第三章 几何造型技术

- 几何造型技术
  - 参数曲线和曲面
  - Bezier曲线与曲面
  - B样条曲线与曲面
  - NURBS曲线和曲面
  - Coons曲面
  - 形体在计算机内的表示
  - 求交分类
  - 实体造型系统简介
  - 三角网格

3.3 B样条曲线与曲面

- Bezier曲线缺陷：
  - **缺乏灵活性**：一旦确定了多边形的顶点数，就确定了曲线的阶数；
  - **控制性差**：当顶点数较多，曲线的阶次将比较高，此时，特征多边形对曲线形状的控制将明显减弱；
  - **不易修改**：由曲线的方程可看出，其Bernstein基函数的值在开区间(0,1)内不为零。因此，所定义之曲线($0<t<1$)在区间内的任何一点均要受到全部顶点的影响，这使得对曲线进行局部修改成为不可能。

3.3 B样条曲线与曲面

- **B样条曲线：** 为克服Bezier曲线的缺陷，Gordon等人拓展了Bezier曲线，从外形设计的需求出发，希望新曲线
  - 易于进行局部修改
  - 更逼近特征多边形
  - 低阶次曲线

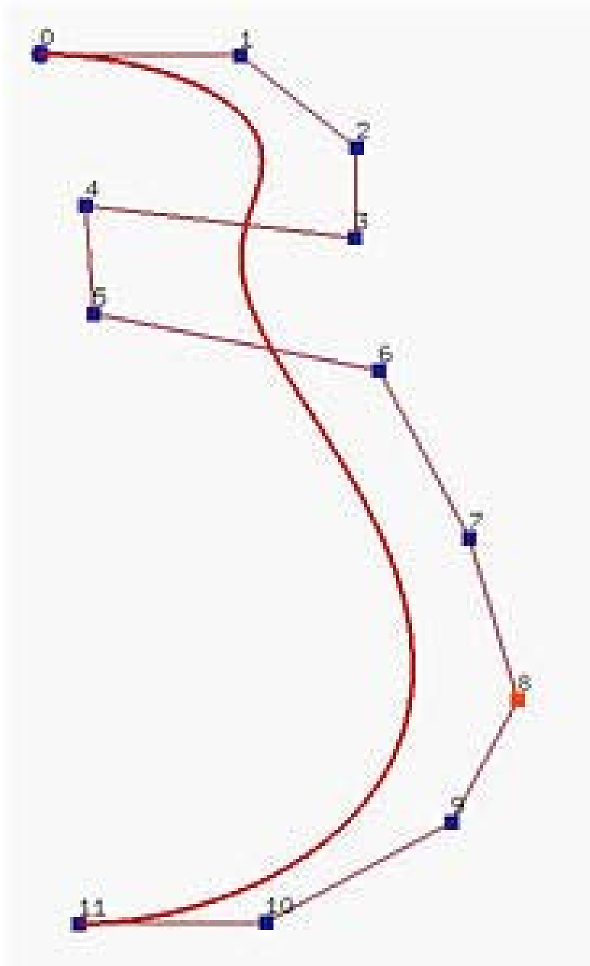
  于是，用k阶B样条基函数替换了Bernstein基函数，构成了称之为B样条曲线的新型曲线。
- 在CV，CG，CAD，计算几何，可视化等许多领域有着广泛应用。

3.3 B样条曲线与曲面

- 产生：
  - 1946年，Schoenberg发表关于B样条函数的第1篇论文；
  - 1973年前后，Gordon,Riesenfield,Forrest等人受到Bezier方法的启发，将B样条函数拓广成参数形式的B样条曲线。
- 可以参考博士的第6部分B-spline Curves
  - 博士论文第6部分B-spline Curves：Introduction to Computing with Geometry Notes
  - 技术Blog http://blog.csdn.net/tuqu/article/details/4749586

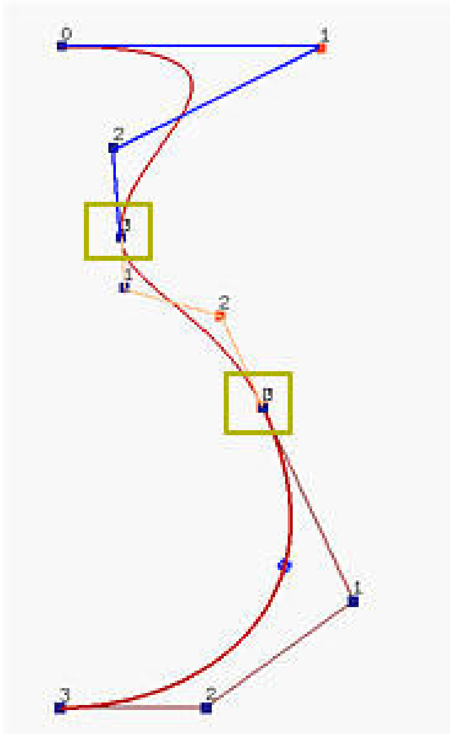
动机

- 考虑设计一个花瓶的剖面图
  - 11次Bezier曲线，它很难弯曲瓶颈到线段P_4P_5；
  - 可在这个线段附近增加控制点来增加该区域的权重；
  - 但是这会增加曲线的次数。



动机

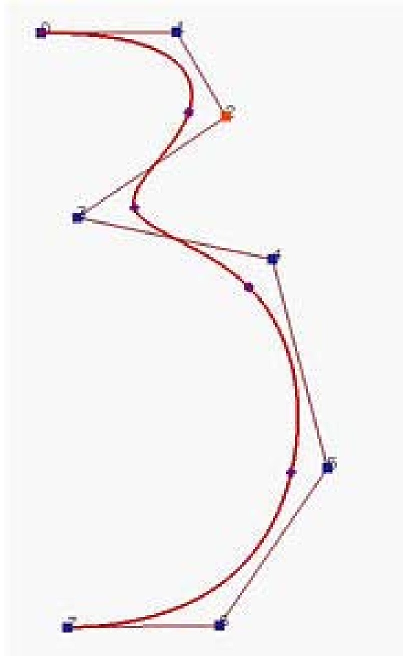
- Bezier曲线
  - 将两个贝塞尔曲线连接起来；
  - G^1 连续性：要第一条曲线的最后一段和第二条曲线的第一段有相同方向；
  - 右图：它有3条3次贝塞尔曲线段，连接点用黄色矩形框标记；
  - 保持 G^1 连续条件会是乏味和不受欢迎的。
- 有没有可能仍用更低阶曲线段而不用考虑 G^1连续条件？



动机

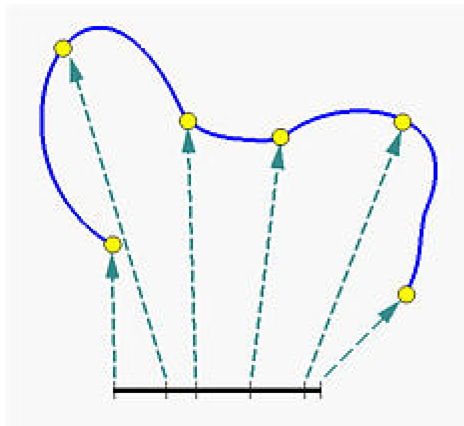
－B-样条曲线

- 8个控制点的2次B-样条曲线（由5条3次曲线段连接起来形成了由控制点定义的B-样条曲线）；
- 小点把B-样条曲线划分为贝塞尔曲线段。可以像贝塞尔曲线那样移动控制点来修改曲线的形状，也可以修改曲线的细分。因此，B-样条曲线有更高阶曲线设计的自由度。



动机

- B-样条曲线
  - 直接细分曲线是很困难的，可细分曲线的定义域；
  - 如果曲线的定义域是[0,1]，这个闭区间由被称为节点的点细分而成。设这些节点是 $0 <= t_i <= 1$。那么点$P(t_i)$的曲线细分如下图所示，因此，修改[0,1]的细分会改变曲线的形状。



动机

- B-样条曲线的设计
  - 需要一系列的控制点和一系列的节点；
  - 所有曲线段连接在一起满足某个连续条件；
  - 控制点的计算可能是最复杂的:必须保证某个连续条件；
  - 只需要知道相关特性用于B-样条曲线的推理 。
- B-样条基函数
  - 定义域被节点细分；
  - 基函数不是在整个区间非零(局部性)。

B样条的递推定义与性质

- 基本概念
  - 半开区间 $[t_i, t_{i+1})$ 是第 $i+1$ 个节点区间；
  - 集合 T 称为节点矢量；
  - 重节点：如果一个节点 t_i 出现 r 次（即 $t_i=t_{i+1}=...=t_{i+r-1}$, $r>1$），t_i 是重复度为 r 的多重节点；
- B样条曲线的定义：$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}(t)$$
  - $P_i(i=0,1,\cdots,n)$ 是控制多边形的顶点；
  - $N_{i,k}(t)(i=0,1,...,n)$ 称为 k 阶（k−1次）B样条基函数；
  - 多种基函数的定义：

$$F_{j,k}(t)=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k-j}(-1)^m C_{k+1}^m (t+k-m-j)^k$$

$$t\in[0,1],\qquad j=0,1,...,k$$

B样条的递推定义与性质

- de Boor-Cox递推定义：

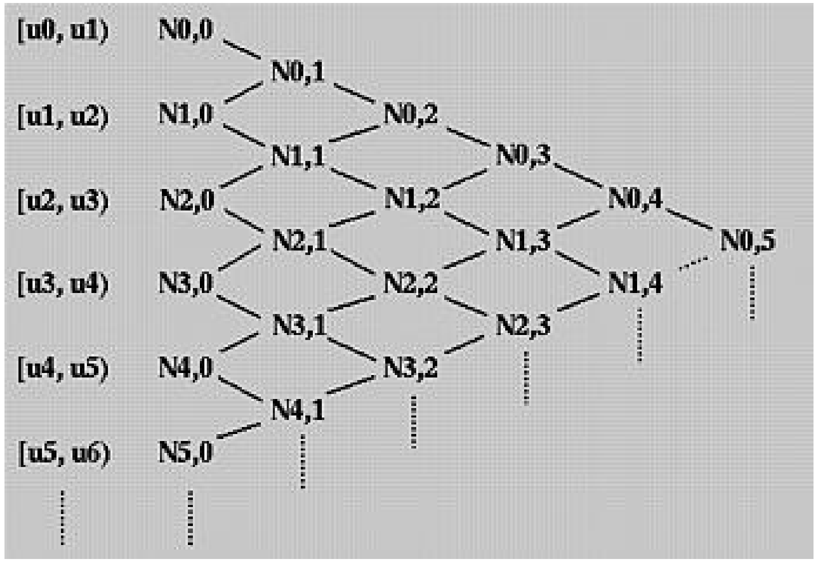
  第 i个k阶（基函数度数）B-样条基函数 $N_{i,k}(t)$

$$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1 & t_i \le x \le t_{i+1}\\ 0 & Otherwise\end{cases} \qquad N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

