VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ | KATEDRA APLIKOVANÉ MECHANIKY

MATEMATICKÁ OPTIMALIZACE V INŽENÝRSKÉ PRAXI

Studijní opory

prof. Ing. Martin Fusek, Ph.D.
Ing. Michal Kořínek, Ph.D.
Ostrava 2025

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU
Národní plán obnovy
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Obsah

Předmluva

Tento učební a podpůrný učební materiál byv vytvořen v rámci projektu *Podpora zelených dovedností a udržitelnosti na VŠB-TUO* (NPO_VSB-TUO_MSMT-2144/2024-4). Překládaný materiál je určen primárně pro studenty navazujícího magisterského studia studijního oboru *Konstrukce a simulace strojů*, uskutečňovaném na *Fakultě strojní Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava*.

Zmínit Python

prof. Ing. Martin Fusek, Ph.D.
Ing. Michal Kořínek, Ph.D.
VŠB–Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky
1. vydání, Ostrava 2025

Kapitola 1

Úvod do procesu optimalizace

Proces konstrukčního návrhu začíná stanovení cílů a požadavků, které je nutné splnit pro zajištění funkčnosti. Návrh počítá s novým řešením, případně má v plánu zlepšit již existující řešení. Proces lze rozdělit do několika kroků: funkční syntéza, parametrická syntéza a kontrola návrhu.

Funkční syntéza připravuje návrh z hlediska požadavků na funkčnost. V případě mechanismu je může být požadavek na přenos síly a momentů.

Parametrická syntéza hledá hodnoty důležitých parametrů. Pro nalezení je nutné stanovit pravidla pro určení návrhových parametrů. Tyto pravidla mohou být formulovány jako kritérium kvality rozhodující mezi kandidáty (cíl procesu je obvykle maximalizace či minimalizace) či omezení. Příklad u nádrží může být maximální objem jakož to cíl, omezení jsou mezní stavy (tj. pevnostní podmínka). Při návrhu je vhodné se rovněž zaměřit na vyrobitelnost či smontovatelnost.

Tento návrh je tvořen pomocí sady parametrů (např. délky, materiálové vlastnosti, počty dílů, zuby na ozubení, atd.). Některé tyto parametry jsou pevně dany a nelze je měnit. Po získání parametrů je provedena kontrola z hlediska funkčnosti, ale také zda stanovené pravidla jsou dodržena.

Pro získání sady parametrů lze využít jeden ze tří přístupů:

- intuitivní přístup,
- variantní přístup,
- optimalizační přístup.

Intuitivní přístup je založen na intuici, zkušenostech, návrháře. Vyžaduje dostatečné zkušenosti a databízi znalostí o řešení daného problému, například navázaní na předchozí úspěšný návrh.

Variantní přístup je založen na přípravě několik variant, které mohou být získány jako výsledek intuitivního řešení. Z nich je poté vybrán kandidát (sada parametrů), které splňují požadavky na kvalitu a splňují omezení. K tomu lze využít výše zmíněné pravidla.

Optimalizační přístup je založen na záměrném hledáním sady parametrů, aby co nejlépe vyhovovaly stanoveným pravidlům. K získání je využita optimalizační metody.

1.1 Optimalizace

Obecně lze optimalizace označit jako množinu matematických výsledků a numerických metod pro hledání a určení nejlepšího sadu parametrů (kandidáta) ze všech možných dat bez nutnosti vyčíslení všech možných alternativ. Tato sada splňuje předem vymezené pravidla. Optimalizace je proto charakterizována pomocí

- cíle, čeho má být dosazeno,
- omezeními, která je nutné splnit, aby co nejlépe vyhovovali požadavkům,
- parametr nebo sada parametrů, které jsou hledány,
- omezeními pro parametry.

Optimalizační úlohy ve strojírenství lze rozdělit do následujících kategorií:

- konstrukční úlohy – již zmíněný konstrukční návrh, jedná se například o optimalizaci tvaru či topologie,
- dopravní úlohy – přeprava zboží a lidí například z hlediska rychlosti, do těchto lze zařadit i distribuční úlohy,
- alokační úlohy – nalezení vhodného rozmístění, například rozložení výrobní linky.

