

第三章 几何造型技术

- 几何造型技术
 - 参数曲线和曲面
 - Bezier曲线与曲面
 - B样条曲线与曲面
 - NURBS曲线和曲面
 - Coons曲面
 - 形体在计算机内的表示
 - 求交分类
 - 实体造型系统简介
 - 三角网格

3.4 NURBS曲线与曲面

- B样条曲线在表示和设计自由型曲线曲面形状方面显示了强大的威力。
- 在表示与设计由二次曲面与平面构成的初等曲面时却遇到了麻烦
 - B样条曲线(面)包括其特例*Bézier*曲线(面)都只能近似的表示出抛物线（面）以外的二次曲线弧(面)。
 - 近似表示将带来处理上的麻烦，使本来简单的问题复杂化；
 - 还会带来原不存在的设计误差问题。

3.4 NURBS曲线与曲面

- 解决问题的途经：改造现有的B样条方法
 - 保留其描述自由型形状长处；
 - 扩充其统一表示二次曲线弧与二次曲面的能力。
- 人们所寻求的方法：有理B样条方法
 - 形状描述中更多地以非均匀类型出现，而均匀、准均匀和分段 *Bézier* 曲线(面)三种类型又可看作是非均匀类型的特例，因此习惯称之为非均匀有理B样条 *NURBS* (*Non-Uniform Rational B-Splines*) 曲线。

3.4 NURBS曲线与曲面

- 有理函数：
 - 通过多项式的加减乘除得到的函数；
 - 有理函数： $h=f/g$ ，这里f和g都是多项式函数。
- 有理样条：两个样条函数之比
 - 例如，有理B样条曲线可用向量描述为：

$$P(t) = (\sum \omega_i P_i N_{i,k}(t)) / (\sum \omega_i N_{i,k}(t))。$$

- P_i 是 $n+1$ 个控制点位置；
- 参数 ω_i 是控制点的权因子：
 - ω_i 值越大，曲线越靠近该控制点 P_i ；
 - 当所有权因子都为1时得标准B样条曲线。

3.4 NURBS曲线与曲面

- 构造有理B-样条表达式与非有理表达式的步骤相似：
 - 给定控制点集；
 - 节点向量；
 - 多项式次数；
 - 权因子。

3.4 NURBS曲线与曲面

- 有理样条与非有理样条相比有两个重要的优点：
 - 非有理样条表达式为多项式，仅能逼近二次曲线。
 - 有理样条提供了二次曲线的精确表达式：
 - 使图形包能用一个表达式(有理样条)来模拟所有曲线形状，无需用一个曲线函数库去处理不同的形状。
 - 非有理样条关于透视观察变换是可变的；
 - 有理样条对于透视观察变换是不变的：
 - 参数有理多项式的投影还是参数有理多项式；
 - 可对控制点应用透视观察变换，来得到曲线的正确视图。

3.4 NURBS曲线与曲面

- NURBS方法是建立在非有理*Bézier*方法和非有理B样条方法基础上：
 - 为找到与描述自由型曲线曲面的B样条方法相统一的、又能精确表示二次曲线弧与二次曲面的数学方法。
- 鉴于NURBS在形状定义方面的强大功能与潜力：
 - 1991年ISO正式颁布的STEP标准中NURBS是唯一的自由型参数曲线曲面表示方法。

3.4 NURBS曲线与曲面

- NURBS方法的优点：
 - 既为标准解析形状也为自由型曲线曲面的精确表示与设计提供了统一数学形式；
 - 修改控制顶点和权因子，为各种形状设计提供了充分的灵活性；
 - 计算稳定且速度快；
 - 具有明显的几何解释和强有力的几何配套技术(插入节点/细分/消去、升阶、分裂等)；
 - 在几何变换及平行和透视投影变换下不变；
 - 是非有理B样条和Bézier形式合适的推广。

3.4 NURBS曲线与曲面

- NURBS方法缺点：
 - 需要额外的存储以定义传统的曲线曲面；
 - 权因子选择不当会引起畸变；
 - 某些技术用传统形式比NURBS工作得好；
 - 某些基本算法存在数值不稳定问题，如点的反求。
- 与非有理B样条曲线比较，多了权因子与分母：
 - 正因为多了权因子与分母，问题变得复杂。

3.4.1 NURBS曲线定义

- NURBS曲线三种表示方法：
 - 分式：是非有理与有理Bézier, 非有理B样条曲线的推广，但却难以从中了解更多的性质。
 - 有理基函数：可从有理基函数的性质清楚地了解曲线的性质
 - 齐次坐标：曲线是它的控制顶点的齐次坐标或带权控制点在高一维空间里所定义的非有理B样条曲线在 $\omega=1$ 超平面上的投影
 - 包含了明确的几何意义，也说明：非有理B样条曲线的大多数算法都可以推广应用于NURBS曲线。

3.4.1 NURBS曲线定义

- k 阶NURBS曲线可表示为分段有理多项式的函数:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}$$

- 给出了NURBS的数学定义，是有理的由来；
- 参数 ω_i 是控制顶点权因子，与控制顶点 P_i 相联系：
 - 首末权因子 >0 ，其余 $\omega_i \geq 0$ ，以防止分母为零、保留凸包性质及曲线不致于权因子而退化为一点。
- 控制顶点 $P_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 顺序连接成控制多边形；
- $N_{i,k}(t)$ 是由节点向量 $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+k}\}$ 按递推公式决定的 k 阶规范B样条基函数。

3.4.1 NURBS曲线定义

- 对于非周期NURBS曲线，常将两端节点的重复度取为 k ，即： $t_0=t_1=t_2, \dots, t_{k-1}, t_{n+1}=t_{n+2}=\dots=t_{n+k}$ 。
- 在大多数实际应用里，端节点值分别取为0和1，因此，曲线定义域： $t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] = [0, 1]$ 。
- 当 $n=(k-1)$ ， k 阶 NURBS 曲线就成为 k 阶有理 *Bézier*曲线：
 - k 阶NURBS曲线节点向量两端节点重复度取 k ，就使曲线具有同次有理*Bézier*曲线端点几何性质；
 - 如果权因子 $\omega_1, \omega_{n+1} \neq 0$ ，曲线首末端点分别就是控制多边形首末顶点，曲线在首末端点处分别与控制多边形首末边相切。

