (6.47)$$

$$(6.48)$$

wobei $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$ die Normale der Oberfläche in Form eines Vektors, und f eine Distanzfunktion ist (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 292 bis 293; John C Hart 1993, S. 13).

Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wird wie folgt berechnet:

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

$$\text{grad}(f) = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \quad (6.50)$$

$$(6.51)$$

wobei \mathbf{i} , \mathbf{j} und \mathbf{k} Vektoren der Form $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sind.

J. C. Hart, Sandin und Kauffman geben ε als die minimale Inkrementation eines (Licht-) Strahles an und definieren diese als Funktion zur Bestimmung der Sichtbarkeit $\Gamma_{\alpha,\delta}$ (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 293):

$$\Gamma(d) = \alpha d^\delta \quad (6.52)$$

in Abhängigkeit der euklidischen Distanz d des Betrachters respektive der Kamera zur aktuellen Position des (Licht-) Strahles:

$$d = |r_n - r_0| \quad (6.53)$$

wobei δ ein so genannter “depth-cueing”-Exponent (“depth-cueing” oder auch “foldback”: “a process for returning a signal to a performer instantly” (liam Collins Sons & Co. Ltd. 2015)) und α ein empirischer Anteil, welcher die Tiefenauflösung des Objektes definiert, ist. Details dazu finden sich unter J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 293, Abschnitt 4.2 — “Clarity”.

Es folgt also:

$$\varepsilon = \Gamma_{\alpha,\delta}(|r_n - r_0|) \quad (6.54)$$

Die Korrektheit der Berechnung der Normalen n hängt von der Grösse von ε ab. Daher wird für gewöhnlich ein kleiner Wert für ε gewählt (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 293).

Die Normale der Oberfläche sollte schliesslich noch normalisiert werden.

Liefert die oben genannte Gradienten, bestehend aus 6 Punkten, eine zu geringe Genauigkeit, so kann diese gemäss J. C. Hart, Sandin und Kauffman erweitert werden (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 293).

Die Erweiterung erfolgt durch Hinzunahme von Punkten, welche eine gemeinsame Kante haben. Dies erzeugt eine Gradienten bestehend aus 18 Punkten. Werden noch die Punkte hinzugenommen, welche gemeinsame Eckpunkte haben, so ergibt sich eine Gradienten bestehend aus 26 Punkten (J. C. Hart, Sandin und Kauffman 1989, S. 293).

6.3.2. Rendering

Um implizite Oberflächen zu rendern, werden die in Abschnitt 6.2.4 angegebenen Primitiven verwendet.

Zum eigentlichen Rendern wird der Algorithmus 6.2 mit dem unter Unterabschnitt 6.3.1 angegebenen Beleuchtungsmodell angewendet.

6.3.3. Schatten

Sofern nicht anders vermerkt, basiert folgender Abschnitt auf Reiner, Mückl und Dachsbaier 2011, S. 7.

Mittels Sphere Tracing können Schatten analog den vom Ray Tracing bekannten Verfahren gewonnen werden. Dazu werden Schatten-Fühler oder auch Schatten-Strahlen (“shadow rays”) mit Sphere Tracing abgetastet. Man bildet also eine Folge von negativen Hüllkörpern (“unbounding volumes”) bzw. Kugeln (“unbounding spheres”) pro Lichtquelle in Richtung dieser ausgehend von einem Punkt einer Oberfläche. Die Folge wird so lange fortgesetzt, bis eine Intersektion stattfindet oder bis eine definierte maximale Distanz erreicht wurde.

Schatten-Fühler werden parametrisch als

$$r_s(t) = \mathbf{x} + t \cdot r_l \quad (6.55)$$

beschrieben. Wobei $r_s(t)$ der Ursprung des Schatten-Fühlers am Punkt \mathbf{x} einer impliziten Oberfläche, r_l die Richtung des Schatten-Fühlers in Form eines Einheitsvektors und t die zurückgelegte Distanz des Strahles ist.

Der Algorithmus in Auflistung 6.3 ist dem des Sphere Tracings (siehe Auflistung 6.2) sehr ähnlich, der Rückgabewert ist jedoch komplett verschieden. Der Algorithmus gibt den Wert 1 zurück, wenn keine Intersektion zwischen dem Schatten-Fühler und einer Oberfläche statt fand, nachdem die maximale Distanz erreicht wurde. Der Wert 0 wird zurückgegeben, wenn der Schatten-Fühler auf eine Oberfläche getroffen ist und der Punkt \mathbf{x} einer impliziten Oberfläche sich daher im Schatten befindet.

```
def calc_shadows():
    min_distance = 0.01
    max_distance = 9001
    shadow_ray_distance = min_distance
    estimated_distance = 0
    convergence_precision = 0.000001

    while shadow_ray_distance < max_distance:
        # sd_sphere is a signed distance function defining the implicit surface
        # cast_ray defines the ray equation given the current travelled /
        # marched distance of the ray
        estimated_distance = sd_sphere(cast_ray(shadow_ray_distance))

        if estimated_distance < convergence_precision:
            # the estimated distance is already smaller than the desired
            # precision of the convergence, so return zero (0) as we
            # have an intersection and therefore shadows
            return 0

    shadow_ray_distance = shadow_ray_distance + estimated_distance

    # When we reach this point, there was no intersection between the ray and a
    # implicit surface, so no shadows, so simply return 1
return 1
```

Auflistung 6.3: Algorithmus zur Berechnung von Schatten.

Um zu verhindern, dass ein Punkt \mathbf{x} einer impliziten Oberfläche sich selbst verdeckt (sich also quasi selbst Schatten spendet), wird die initial zurückgelegte Distanz (*shadow_ray_distance*) auf einen Minimalwert (*min_distance*) gesetzt. Dieser Wert sollte jedoch wesentlich grösser als die gewünschte Präzision (*convergence_precision*) sein, da ansonsten die Bedingung (*estimated_distance < convergence_precision*) ggf. initial erfüllt und sich der Punkt \mathbf{x} daher immer im Schatten befinden würde.

Reiner, Mückl und Dachsbacher geben zudem an, wie weiche Schatten mittels Sphere Tracing relativ einfach dargestellt werden können. Während der Expansion anhand des Schatten-Fühlers wird die minimale, evaluierte Distanz d_{\min} zu einem beliebigen Objekt gespeichert. Es wird dabei angenommen, dass sich ein Punkt \mathbf{x} einer impliziten Oberfläche für schmale Distanzen $0 < d_{\min} < d$ im Schatten befindet. Somit ergibt schliesslich das Verhältnis der minimalen Distanz zu der aktuellen Distanz einen Schatten- bzw. Penumbra-Faktor: $\text{shadow} = \frac{d_{\min}}{d}$, wobei $\text{shadow} \in (0, 1)$. Mit wachsender Distanz d wächst auch die so genannte Penumbra-Region.

Durch Speichern der minimalen, evaluierten Distanz ist es möglich die Distanz des Schatten-Fühlers zu der ihn umgebenden Geometrie zu untersuchen und somit die Penumbra-Region sowie weiche Schatten zu bestimmen. Befindet sich der Schatten-Fühler in der Nähe einer Oberfläche, schneidet diese aber

nicht, ist die minimale Distanz d_{\min} sehr gering. Ist dies der Fall, so kann angenommen werden, dass sich der Ursprungspunkt x in einer Penumbra-Region befindet, was sich auf die Schattierung des Punktes auswirkt: Je knapper der Schatten-Fühler eine Oberfläche nicht geschnitten hat, desto stärker wird der Punkt schattiert. Zusätzlich wird die Distanz des Ursprungspunktes einbezogen. Je geringer diese ist, desto stärker wird der Punkt schattiert.

Durch Hinzufügen eines Skalierungsfaktors kann ein Schattenwurf härter oder weicher gezeichnet werden.