约定 $\frac{0}{0}=0$

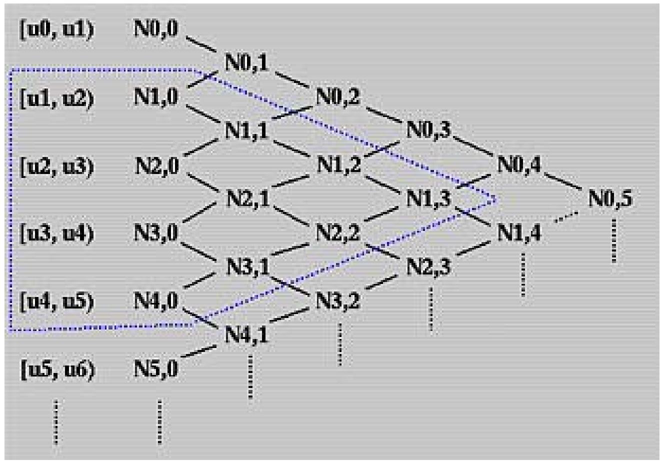
– 通常称为*de Boor-Cox*递归公式；

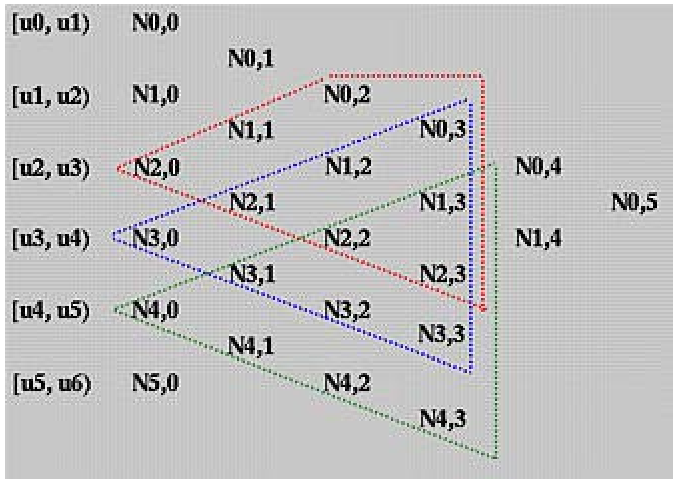
– 如果次数为零(k= 1)，这些基函数都是阶梯函数。



B样条的递推定义与性质

- 两个特殊观察：
  - 基函数 $N_{i,k}(t)$在 $[t_i, t_{i+k})$ 上非零；
  - 在任何一个节点区间 $[t_i, t_{i+1})$，最多有k个$(k-1)$次基函数非零：$N_{i-k+1,k}(t), N_{i-k+1,k}(t), \ldots, N_{i,k}(t)$ 。

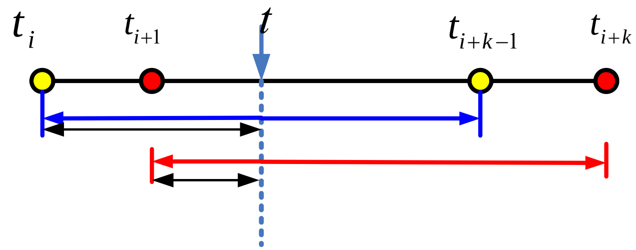




B样条的递推定义与性质

- de Boor-Cox递推定义：
  - 系数的含义：

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$



B样条的递推定义与性质

- 性质：$N_{i,k}(t)$ 是 t 的 k 阶多项式；
  - 局部支撑性：$N_{i,k}(t)$ 是在 $[t_i, t_{i+k})$ 上的非零多项式

$$N_{i,k}(t)\begin{cases}\geq 0 & t\in[t_i,t_{i+k}]\\ =0 & otherwise\end{cases}$$

  - 权性(单位分解)：

$$\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t)=1 \qquad t\in[t_{k-1},t_{n+1}]$$

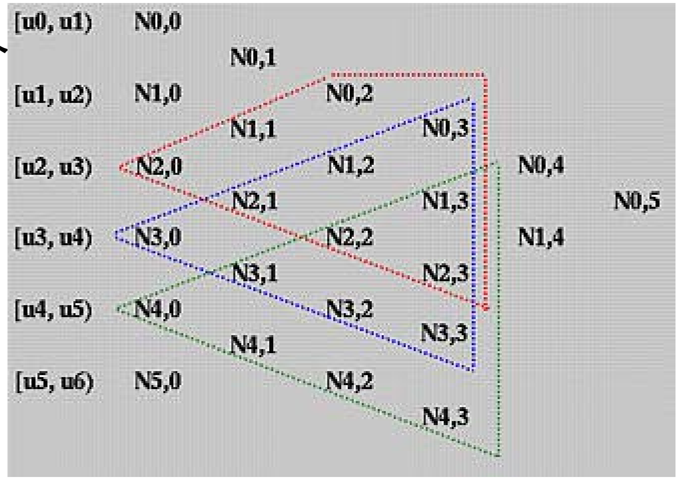
  - 微分公式

$$N'_{i,k}(t)=\frac{k-1}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)-\frac{k-1}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

  - 非负性：对所有的 i, k 和 t, $N_{i,k}(t)$ 是非负的

B样条的递推定义与性质

- 性质(续):
  - 基函数$N_{i,k}(t)$是$(k-1)$次多项式的复合曲线，连接点在$[t_i, t_{i+k})$上的节点处；
  - 在重复度r的节点处，基函数$N_{i,k}(t)$是C^{k-r-1}连续的；
  - 如果节点数目是$(m+1)$,函数的阶数是(n+1)，则$m=(n+k)$
    - 基函数 $N_{i,k}(t)$ 在$[t_i, t_{i+k})$上非零。



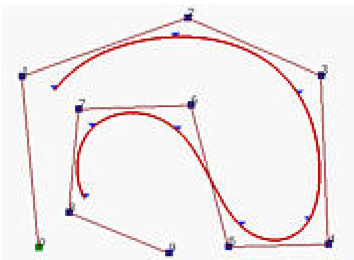
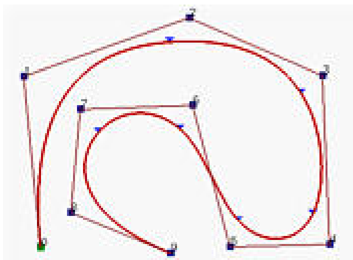
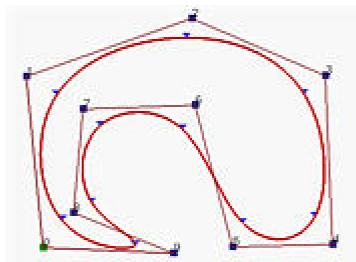
- 思考题
  - 五个控制顶点的三次B样条曲线由几个节点构成？

B样条的递推定义与性质

- B样条曲线类型的划分：

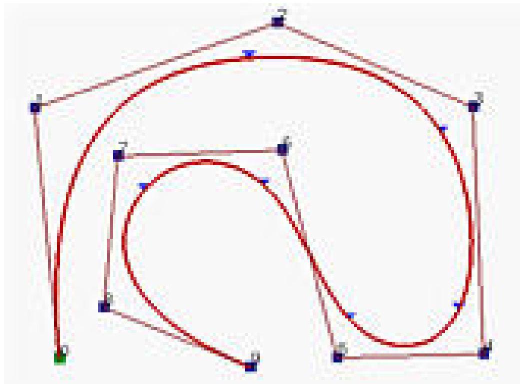
  两个标准：**首末节点是否重合**和节点的分布情况。

  - 首末节点是否重合
    - **开曲线**：曲线不会与控制折线的第一边和最后一边接触；
    - **闭曲线**：第1个节点和最后1个节点是重复节点。
      - Clamped：第一个节点和最后一个节点必须是重复度为*k*；
      - Closed：重复某些节点和控制点。

B样条的递推定义与性质

- **Clamped 曲线例子：**



  - 有 n+1个控制点(n=9)以及 k=4. 所以节点向量有14个节点。
  - 为了有clamped效果，前k=4和最后4个节点必须一样,其余6个节点可在定义域任何位置。
  - 曲线是用节点向量，U={0,0,0,0,0.14,0.28,0.42, 0.57, 0.71,0.85,1,1,1,1 }产生的,中间的节点几乎是均匀分布的。
  - 图形也显示了每个节点区间上的相应的曲线段。

B样条的递推定义与性质

- **Closed曲线的设计：**有两种比较简单的方法
  - wrapping控制点

  如想构建一个k阶闭(closed)B样条曲线P(t)，由n+1控制点$P_0, P_1, \ldots, P_n$定义。节点数目是m+1，其中$m=n+k$. 构建过程：

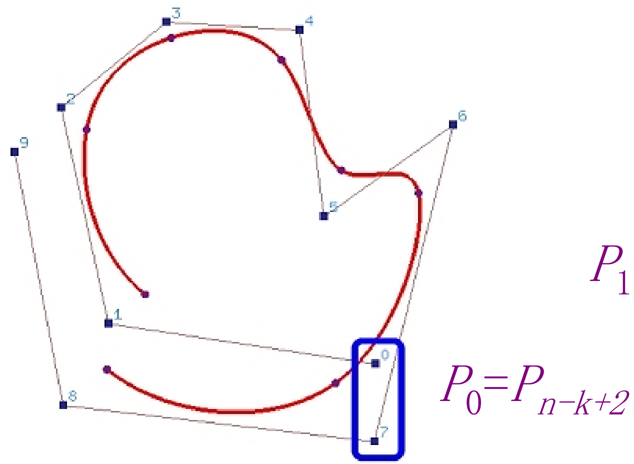
    - 设计一个均匀m+1个节点的节点序列：$t_0=0,\ t_1=1/m,\ t_1=2/m,\ \ldots,\ t_m=1$。
    - Wrap头($k-1$)个和尾($k-1$)个控制点：设$P_0=P_{n-k+2}$, $P_1=P_{n-k+3}$, . . . , $P_{k-3}=P_{n-1}$ and $P_{k-2}= P_n$. 如下图所示。