3.4.1 NURBS曲线定义

- NURBS曲线方程可写为如下等价形式:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,k}(t); \quad R_{i,k}(t) = \frac{\omega_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}$$

- $R_{i,k}(t)$ 称为 k 阶有理基函数, 与 k 阶规范B样条基函数 $N_{i,k}(t)$ 类似的性质:
 - 局部支撑性质: 即 t 不在区间 $[t_i, t_{i+k}]$ 内时, $R_{i,k}(t)=0$;
 - 规范性: $\sum R_{i,k}(t)=1$;
 - 可微性: 如果分母不为零, 在节点区间内是无限次连续可微的, 在节点处是 $(k-r-1)$ 次可微的, r 为该节点的重复度。

3.4.1 NURBS曲线定义

- NURBS曲线方程可写为如下等价形式:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,k}(t); \quad R_{i,k}(t) = \frac{\omega_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}$$

- ω_i 是控制顶点权因子:
 - 若 $\omega_i=0$, 则: $R_{i,k}(t)=0$;
 - 若 $\omega_i \rightarrow +\infty$, 则: $R_{i,k}(t)=1$;
 - 若 $\omega_j \rightarrow +\infty, j \neq i$, 则: $R_{i,k}(t)=0$ 。
 - 若 $\omega_i=1, i=0, 1, \dots, n$, 则 $R_{i,k}(t)=N_{i,k}(t)$;
 - 若 $\omega_i=1, i=0, 1, \dots, n$, 且 $T=\{0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1\}$ (0和1的重复度都为 k) 时 $R_{i,k}(t)=B_{i,k}(t)$ 。

3.4.1 NURBS曲线定义

- 非有理与有理 *Bézier* 曲线和非有理 B 样条曲线都是 NURBS 的特例。
- 局部性质：
 - 若移动 k 阶 NURBS 曲线的控制顶点 P_i 或改变所联系的权因子将仅仅影响定义在区间 $[t_i, t_{i+k}]$ 上那部分曲线的形状，对 NURBS 曲线的其它部分不发生影响；
 - k 阶 NURBS 曲线上参数为 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 的一点 $P(t)$ 至多与 k 个控制顶点 P_i 及相联系的权因子 $\omega_j (j = i-k+1, i-k+1, \dots, i)$ 有关，与其它顶点及权因子无关。
- 变差缩减性
- 在仿射变换和透视变换下的不变性

3.4.1 NURBS曲线定义

- 强的凸包性质
 - 定义在非零节点区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上那一曲线段位于它的 k 个控制顶点 $P_j (j = i-k+1, i-k+1, \dots, i)$ 的凸包内;
 - 整条曲线位于所有定义各曲线段的控制顶点的凸包的并集内
 - 所有权因子非负性保证了凸包性质成立。
- 在曲线定义域内有与有理基函数同样的可微性或参数连续性, 即在节点处是 $(k-r-1)$ 次可微的;
- 如果某个权因子 ω_i 等于零, 那么相应的那个控制顶点 P_j 对曲线根本没有影响。
 - 若 $\omega_i \rightarrow +\infty$ 和 $t \in [t_i, t_{i+k}]$ 时, $P(t) = P_i$ 即控制顶点在曲线上。

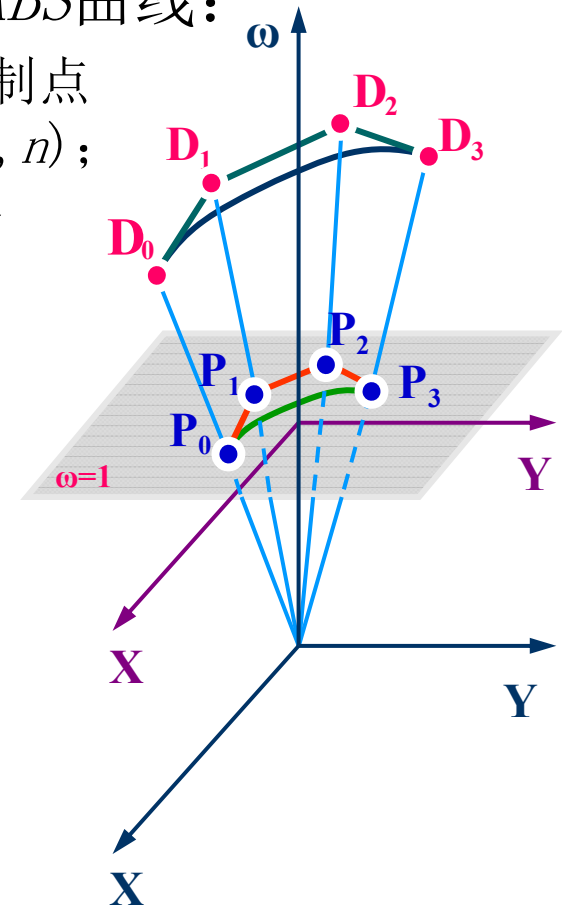
3.4.3 NURBS曲线齐次坐标表示

- 对平面内给定控制顶点 $P_i=[x_i, y_i]$ ($i=0, 1, \dots, n$) 及相联系的权因子 ω_i , 按下列步骤定义 k 阶NURBS曲线:
 - 确定所给控制顶点 P_i ($i=0, 1, \dots, n$) 的带权控制点 $D_i=[\omega_i P_i, \omega_i]=[\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i]$ ($i=0, 1, \dots, n$);
 - 用带权控制点 D_i ($i=0, 1, \dots, n$) 定义一条三维的 k 阶非有理B样条曲线:

$$p(t) = \sum_{i=0}^n D_i N_{i,k}(t)$$

- 将它投影到 $\omega=1$ 平面上, 所得透视像即 xy 平面上一条 k 阶NURBS曲线:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}$$



3.4.3 NURBS曲线齐次坐标表示

- 对于三维空间内一组给定控制顶点 $P_i=[x_i, y_i, z_i]$ 及相联系的权因子 ω_i ($i=0,1,\dots,n$), 可用同样的方法定义。
 - 先确定控制顶点 P_i ($i=0,1,\dots,n$)的带权控制点:
$$D_i=[\omega_i P_i, \omega_i]=[\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i, \omega_i] (i=0,1,\dots,n),$$
 - 用带权控制点 D_i 定义一条四维的 k 阶非有理B样条曲线:

$$p(t) = \sum_{i=0}^n D_i N_{i,k}(t)$$

- 取它在 $\omega=1$ 超平面的中心投影, 即得三维空间里的一条 k 阶NURBS曲线:

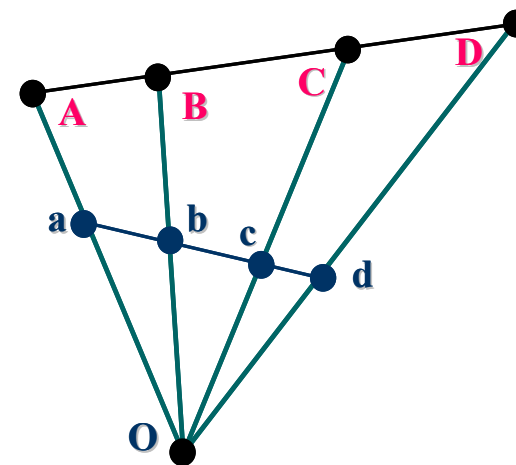
$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}$$

3.4.3 权因子的几何意义

- 交比：共线四点 a, b, c, d 的交比定义为：

$$Cr(a, b, c, d) = (ab/bd) / (ac/cd)$$

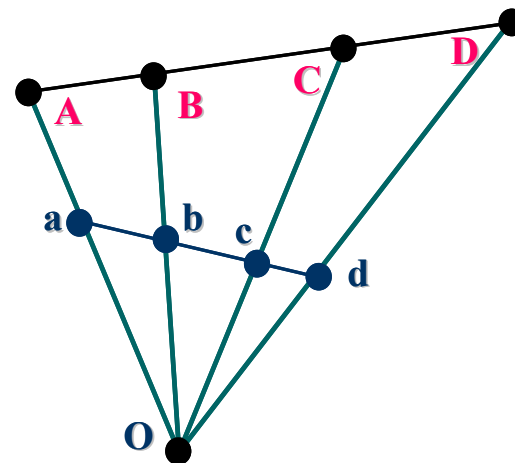
- ad 及所分四线段都应理解为有向线段 \rightarrow 所取长度为代数长。
- 直线段被分成两子段的长度比在仿射变换中保持不变；
- 在投影变换中上述长度就不再保持不变，但却保持交比不变。



3.4.3 权因子的几何意义

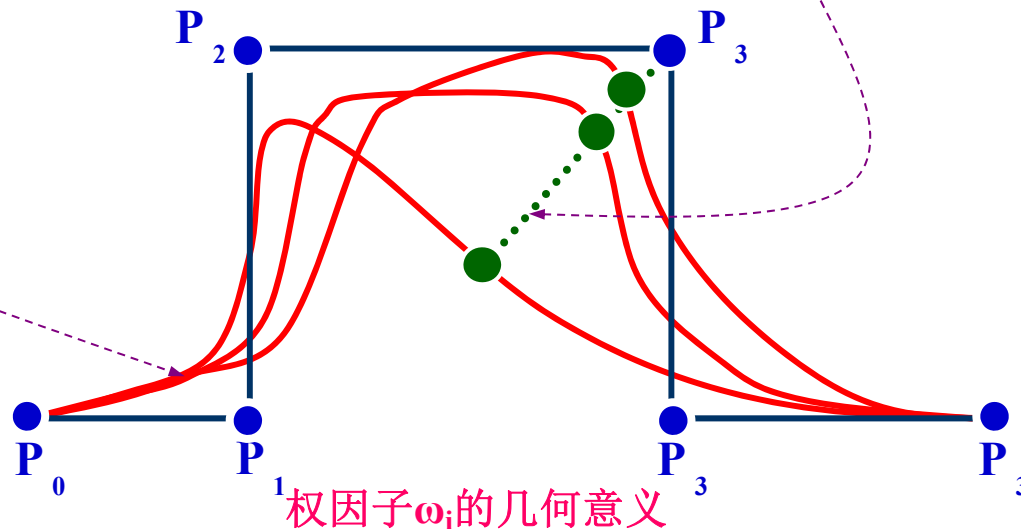
- 共线四点的交比仅与在投影中心的角度有关：
 - 从投影中心出发的四射线可与任一直线相交，不管该直线怎样选择，所得四个交点将有同样的交比。
 - 所有这样的直线都与投影有关。因此，在投影变换中交比保持不变，即：

$$Cr(a, b, c, d) = Cr(A, B, C, D)$$



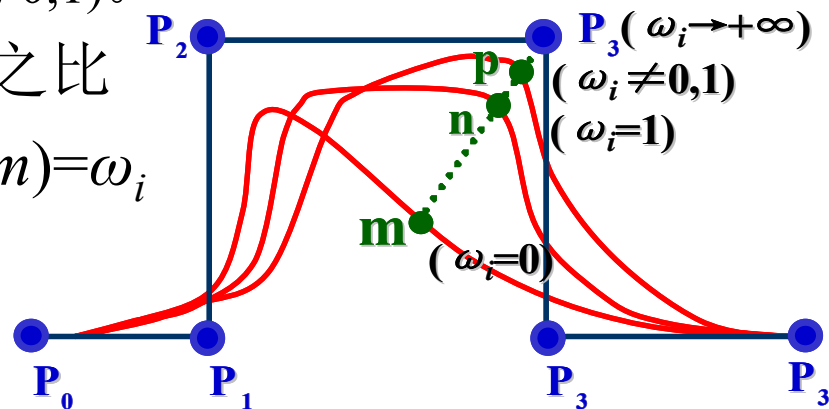
3.4.3 权因子的几何意义

- 权因子 ω_i 仅影响定义在区间 $[t_i, t_{i+k}]$ 上那部分曲线的形状，仅需考察整条曲线中的这部分。
 - 给定一个 ω_i 便可得到一条曲线；
 - 如果使 ω_i 在某个范围内变化，则得到一族曲线。
 - 如果固定曲线的参数 t ，而使 ω_i 变化，则NURBS曲线方程变成以 ω_i 为参数的直线方程。
 - 这一簇NURBS曲线上参数 t 值相同的点都位于同一直线上。