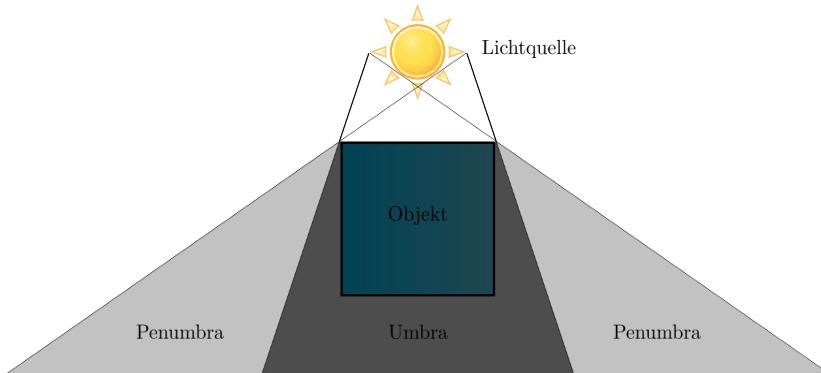


Abbildung 6.5.: Illustration eines Schattenwurfs anhand einer Lichtquelle und einem Objekt. Im Bild sind die Umbra- und Penumbra-Regionen erkennbar.⁷

```
def calc_soft_shadows():
    min_distance = 0.01
    max_distance = 9001
    shadow_ray_distance = min_distance
    estimated_distance = 0
    convergence_precision = 0.000001
    shadow = 1.0
    scale = 32.0

    while shadow_ray_distance < max_distance:
        # sd_sphere is a signed distance function defining the implicit
        # surface, # cast_ray defines the ray equation given the current travelled /
        # marched distance of the ray
        estimated_distance = sd_sphere(cast_ray(shadow_ray_distance))

        if estimated_distance < convergence_precision:
            # the estimated distance is already smaller than the desired
            # precision of the convergence, so return zero (0) as we
            # have an intersection and therefore 'full' shadow
            return 0

        penumbra_factor = estimated_distance / shadow_ray_distance
        shadow = min(shadow, scale * penumbra_factor)
        shadow_ray_distance = shadow_ray_distance + estimated_distance

    # When we reach this point, there was no full intersection between
    # the ray and a implicit surface, so not entirely shadowed, so
    # return current shadow value
    return shadow
```

⁷Eigene Darstellung mittels Inkscape, angelehnt an Glassner 1989, S. 772.

Auflistung 6.4: Algorithmus zur Berechnung von weichen Schatten.

7. Prototyp

Um das Sphere Tracing Verfahren nicht nur theoretisch zu behandeln wurde im Rahmen dieser Projektarbeit ein Prototyp erstellt. Dieser wurde in C++ Version 11 und OpenGL umgesetzt und basiert auf der GLFW-Bibliothek. Um allfällige OpenGL-Erweiterungen (Extensions) nicht selbst verwalten zu müssen, wird GLEW eingesetzt. Als Buildsystem kommt CMake, als Compiler GCC zum Einsatz. Um automatisch Shader erkennen und laden können (Dateien mit Dateiendung .vs bzw. .fs) werden die Bibliotheken “system”, “filesystem” sowie “regex” der Boost-Bibliothek eingesetzt.

Details der einzelnen Komponenten finden sich in der nachfolgenden Tabelle.

Komponente	Version	Beschreibung	Verweise
C++	11	Objektorientierte Programmiersprache	¹
OpenGL	4.5	Plattformunabhängige Programmierschnittstelle zur Entwicklung von 2D- und 3D-Computergrafikanwendungen (Wikipedia, the free encyclopedia 2015c).	²
GLFW	3.1.2	OpenGL-Bibliothek, welche die Erstellung und Verwaltung von Fenstern sowie OpenGL-Kontexte vereinfacht (Wikipedia, the free encyclopedia 2015b).	³
GLEW	1.13	OpenGL Extension Wrangler. Bibliothek zum Abfragen und Laden von OpenGL-Erweiterungen (Extensions) (Wikipedia, the free encyclopedia 2015d).	⁴
CMake	3.3.2	Software zur Verwaltung von Build-Prozessen von Software	⁵
GCC	5.2	GNU Compiler Collection. Compiler-System des GNU-Projektes	⁶
Boost	1.59.0	Freie Bibliothek bestehend aus einer Vielzahl von Bibliotheken, die den unterschiedlichsten Aufgaben von Algorithmen auf Graphen über Metaprogrammierung bis hin zu Speicherverwaltung dienen (Wikipedia, the free encyclopedia 2015a).	⁷

7.1. Architektur

Die Architektur des Prototypen wurde bewusst simpel gehalten und ist in Abbildung 7.1 ersichtlich.

⁷http://www.iso.org/iso/iso_catalogue/catalogue_tc/catalogue_detail.htm?csnumber=50372

⁷<https://www.opengl.org/registry/doc/glspec45.core.pdf>

⁷<http://www.glfw.org>

⁷<http://glew.sourceforge.net>

⁷<https://www.cmake.org>

⁷<http://gcc.gnu.org>

⁷<http://www.boost.org>

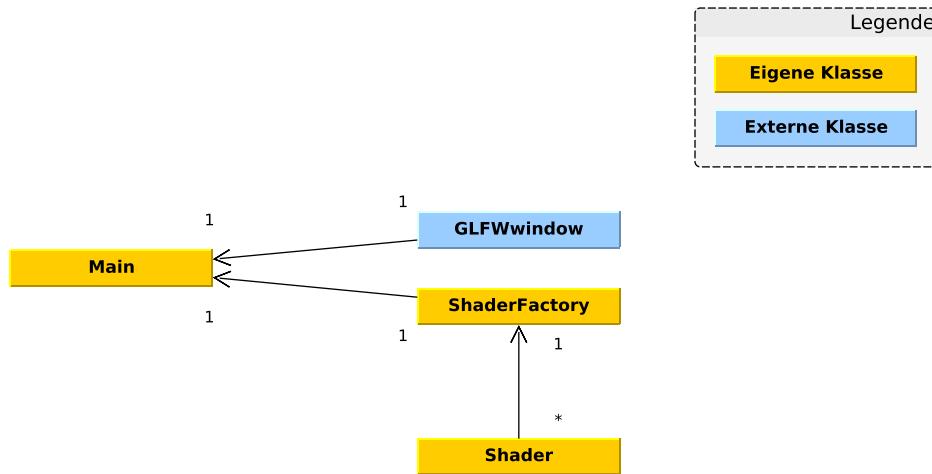


Abbildung 7.1.: Architektur des Prototypen⁸

7.1.1. Programmablauf

Wie in Abbildung 7.1 ersichtlich ist, besteht die Applikation hauptsächlich aus der Hauptklasse *main*. Diese initialisiert mittels GLEW OpenGL und erstellt mittels GLFW ein Fenster sowie einen OpenGL-Kontext. Danach wird eine Instanz der Klasse *ShaderFactory* erstellt, welche ihrerseits alle verfügbaren GLSL-Shader in einem gegebenen Verzeichnis lädt. Bei diesem Prototypen kommt jedoch nur ein Shader zum Einsatz — bestehend aus einem Vertex- sowie einem Fragment-Teil.

Die Applikation läuft danach in einer Endlosschleife, hört dabei aber auf Events in Form von Keyboard-Eingaben. So kann die Applikation jederzeit mit der Abbruch-Taste (ESC, Escape) beendet werden.

Die hauptsächliche Idee der Applikation ist die, dass diese im Rendering-Teil einen Vertex- sowie einen Fragment-Shader lädt und ausführt. Dazu wird via OpenGL ein Rechteck über die verfügbare Fläche des Fensters ausgegeben. Der Vertex-Shader adressiert schliesslich das von OpenGL gezeichnete Rechteck. Das eigentliche Rendering von impliziten Oberflächen geschieht dann im Fragment-Shader. Dies ist in der untenstehenden Abbildung 7.2 verdeutlicht.

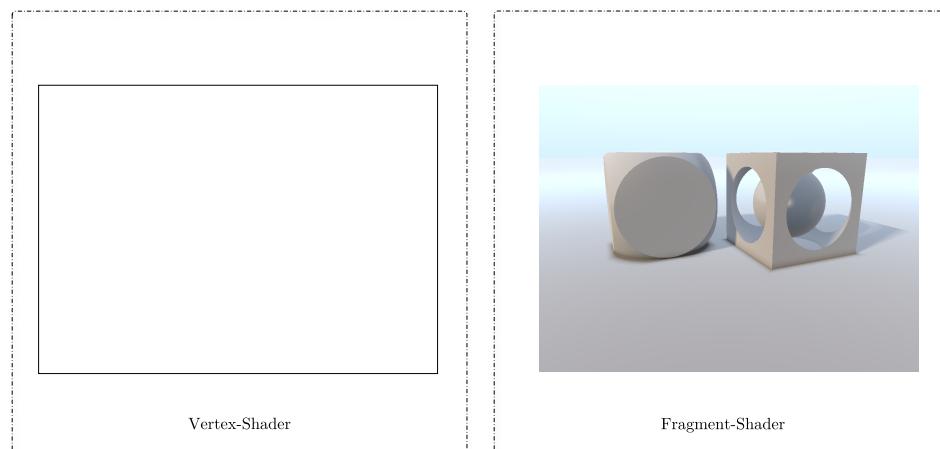


Abbildung 7.2.: Bildliche Darstellung der Funktionsweise von Vertex- und Fragment-Shader der Applikation⁹

⁸Eigene Darstellung mittels yEd.

7.2. Umsetzung

Nachfolgend werden die gemäss Abschnitt 6.2 umgesetzten Konzepte genauer beschrieben. Es handelt sich dabei um Ausschnitte des umgesetzten Fragment-Shaders.

Das eigentliche Sphere Tracing geschieht in der Funktion *castRay*. Diese hat als Parameter den Ursprung eines Strahles (*vec3 rayOrigin*), die Richtung eines Strahles (*vec3 rayDirection*), die maximale Distanz (*float maxDistance*), welche berechnet werden soll, die Präzision (*float precision*) sowie die Anzahl Durchgänge (*int steps*).