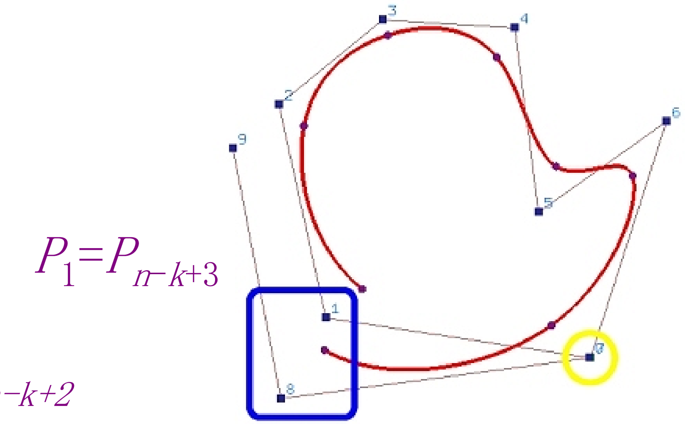
  所构建的曲线在连接点处C^{k-2}连续。

B样条的递推定义与性质

- 例子

  图(a)显示了一个由10(n=9)个控制点和一个均匀节点向量定义的4阶开B样条曲线。在图中控制点对0和7,1和8,以及2和9放置在相互靠近的地方来说明这个构建。图(b)显示了使得点0和7重叠的结果。曲线的形状没有太大变化。

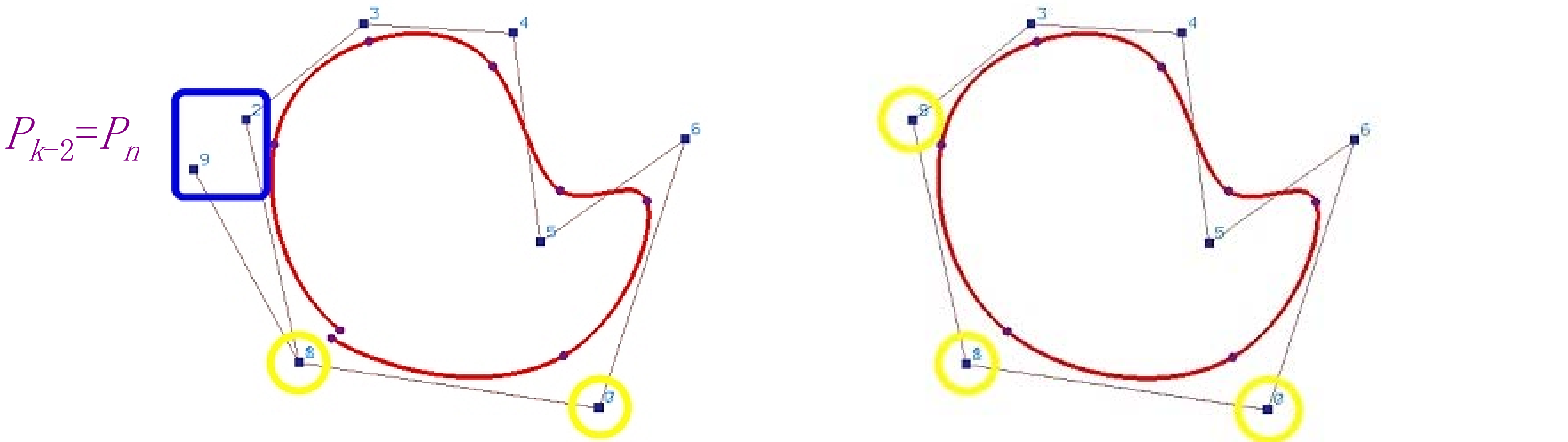




B样条的递推定义与性质

- 例子(续)

    那么，控制点1和8重叠如图(c)所示。很显然曲线的第一点和最后一点的间距更近了。最后曲线变成一个闭曲线当控制点2和9重叠后，如图(d)所示。



B样条的递推定义与性质

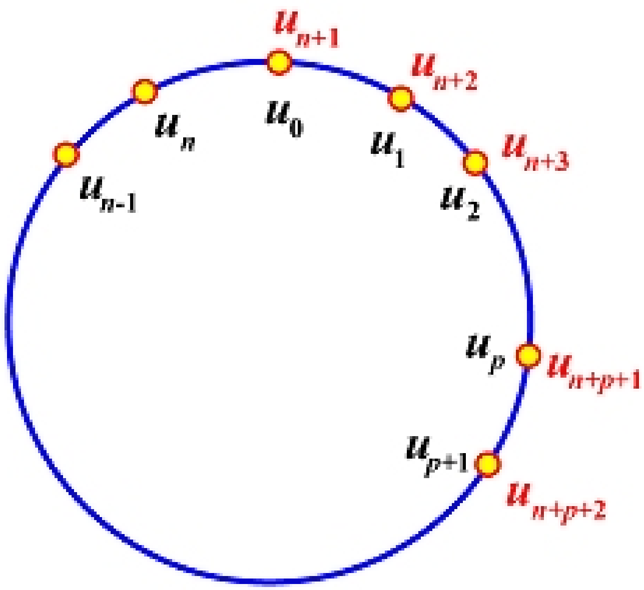
- **闭曲线的设计（续）：**
  - Wrapping节点

    假设想要构建一个由n+1个控制点P_0, P_1, . . . , P_n定义的k阶闭B样条曲线$P(t)$，构建过程如下：

    - 设增加一个新控制点P_{n+1}=P_0.控制点的数目是n+2；
    - 找到合适的有n+1节点的节点序列t_0,t_1, ...,t_n (不必是均匀的)；
    - 增加(k+1)个节点并 wrap 头(k+1) 个节点：$t_{n+1} = t_0$, $t_{n+2} = t_1$, ..., $t_{n+k-1} = t_{k-2}$, $t_{n+k} = t_{k-1}$, $t_{n+k+1} = t_k$ 。
    - 定义在上述构建的 控制点和节点上的 k阶B样条曲线$P(t)$是一个闭曲线，在连接点处$P(t_0) = P(t_{n+1})$ 有C^{k-2} 连续性。
    - 注意闭曲线的定义域是 [t_0, t_{n+1}]。

B样条的递推定义与性质

- 闭曲线的设计（续）：
  - Wrapping节点



B样条的递推定义与性质

- B样条曲线类型的划分：

  两个标准：首末节点是否重合和**节点的分布情况**。

  - 节点的分布情况
    - 均匀样条曲线
    - 准均匀样条曲线
    - 分段Bezier曲线
    - 一般的非均匀B样条曲线

B样条的递推定义与性质

- B样条曲线类型的划分：
  - 均匀样条曲线
    - 节点矢量中节点为沿参数轴均匀或等距分布，所有节点区间长度为常数。这样的节点矢量定义了均匀的B样条基。
    - 周期性： $N_{i,k}(t)=N_{i+1,k}(t+\Delta t)=N_{i+2,k}(t+2\Delta t)$

      等价于 $N_{i,k}(t)=N_{0,k}(t-i\Delta t)$

      即有不同节点矢量构成的均匀B样条函数所绘制的曲线形状相同，可以看成同一段B样条函数的简单平移
    - 在曲线定义域内各节点区间上具有用局部参数表示的统一表达式，使得计算与处理简单方便。

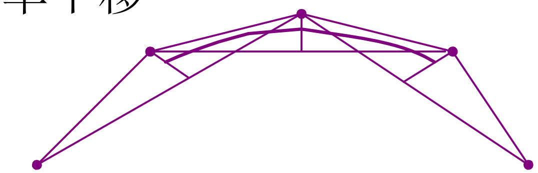


图3.1.23 三次均匀的B样条曲线

B样条的递推定义与性质

- B样条曲线类型的划分：
  - 准均匀样条曲线
    - 两端点的重复度为k, 内部其它节点呈均匀分布，且重复度为1。
    - 采用准均匀样条曲线使得曲线的首末端点就是控制多边形的首末端点，从而能较好地控制曲线在端点的行为。

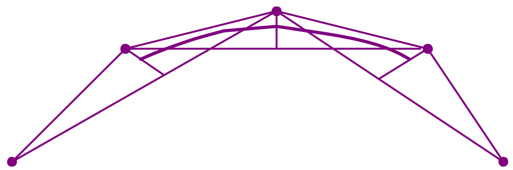


图3.1.23 三次均匀的B样条曲线

图3.1.24 准均匀三次B样条曲线

B样条的递推定义与性质

- B样条曲线类型的划分：
  - 分段Bezier曲线
    - 节点矢量中两端节点具有重复度k，所有内节点重复度为$k-1$，这样的节点矢量定义了分段的Bernstein基。

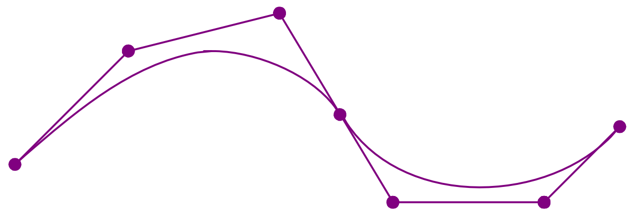


图3.1.25 三次分段Bezier曲线

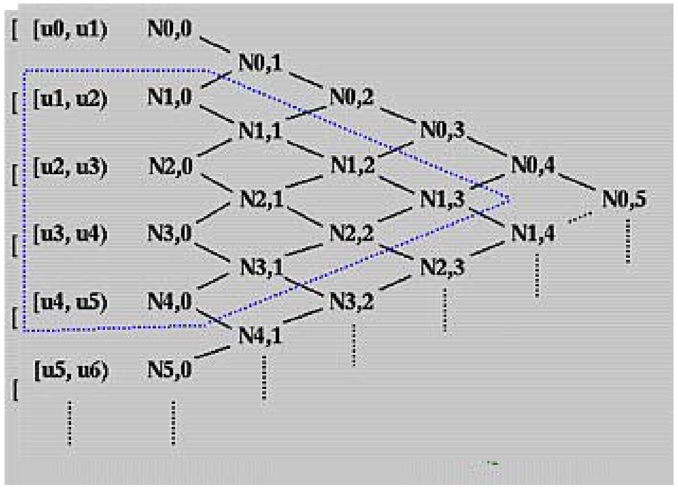
    - 优点：用分段Bezier曲线表示后，各曲线段就具有了相对的独立性，移动曲线段内的一个控制顶点只影响该曲线段的形状，对其它曲线段的形状没有影响；Bezier曲线一整套简单有效的算法都可以原封不动地采用。
    - 缺点：增加了定义曲线的数据，控制顶点数及节点数。

B样条的递推定义与性质

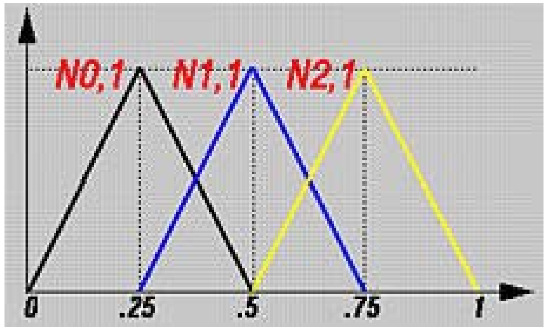
- B样条曲线类型的划分：
  - 非均匀样条曲线
    - 任意分布的节点矢量$T=[t_0,t_1,\cdots,t_{n+k}]$，只要在数学上成立（节点序列非递减，两端节点重复度≤k，内节点重复度≤k-1）都可选取。这样的节点矢量定义了非均匀B样条基。

B样条曲线的性质

- 局部性：
  - k阶B样条曲线上参数为$t\in[t_i,t_{i+1}]$的一点至多与k个控制顶点$P_j(j=i-k+1,\cdots,i)$有关，与其它控制顶点无关；
  - P_i只影响在区间$[t_i, t_{i+k})$上的曲线$P(t)$；
    - 基函数 $N_{i,k}(t)$ 在$[t_i, t_{i+k})$上非零；
  - 基函数$N_{i,k}(t)$在区间$[t_i,t_{i+k})$上都是次数不高于$(k-1)$的多项式。
- 思考题：
  - 改变一条以P0,P1,…,P9为控制顶点的4阶B样条曲线的一个顶点P5，有几段曲线的形状会改变?