Síla optimalizačních metod k nalezení nejlepšího kandidáta ze všech možných případů je pomocí využití skromné znalosti matematiky a za použití numerického výpočtu založených jasně daných algoritmů a procedur implementovaných pomocí výpočetní techniky (počítače). Proto pro optimalizační algoritmy je vhodné převést úlohu do matematické formulace.

1.2 Matematická formulace optimalizace

Na úvod je nutné stanovit si pojmy . Sada parametrů, které se hledají, se nazývají **návrhové proměnné**. Kritérium kvality určující zda získané návrhové proměnné jsou lepší či horší se nazývá **cílová funkce**, ale také cenová, účelová funkce, anglicky objective (price) function. Tato kvantifikace možných návrhových proměnných je definována tak, aby v extrému bylo řešení optimalizace. Proto cílová funkce vede na úlohu **maximalizace** či **minimalizace**.

Následně omezující podmínky, také omezující funkce, jsou definovány ve formě **nerovností** či **rovnosti**. Tyto omezení mohou být vztaženy přímo k návrhovým proměnným (například minimální tloušťka stěny nádrže) a bývají označovány jako technologické omezení či vedlejší omezení.

Matematická formulace minimalizační úlohy je tedy následující

$$
\begin{array}{lll}
\text{Návrhové proměnné} & x_i & \text{pro } i = 1, 2, \ \dots\ N \\
\text{Cílová funkce} & \min F(\boldsymbol{x}) & \\
\text{Omezezující podmínky} & g_j \geq 0 \text{ či } g_j > 0 & \text{pro } j = 1, 2, \ \dots\ J \\
 & h_k = 0 & \text{pro } k = 1, 2, \ \dots\ K \\
\text{Omezení návrhových proměnných} & x_{i,min} \leq x_i \leq x_{i,max} &
\end{array}
\tag{1.1}
$$

kde $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ \dots\ , x_N\}^T$ se nazývá vektor návrhových proměnných, N je počet návrhových proměnných, J a K určují počet omezujících podmínek ve formě nerovnosti, resp. rovnosti. Z matematického hlediska počet nerovností J nevede na omezení, avšak počet rovností K vede na tři možné stavy

- $K < N$ – standardní úloha optimalizace,
- $K = N$ – nestandratní úloha optimalizace, řeší se jako soustave K rovnic s N neznámými (vede na jedno řešení, které však nemusí být optimální),
- $K > N$ – přeurčena úloha, nemusí mít řešení.

Cílová funkce může představovat fyzikální veličinu (např. hmotnost, rozdíl dráhy objektu, polohu, počet šroubů apod.) nebo abstraktní veličinu (např. míra bezpečnosti, vyrobitelnost apod.). Funkce lze definovat explicitně či implicitně. Explicitní je vyjádřena pomocí analytických vztahů a implicitní je vyjádřena nepřímo, řešení je získáno z jiného problému (např. řešení soustavy rovnic, řešení vlastních čísel, stanovení cyklů, atd.).

Tip 1.1. Při využití optimalizačních softwarů je nutné zkontrolovat jak jsou nerovnosti připraveny, tj. zda je to „větší než“, „menší než“ či střídat. Pokud omezující podmínky mají jiný tvar je nutné je transformovat, například pomocí vynásobením -1,

$$g_j \leq 0 \rightarrow -g_j \geq 0. \tag{1.2}$$

Rovněž optimalizační procedury mohou vypustit omezující podmínku ve tvaru rovnosti $h_k = 0$, protože lze to nahradit dvojicí nerovností

$$h_k \leq 0 \quad \text{a} \quad h_k \geq 0. \tag{1.3}$$

Pro úplnost problém nerovnosti lze převést na rovnost zavedením dalšího parametru

$$\begin{aligned} g_j - y^2 &= 0, \\ g_j - e^y &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

U cílové funkce lze rovněž převést mezi maximalizací a minimalizací pomocí vynásobení -1, tj. $\max F(x) = -\min -F(x)$.