Ein Vergleich der letzten drei Parameter — die maximale Distanz, die Präzision sowie die Anzahl Durchgänge — findet sich in den Tabellen 7.1, 7.2 und 7.3.

```
// Casts a ray from given origin in given direction. Stops at given
// maximal distance and after given amount of steps. Maintains given
// precision.
vec2 castRay(in vec3 rayOrigin, in vec3 rayDirection, in float maxDistance, in float ←
    precision, in int steps)
{
    float latest = precision * 2.0;
    float distance = 0.0;
    float type = -1.0;
    vec2 res = vec2(-1.0, -1.0);

    for(int i = 0; i < steps; i++) {
        if (abs(latest) < precision || distance > maxDistance) {
            continue;
        }

        vec2 result = scene(rayOrigin + rayDirection * distance);

        latest = result.x;
        type = result.y;
        distance += latest;
    }

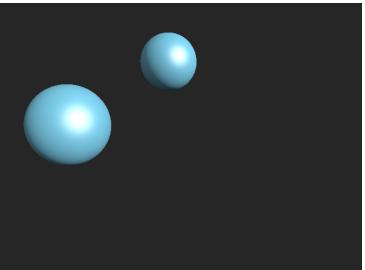
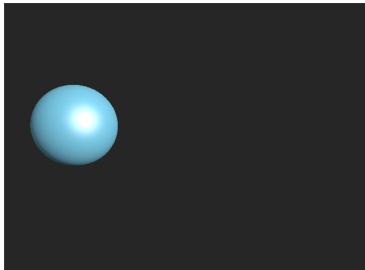
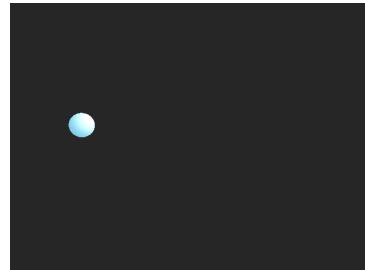
    if (distance < maxDistance) {
        res = vec2(distance, type);
    }

    return res;
}
```

Auflistung 7.1: Umsetzung des Sphere Tracings in GLSL.

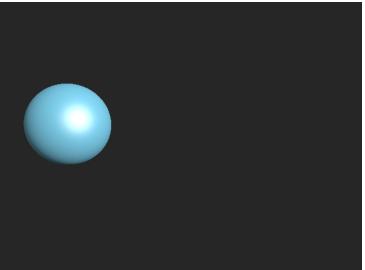
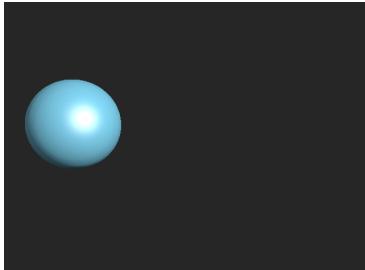
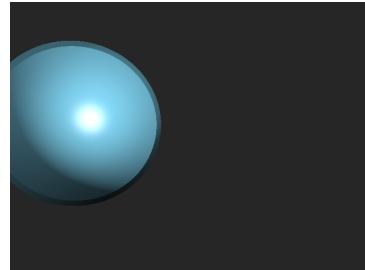
⁹Eigene Darstellung mittels yEd.

Tabelle 7.1.: Vergleich des Distanz-Parameters anhand einer Beispielszene.

Distanz: 100.0	Distanz: 9.0	Distanz: 6.3
		

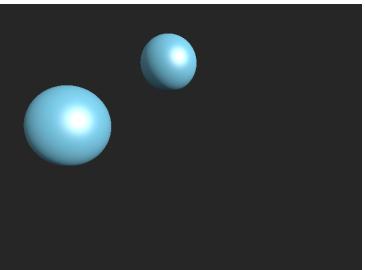
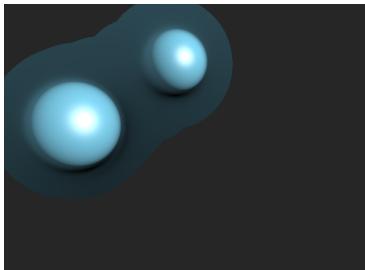
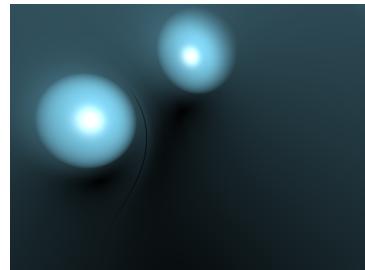
Alle in der Szene definierten Objekte sind sichtbar.
Es ist nur noch das zum Betrachter näher liegende Objekt sichtbar.
Es ist nur noch das zum Betrachter näher liegende Objekt sichtbar, jedoch nicht mehr vollständig.

Tabelle 7.2.: Vergleich des Präzisions-Parameters anhand einer Beispielszene.

Präzision: 0.00001	Präzision: 0.1	Präzision: 1.0
		

Die Kugel weist keinerlei sichtbare Abstufungen auf.
Die Kugel weist am unteren linken Rand sichtbare Farbabstufungen auf.
Die Kugel wird nicht mehr korrekt dargestellt.

Tabelle 7.3.: Vergleich des Parameters zur Bestimmung der Anzahl der Durchgänge anhand einer Beispielszene.

Anzahl Schritte: 100	Anzahl Schritte: 10	Anzahl Schritte: 5
		

Alle in der Szene definierten Objekte sind korrekt sichtbar.
Die Grenze zwischen den in der Szene definierten Objekten ist bereits nicht mehr eindeutig.
Die Szene ist als solche nicht mehr erkennbar, es erfolgt keine klare Trennung zwischen den einzelnen Objekten mehr.

Von den unter Unterabschnitt 6.2.3 beschriebenen Operationen wurden die Operationen *Vereinigung*, *Subtraktion* sowie *Intersektion* umgesetzt.

```

// Returns the signed distance for a subtraction of given signed
// distance a to signed distance b.
float subtract(float a, float b)
{
    return max(-b, a);
}

// Returns the signed distance for a merge of given signed
// distance a and signed distance b.
vec2 merge(vec2 a, vec2 b)
{
    return min(a, b);
}

// Returns the signed distance for a intersection of given signed
// distance a and signed distance b.
float intersect(float a, float b)
{
    return (a > b) ?a : b;
}

```

Auflistung 7.2: Umsetzung der Operationen *Vereinigung*, *Subtraktion* sowie *Intersektion* für implizite Oberflächen in GLSL.

Von den unter Unterabschnitt 6.2.4 beschriebenen Primitiven wurden die Primitiven *Ebene* sowie *Kugel* umgesetzt.

```

// Returns the signed distance to a plane for the given position.
float plane(vec3 position)
{
    return position.y;
}

// Returns the signed distance to a sphere with given radius for the
// given position.
float sphere(vec3 position, float radius)
{
    return length(position) - radius;
}

// Returns the signed distance to a box with given dimension for the
// given position.
float box(vec3 position, vec3 dimension)
{
    position = abs(position) - dimension;
    return max(max(position.x, position.y), position.z);
}

```

Auflistung 7.3: Umsetzung der Primitiven *Ebene* und *Kugel* in Form von impliziten Oberflächen in GLSL.

Verwendete Parameter sind dabei jeweils die (gewünschte) Position des Objektes (*vec3 position*) sowie der Radius bzw. die Dimension (*float radius* bzw. *vec3 dimension*).

Als Beleuchtungsmodell wurde das unter Abschnitt 6.3 beschriebene Phong-Beleuchtungsmodell umgesetzt.

```

// Calculates the lighting for the given position, normal and direction,
// the given light (position and color) respecting the 'material'.
//
// This is mainly applying the phong lighting model including shadows.
//
// Returns the calculated color as three-dimensional vector.
vec3 calcLighting(vec3 normal, vec3 rayDirection) {

    vec3 lightDirection = normalize(vec3(0.0, 4.0, 5.0));

    float kDirectLight = 0.1;
    float shadows = calcShadows(position, lightDirection);
    vec3 direct = vec3(kDirectLight * shadows);

    vec3 ambientColor = vec3(0.05, 0.15, 0.2);
    float kAmbient = clamp(0.5 + 0.5 * normal.y, 0.0, 1.0);
    vec3 ambient = kAmbient * ambientColor;

    vec3 diffuseColor = vec3(0.2, 0.6, 0.8);
    float kDiffuse = clamp(dot(lightDirection, normal), 0.0, 1.0);
    vec3 diffuse = kDiffuse * diffuseColor;

    vec3 specularColor = vec3(1.0);
    float kSpecularExponent = 24.0;
    vec3 h = normalize(-rayDirection + lightDirection);
    float nFacing = clamp(dot(lightDirection, normal), 0.0, 1.0);
    float kSpecular = pow(clamp(dot(h, normal), 0.0, 1.0), kSpecularExponent);
    vec3 specular = nFacing * kSpecular * specularColor;

    vec3 light = ambient + diffuse + specular + direct;
    vec3 color = material * light;

    return color;
}

```

Auflistung 7.4: Umsetzung des Phong-Beleuchtungsmodells in GLSL.