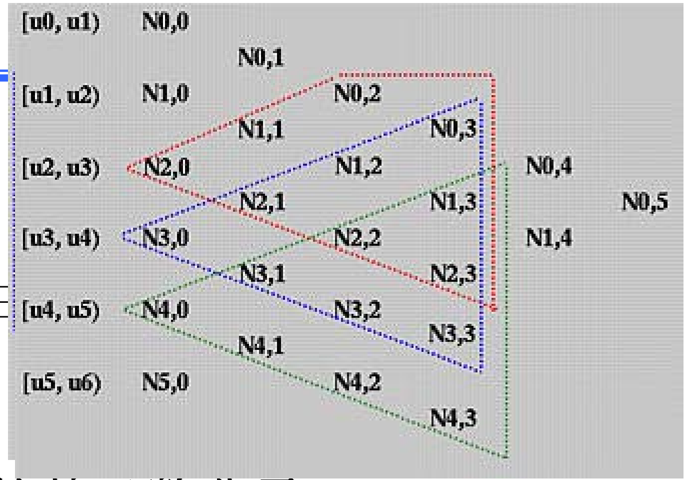
B样条曲线的性质



- 开曲线定义域：
  - 有k个基函数的支持，定义域是$[t_{k-1}, t_{n+1}]$
  - 举例：
    - 使用节点向量T={0,0.25,0.5,0.75,1},如果基函数是2阶的(即k=2),那么有三个基函数$N_{0,2}(t)$,$N_{1,2}(t)$和$N_{2,2}(t)$；
    - 第一个和最后一个节点区间只有一个非零基函数，而第二和第三节点区间(即[0.25,0.5)和[0.5,0.75))有两个非零基函数。
    - 节点区间[0,0.25)和[0.75,1)没有基函数的“完全支持”。
    - 一般来说，区间$[t_0,t_{k-1})$和$[t_{n+1},u_{n+k}]$不会有基函数的“完全支持”，当B样条曲线是开曲线时被忽略。

B样条曲线的性质

- 开曲线定义域：$[t_{k-1},t_{n+1}]$
  - 尽管在两端的节点区间没有被利用
    是由所有控制点定义的。



  - 在任一区间$[t_i, t_{i+1})$，最多有k个k阶的基函数非零（$N_{i-k+1,k}(t), N_{i-k,k+1}(t), ..., N_{i,k}(t)$）；
  - 对于$[t_{k-1}, t_k)$上有k个非零函数：$N_{0,k}(u), N_{1,k}(u), ..., N_{k-1,k}(u)$；
  - $N_{0,k}(u)$在$[t_{k-1}, t_k)$有它的尾巴，因此控制点P_0对开B样条曲线的贡献小于大多数其他控制点；
  - 同理，可证明证明P_n。

B样条曲线的性质

- 凸包性：
  - $P(t)$在区间 $(t_i,t_{i+1}), k-1\le i\le n$ 上的部分位于k个点 $P_{i-k+1},\cdots,P_i$ 的凸包 C_i 内，整条曲线位于各凸包 $\bigcup_{i=k-1}^{n} C_i$ 的并集之内。
- 贝塞尔曲线是B样条曲线的特例：
  - 当$n=k-1$，两端点的重复度为k，内部其它节点呈均匀分布，且重复度为1，则退化为Bezier曲线。
- 分段参数多项式：
  - $P(t)$在每一区间上都是次数不高于$k-1$的参数 t的多项式，因此$P(t)$是参数 t的次数不高于$k-1$的分段多项式。
- 连续性：
  - 如果 t不是节点，$P(t)$是k阶曲线段的中部，因而是无限可微的；
  - $P(t)$在重复度r的节点 $t_i(k\le i\le n)$上是C^{k-1-r}连续的。

B样条曲线的性质

- 导数公式：
  - 每个基函数的导数可计算如下：

$$\frac{d}{dt}N_{i,k}(t)=N_{i,k}^{'}(t)=\frac{(k-1)}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)-\frac{(k-1)}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

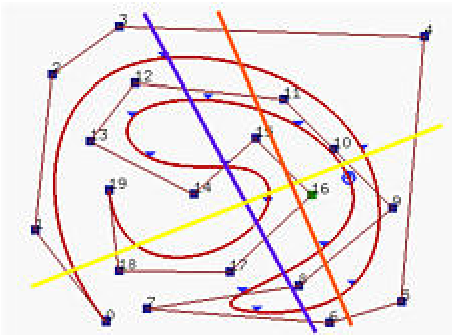
  - 将这些导数代回曲线方程得到下列结果：

$$\frac{d}{dt}P(t)=P^{'}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}Q_iN_{i+1,k-1} \qquad Q_i=\frac{(k-1)}{t_{i+k}-t_{i+1}}(P_{i+1}-P_i)$$

  - 因此，一个B样条曲线的导数是另一个(k-1)阶B样条曲线，新的n个控制点Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1}。

B样条曲线的性质

- 变差缩减性：
  - 设平面内 $n+1$ 个控制顶点构成B样条曲线 $P(t)$ 的特征多边形。在该平面内的任意一条直线与 $P(t)$ 的交点个数不多于该直线和特征多边形的交点个数：
    - 蓝线与控制折线和B-样条曲线都相交6次；
    - 黄线也与控制折线和B-样条曲线相交5次；
    - 橘黄线与控制折线相交6次和曲线相交4次。



B样条曲线的性质

- 仿射不变性： $A[P(t)] = \sum_{i=0}^{n} A[P_i] N_{i,k}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$
  - 即在仿射变换下，P(t)的表达式具有形式不变性。
  - 如果一个仿射变换应用于B样条曲线，得到的结果可以从它的控制点的仿射像构建得到。
- 几何不变性：
  - 由于定义式所表示的B样条曲线是参数形式，因此，B样条曲线的形状和位置与坐标系选择无关。
- 直线保持性：
  - 控制多边形退化为一条直线时曲线也退化为一条直线。

B样条曲线的性质

- 造型灵活性：可构造直线段、尖点、切线等情况
  - 4阶B样条曲线：若要在其中得到一条直线段，只要4点 $P_i,P_{i+1},P_{i+2},P_{i+3}$ 共线，此时定义在 $t_{i+3}\le t\le t_{i+4}$ 的曲线为直线；

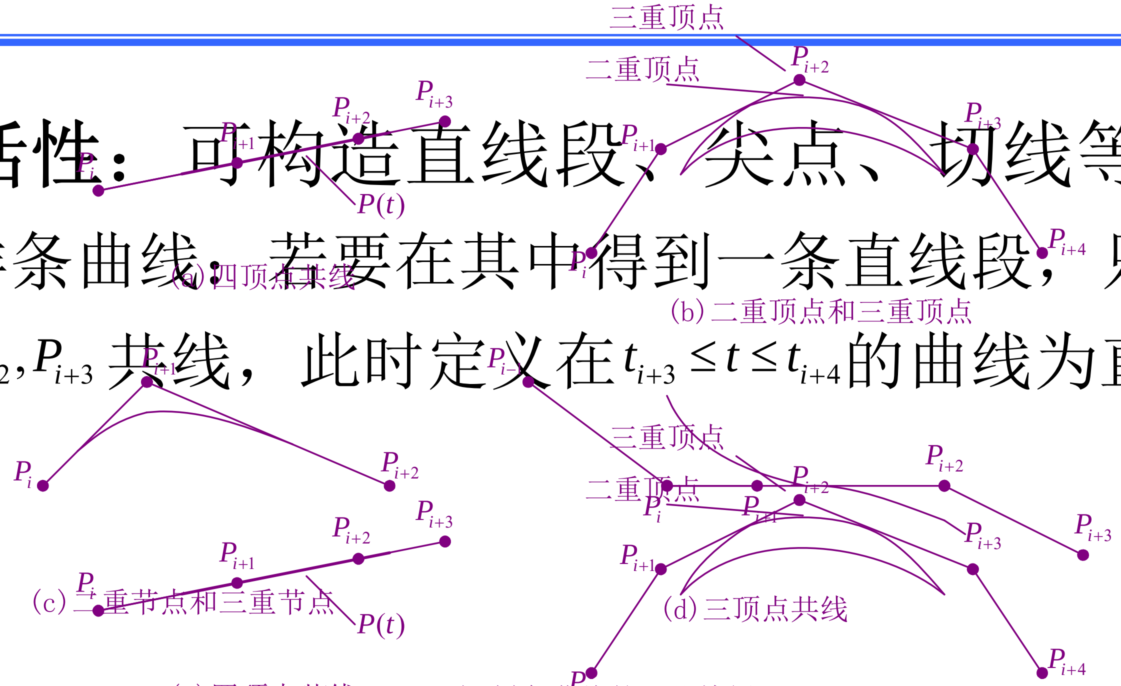


图.1.26 三次B样条曲线的一些特例

  - 为了使$P(t)$能过P_i点，只要使 P_i,P_{i+1},P_{i+2} 重合；尖点也可通过三重节点的方法得到；
  - 为了使曲线和某一直线L相切，只要取 P_i,P_{i+1},P_{i+2} 位于L上及t_{i+3}的重数不大于2。