1.3 Klasifikace optimalizačních úloh

Optimalizační úlohy lze dělit podle různých kritérií. V následující části budou přestaveny jednotlivé kritéria.

1. Počet návrhových proměnných
   - S jednou návrhovou proměnou
   - S více návrhovými proměnnými
2. Podle počtu omezujících podmínek
   - Nevázaný problém – pouze cílová funkce a případně omezení návrhových proměnných (nejsou však zahrnuty do výpočtu přímo)
   - Vázaný problém – má aspoň jednu omezující podmínku
3. Podle matematického charakteru cílové funkce a omezujících podmínek
   - Lineární – všechny funkce jsou lineární (je nutné mít omezení pro vyřešení)
   - Nelineární – aspoň jedna z funkcí je nelineární
4. Podle spojitosti
   - Spojité optimalizace – například rozměrová optimalizace nosníku
   - Diskrétní optimalizace – obvykle je kladen důraz na celočíslné výsledky, například počet zubů
5. Podle určitosti
   - Deterministická – všechny návrhové proměnné nejsou náhodné, jsou určité
   - Stochastická – aspoň jedna jedna návrhová proměnná je náhodná
6. Podle počtu cílových funkcí

- Jednokriteriová optimalizace – jeden požadavek, jedna cílová funkce
- Vícekriteriová optimalizace – několik požadavků, zpravidla vede na přípravu celkové cílové funkce, například jako vážený součet (je nutné pravidla škálovat)

V těchto skriptech je cíl seznámit čtenáře s nevázanou a vázanou optimalizací s jednou cílovou funkcí, která se minimalizuje. Vícekriteriová optimalizace však lze převést na vázaný problém s jednou cílovou funkcí a zbylé jsou zavedeny jako omezující podmínky.

Tip 1.2. V anglické literatuře je optimalizace označována jako programování s matematickým charakterem. Například lineární optimalizace je označována jako „Linear Programming – LP“ a nelineární jako „Nonlinear Programming – NLP“.

1.4 Rozdělení metod řešení optimalizačních problémů

Výše uvedené problémy lze řešit zpravidla pomocí čtyř metod

1. grafické metody,
2. analytické metody,
3. iterační metody.

Grafické metody spočívá ve vykreslení cílové funkce a doplnění omezujících podmínek. Je použitelné pro jednu návrhové proměnou či dvě návrhové proměnné. Podmínkou je mít explicitní funkce, u implicitních funkcí může být problém.

Analytické metody má za cíl připravit optimalizaci jako soustavu rovnic a poté provést analytické řešení. Lze řešit s omezením i bez nich.

Iterační (numerické) metody hledá postupně jdoucích krocích výsledek. Lze využít čistě numerické řešení, či kombinaci numerických postupů a analytických vztahů. Metody lze rozdělit na

- směrové – hledají směr největšího poklesu cílové funkce,
- aproximační – hledají důvěryhodnou aproximaci cílové funkce, u aproximace je poté hledáno minimum,
- eliminační – postupně se vylučují části zkoumané oblasti, ve kterých neleží minimum.

Dále metody lze rozdělit dle toho, zda metoda vyžaduje derivaci. Ty se dělí na

- metody nultého řádu – využívají pouze hodnoty cílové funkce,
- metody prvního řádu – využívají funkční hodnoty a první derivaci cílové funkce
- metody druhého řádu – využívají funkční hodnoty, první a druhou derivaci cílové funkce.

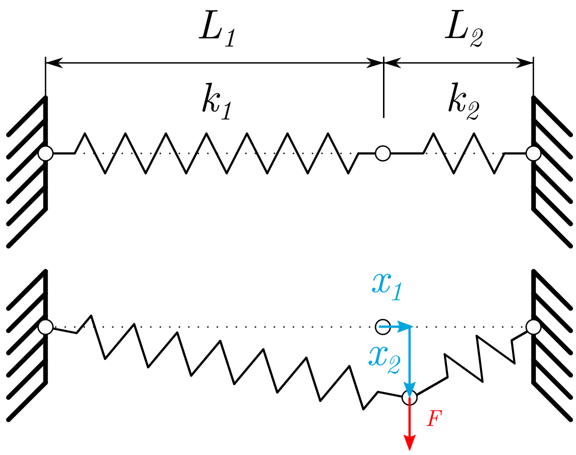
Metody nultého řádu se využívají v případě, že výpočet derivací je náročný, nebo v případě numerické derivace nepřesný. To se může stát v případě implicitního zadání cílové funkce. Tyto metody lze využít i v případě, že derivace neexistují (například nespojité funkce, nehladká funkce, či diskrétní funkce).