Als Parameter werden hier ein Normalvektor einer Oberfläche (\mathbf{n}) sowie die Richtung eines eingehenden Strahles (also die Blichrichtung des Betrachters bzw. der Kamera, \vec{V}) benötigt. Wie oben ersichtlich ist, wird zuerst die Richtung der Lichtquelle definiert, danach werden die einzelnen Anteile des Lichtes I_{ambient} , I_{diffuse} sowie I_{specular} berechnet.

Die Normale einer Oberfläche wird wie unter Unterabschnitt 6.3.1 beschrieben berechnet.

```

// Calculates the normal vector for given position with respect to a
// certain offset given by epsilon.
vec3 calcNormal(in vec3 position, in float epsilon) {

    vec3 eps = vec3(epsilon, 0.0, 0.0);
    vec3 normal = vec3(
        scene(position + eps.xyy).x - scene(position - eps.xyy).x,
        scene(position + eps.yxy).x - scene(position - eps.yxy).x,
        scene(position + eps.yyx).x - scene(position - eps.yyx).x
    );

    return normalize(normal);
}

```

```
}
```

Auflistung 7.5: Berechnung der Normalen einer impliziten Oberfläche in GLSL.

Verwendete Parameter sind dabei ein Punkt der Oberfläche eines Objektes (*vec3 position*) sowie die minimale Inkrementation eines (Licht-) Strahles (ε). Wie zuvor erwähnt, sollte für ε ein möglichst kleiner Wert gewählt werden, daher wird standardmässig der Wert *0.1* verwendet.

Bei der Funktion *scene* handelt es sich um eine Distanzfunktion *f* gemäss Abschnitt 6.1.3. Diese definiert schliesslich, was an einem gegebenen Punkt dargestellt wird.

```
// Defines the scene which will be drawn at given position.
float scene(in vec3 position) {
{
    float sphereRadius = 1.0;
    vec3 sphereOffset = vec3(-2.0, 1.0, -2.0);

    float res = sphere(position - sphereOffset, sphereRadius);

    return res;
}
```

Auflistung 7.6: Distanzfunktion *f* in GLSL.

In diesem Beispiel wird eine Kugel mit Radius *1.0* dargestellt. Diese wird auf der *X*-Achse um -2 Einheiten, auf der *Y*-Achse um 1 Einheit und auf der *Z*-Achse um -2 Einheiten verschoben (Translation).

Wie in Unterabschnitt 6.3.3 beschrieben, wurden weiche Schatten implementiert.

```
// Calculates soft shadows for the given ray origin and direction.
//
// Returns a shadow color for the given origin between 0.0 and 1.0.
float calcShadows(in vec3 rayOrigin, in vec3 rayDirection)
{
    float shadow = 1.0;
    float minimalDistance = 0.01;
    float maximalDistance = 2.5;
    float convergePrecision = 0.000001;
    float kShadow = 8.0;
    float currentDistance = minimalDistance;

    while (currentDistance < maximalDistance) {
        vec3 ray = rayOrigin + rayDirection * currentDistance;
        float estimatedDistance = scene(ray);

        if (estimatedDistance < convergePrecision) {
            return 0.0;
        }

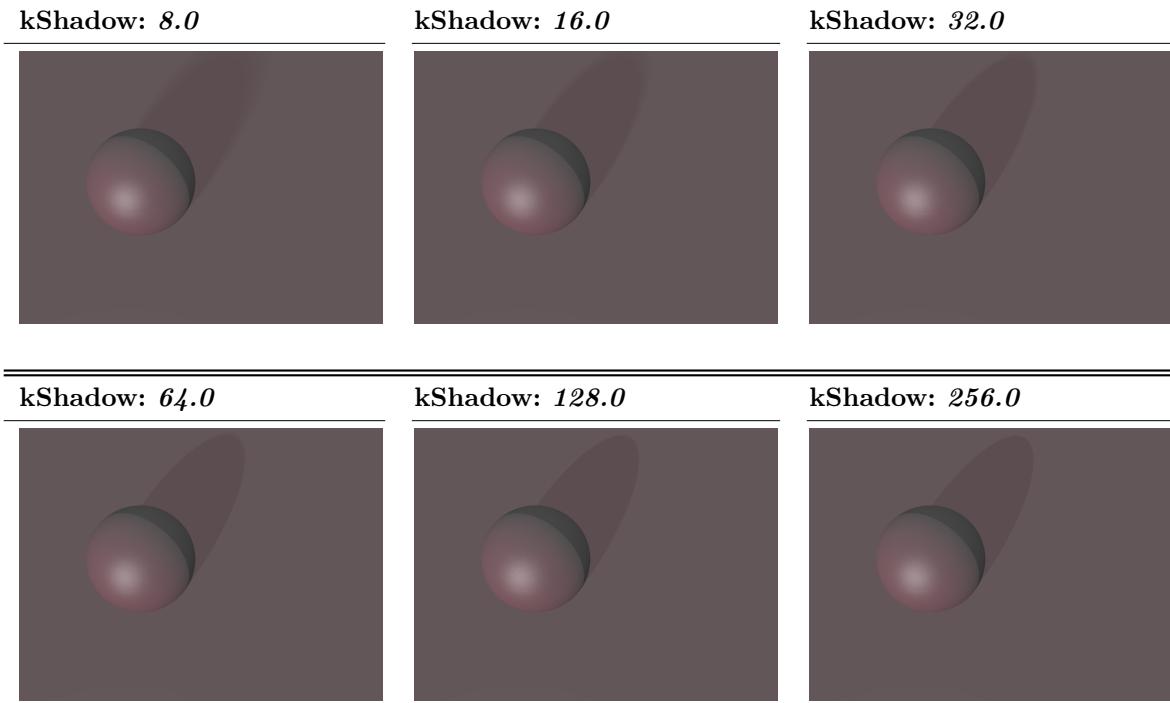
        float penumbraFactor = estimatedDistance / currentDistance;
        shadow = min(shadow, kShadow * penumbraFactor);
        currentDistance += estimatedDistance;
    }

    return clamp(shadow, 0.0, 1.0);
}
```

Auflistung 7.7: Funktion zur Berechnung von weichen Schatten in GLSL.

Verwendete Parameter sind dabei der Ursprung eines Strahles (*vec3 rayOrigin*), sowie die Richtung eines Strahles (*vec3 rayDirection*).

Tabelle 7.4.: Vergleich des Skalierungsfaktors *kShadow* für weiche Schatten anhand einer Beispielszene.



Das eigentliche Rendering, also die Darstellung der Szene, geschieht in der Funktion *render*.

```
// Performs rendering of a scene beginning at given origin in given ray
// direction. This invokes calculating the normal vector, the material
// as well as the lighting.
vec3 render(in vec3 rayOrigin, in vec3 rayDirection)
{
    vec3 color = vec3(0.05, 0.08, 0.10);
    vec3 res = castRay(rayOrigin, rayDirection, 100.0, 0.00001, 100);
    float currentDistance = res.x;
    float renderedScene = res.z;
    float minimalDistance = -0.5;

    // Perform further calculation only when the distance is not below
    // the minimal distance (epsilon-factor).
    if (currentDistance > minimalDistance) {
        vec3 position = rayOrigin + currentDistance * rayDirection;
        vec3 normal = calcNormal(position, 0.00001);

        vec3 lightColor = vec3(0.7, 0.2, 0.3);
        vec3 lightPosition = vec3(-0.6, 0.7, -0.5);
        vec3 light = calcLighting(position, normal, rayDirection, material, lightPosition, ←
            lightColor);
```

```

        color = light;
    }
    color = clamp(color, 0.0, 1.0);

    return color;
}

```

Auflistung 7.8: Funktion zur Darstellung der Szene in GLSL. Die Szene bzw. der Farbwert wird nur dann zurückgegeben bzw. berechnet, wenn eine minimale Distanz nicht unterschritten wird.

Die Hauptfunktion *main* des Fragment-Shaders ruft schliesslich die Funktion zum Darstellen der Szene auf. Die zusätzlichen Methoden (wie z.B. *getRay* oder *squareFrame*) finden sich allesamt im Programmcode des Prototypen, welcher dieser Projektarbeit beiliegt.

```

// Main method of the shader.
void main()
{
    vec2 resolution = globalResolution;
    float time = globalTime * 1.1;
    float cameraAngle = 1.0;
    float cameraHeight = 2.0;
    float cameraPane = 4.0;
    float cameraDistance = 4.5;
    vec3 rayOrigin = vec3(cameraPane * sin(cameraAngle), cameraHeight, cameraDistance * cos(-cameraAngle * time));
    vec3 rayTarget = vec3(0.0, 0.0, 0.0);
    vec2 screenPosition = squareFrame(resolution);
    vec3 rayDirection = getRay(rayOrigin, rayTarget, screenPosition, 2.0);

    vec3 color = render(rayOrigin, rayDirection);
    color = calcPostFx(color, screenPosition);

    gl_FragColor.rgb = color;
    gl_FragColor.a = 1.0;
}

```

Auflistung 7.9: Einstiegspunkt des Fragment-Shaders.