图.1.26 三次B样条曲线的一些特例

习题

- 五个控制顶点的三次B样条曲线由几个节点构成？
  - 总共有(n+1)个基函数；
  - 基函数 $N_{i,k}(t)$ 在 $[t_i, t_{i+k})$ 上非零。
- 一条以P0,P1,P2,P3,P4为控制顶点的4阶(三次)B样条曲线，其节点向量为{0,0,0,1,2,3,4,4, 4},则其定义域为?
  - 由k个基函数的支持的区间
  - 区间 $[t_{k-1}, t_{n+1}]$

习题

- 由五个控制顶点所决定的3次B样条曲线，由几段3次B样条曲线段光滑连接而成？
  - 定义域：$[t_{k-1}, t_{n+1}]$
- 改变一条以P0,P1,…,P9为控制顶点的4阶(三次)B样条曲线的一个顶点P5，有几段曲线的形状会改变为?
  - 基函数 $N_{i,k}(t)$ 在$[t_i, t_{i+k})$上非零；
  - 定义域：$[t_{k-1}, t_{n+1}]$。

De Door算法

- de Boor算法

给定控制顶点$P_i(i=0,1,\ldots,n)$及节点矢量$T=[t_0,t_1,\ldots,t_{n+k}]$后，就定义了$k$阶样条曲线。欲计算曲线上的对应点$P(t)$，可采用如下方法：

- 根据给定t，确定其所在的区间$t\in[t_j,t_{j+1})(k-1\le j\le n)$
- 由de Boor-Cox公式有以下结果

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t) = \sum_{i=j-k+1}^{j} P_i N_{i,k}(t) \\
&= \sum_{i=j-k+1}^{j} P_i \left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \right] \\
&= \sum_{i=j-k+1}^{j} \left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} P_i + \frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i} P_{i-1} \right] N_{i,k-1}(t) \qquad t\in[t_j,t_{j+1}]
\end{aligned}
$$

De Door算法

- de Boor算法（续）：
  - 令：

$$P_i^{[r]}(t)=\begin{cases} P_i, \quad r=0, i=j-k+1, j-k+2,\cdots,j \\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i}P_i^{[r-1]}(t)+\dfrac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i}P_{i-1}^{[r-1]}(t), \\ \qquad r=1,2,\cdots,k-1; i=j-k+r+1, j-k+r+2,\cdots,j \end{cases}$$

  - 则

$$P(t)=\sum_{i=j-k+1}^{j}P_iN_{i,k}(t)=\sum_{i=j-k+2}^{j}P_i^{[1]}(t)N_{i,k-1}(t)$$

上式是一条曲线$P(t)$从k阶到$(k-1)$阶B样条表示的递推公式，反复利用此公式可得$P(t)=P_j^{[k-1]}(t)$

  - 此即为著名的de Boor算法

De Door算法

- de Boor 算法的递推关系如图：

$$
\begin{array}{ccccccc}
P_1 & & & & & & \\
P_2 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
P_{j-k+1} & & & & & & \\
P_{j-k+2} & \to & P_{j-k+2}^{[1]} & & & & \\
P_{j-k+3} & \to & P_{j-k+3}^{[1]} & \to & P_{j-k+3}^{[2]} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
P_j & \to & P_j^{[1]} & \to & P_j^{[2]} & & P_j^{[k-1]} \\
\vdots & & & & & & \\
P_n & & & & & &
\end{array}
$$

De Door算法

- de Boor 算法的几何意义
  - de Boor算法有着直观的几何意义——割角，即以线段 $P_i^{[r]}P_{i+1}^{[r]}$ 割去角 $P_i^{[r-1]}$ 。从多边形 $P_{j-k+1}P_{j-k+2}\cdots P_j$ 开始，经过 k-1 层割角，最后得到P(t)上的点 $P_j^{[r-1]}(t)$ 。

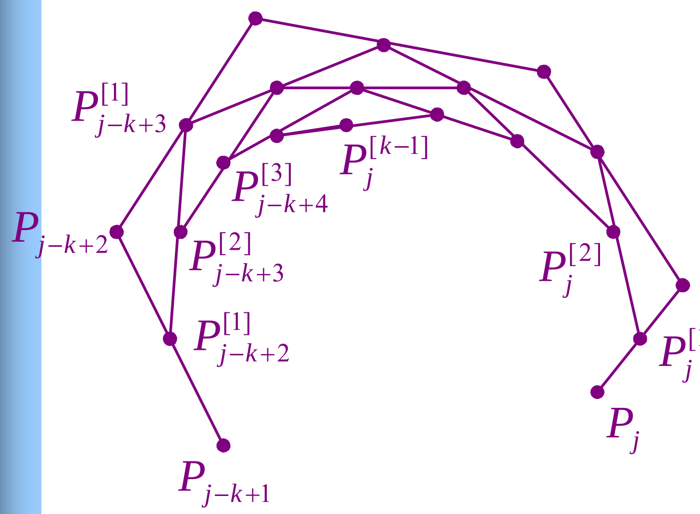


图3.1.28 B样条曲线的deBoor算法的几何意义

$$P_i^{[r]}(t)=\begin{cases}P_i, \quad r=0, i=j-k+1, j-k+2,\cdots,j\\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i}P_i^{[r-1]}(t)+\dfrac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i}P_{i-1}^{[r-1]}(t),\\ r=1,2,\cdots,k-1; i=j-k+r+1, j-k+r+2,\cdots,j\end{cases}$$

习题

- 用de Boor算法求以(30,0),(60,10),(80,30),(90,60),(90,90)为控制顶点、以T=(0,0,0,0,0.5,1,1,1,1)为节点向量的的三次B样条曲线在t=1/4处的值。
  - 根据给定t，确定其所在的区间 $t \in [t_j, t_{j+1})(k-1 \le j \le n)$
  - 根据de Boor递推公式计算结果：

$$P_i^{[r]}(t) = \begin{cases} P_i, \quad r = 0, i = j-k+1, j-k+2, \cdots, j \\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i} P_i^{[r-1]}(t) + \dfrac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i} P_{i-1}^{[r-1]}(t), \\ \qquad r = 1, 2, \cdots, k-1; i = j-k+r+1, j-k+r+2, \cdots, j \end{cases}$$

B样条曲线的性质

- 造型灵活性：可构造直线段、尖点、切线等情况
  - 4阶B样条曲线：若要在其中得到一条直线段，只要4点 $P_i,P_{i+1},P_{i+2},P_{i+3}$ 共线，此时定义在 $t_{i+3}\le t\le t_{i+4}$ 的曲线为直线；
  - 为了使 $P(t)$ 能过 P_i 点，只要使 P_i,P_{i+1},P_{i+2} 重合；尖点也可通过三重节点的方法得到；
  - 为了使曲线和某一直线L相切，只要取 P_i,P_{i+1},P_{i+2} 位于 L 上及 t_{i+3} 的重数不大于2。

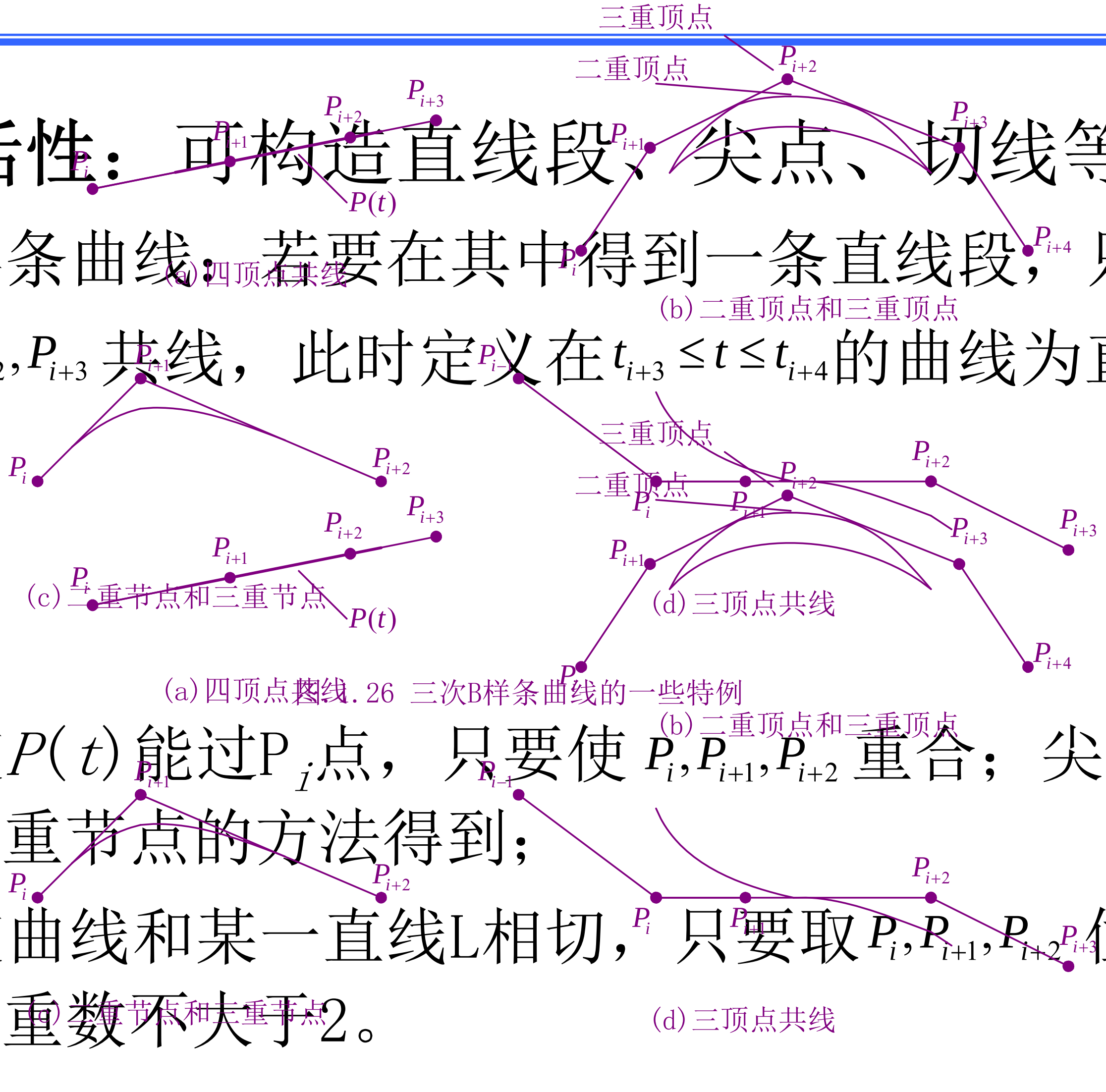


图.1.26 三次B样条曲线的一些特例

习题

- Q，$Q1$，$Q2$，$S1$，$S2$是平面上的5个点。请设计一条均匀三次B样条曲线，使曲线经过这5个点，且满足如下设计要求：
  - 在$Q1$，$Q2$点与$Q\,Q1$，$Q\,Q2$相切；
  - 分别在Q，$Q1$和Q，$Q2$间生成一段直线段；
  - 在Q是一尖点。