Metody prvního a druhého řádu využívají derivace k určení směru vedoucí k minimu, což vede ke zrychlení konvergence. Použití druhého řádu je možné tehdy, kdy existuje druhá derivace (aspoň v zkoumané oblasti). Je nutné podotknout, že tyto efektivnost těchto metod závisí na časové náročnosti získaní derivací (analytický výpočet derivace vs numerická derivace).

1.5 Ukázkové příklady

V této části jsou představeny dvě optimalizační úlohy pomocí grafického řešení. Grafické řešení je připraveno pomocí Python knihovny Matplotlib.

Příklad 1.1. Pomocí grafické metody vypočítejte minimum celkové potenciální energie následujícího systému, viz 1.1. Parametry úlohy jsou délka první pružiny $L_1 = 120$ mm, délka druhé pružiny $L_2 = 80$ mm, tuhost první pružiny $k_1 = 10\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$, tuhost druhé pružiny $k_2 = 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$ a síla $F = 10$ N.



Obr. 1.1: Schéma mechanického systému

Řešení. Pro vyřešení je nutné připravit potenciální energii jednotlivých částí a energii síly

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1 \cdot (\Delta L_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\Delta L_2)^2 - F \cdot x_2 \tag{1.5}$$

kde ΔL_1 a ΔL_2 reprezentují prodloužení pružiny a mají vzorec

$$\begin{aligned} \Delta L_1 &= \sqrt{((L_1 + x_1)^2 + x_2^2) - L_1^2} - L_1 \\ \Delta L_2 &= \sqrt{((L_2 - x_1)^2 + x_2^2) - L_2^2} - L_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

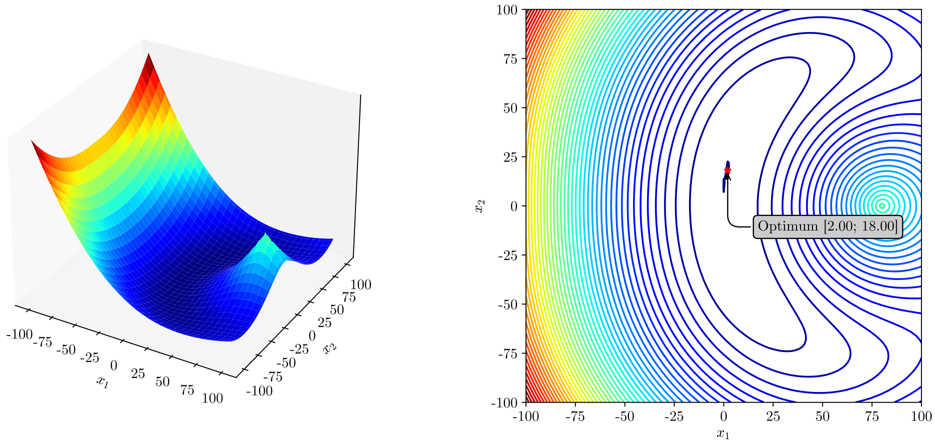
Návrhové proměnné x_1, x_2 jsou posuvy prostředního uzlu vlivem působící síly F. Cílová funkce je tedy definována jako

$$\min_{\{x_1,x_2\}\in\mathbb{R}^2} \Pi. \tag{1.7}$$

Protože nejsou známé rozsahy, ve kterém se nachází optimum, je provedeno několik vykreslení s různými rozsahy. První rozsah je $x_1 \in< -100, 100 >$ a $x_2 \in< -100, 100 >$. Tento rozsah je rozdělen pomocí $N_{x_1} = 101$ a $N_{x_2} = 101$ dílků. Grafické znázornění je na obrázku 1.2. Jeden obrázek je v 3D prostoru pro lepší představu cílové funkce.