8. Schlusswort

In dieser Projektarbeit wurde mit Sphere Tracing eine Methode vorgestellt, bei welcher es sich um eine optimierte Variante von dem als Ray Tracing bekannten Verfahren handelt. Diese erlaubt die Darstellung von Szenen analog dem Ray Tracing Verfahren, aber in Echtzeit.

Zuerst wurden *lokale*, dann *globale Beleuchtungsmodelle* inklusive der *Renderinggleichung* vorgestellt. Weiter wurde das *Ray Tracing* Verfahren ausgehend von der ursprünglichen Idee des Ray Tracings, ein als *Ray Casting* bekanntes Verfahren, vorgestellt. Dabei wurde auch die zugrundeliegende Physik vereinfacht aufgezeigt.

Für die Anwendung der Beleuchtungsmodelle in einem praktischen Sinne, so dass eine Szene auf dem Bildschirm sichtbar wird, wurden die klassischen Modelle zur Schattierung *Flat-Shading*, *Gouraud-Shading* sowie *Phong-Shading* vorgestellt.

Um die eigentliche Szene darstellen zu können, wurden *Oberflächen* im Allgemeinen eingeführt. Dabei wurde gezeigt, dass zur Modellierung von Oberflächen hauptsächlich zwei Techniken verwendet werden: Die parametrische und die implizite Modellierung bzw. Darstellung. Es wurden dann *implizite Oberflächen* im Speziellen behandelt. Mittels *Distanzfunktionen* wurde eine Grundlage zur Berechnung von Distanzen gezeigt, welche der späteren Modellierung und Darstellung dient. Ausgehend von den Distanzfunktionen wurden schliesslich *Distanzfelder* vorgestellt, eine Art Datenstruktur basierend auf den Distanzfunktionen.

Mit *Ray Marching* und *Sphere Tracing* wurden zwei Methoden zur Darstellung von impliziten Oberflächen aufgezeigt. Weiter wurden *Operationen für implizite Oberflächen*, wie beispielsweise die Vereinigung oder Subtraktion, vorgestellt sowie Funktionen zur Modellierung von *geometrischen Primitiven*.

Es wurde schliesslich gezeigt, wie die vorgestellten Grundlagen für das Rendering von impliziten Oberflächen genutzt werden können.

Im letzten Abschnitt wurde der umgesetzte *Prototyp* vorgestellt, wobei einzelne Parameter des Prototyps (*Distanz*, *Präzision*, die *Anzahl Schritte* und der *Skalierungsfaktor für Schatten*) anhand einer Beispieldszene verglichen wurden.

8.1. Erweiterungsmöglichkeiten

Da diese Projektarbeit einen begrenzten Zeitrahmen von einem Semester hat, konnten nicht alle gewünschten Thematiken bearbeitet werden.

Zudem handelt es sich bei Sphere Tracing um ein relativ junges Verfahren, welches noch über viel Potential für Forschung und Entwicklung verfügt. Da es sich zudem um ein grosses Themengebiet handelt, kann hier auch entsprechend viel Zeit investiert werden.

Einige, der während der Recherche aufgetretenen, aber nicht bearbeiteten Thematiken werden nachfolgend aufgezeigt. Sie zeigen auf, in welche Richtung eine Weiterführung der Projektarbeit und des Prototypen gehen kann.

8.1.1. Umgebungs-Verdeckung (Ambient Occlusion)

“Umgebungsverdeckung (englisch Ambient Occlusion, AO) ist eine Shading-Methode, die in der 3D-Computergrafik verwendet wird, um mit relativ kurzer Renderzeit eine realistische Verschattung von Szenen zu erreichen. Das Ergebnis ist zwar nicht physikalisch korrekt, reicht jedoch in seinem Realismus oft aus, um auf rechenintensive globale Beleuchtung verzichten zu können.” (Wikipedia, the free encyclopedia 2015e)

Evans liefert in seiner Arbeit „Fast Approximations for Global Illumination on Dynamic Scenes“ interessante Ansätze, wie die Umgebungsverdeckung auf Distanzfelder angewendet werden kann. Dies kann so wohl mit relativ wenig Aufwand auch für Sphere Tracing angewendet werden (Evans 2006).

8.1.2. Kantenglättung

Bei der Darstellung von Szenen mittels Sphere Tracing kommt es an Kanten zu harten Übergängen und Artefakten — es tritt das so genannte “Aliasing” auf.

John C. Hart schlägt in „Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces“ bereits Verfahren zur Kantenglättung vor. Diese verkomplizieren jedoch den Rendering-Prozess und haben schwächen im Umgang mit angrenzenden Obergrenzen von impliziten Oberflächen.

Lottes schlägt in seiner Arbeit *FXAA* eine einfache Lösung dieser Problematiken vor. Es handelt sich dabei um einen Bild-Filter, welcher typischerweise in der Nachbearbeitung eines Bildes zum Einsatz kommt. Der Filter wird auf das gerenderte Bild (bzw. auf einen Bild-Puffer) angewendet. Es handelt sich dabei um ein Verfahren, welches auf der Detektion von Kanten basiert (Lottes 2009).

8.1.3. Realistische Materialien

In Unterabschnitt 5.2.2 werden Verfahren zur Berechnung der physikalischen Eigenschaften von Oberflächen und damit Materialien aufgezeigt. Dabei handelt es sich aber nur um Näherungen unter Annahme von perfekten Bedingungen, was weit entfernt von der Realität ist.

Eine allgemeinere und daher realistischerer Form ist die so genannte BRDF: „Eine bidirektionale Reflexionsverteilungsfunktion (engl. Bidirectional Reflectance Distribution Function, BRDF) stellt eine Funktion für das Reflexionsverhalten von Oberflächen eines Materials unter beliebigen Einfalls winkeln dar. Sie liefert für jeden auf dem Material auftreffenden Lichtstrahl mit gegebenem Eintrittswinkel den Quotienten aus Strahlungsdichte und Bestrahlungsstärke für jeden austretenden Lichtstrahl. BRDFs werden unter anderem in der realistischen 3D-Computergrafik verwendet, wo sie einen Teil der fundamentalen Rendergleichung darstellen und dazu dienen, Oberflächen möglichst realistisch und physikalisch korrekt darzustellen. Eine Verallgemeinerung der BRDF auf Texturen stellt die BTF (Bidirectional Texturing Function) dar.“ (Wikipedia, the free encyclopedia 2014)

Burley liefert mit *Physical-Based Shading at Disney* eine gute Übersicht, wie solche Verfahren umgesetzt werden können (Burley 2012). Bagher, Soler und Holzschuch bietet in „Accurate Fitting of Measured Reflectances Using a Shifted Gamma Micro-facet Distribution“ eine Fülle an Materialien und Eigenschaften (Bagher, Soler und Holzschuch 2012).

8.1.4. Optimierungsverfahren

Zur Beschleunigung des Sphere Tracing Verfahrens existieren diverse Verfahren. So stellen z.B. Keinert et al. in *Enhanced Sphere Tracing* diverse Methoden zur Optimierung und Beschleunigung des Renderings sowie Methoden zum Finden von Schnittpunkten vor (Keinert et al. 2014). Seven stellt in *Rendering Mandelbox fractals faster with Cone Marching* eine Methode vor, wie Sphere Tracing mittels Aussenden von Kegelförmigen (Primär-) Strahlen optimiert werden kann (Seven 2012).