答：首先了解均匀三次B样条曲线的端点性质。

对于每一段曲线，

已知：k=4，n=3，T=[0,1,2,3,4,5,6,7]

所以：$k-1 \le j \le n$ 即 j=3，$t \in [t_3,t_4)$

起点：t=3

$$P(3)=P_3^{[3]}=(t-3)P_3^{[2]}+(4-t)P_2^{[2]}=P_2^{[2]}=\frac{t-2}{2}P_2^{[1]}+\frac{4-t}{2}P_1^{[1]}$$

$$=\frac{1}{2}P_2^{[1]}+\frac{1}{2}P_1^{[1]}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}P_2+\frac{2}{3}P_1)+\frac{1}{2}(\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{3}P_0)=\frac{1}{6}P_0+\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{6}P_2$$

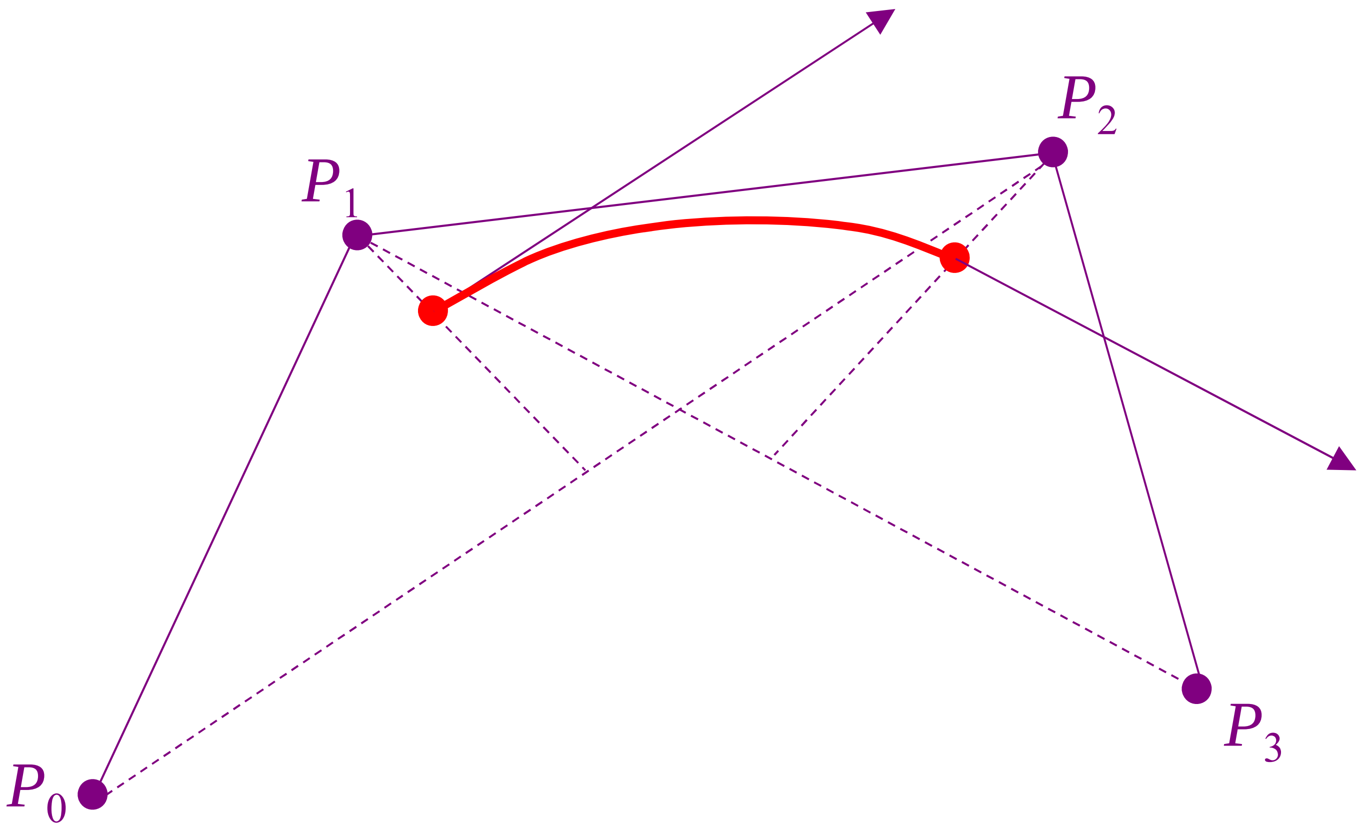
同理，终点：t=4

$$P(4)=P_3^{[3]}=(t-3)P_3^{[2]}+(4-t)P_2^{[2]}=P_3^{[2]}=\frac{1}{2}P_3^{[1]}+\frac{1}{2}P_2^{[1]}$$

$$=\frac{1}{6}P_1+\frac{2}{3}P_2+\frac{1}{6}P_3$$

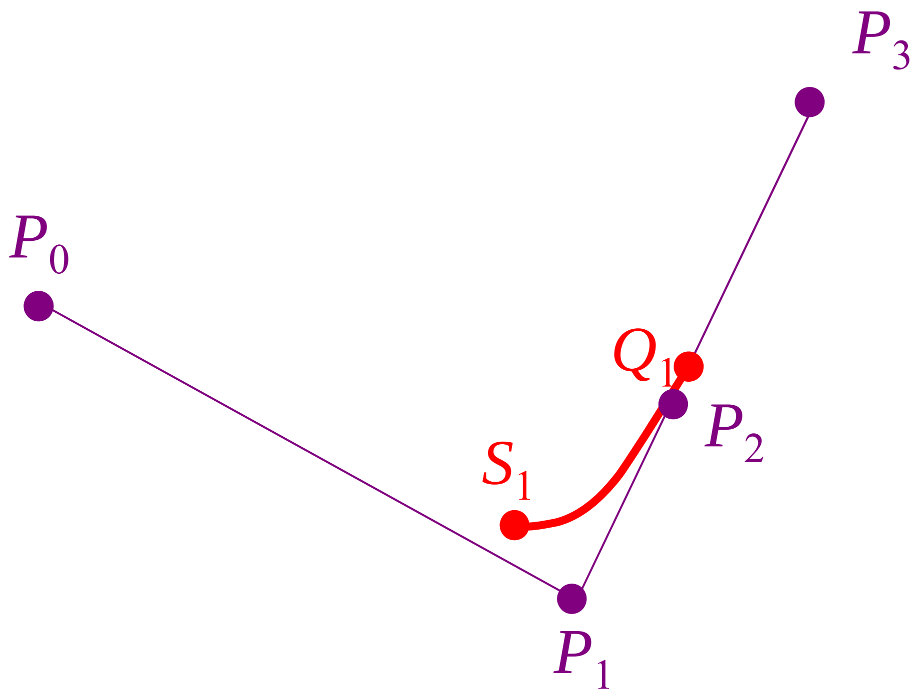
起点和终点的切线方向：

$$P'(3)=\frac{1}{2}(P_2-P_0)\qquad P'(4)=\frac{1}{2}(P_3-P_1)$$

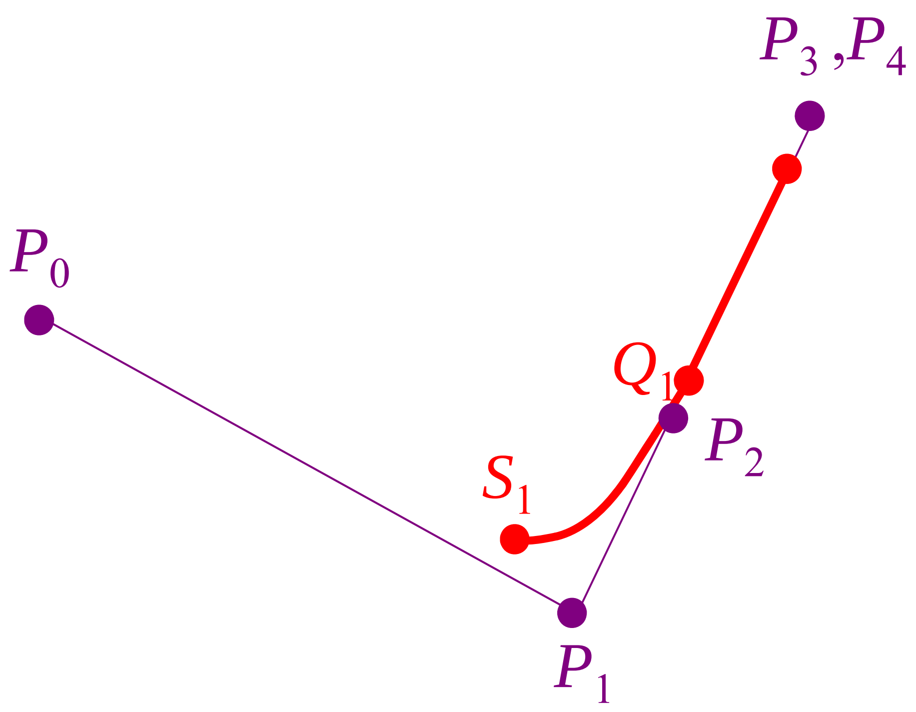


P_0
P_1
P_2
P_3

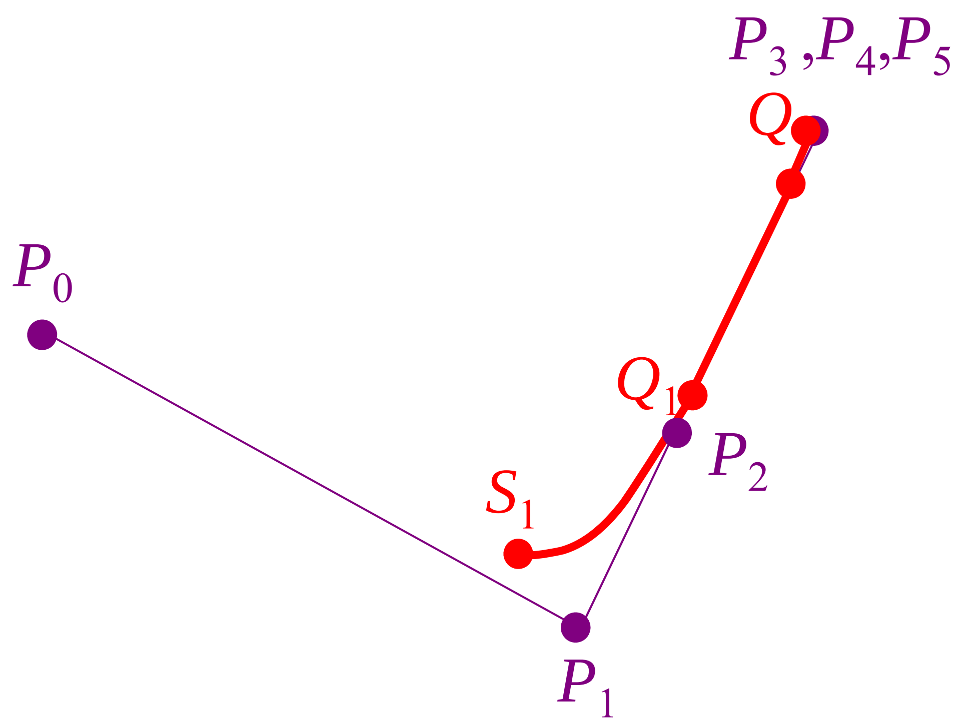
要求(1)：为了使均匀三次B样条曲线和某一直线相切，则P_1，P_2，P_3位于直线上。