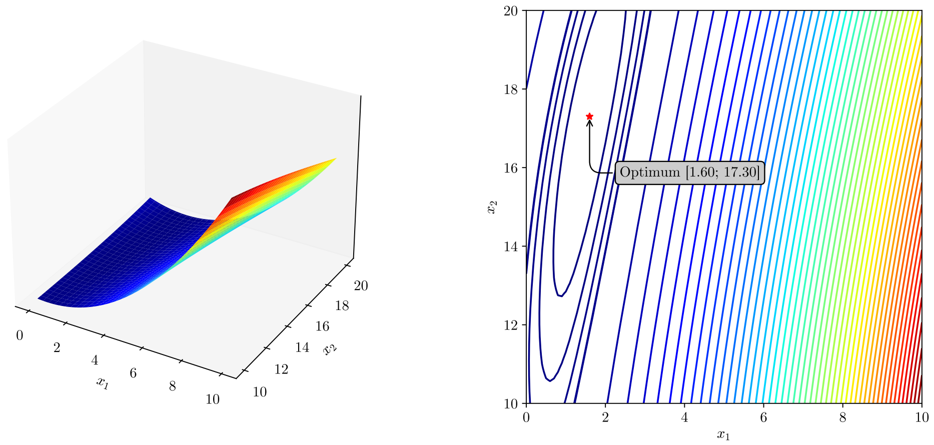
Druhý obrázek je vykreslen pomocí barevných map s viditelnou hranicí hodnot. Lze si to představit jako vrstevnice. Minimum se nachází v oblasti kolem bodu $x_1 = 2.0 \pm 2.0$ a $x_2 = 18.0 \pm 2.0$[1], protože máme velký rozsah, je nutné ho zmenšit blížící se těmto

[1] Hodnota ± 2.0 vychází z rozdílu rozsahu podělené počtem dílků $(N_{x_i} - 1)$, tj. $\delta = \frac{x_{i_{max}} - x_{i_{min}}}{N_{x_i} - 1}$.



Obr. 1.2: Barevné mapy cílové funkce pro rozsah $x_1 \in< -100, 100 >$ a $x_2 \in< -100, 100 >$

hodnotám. Alternativně lze vypočítat více dílků na původním rozsahu, avšak budou vyčíslené hodnoty i ty, kde optimum zaručeně není. Nový rozsah je tedy $x_1 \in< 0, 10 >$ a $x_2 \in< 10, 20 >$ a počet dílků je stejný. Výsledek prvního zpřesnění je na obrázku 1.3.



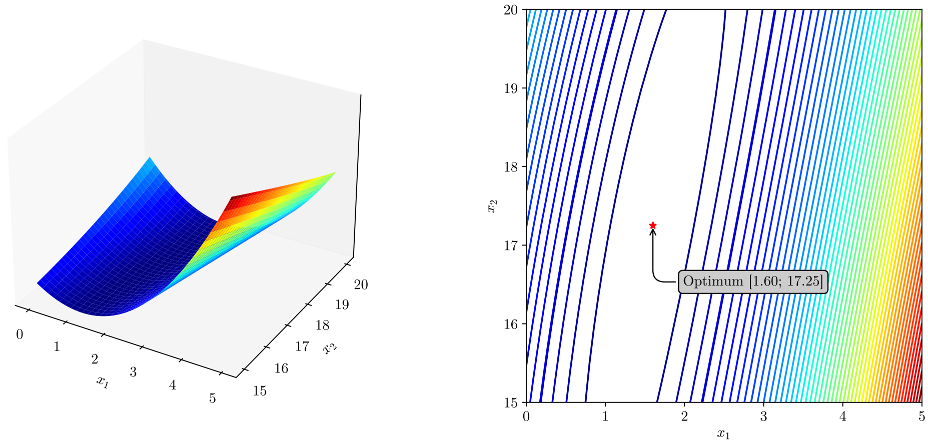
Obr. 1.3: Barevné mapy cílové funkce pro rozsah $x_1 \in< 0, 10 >$ a $x_2 \in< 10, 20 >$

Z obrázku nového rozsahu je patrné, že nějaké minimum se nachází v oblasti kolem bodu $\{x_1 = 1.60 \pm 0.10;\ x_2 = 17.30 \pm 0.10\}$. Poslední zpřesnění má rozsah $x_1 \in< 0, 5 >$ a $x_2 \in< 15, 20 >$ a počet dílků je stejný. Výsledky finálního rozsahu jsou na obrázku 1.4.