Literatur

- [App68] Arthur Appel. „Some Techniques for Shading Machine Renderings of Solids“. In: *Proceedings of the April 30–May 2, 1968, Spring Joint Computer Conference. AFIPS ’68 (Spring)*. New York, NY, USA: ACM, 1968, S. 37–45. DOI: 10.1145/1468075.1468082. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1468075.1468082>.
- [Arl68] Arlington Mathematical Applications Group, Inc. *AFIPS ’68 (Fall, part I): Proceedings of the December 9–11, 1968, Fall Joint Computer Conference, Part I*. Library of Congress Catalog Card No.: 55-44701. New York, NY, USA: ACM, 1968.
- [BSH12] M. M. Bagher, C. Soler und N. Holzschuch. „Accurate Fitting of Measured Reflectances Using a Shifted Gamma Micro-facet Distribution“. In: *Comput. Graph. Forum* 31.4 (Juni 2012), S. 1509–1518. ISSN: 0167-7055. DOI: 10.1111/j.1467-8659.2012.03147.x. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.03147.x>.
- [Bur12] Brent Burley. *Physically-Based Shading at Disney*. en. Aug. 2012.
- [Eva06] Alex Evans. „Fast Approximations for Global Illumination on Dynamic Scenes“. In: *ACM SIGGRAPH 2006 Courses. SIGGRAPH ’06*. New York, NY, USA: ACM, 2006, S. 153–171. ISBN: 1595933646. DOI: 10.1145/1185657.1185834. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1185657.1185834>.
- [FK03] Randima Fernando und Mark J. Kilgard. *The Cg Tutorial: The Definitive Guide to Programmable Real-Time Graphics*. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 2003. ISBN: 0321194969.
- [Fol96] J.D. Foley. *Computer Graphics: Principles and Practice*. Addison-Wesley systems programming series. Addison-Wesley, 1996. ISBN: 9780201848403. URL: <https://books.google.ch/books?id=-4ngT05gmAQ>.
- [Gla89] Andrew S. Glassner, Hrsg. *An Introduction to Ray Tracing*. London, UK, UK: Academic Press Ltd., 1989. ISBN: 0122861604.
- [Har93] John C Hart. „Ray tracing implicit surfaces“. In: *Siggraph 93 Course Notes: Design, Visualization and Animation of Implicit Surfaces* (1993), S. 1–16.
- [Har94] John C. Hart. „Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces“. In: *The Visual Computer* 12 (1994), S. 527–545.
- [Hec90] Paul S. Heckbert. „Adaptive Radiosity Textures for Bidirectional Ray Tracing“. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 24.4 (Sep. 1990), S. 145–154. ISSN: 0097-8930. DOI: 10.1145/97880.97895. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/97880.97895>.
- [HSK89] J. C. Hart, D. J. Sandin und L. H. Kauffman. „Ray Tracing Deterministic 3-D Fractals“. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 23.3 (Juli 1989), S. 289–296. ISSN: 0097-8930. DOI: 10.1145/74334.74363. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/74334.74363>.
- [Hug+13] J.F. Hughes et al. *Computer Graphics: Principles and Practice*. The systems programming series. Addison-Wesley, 2013. ISBN: 9780321399526. URL: <https://books.google.ch/books?id=OVpsAQAAQBAJ>.
- [JBS06] Mark W. Jones, J. Andreas Baerentzen und Milos Srivastava. „3D Distance Fields: A Survey of Techniques and Applications“. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 12.4 (Juli 2006), S. 581–599. ISSN: 1077-2626. DOI: 10.1109/TVCG.2006.56. URL: <http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2006.56>.
- [Kaj86] James T. Kajiya. „The Rendering Equation“. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 20.4 (Aug. 1986), S. 143–150. ISSN: 0097-8930. DOI: 10.1145/15886.15902. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/15886.15902>.

- [Kei+14] Benjamin Keinert et al. *Enhanced Sphere Tracing*. en. 2014.
- [lia15] Liam Collins Sons & Co. Ltd. *Collins English Dictionary - Complete & Unabridged 10th Edition*. Okt. 2015. URL: <http://dictionary.reference.com/browse/foldback>.
- [Lot09] Timothy Lottes. *FXAA*. 2009.
- [Men96] J. Menon. *An Introduction to Implicit Techniques*. Research report. IBM T.J. Watson Research Center, 1996. URL: <https://books.google.ch/books?id=Ew40GwAACAAJ>.
- [Ope15] OpenGL foundation. *Rendering Pipeline Overview - OpenGL.org*. Mai 2015. URL: https://www.opengl.org/wiki/Rendering_Pipeline_Overview (besucht am 07.01.2016).
- [PH10] Matt Pharr und Greg Humphreys. *Physically Based Rendering, Second Edition: From Theory To Implementation*. 2nd. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2010. ISBN: 0-12-375079-2 978-0-12-375079-2.
- [PH89] K. Perlin und E. M. Hoffert. „Hypertexture“. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 23.3 (Juli 1989), S. 253–262. ISSN: 0097-8930. DOI: 10.1145/74334.74359. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/74334.74359>.
- [Pho75] Bui Tuong Phong. „Illumination for Computer Generated Pictures“. In: *Commun. ACM* 18.6 (Juni 1975), S. 311–317. ISSN: 0001-0782. DOI: 10.1145/360825.360839. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/360825.360839>.
- [RMD11] Tim Reiner, Gregor Mückl und Carsten Dachsbacher. „SMI 2011: Full Paper: Interactive Modeling of Implicit Surfaces Using a Direct Visualization Approach with Signed Distance Functions“. In: *Comput. Graph.* 35.3 (Juni 2011), S. 596–603. ISSN: 0097-8493. DOI: 10.1016/j.cag.2011.03.010. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cag.2011.03.010> (besucht am 14.11.2015).
- [Sev12] Seven. *Rendering Mandelbox fractals faster with Cone Marching*. en. 2012.
- [Whi80] Turner Whitted. „An Improved Illumination Model for Shaded Display“. In: *Commun. ACM* 23.6 (Juni 1980), S. 343–349. ISSN: 0001-0782. DOI: 10.1145/358876.358882. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/358876.358882>.
- [Wik14] Wikipedia, the free encyclopedia. *Bidirektionale Reflektanzverteilungsfunktion*. de. Page Version ID: 136247995. Nov. 2014. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bidirektionale_Reflektanzverteilungsfunktion&oldid=136247995 (besucht am 13.01.2016).
- [Wik15a] Wikipedia Foundation. *Demoszene*. de. Page Version ID: 149578258. Dez. 2015. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Demoszene&oldid=149578258> (besucht am 09.01.2016).
- [Wik15b] Wikipedia Foundation. *Zotero*. Published: Website Abgerufen am 27. September 2015. Aug. 2015. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zotero>.
- [Wik15c] Wikipedia, the free encyclopedia. *Boost (C++-Bibliothek)*. de. Page Version ID: 146313866. Sep. 2015. URL: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Boost_\(C++-Bibliothek\)&oldid=146313866](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Boost_(C++-Bibliothek)&oldid=146313866) (besucht am 31.10.2015).
- [Wik15d] Wikipedia, the free encyclopedia. *GLFW*. en. Page Version ID: 687716464. Okt. 2015. URL: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=GLFW&oldid=687716464> (besucht am 31.10.2015).
- [Wik15e] Wikipedia, the free encyclopedia. *OpenGL*. de. Page Version ID: 146904140. Okt. 2015. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=OpenGL&oldid=146904140> (besucht am 31.10.2015).
- [Wik15f] Wikipedia, the free encyclopedia. *OpenGL Extension Wrangler Library*. en. Page Version ID: 680716273. Sep. 2015. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=OpenGL_Extension_Wrangler_Library&oldid=680716273 (besucht am 31.10.2015).
- [Wik15g] Wikipedia, the free encyclopedia. *Umgebungsverdeckung*. de. Page Version ID: 147007685. Okt. 2015. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Umgebungsverdeckung&oldid=147007685> (besucht am 13.01.2016).

Abbildungsverzeichnis

4.1. Zeitplan; Der Titel stellt Jahreszahlen, der Untertitel Kalenderwochen dar	6
5.1. Illustration des Phong-Beleuchtungsmodells ¹	10
5.2. Illustration des Ray Casting Verfahrens ²	13
5.3. Illustration des Prinzips des Ray Tracing Verfahrens ³	15
5.4. Illustration der einzelnen Strahlen und deren Verhalten ausgehend von der Szene in Abbildung 5.3. ⁴ Das im Bild ersichtliche, orange-farbige Dreieck hat eine undurchlässige, reflexive Oberfläche. Der türkis-farbige Würfel hat eine diffuse Oberfläche. Bei der Kugel, rechts im Bild, handelt es sich um eine Kugel aus Glas, welche das Licht teilweise bricht und reflektiert.	16
5.5. Illustration einer perfekt spiegelnden Reflexion. ⁵ I ist der eingehende Strahl, welcher am Normalenvektor N der schraffierten Oberfläche in Richtung R reflektiert wird. Der Winkel des eingehenden Strahles θ_I ist gleichgross wie der Winkel des ausgehenden Strahles θ_R . .	18
5.6. Illustration einer perfekt diffusen Reflexion. ⁶ I ist der eingehende Strahl, welcher am Ort des Normalenvektors N der schraffierten Oberfläche auftrifft. Das Licht wird gleichmaessig in alle Richtungen gestreut.	18
5.7. Illustration einer perfekt brechenden Reflexion. ⁷ I ist der eingehende Strahl, welcher am Ort des Normalenvektors N im Winkel von θ_1 von Medium 1 in Medium 2 uebergeht und entsprechend mit Winkel θ_2 anhand T gebrochen wird.	19
5.8. Illustration der totalen internen Reflexion. ⁸ Ist der kritische Winkel θ_c beim Uebertritt eines Strahles von einem Medium (hier Glas) zu einem anderen Medium (hier Luft) nicht ueberschritten, so wird der Strahl bzw. Licht sowohl gebrochen als auch reflektiert. Wird der kritische Winkel ueberschritten, so findet nur noch eine Reflexion statt. ⁹	20
5.9. Illustration der Ausgangslage ¹⁰	22
5.10. Illustration des Flat-Shadings ¹¹	23
5.11. Illustration des Gouraud-Shadings ¹²	23
5.12. Illustration der berechneten Normalenvektoren n_{v_2} und n_{v_3} an den Eckpunkten v_2 und v_3 sowie des Normalenvektors $n_{v_{23}}$ der Kante v_2v_3 ¹³	24
5.13. Stark vereinfachte Illustration der interpolierten Normalenvektoren anhand der Kante v_2v_3 ¹⁴	24
6.1. Darstellung des Distanzfeldes einer dreidimensionalen Szene anhand Farbwerten ¹⁵	29
6.2. Illustration des Ray Marching Verfahrens und dessen Problematiken. ¹⁶	32
6.3. Illustration des Sphere Tracing Verfahrens. ¹⁷	34
6.4. Illustration des Sphere Tracing Verfahrens, Nahaufnahme. ¹⁸	34
6.5. Illustration eines Schattenwurfs anhand einer Lichtquelle und einem Objekt. Im Bild sind die Umbra- und Penumbra-Regionen erkennbar. ¹⁹	43
7.1. Architektur des Prototypen ²⁰	45
7.2. Bildliche Darstellung der Funktionsweise von Vertex- und Fragment-Shader der Applikation ²¹	45