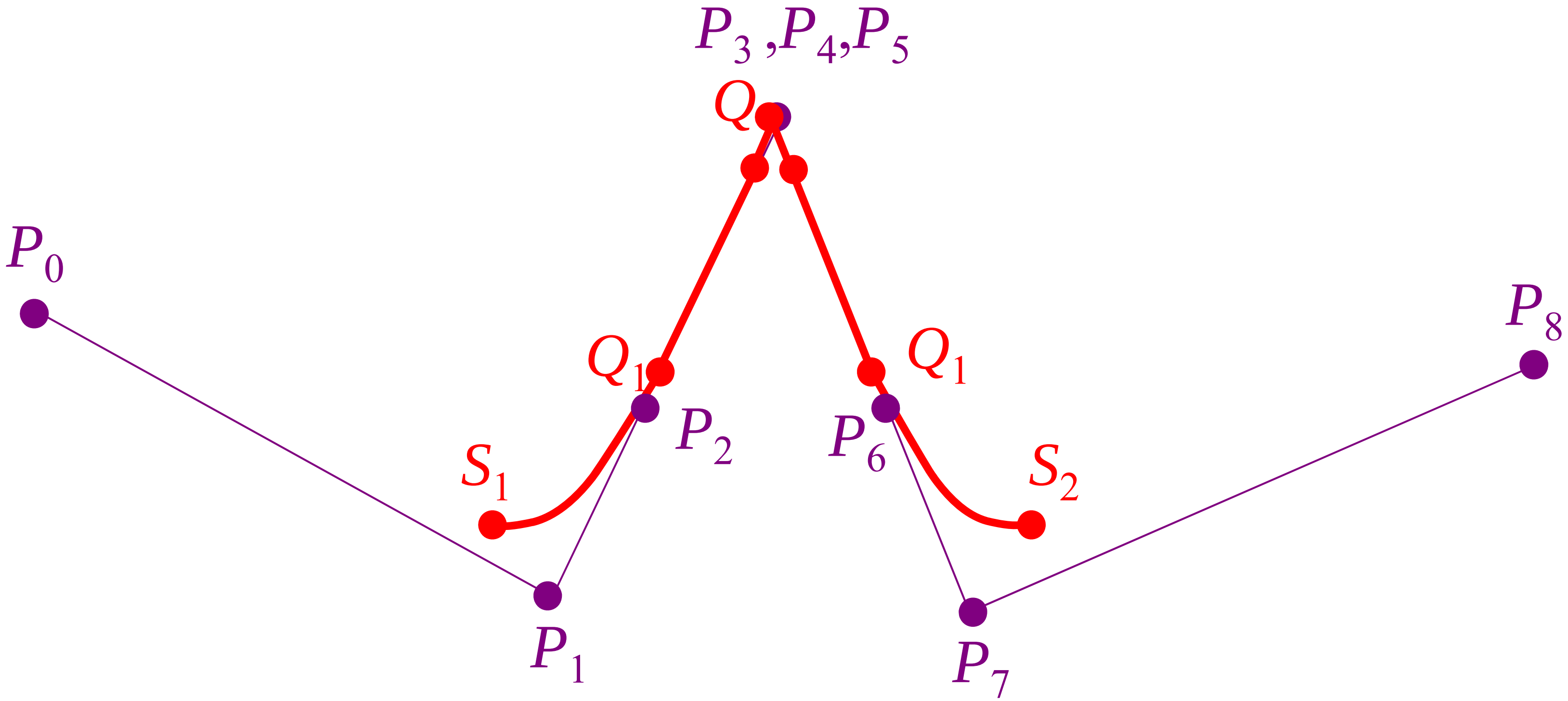


要求(2)：若要得到一条直线段，只要P_1, P_2 , P_3, P_4四点位于一条直线上。



要求(3)：为了使曲线能过尖点Q，只要使P_3，P_4，P_5，Q重合。





P_3 ,P_4,P_5
Q
P_0
P_8
Q_1
Q_1
P_2
P_6
S_1
S_2
P_1
P_7

三次B样条的Bezier表示

- 三次B样条的Bezier表示：
  - 由de Boor算法，知下列公式成立：

$$P_i^{[r]}(t)=\begin{cases}P_i, & r=0, i=j-k+1, j-k+2,\cdots,j\\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i}P_i^{[r-1]}(t)+\dfrac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i}P_{i-1}^{[r-1]}(t), \\ r=1,2,\cdots,k-1; i=j-k+r+1, j-k+r+2,\cdots,j\end{cases}$$

$$P(t_j)=P_j^{[3]}(t_j)=P_{j-1}^{[2]}(t_j)$$

$$P(t_{j+1})=P_{j+1}^{[3]}(t_{j+1})=P_j^{[2]}(t_{j+1})$$

$$P'(t_j)=3(P_{j-1}^{[1]}(t_j)-P_{j-1}^{[2]}(t_{j+1}))$$

$$P'(t_{j+1})=3(P_j^{[2]}(t_{j+1})-P_{j-1}^{[1]}(t_{j+1}))$$

  - 由于P(t)在区间 $t_j \le t \le t_{j+1}$ 上是三次多项式，故以上两个性质表明，这段曲线如表示成三次Bezier曲线，则其控制顶点为：

$$P_{j-1}^{[2]}(t_j), P_{j-1}^{[1]}(t_j), P_{j-1}^{[1]}(t_{j+1}), P_j^{[2]}(t_{j+1})$$

三次B样条的Bezier表示

- 三次B样条的Bezier表示（续）：
  - 则$P(t)$可表示为：

    其中：$t_j \le t \le t_{j+1}$

    $$\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$$

$$P(t) = \sum_{i=j-3}^{j} P_i N_{i,4}(t)$$

$$= P_{j-1}^{[2]}(t_j) B_{0,3}(\tfrac{t-t_j}{\Delta t_j}) + P_{j-1}^{[1]}(t_j) B_{1,3}(\tfrac{t-t_j}{\Delta t_j})$$

$$+ P_{j-1}^{[1]}(t_{j+1}) B_{2,3}(\tfrac{t-t_j}{\Delta t_j}) + P_j^{[2]}(t_{j+1}) B_{3,3}(\tfrac{t-t_j}{\Delta t_j})$$

  - 表明：de Boor算法不仅是求$P(t)$的方法， 也是把把$P(t)$转化为一段Bezier曲线的工具。

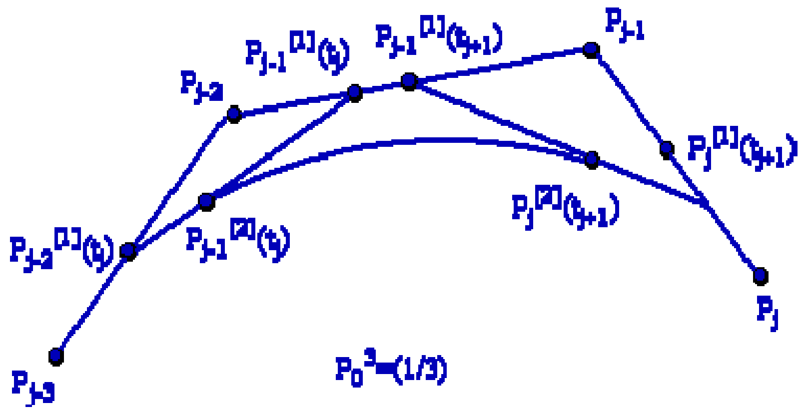


图3.1.30 四阶B样条曲线转化成Bezier曲线

3.3.4 节点插入算法

- **节点插入算法：** 进一步改善B样条曲线的局部性质，提高曲线的形状控制的灵活性，可实现对曲线的分割等
  - 给定一条k阶B样条曲线

    $$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t)$$

    B样条基由节点矢量 $T=[t_0,t_1,\cdots,t_{n+k}]$ 完全决定。
  - 插入一个节点

    在定义域某个节点区间 $[t_i,t_{i+1}]$ 内插入一个节点t，得到新的节点矢量： $T^1=[t_0,t_1,\cdots,t_i,t,t_{i+1},\cdots,t_{n+k}]$

    重新编号成为： $T^1=\left[t_0^1,t_1^1,\cdots,t_i^1,t_{i+1}^1,t_{i+2}^1,\cdots,t_{n+k+1}^1\right]$

3.3.4 节点插入算法

- 节点插入算法：
  - 新节点矢量T^1决定了一组新B样条基$N_{i,k}^1(t), i=0,1,\ldots,n+1$。原始的曲线可用这组新的B样条基与未知新顶点$P_i^1$表示：

$$P(t)=\sum_{j=0}^{n+1} P_j^1 N_{j,k}^1(t)$$

  - 未知新顶点的计算公式(Boehm)：

$$\begin{cases} P_j^1 = P_j, & j=0,1,\cdots,i-k+1 \\ P_j^1 = (1-\beta_j)P_{j-1}+\beta_j P_j, & j=i-k+2,\cdots,i-r \\ P_j^1 = P_{j-1}, & j=i-r+1,\cdots,n+1 \end{cases} \qquad \beta_j=\frac{t-t_j}{t_{j+k-1}-t_j}$$

    - r表示所插结点t在原始节点矢量T中的重复度。若$t_i<t<t_{i+1}$则r=0；若r为正整数，且$r<k$-1，则有$t=t_i=t_{i-1}=\ldots=t_{i-r+1}$。