3.4.3 权因子的几何意义

- 把曲线与有理基函数的记号用包含权因子为变量的记号代替：
 - 当 $\omega_i \rightarrow +\infty$ 时, $R_{i,k}(t; \omega_i \rightarrow +\infty) = 1$, 直线通过控制顶点:
 $P_i = P(t; \omega_i \rightarrow +\infty)$;
 - 当 $\omega_i = 0$ 时, $R_{i,k}(t; \omega_i = 0) = 0$; 控制顶点对曲线不起作用, 对应得到点: $m = P(t; \omega_i = 0)$;
 - 当 $\omega_i = 1$ 时, 对应得到点: $n = P(t; \omega_i = 1)$;
 - 当 $\omega_i \neq 0, 1$ 时, 相应有点: $p = P(t; \omega_i \neq 0, 1)$ 。
- 可以证明: p 点和 n 点分直线段之比就是形状因子: $(P_i n / nm) / (P_i p / pm) = \omega_i$
即参数值相同的直线上四点 P_i 、 p 、 n 、 m 的交比。



3.4.3 权因子的几何意义

- 形状因子的几何意义：
 - 权因子 ω_i 等于过控制顶点 P_i 的一条直线上分别具有 $\omega_i = +\infty, 0, 1$ 和 $\omega_i \neq 0, 1$ 的四个点 P_i, m, n, p 的交比。
 - 该直线是仅改变权因子 ω_i 所得一族NURBS曲线上具有某个相同参数 t 的点集合；
 - 这四个点中前三个点是特定点；
 - 如改变参数 t 将得到另一条过控制顶点 P_i 的直线。

3.4.3 权因子的几何意义

- 形状因子对曲线形状的影响：
 - 若固定所有控制顶点及除 ω_i 外所有其它权因子不变：
 - 当 ω_i 变化时， p 点随之移动，它在空间扫描出一条过控制顶点 P_i 的一条直线。
 - 权因子 ω_i 的减小和增加起到了对曲线形状相对于顶点 P_i 的推拉作用。
 - $\omega_i \rightarrow +\infty$ 时， p 趋近与控制顶点 P_i 重合；
 - ω_i 增加：曲线在受影响范围内被拉向控制顶点 P_i ；
 - ω_i 减小：曲线在受影响范围内被推离控制顶点 P_i 。

3.4.4 圆锥曲线的NURBS表示

- 圆锥曲线：包含圆，椭圆，抛物线和双曲线及一些退化形式。
 - 几何观点：用一个平面去截一个圆锥面，得到的交线。
 - 焦点-准线观点。



3.4.4 圆锥曲线的NURBS表示

- 焦点-准线观点:

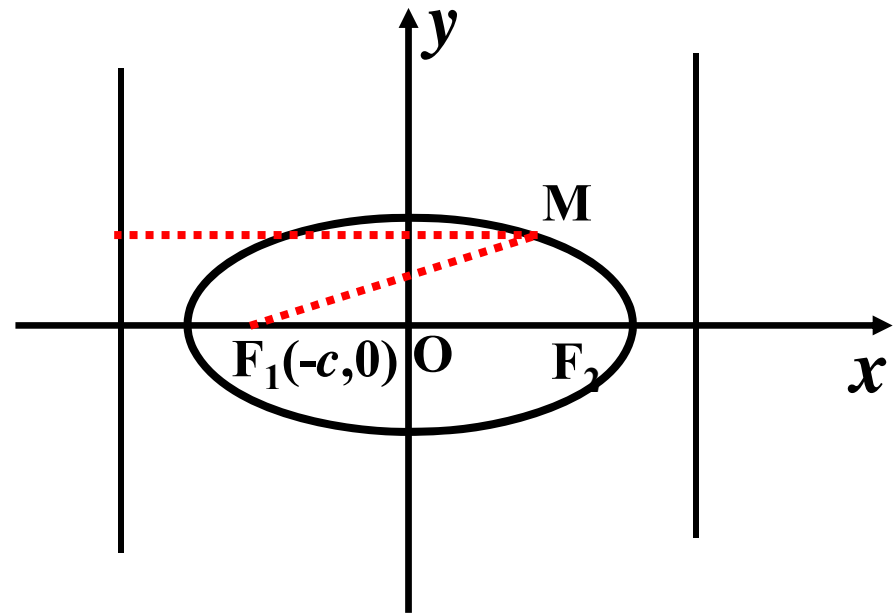
到定点（焦点）的距离与到定直线（准线）的距离的比 e 是常数的点的轨迹叫做圆锥曲线。

- 椭圆;
- 双曲线;
- 抛物线。

3.4.4 圆锥曲线的NURBS表示

- 椭圆：
 - 当 $0 < e < 1$ 时为椭圆；
 - 标准方程：

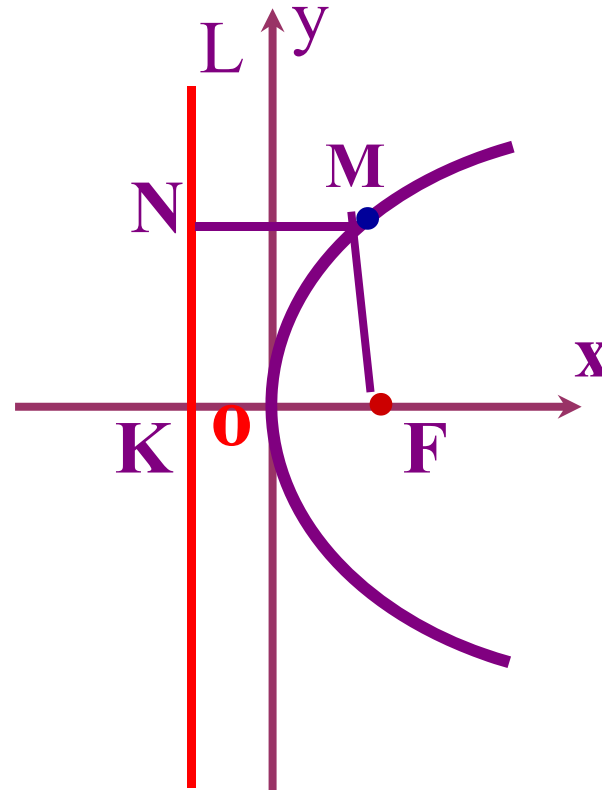
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a \neq b)$$