Tabellenverzeichnis

5.1. Darstellung des Strahlen-Baumes anhand einer Beispieldszene	21
5.2. Vergleich der genannten Shading-Verfahren anhand einer Beispieldszene ²²	25
7.1. Vergleich des Distanz-Parameters anhand einer Beispieldszene.	47
7.2. Vergleich des Präzisions-Parameters anhand einer Beispieldszene.	47
7.3. Vergleich des Parameters zur Bestimmung der Anzahl der Durchgänge anhand einer Beispieldszene.	47
7.4. Vergleich des Skalierungsfaktors k_{Shadow} für weiche Schatten anhand einer Beispieldszene.	51

Auflistungsverzeichnis

4.1. Projekt-Struktur.	8
5.1. Eine abstrakte Umsetzung des Ray Casting Verfahrens ²³	14
5.2. Eine abstrakte Umsetzung des Ray Tracings ²⁴	21
6.1. Eine abstrakte Umsetzung des Ray Marchings ²⁵	31
6.2. Eine abstrakte Umsetzung des Sphere Tracings ²⁶	35
6.3. Algorithmus zur Berechnung von Schatten.	42
6.4. Algorithmus zur Berechnung von weichen Schatten.	43
7.1. Umsetzung des Sphere Tracings in GLSL.	46
7.2. Umsetzung der Operationen <i>Vereinigung</i> , <i>Subtraktion</i> sowie <i>Intersektion</i> für implizite Oberflächen in GLSL.	48
7.3. Umsetzung der Primitiven <i>Ebene</i> und <i>Kugel</i> in Form von impliziten Oberflächen in GLSL.	48
7.4. Umsetzung des Phong-Beleuchtungsmodells in GLSL.	48
7.5. Berechnung der Normalen einer impliziten Oberfläche in GLSL.	49
7.6. Distanzfunktion f in GLSL.	50
7.7. Funktion zur Berechnung von weichen Schatten in GLSL.	50
7.8. Funktion zur Darstellung der Szene in GLSL. Die Szene bzw. der Farbwert wird nur dann zurückgegeben bzw. berechnet, wenn eine minimale Distanz nicht unterschritten wird. . .	51
7.9. Einstiegspunkt des Fragment-Shaders.	52

Anhang

A. Meeting minutes

20150921

No.: 01
Date: 21.09.2015 07:30 - 07:55
Place: Prof. Claude Fuhrer's office
Involved persons: Claude Fuhrer
Sven Osterwalder

Meeting minutes 2015-09-21

- * Project issues
 - Requirement document needed?
 - * No, not directly
 - What are the requirements?
 - * Project schedule
 - * External inputs
 - * Conclusion
 - * Grading is analogous to bachelor thesis, so the requirements are the same
- * Goal
 - Read articles about the topic
 - Gain an understanding for the topic
 - Create a summary of read articles including small code segments in pseudo code, e.g. explaining an algorithm
- * Project 2 (MTE7102)
 - Building a software architecture regarding the master thesis
 - Proof of concept of the algorithms chosen in this project
- * Meetings
 - Will be held every 14 days
 - Time and location will be defined at the end of each meeting

TODO for next meeting:

- * Set up project repository
 - GitHub
 - Open source
- * Choose language for pseudo code

Next meeting:

Date: 04.10.2015 14:00
Place: Skype

No.: 02
Date: 04.10.2015 14:00 - 14:35
Place: Skype
Involved persons: Claude Fuhrer (CF)
Sven Osterwalder (SO)

Meeting minutes 2015-10-04

* External documents

- Do external documents, e.g. papers, held in the project repository infringe copy rights? (CF)
- * Both are not entirely sure about the copy rights, so it is decided to share the documents only between both persons via Dropbox (CF and SO)

* Theoretical background

- Phong equation
- * Why is the half way vector used (as described in Whitted's paper) instead of the more common usage of the angle (cosine) in direction of the light? (CF)
 - It is OK to use Whitted's originally proposed formula, as the results are the same for both formulas (CF)
 - Although the specular factor for the specular component is missing and has to be added (CF)

- Structuring / procedure

- * Is the document structuring and are the plans for further development in good order? (SO)
- The structuring of the document as well as the plans for further development are in a good order and the work may continue in the currently ongoing direction (CF)

* Literature

- Is it somehow possible to get the second edition of "Computer graphics: principles and practice"? (SO)
- * Mr. Fuhrer possesses the mentioned book and proposes furthermore the lecture of a book dedicated to ray tracing which he also possesses. He will deposit both of the books on Monday, 5th of October 2015, in a room within the "Rolex" building of the Berne University of applied sciences in Biel (CF)

* Citations

- Is the current way of citing in good order or do citations need to be more precise? (SO)
- * The way of citing is precise enough, the schemata is the following: (CF)
 - Source, [Chapter], Page(s)

* Document template

- Remove currently used font "cmbright" as invoked to the usage of the LaTeX template of the Berne University of applied sciences (CF)
- The lines shall be shortened so that they do not exceed 80 characters per line (CF)
- The margins, especially the left and the right margins, shall be enlarged as they are currently very narrow (CF)

TODO for next meeting:

- * Present the current state of the work
- * Discuss the current state of the work
- * Define further steps/proceeding

Next meeting:

Date: 11.10.2015 14:00
Place: Skype or in real life, if necessary

No.: 03
Date: 11.10.2015 15:30 - 16:20
Place: Skype
Involved persons: Claude Fuhrer (CF)
Sven Osterwalder (SO)

Meeting minutes 2015-10-11

Presentation and discussion of the current state of the work

Theoretical background

- * Local illumination models
 - * Phong model, equation 5.2 (CF)
 - * The notation of $L_{\{j\}}$ and $L_{\{j\}}^{\{'}}$ is nearly not distinguishable due to the vector arrows. Use another notation to distinguish them.
(DONE)
 - * k_d and k_s depend on the wave length resp.\ the color, this should be expressed as well
(DONE)
 - * The vectors $L_{\{j\}}$ and $L_{\{j\}}^{\{'}}$ are normalized unit vectors
(DONE)
 - * The exponent 'n', as used in the legend, is missing in the equation
(DONE)
 - * An image of the situation could be added for better understanding
(DONE)
 - * Global illumination models
 - * Rendering equation, 5.3 (CF)
 - * Add the correct reference, either to Kajiya or another source
(DONE)
 - * Spell the letter 's', used for the integral as well as for the explanations, always the same case, either upper or lower
(DONE)
 - * Use ε instead of ϵ as this increases the readability
(DONE)
 - * Do not use tables for the explanation to an equation as LaTeX may break the layout then
(DONE)
 - * Ray casting
 - * Is the description of ray casting developed enough? (SO)
 - * No, the description should be further expanded, also formulas should be considered and added, as well as examples (CF)
(DONE)
 - * Is the pseudo code of ray casting developed enough? (SO)
 - * Yes, the pseudo code is developed enough, although the unnecessary spaces of the lstlisting environment could be removed using the columns parameter with the fullflexible value (CF)
(DONE)
 - * Ray tracing
 - * Is an explanation of transmission and refraction needed? (SO)
 - * Yes, an explanation of those terms would be good (CF)
(DONE)
 - * The reference when referring Whitted's publication is missing(CF)
 - * Add reference (SO)
(DONE)
 - * Is the material sufficient? (SO)
 - * Yes, the material is sufficient, but an illustration would probably be good (CF)
(DONE)
 - * Implicit surfaces
 - * Does one need to explain euclidean distance? (SO)
 - * No, the term does not need to be explained as it is rather a standard

- term, but the notation may rather be $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ as this allows the usage of any basis, e.g. ln
(DONE)
- * Equation (5.11) (CF)
 - * Give an example by means of a sphere (CF)
(DONE)
 - * Functions for implicit surfaces (5.4.1) (CF)
 - * Use an explanation of the signs as well when explaining the results (CF)
(DONE)
 - * Equation (5.15) (CF)
 - * In the paragraph below the equation a sentence begins directly with a mathematical function. This is generally not a very good idea, so that sentence should be changed
(DONE)