3.3.4 节点插入算法

$$
\begin{cases}
P_j^1 = P_j, & j = 0,1,\cdots,i-k+1 \\
P_j^1 = (1-\beta_j)P_{j-1} + \beta_j P_j, & j = i-k+2,\cdots,i-r \\
P_j^1 = P_{j-1}, & j = i-r+1,\cdots,n+1
\end{cases}
$$

$$\beta_j = \frac{t - t_j}{t_{j+k-1} - t_j}$$

- 节点插入算法：
  - 当r=0时，它仅涉及节点序列 $t_{i-k+2},\ldots,t_{i+k-1}$和控制顶点序列$P_{i-k+1},\ldots,P_i$，生成新顶点 $P_{i-k+2}^1,\ldots,P_i^1$，取代原始顶点 $P_{i-k+2},\ldots,P_{i-1}$ 。

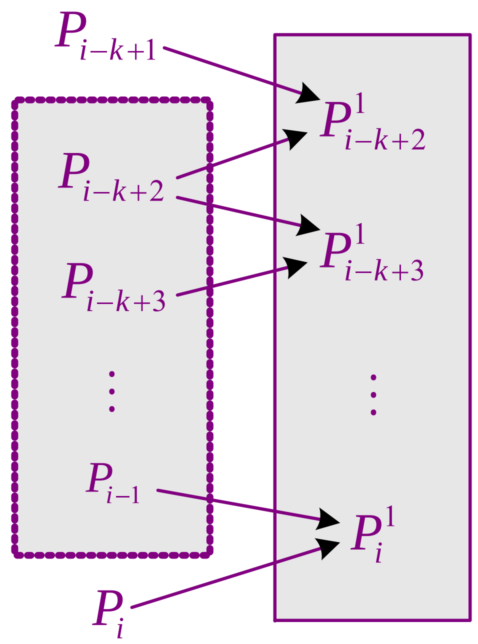


图3.1.30 实线框中k-1个新顶点取代虚线框中k-2个原始顶点

3.3.4 节点插入算法

- 节点插入算法：
  - 右下图给出了三次样条曲线插入一个节点的图解过程，生成了三个新顶点取代两个原始顶点，其余不变。

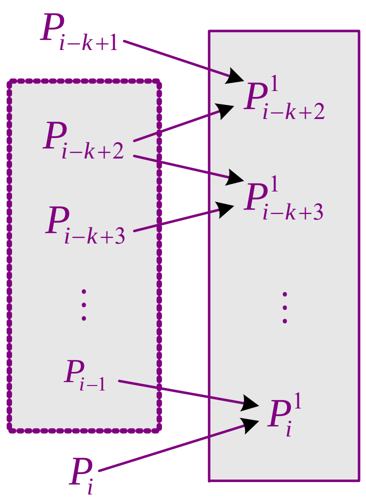


图3.1.30 实线框中k-1个新顶点取代虚线框中k-2个原始顶点

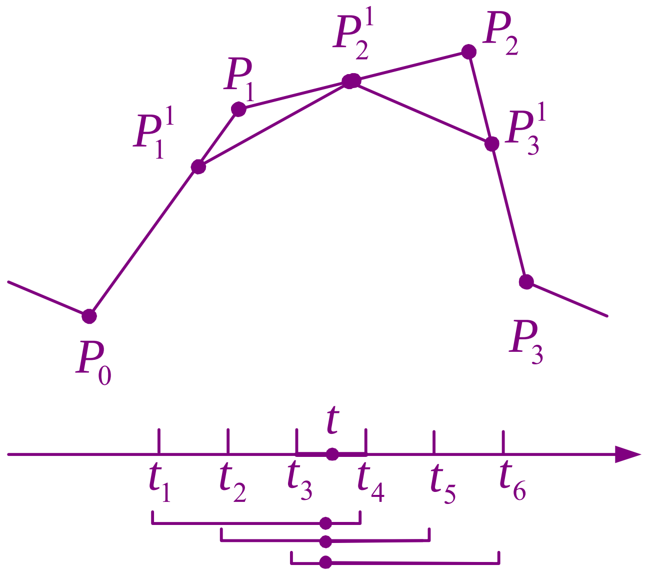


图3.1.31 三次B样条曲线插入一个节点 $t\in[t_3,t_4]$

3.3.4 节点插入算法

- 节点插入算法：
  - 当$0<r<k-1$时涉及的原始节点序列$t_{i-k+2},\ldots,t_{i+k-r-1}$和控制顶点序列$P_{i-k+1},\ldots,P_{i-r}$，生成 $k-r-1$ 个新顶点 $P^1_{i-k+2},\ldots,P^1_{i-r}$ 取代 $k-r-2$ 个原始顶点$P_{i-k+2},\ldots,P_{i-r-1}$。
  - 三次B样条曲线插入一个重复度为r=2的节点例子，插入节点 $t=t_2=t_3$ 。
    - 只有一个非零的比例因子 β_1 。有两个原始顶点P_0 与 P_1 生成一个新顶点P_1^1 ，所有原始顶点保留。

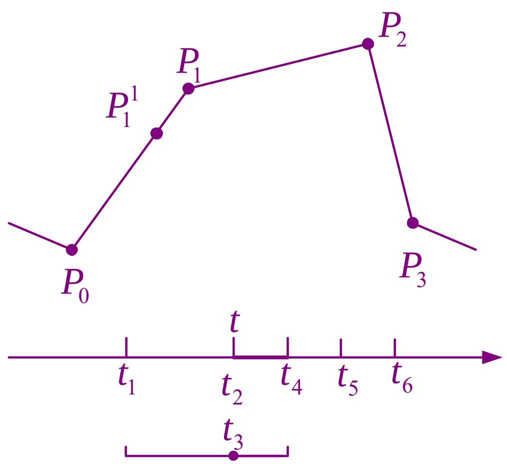


图3.1.32 三次B样条曲线插入一个节点$(t=t_2=t_3)$

B样条曲线的优点

- 优点：
  - 可以是贝塞尔曲线；满足贝塞尔曲线有的所有重要性质；提供了比贝塞尔曲线更灵活的控制
    - 曲线的次数与控制点数目是分开的，可使用更低次曲线而仍然保持很多控制点；
    - 可以改变一个控制点位置而不会全局地改变整个曲线形状；
    - 还有其他设计和编辑形状的技术比如改变节点。
- B样条曲线仍然是多项式曲线，而多项式曲线不能表示许多有用的简单的曲线比如圆和椭圆。

3.3.5 B样条曲面

- 给定参数轴u和v的节点矢量：

$$U=[u_0,u_1,\cdots,u_{m+p}]$$

$$V=[v_0,v_1,\cdots,v_{n+q}]$$

- $p\times q$阶B样条曲面定义如下：

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$$

  - $P_{ij}\ (i=0,1,\ldots,m;\ j=0,1,\ldots,n)$ 构成一张控制网格，称为B样条曲面的**特征网格**。$N_{i,p}(u)$ 和 $N_{j,q}(v)$是B样条基，分别由节点矢量U和V按de Boor-Cox递推公式决定。

3.3.5 B样条曲面

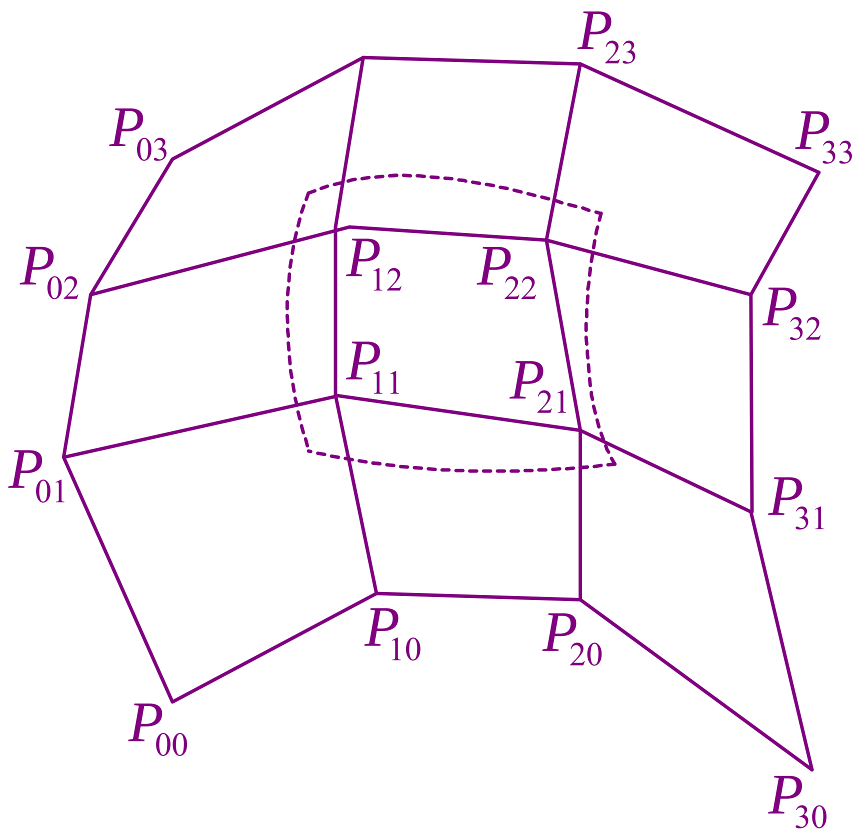


图3.1.33　双三次B样条曲面片

3.3.5 B样条曲面

- B样条曲线的其他性质都可以推广到B样条曲面（变差缩减性质外）。
- 按所取节点矢量不同，B样条曲面可分为：
  - 均匀B样条曲面
  - 准均匀B样条曲面
  - 分片Bezier曲面
  - 非均匀B样条曲面
- 沿两个方向可以选取不同节点的类型。当两个节点矢量分别为：

$$U=[\underbrace{0,0,\ldots,0}_{p},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p}] \qquad V=[\underbrace{0,0,\ldots,0}_{q},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{q}]$$

则所定义的B样条曲面就是$p\times q$阶Bezier曲面。

3.3.5 B样条曲面

- B样条曲面也可以表示成矩阵形式：

$$P(u,v)=U_p N P_{p,q} N^T V_q^T$$

– 其中 $U_p=(u^{p-1},u^{p-2},\ldots,u,1)$ $V_q=(v^{q-1},v^{q-2},\ldots,v,1)$

$$P=\begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{0,n-1} & P_{0,n} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \cdots & P_{2,n-1} & P_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{m-1,0} & P_{m-1,1} & \cdots & P_{m-1,n-1} & P_{m-1,n} \\ P_{m,0} & P_{m,1} & \cdots & P_{m,n-1} & P_{m,n} \end{bmatrix}$$