3.4.4 圆锥曲线的NURBS表示

- 抛物线：
 - 当 $e=1$ 时为抛物线；
 - 标准方程：

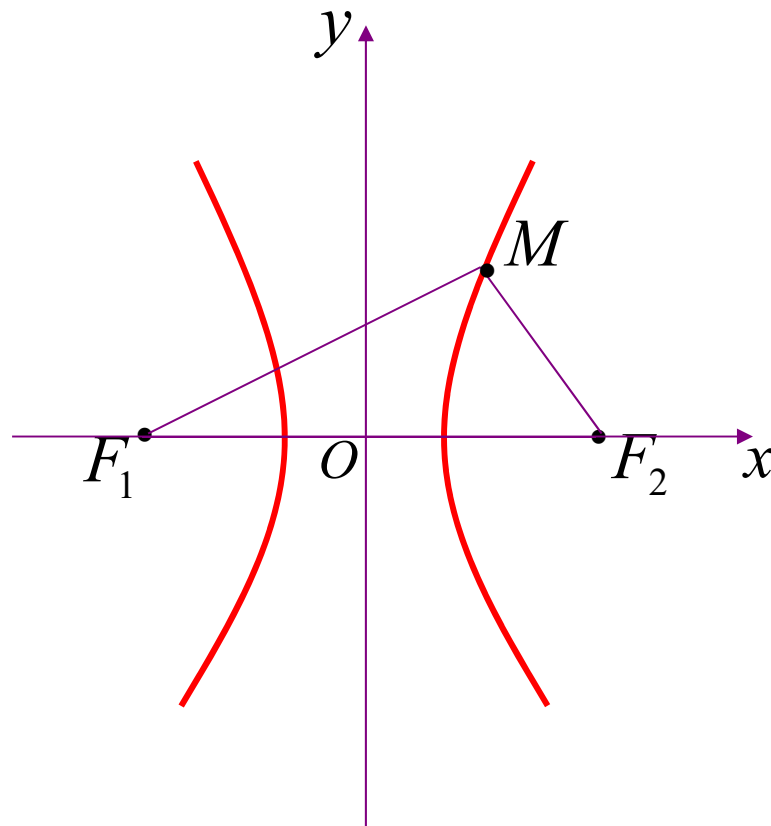
$$y^2 = 2px (p > 0)$$



3.4.4 圆锥曲线的NURBS表示

- 双曲线：
 - 当 $e > 1$ 时为双曲线；
 - 标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b \neq 0)$$



3.4.4 圆锥曲线的NURBS表示

- 取节点向量为 $T=[0,0,0,1,1,1]$ ，则NURBS曲线退化为二次Bezier曲线，且可以证明，这是圆锥曲线弧方程。

$$P(t) = \frac{(1-t^2)\omega_0 P_0 + 2t(1-t)\omega_1 P_1 + t^2\omega_2 P_2}{(1-t)^2\omega_0 + 2t(1-t)\omega_1 + t^2\omega_2}$$

$C_{sf} = \frac{\omega_1^2}{\omega_0\omega_2}$ ：形状因子，其值确定了圆锥曲线的类型：

- $C_{sf} = 1$ 时，上式是抛物线弧；
- $C_{sf} \in (1, +\infty)$ 时，上式是双曲线弧；

3.4.4 圆锥曲线的NURBS表示

- $C_{sf} \in (0,1)$ 时，上式是椭圆弧；
- $C_{sf} = 0$ 时，上式退化为一对直线段 P_0P_1 和 P_1P_2 ；
- $C_{sf} \rightarrow +\infty$ 时，上式退化为连接两点 P_0P_2 的直线段。

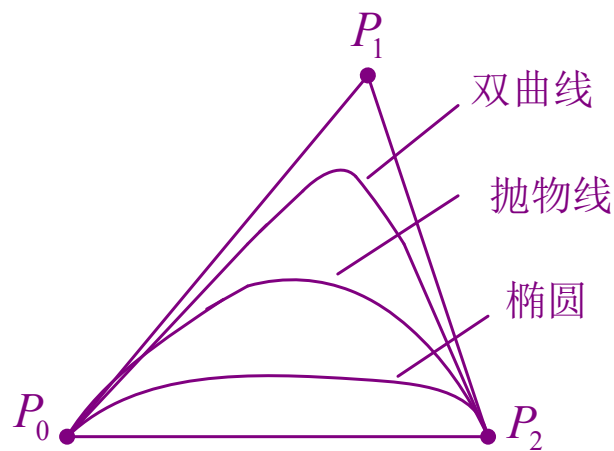


图3.1.36 圆锥曲线的
NURBS 表示

3.4.5 NURBS曲线修改

- De Boor算法、插入节点和升阶算法等都可以推广到NURBS曲线
 - 高一维的带权控制顶点执行，然后取其在 $\omega=1$ 超平面上的投影即为所求。

3.4.5 NURBS曲线修改

- 常见NURBS曲线的修改方法包括：
 - 修改权因子；
 - 修改控制顶点；
 - 反插节点；
 - 基于几何约束的形状修改。

3.4.5 NURBS曲线修改

- 修改权因子：
 - 若已给定一条 k 阶NURBS曲线上参数为 t 的一点 S ，欲将曲线在该点拉向或推离控制顶点 P_i 一个距离 d ，以得到一个新点 S^* 。
 - 权因子对NURBS曲线的影响是：
 - 当保持控制顶点与其它权因子不变，减少或增加权因子时，起到把曲线推离和拉向相应顶点的作用；
 - 可由重新确定相应的权因子 ω_i 使之改变为 ω_i^* 来达到；

3.4.5 NURBS曲线修改

- 拾取曲线上一点 S ，确定该点的参数 $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ，再拾取控制多边形一个顶点 P_i ，它是个控制顶点中的一个 $P_{j-k+1}, P_{j-k+2}, \dots, P_j$ ，即 $j-k+1 \leq i \leq j$ ，根据距离 d ，确定点 S^* ，从而计算出替代旧权因子 ω_i 的新权因子 ω_i^* ，使得修改后的曲线将通过 S^* 点。
 - d 取有向距离：若 S^* 在 S 和 P_i 之间，即曲线被拉向顶点 P_i ，则 d 为正；反之 d 为负。