Optimum se tedy nachází v $\{x_1 = 1.60 \pm 0.05;\ x_2 = 17.25 \pm 0.05\}$. Z fyzikálního hlediska se jedná o posuvy. Závěr je tedy, že prostřední uzel mechanické soustavy se posune horizontálně doprava o 1.60 ± 0.05 mm a svisle dolů 17.25 ± 0.05 mm.

Je však nutné podotknout, že pro získání tohoto výsledku, bylo zapotřebí spočítat $N_{x_1} \cdot N_{x_2} \approx 10^4$ pro každý rozsah. Zde je patrné, že výpočet hledající všechny možné kombinace není efektivní. Nicméně na ukázku je dostatečný.

Připravený kód v prostředí Python pro rozsah $x_1 \in< 0, 10 >$ a $x_2 =< 0, 20 >$ je vypsán v kódu 1.1



Obr. 1.4: Barevné mapy cílové funkce pro rozsah $x_1 \in< 0,5 >$ a $x_2 \in< 15,20 >$

Kód 1.1: Mechanicka soustava

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm

# Zadani
L1 = 120 #mm
L2 = 80 #mm
k1 = 10 #N/mm
k2 = 100 #N/mm
F = 10 #N

Nx1=100+1 #Pocet dilku pro vykresleni x1
Nx2=100+1 #Pocet dilku pro vykresleni x2
x1 = np.linspace(0,10,Nx1) #Rovnomerne rozdeleni x1 pomoci Nx1
    dilku
x2 = np.linspace(0,20,Nx2) #Rovnomerne rozdeleni x2 pomoci Nx2
    dilku

x1v,x2v = np.meshgrid(x1,x2) #Priprava mrizky pro vypocet

# Celkova potencialni energie systemu
Energie = 1/2*k1*(np.sqrt((L1+x1v)**2+(x2v)**2)-L1)**2
+1/2*k2*(np.sqrt((L2-x1v)**2
+(x2v)**2)-L2)**2-F*x2v

minimum = np.min(Energie) # maximum na rozsahu mrizky
maximum = np.max(Energie) # minimum na rozsahu mrizky

# Hledani indexu minima potencialni energie
```

```
ind = np.unravel_index(np.argmin(Energie, axis=None), Energie.
    shape)

# Nastaveni urovne barevne mapy
levels= np.arange(minimum, maximum-10, 100)

# Vypsani vysledku x1 a x2
print(f"Navrhova promena x1 = {x1[ind[1]]:0.2f}")
print(f"Navrhova promena x2 = {x2[ind[0]]:0.2f}")

# Vykresleni vysledku jako 3D plocha
fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
surface = ax.plot_surface(x1v,x2v,Energie,cmap=cm.jet)
plt.savefig("Priklad1_1_3D.pdf")
# Vykresleni vysledku jako 2D konturova plocha
plt.figure(2)
plt.contour(x1v,x2v,Energie,levels, cmap=cm.jet)

# Vykresleni optima x*
plt.plot(x1[ind[1]],x2[ind[0]],'r*')

plt.savefig("Priklad1_1_2D.pdf")
```

Příklad 1.2.

1.6 Cvičení

Cvičení 1.1.

Kapitola 2

Řešení optimalizačních problémů s jednou proměnnou

Kapitola 3

Řešení optimalizace problémů s více proměnnými

Kapitola 4

Vázané optimalizační problémy

Kapitola 5

Optimalizace v inženýrské praxi

Kapitola 6

Topologická optimalizace