Citations

- * Change the style of citations, which one can be decided later on (CF)
(TODO)

Typography

- * Equation 5.1 (CF)
 - * The notation of the word 'diffuse' is not nicely readable, as there is a gap between the to f letters which should not be there. \text might solve this problem
(DONE)

Further steps/proceedings (CF, SO)

- * Further steps planned are the introduction of a lighting model for implicit surfaces, the definition of the rendering itself, the introduction of basic operations on implicit surfaces as well as shadows. If time allows it, maybe a prototype is added. Is this alright? (SO)
- * Yes, absolutely, it is up to you, how far you are developing this project (CF)

TODO for the next meeting

- * Present the current state of the work (SO)
- * Discuss the current state of the work (CF, SO)
- * Define further steps/proceeding (CF, SO)
- * Define citation style (CF)

Scheduling of the next meeting

Date: 2015-10-18, 14:00

Place: Skype

No.: 04
Date: 18.10.2015 14:00 -14:30
Place: Skype
Involved persons: Claude Fuhrer (CF)
Sven Osterwalder (SO)

Meeting minutes 2015-10-18

Presentation and discussion of the current state of the work (SO)

- * Illustration Phong model
 - * illustration is too big, should be a bit scaled (CF)
(DONE)
 - * Normalize vectors to same length, use polarcoordinates eventually (CF)
(DONE)

- * Illustration Ray Tracing
 - * Use a better resolution (CF)
(DONE)
 - * Make the fonts a bit bigger (CF)
(DONE)
 - * Explain the image (CF)
(DONE)
 - * Normalize vectors to same length, use polarcoordinates eventually (CF)
(DONE)

- * Listings
 - * Do listing in German also have a bullet in front or rather a dash? (CF)
 - * A bullet appears to be right, as the ngerman package with the babel option is used (CF)

Further steps/proceedings (CF, SO)

- * Finish writing on chapter about rendering implicit surfaces (SO, CF)
- * Add a chapter about an eventual prototype (SO, CF)
- * Process TODOs (SO, CF)

TODO for the next meeting

- * Present the current state of the work (SO)
- * Discuss the current state of the work (CF, SO)
- * Define further steps/proceeding (CF, SO)
- * Define citation style (CF)

Scheduling of the next meeting

Date: 25.10.2015 14:00
Place: Skype, irl if needed

No.: 05
Date: 25.10.2015 14:00 - 14:30
Place: Skype
Involved persons: Claude Fuhrer (CF)
Sven Osterwalder (SO)

Meeting minutes 2015-10-25

Presentation and discussion of the current state of the work (SO)

- * Versioning
 - * Added new versioning style, based on versionhistory (SO)
 - * This is much better than the table-based approach used before (CF)
- * Citations
 - * May not be at the beginning of a sentence (CF)
 - * Style is OK (CF)
 - * When referring to authors, use their name and not only the abbreviation provided by the citation (CF)
 - (TODO)
- * Introduction
 - * May resp.\ will most likely need to be rewritten at end of the project work (CF)
 - (DONE)
- * Project schedule
 - * Adapt to current situation (CF)
 - * Prototype is missing (CF)
 - (DONE)
- * Prototype
 - * Add version information for all used software (clang, GLEW and CMake are missing e.g.) (CF)
 - * Use a tabular representation for maintain readability (CF)
 - (DONE)
- * Local illumination models
 - * Phong model, equation 5.2 (CF)
 - * Explan $L_{\{i\}}$ (CF)
 - (DONE)

Further steps/proceedings (CF, SO)

- * Process TODOs
- * Begin working on the prototype
- * Add most relevant shader code to the prototype section
- * Expand basic chapters about illumination models according to TODOs
- * Expand chapters "scope" and "administrative"
- * Re-work introduction
- * Add management summary

TODO for the next meeting

- * Present the current state of the work (SO)
- * Discuss the current state of the work (CF, SO)
- * Define further steps/proceeding (CF, SO)

Scheduling of the next meeting

Date: 02.11.2015 07:30
Place: Spetaccolo Biel

No.: 06
Date: 02.11.2015 07:15 - 07:45
Place: Spetaccolo Biel
Involved persons: Claude Fuhrer (CF)
Sven Osterwalder (SO)

Meeting minutes 2015-11-02

Presentation and discussion of the current state of the work (SO)

- * The main progress since the last meeting was the development of the prototype, the paper was not developed much further, only sections concerning the prototype have been added or expanded (SO)
 - * This is OK, although the prototype has not been reviewed in detail yet (CF)
- * The source code of the prototype should be commented, right now there are no comments (CF)
(DONE)
- * Deadline for handing in a rough draft is end of November resp.\ beginning of December 2015 (CF)
(DONE)
- * Deadline for handing in final version end of January 2016 (CF)
- * Defence of the project work in February 2016, exact date to be defined (CF)

Further steps/proceedings (CF, SO)

- * Process TODOs
- * Begin working on the prototype
- * Add most relevant shader code to the prototype section
- * Expand basic chapters about illumination models according to TODOs
- * Expand chapters "scope" and "administrative"
- * Re-work introduction
- * Add management summary

TODO for the next meeting

- * Present the current state of the work (SO)
- * Discuss the current state of the work (CF, SO)
- * Define further steps/proceeding (CF, SO)

Scheduling of the next meeting

Date: 15.11.2015, 1400

Place: Skype

No.: 07
Date: 15.11.2015 14:00 - 14:15
Place: Skype
Involved persons: Claude Fuhrer (CF)
Sven Osterwalder (SO)

Meeting minutes 2015-11-15

Presentation and discussion of the current state of the work (SO)

- * The progress has slowed down a lot unfortunately. This is mostly due to work related issues as well as the focus was laid on the first specialization module of the studies during the last weeks. (SO)
- * This is OK, there are still a lot of open points / TODOs remaining, the focus should now be set on finishing the document as well as on corrections. Currently there are no further aspects that need special attention. (CF)
- * Some work was spent on the prototype as well on image generation out of that used for the documentation. (SO)

Further steps/proceedings (CF, SO)

- * Process TODOs
- * Expand basic chapters about illumination models according to TODOs
- * Expand chapters "scope" and "administrative"
- * Re-work introduction
- * Add management summary

TODO for the next meeting

- * Present the current state of the work (SO)
- * Discuss the current state of the work (CF, SO)
- * Define further steps/proceeding (CF, SO)

Scheduling of the next meeting

Date: 06.12.2015, 1400

Place: Skype

No.: 08
Date: 06.12.2015 14:00 - 14:15
Place: Skype
Involved persons: Claude Fuhrer (CF)
Sven Osterwalder (SO)

Meeting minutes 2015-12-06

Presentation and discussion of the current state of the work (SO)

- * The progress is still slowed down a lot unfortunately. This is mostly due to an illness as well as work related issues. (SO)
- * This is OK, it was originally planned to have some breaks in the first three weeks of December. Those weeks were so to say spent already during November, so the work needs to be kept up during December. (CF)
- * Currently there are no further aspects that need special attention. (CF)
- * Make sure to commit also little progress at least to the Git repository, even when not updating the versioning table of the document. This makes progress visible, even if it is not finished yet. Keep that up on a weekly basis. If no progress has been made, e.g. due to illness, inform by e-mail that no progress has been made during a week, so that unnecessary effort may be kept at a minimal level. (CF)
- * Effort has been put into re-generating the images as the currently used tool (Geogebra) leads to quick results, but makes it difficult to generate accurate images (e.g. all vectors need to have the same length and so on). First, IPE was used as a replacement, but seems not to be suited as it seems to be limited to basic operations. Second, Inkscape was which provide to be very useful/handy. But due to the fact, that most of the work was done during the illness, the sources were unfortunately not saved, only the bitmap formats which prevents (re-) editing. Therefore the decision was made to generate the images using asymptote.
- * If any help using asymptote is needed, feel free to ask at any time. (CF)
- * An introduction for the theoretical background was provided, a chapter about shading models was added. (SO)
- * The timetable was completely re-worked. (SO)

Further steps/proceedings (CF, SO)

- * Meetings
The next meeting will be arranged by e-mail by Sven Osterwalder as needed.
At the current stage of the project - which mainly consists of re-arrangement and correction work - it is not useful to keep up a high-frequent meeting-schedule. Mr. Fuhrer has the first week in January 2016 off, so a meeting in real life may be scheduled then
- * Process TODOs
- * Expand basic chapters about illumination models according to TODOs
- * Expand chapters "scope" and "administrative"
- * Re-work introduction
- * Add management summary

TODO for the next meeting

- * Present the current state of the work (SO)
- * Discuss the current state of the work (CF, SO)
- * Define further steps/proceeding (CF, SO)

Scheduling of the next meeting

Date: tbd

Place: Skype or in real life, if needed