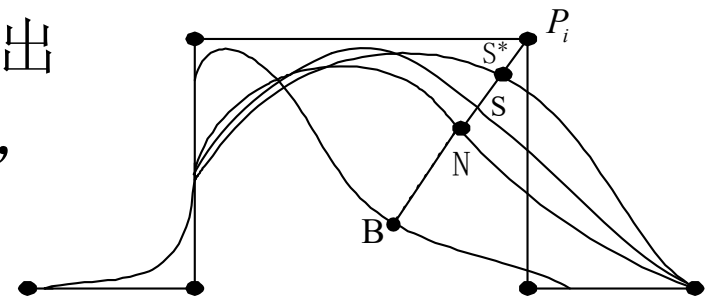


图 3.1.37 修改权因子

$$\omega_i^* = \omega_i \left[1 + \frac{d}{R_{i,k}(t)(P_i S - d)} \right]$$

3.4.5 NURBS曲线修改

- 公式推导

$$S = (1 - \beta)B + \beta P_i \quad \beta = R_{i,k}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{P_i S}{SB} = \frac{1 - \beta}{\beta}$$

$$\omega_i = \frac{P_i N}{NB} \cdot \frac{P_i S}{SB}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_i^*}{\omega_i} = \left[1 + \frac{d}{R_{i,k}(t)(P_i S - d)} \right]$$

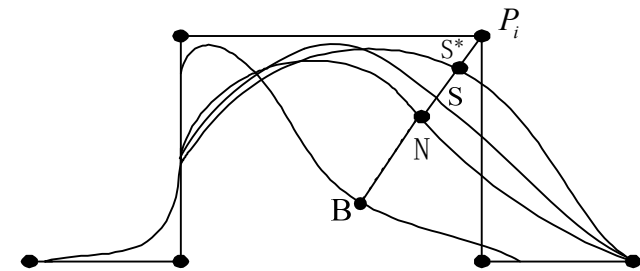


图 3.1.37 修改权因子

$$\omega_i^* = \frac{P_i N}{NB} \cdot \frac{P_i S^*}{S^* B} = \frac{P_i N}{NB} \cdot \frac{P_i S - d}{SB + d}$$

3.4.5 NURBS曲线修改

- 修改控制顶点：最简单的形状修改方法
 - 给定一条 k 阶NURBS曲线。若指定该曲线参数为 t 的点 S 、一个方向矢量 V 和一个距离 d ，那么控制顶点 P_i 移到新位置 P_i^* 使曲线上点 S 沿 V 移动距离 d 到新位置

$$S^*: \quad S^* = \sum_{j=0, i \neq j}^n [P_j R_{j,k}(t) + (P_i + \alpha V) R_{i,k}(t)]$$
$$|S^* - S| = d = \alpha |V| R_{i,k}(t) \Rightarrow \alpha = \frac{d}{|V| R_{i,k}(t)}$$

- 由此可得新控制顶点：

$$P_i^* = P_i + \alpha V$$

3.4.5 NURBS曲线修改

- 待移动控制顶点的选择必须适当，否则将事与愿违
 - 当指定曲线上一点 S ，该点的参数 t 可能已知或由反算得到。 t 所在节点区间 $t \in [t_j, t_{j+1}]$ 也就确定，曲线上该点至多与 k 个控制顶点 $P_{j-k+1}, P_{j-k+2}, \dots, P_j$ 有关；
 - 所选顶点应是这 k 个顶点之一、且应考虑取这 k 个顶点中对曲线上 S 点影响最大的顶点或某个合适的顶点
 - 最大影响顶点对应于 S 点参数 t 处的一组有理基函数中取最大值的那个基函数；
 - 实践中常以曲线的分段点为曲线上要移动的点。

3.4.5 NURBS曲线修改

- 反插节点
 - 已给一条 k 阶NURBS曲线及节点向量 $T=[t_0, t_1, \dots, t_{n+k}]$ 。现欲在该多边形的 $P_i P_{i+1}$ 边上任意选取一点 \bar{P} ，要求插入一个新节点 \bar{t} 以使所选取的点 \bar{P} 成为一个新控制顶点。
 - \bar{P} 点可按有理线性插值表示出：

$$\bar{P} = \left[(1-s)\omega_i P_i + s\omega_{i+1} P_{i+1} \right] / \left[(1-s)\omega_i + s\omega_{i+1} \right]$$
$$s = \left(\omega_i |\bar{P} - P_i| \right) / \left[\left(\omega_i |\bar{P} - P_i| \right) + \left(\omega_{i+1} |P_{i+1} - P_i| \right) \right]$$

所以有： $\bar{t} = t_{i+1} + s(t_{i+k} - t_{i+1})$

- 此即使 \bar{P} 点成为新控制顶点而**要插入的新节点**

3.4.5 NURBS曲线修改

- 反插接点（续）

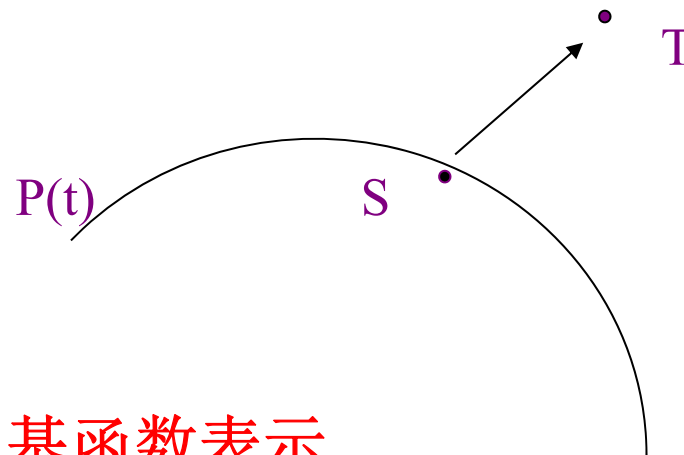


使 \bar{P} 成为新控制顶点

- 当插入新节点时，将有 $(k-2)$ 个旧控制顶点被包括 \bar{P} 在内的 $(k-1)$ 个新控制顶点所替代；
 - 若含重节点，则生成新与被替代老顶点都相应地减少。
- 节点并没有改变曲线的形状，却为重新定位控制顶点及改变权因子以修改曲线的形状扩大了应用范围。

3.4.5 NURBS曲线修改

- 基于几何约束的形状修改
 - 问题：求新的控制顶点，使曲线上的点S变到T。



- 采用有理基函数表示

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,k}(t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1} \quad R_{i,k}(t) = \frac{\omega_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)}$$

3.4.5 NURBS曲线修改

- 约束优化方法

假设改变控制顶点 $P_l, P_{l+1}, \dots, P_{l+m-1}$ ，以满足点约束。

对以上每个点，给一个扰动量 $\varepsilon_i = (\varepsilon_i^x, \varepsilon_i^y, \varepsilon_i^z)^T$ ，并用约束优化方法求之。约束条件为：

$$\sum_{i=l}^{l+m-1} \|\varepsilon_i\|^2 = \text{Min}$$

新曲线方程

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t) &= \sum_{i=0}^{l-1} P_i R_{i,k}(t) + \sum_{i=l}^{l+m-1} (P_i + \varepsilon_i) R_{i,k}(t) + \sum_{i=l+m}^n P_i R_{i,k}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n P_i R_{i,k}(t) + \sum_{i=l}^{l+m-1} \varepsilon_i R_{i,k}(t) \quad t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1}\end{aligned}$$

Lagrange乘数法

于是，如果构造 **Lagrange** 函数

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda G(x, y, z) - \mu H(x, y, z)$$

(λ, μ 称为 **Lagrange** 乘数)，则条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x - \lambda G_x - \mu H_x = 0, \\ L_y = f_y - \lambda G_y - \mu H_y = 0, \\ L_z = f_z - \lambda G_z - \mu H_z = 0, \\ G = 0, \\ H = 0 \end{cases}$$

的所有解 $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ 所对应的点 (x_0, y_0, z_0) 中。用这种方法来求可能的条件极值点的方法，称为 **Lagrange** 乘数法。

3.4.5 NURBS曲线修改

构造Lagrange 函数

$$L = \sum_{i=l}^{l+m-1} \|\varepsilon_i\|^2 + \lambda (T - \tilde{P}(t_s))$$

解方程组可得

$$\begin{cases} T = S + \sum_{i=l}^{l+m-1} \varepsilon_i R_{i,k}(t_s) \\ \varepsilon_i = \frac{\lambda}{2} R_{i,k}(t_s), \quad i = l, l+1, \dots, l+m-1 \end{cases}$$

由上式可得:

$$\varepsilon_i = \frac{R_{i,k}(t_s)}{\sum_{j=l}^{l+m-1} R_{j,k}^2(t_s)} (T - S), \quad i = l, l+1, \dots, l+m-1$$

调整单个控制顶点:

$$\varepsilon = \frac{T - S}{R_{i,k}(t_s)}$$

三次参数曲线性质比较

- 三次 *Hermite* 曲线、*Bézier* 曲线、B样条曲线可以在凸包性、连续性等方面进行简单比较。
 - 连续性指的是通常情况下容易获得的连续阶数，对于三次 *Bézier* 曲线来说，一般能达到 C^1 和 G^1 ，但它很容易产生一个拐点，所以达到 G^2 较困难。

	<i>Hermite</i> 曲线	<i>Bézier</i> 曲线	均匀B样条曲线	非均匀B样条曲线
凸包性	×	√	√	√
插值控制顶点	√	√	×	增加节点的重数可以使曲线插值控制顶点
连续性	C^1, G^1	C^1, G^1	C^2, G^2	C^2, G^2
控制形状的参量	端点位置与切矢量	控制顶点	控制顶点	控制顶点与节点

$$P(t) = F_0 P_0 + F_1 P_1 + G_0 P_0' + G_1 P_1' \quad t \in [0, 1]$$

三次参数曲线转换

- 三次Hermite样条曲线

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ R_0 \\ R_1 \end{bmatrix} = T \cdot G_H \cdot M_H$$

– G_H 是Hermite矩阵， M_H 是Hermite几何矢量。

- 三次Bezier曲线

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = T \cdot G_{BEZ} \cdot M_{BEZ} \quad t \in [0, 1]$$

三次参数曲线转换

- 三次B样条曲线

- B样条基函数: $F_{j,k}(t) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k-i} (-1)^m C_{k+1}^m (t + k - m - j)^k$
- 第 i 段 $(k-1)$ 次曲线 $P_{i,k}$:

$$\begin{aligned} P_{i,k}(t) &= \sum_{j=0}^k P_{i+j} F_{j,k}(t) \\ &= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \\ &= T \cdot G_{Bi} \cdot M_{Bi} \quad t \in [0, 1) \end{aligned}$$

三次参数曲线转换

- 三次*Hermite*曲线、*Bézier*曲线、B样条曲线都是多项式曲线，它们不过是曲线不同的表示形式。不同的表示适用于不同的应用场合，并且它们之间可以相互转换。
- 三次*Hermite*曲线可用矩阵表示为： $P(u)=T \cdot G_H \cdot M_H$;
三次*Bézier*曲线可用矩阵表示为： $P(u)=T \cdot G_{BEZ} \cdot M_{BEZ}$;
三次B样条曲线可用矩阵表示为： $P(u)=T \cdot G_{Bi} \cdot M_{Bi}$ 。

三次参数曲线转换

- 从 *Hermite* 形式转换为另外两种形式:

$$G_H \cdot M_H = G_{BEZ} \cdot M_{BEZ} \Rightarrow M_{BEZ} = G_{BEZ}^{-1} \cdot G_H \cdot M_H;$$

$$G_H \cdot M_H = G_{Bi} \cdot M_{Bi} \Rightarrow M_{Bi} = G_{Bi}^{-1} \cdot G_H \cdot M_H.$$

- 从 *Bézier* 形式转换为另外两种形式:

$$G_{BEZ} \cdot M_{BEZ} = G_H \cdot M_H \Rightarrow M_H = G_H^{-1} \cdot G_{BEZ} \cdot M_{BEZ};$$

$$G_{BEZ} \cdot M_{BEZ} = G_{Bi} \cdot M_{Bi} \Rightarrow M_{Bi} = G_{Bi}^{-1} \cdot G_{BEZ} \cdot M_{BEZ}.$$

- 从 B 样条形式转换为另外两种形式:

$$G_{Bi} \cdot M_{Bi} = G_H \cdot M_H \Rightarrow M_H = G_H^{-1} \cdot G_{Bi} \cdot M_{Bi};$$

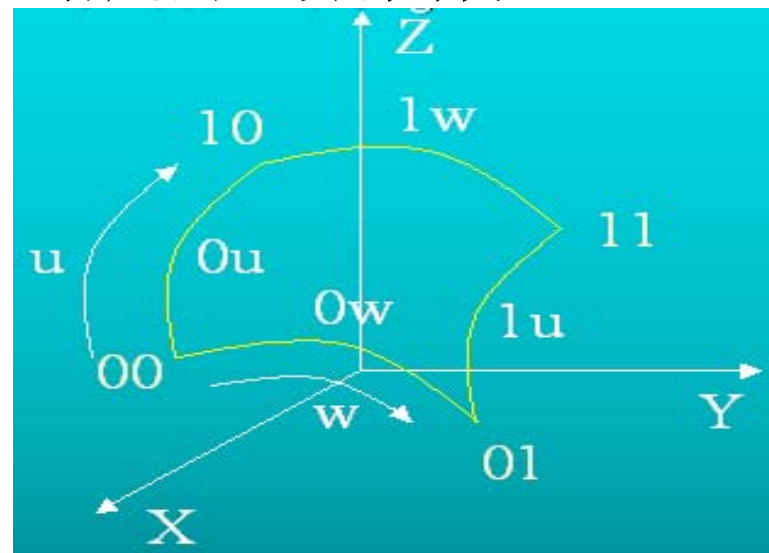
$$G_{Bi} \cdot M_{Bi} = G_{BEZ} \cdot M_{BEZ} \Rightarrow M_{Bez} = G_{BEZ}^{-1} \cdot G_{Bi} \cdot M_B.$$

第三章 几何造型技术

- 几何造型技术
 - 参数曲线和曲面
 - Bezier 曲线与曲面
 - B样条曲线与曲面
 - NURBS曲线和曲面
 - Coons曲面
 - 形体在计算机内的表示
 - 求交分类
 - 实体造型系统简介
 - 三角网格

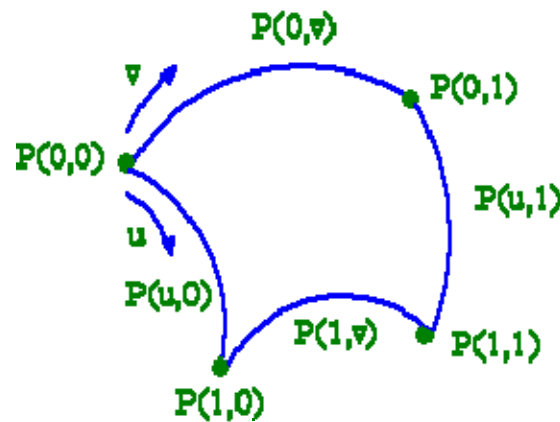
3.5 Coons曲面

- Bézier和B样条曲面的特点是曲面逼近控制网格。
- 1964年，美国麻省理工学院S. A. Coons提出了一种曲面分片、拼合造型的思想。
 - Coons曲面的特点是插值，即对给定四边形的边界曲线段进行插值，构造的曲面满足给定的边界条件；
 - 例如：通过给定边界，具有给定的跨界导矢等等，其中给定的边界可以是任意形式的曲线。



3.5.2 双线性Coons曲面

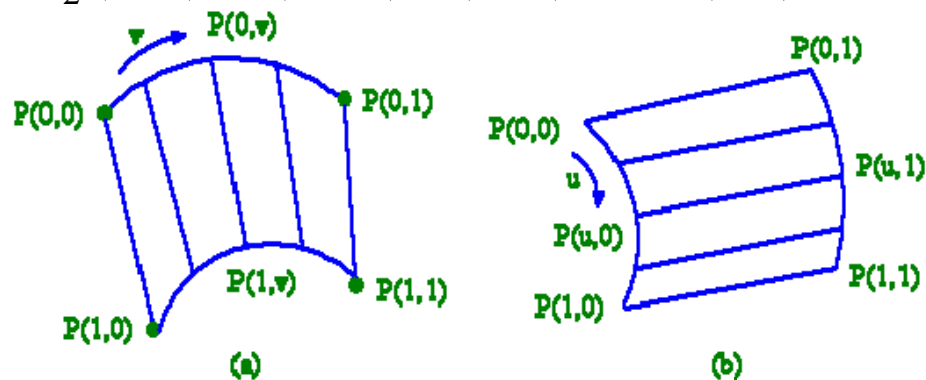
- 问题：给定4条在空间围成封闭曲边四边形的参数曲线 $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, v)$, $P(1, v)$, $u, v \in [0, 1]$ 。怎样构造一张参数曲面使得以给定的4条参数曲线为边界？



四条边界曲线

3.5.2 双线性Coons曲面

- 最简单的情况：
 - 在 u 向进行线性插值，得到以 $P(0,v)$ 和 $P(1,v)$ 为边界的直纹面： $P_1(u,v) = (1-u)P(0,v) + uP(1,v), \quad u,v \in [0,1]$
 - 在 v 向进行线性插值，得到以 $P(u,0)$ 和 $P(u,1)$ 为边界的直纹面： $P_2(u,v) = (1-v)P(u,0) + vP(u,1), \quad u,v \in [0,1]$

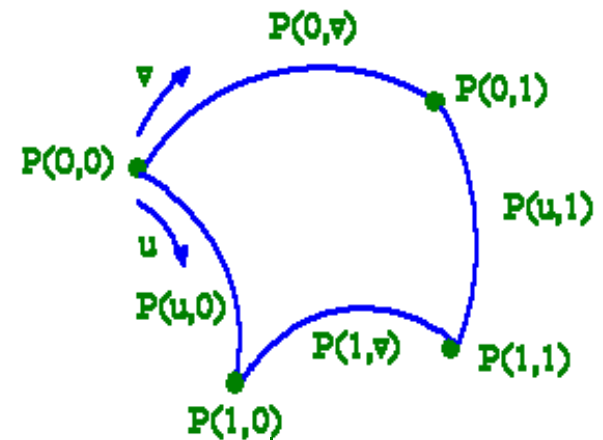


- 如把 $P_1(u,v)$ 和 $P_2(u,v)$ 叠加，产生的新曲面的边界是除给定的边界外，迭加了一个连接边界两个端点的直边。

3.5.2 双线性Coons曲面

- 再构造分别过端点 $P(0,0)$ 、 $P(0,1)$ 及 $P(1,0)$ 、 $P(1,1)$ 的直线段:

$$\begin{aligned} (1-v)P(0,0) + vP(0,1) \\ (1-v)P(1,0) + vP(1,1) \end{aligned} \quad v \in [0,1]$$



- 然后以这两条直线段为边界，构造直纹面 $P_3(u,v)$:

$$\begin{aligned} P_3(u,v) &= (1-u)[(1-v)P(0,0) + vP(0,1)] + u[(1-v)P(1,0) + vP(1,1)] \\ &= [1-u \quad u] \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}, \quad u, v \in [0,1] \end{aligned}$$

- 容易验证 $P(u,v) = P_1(u,v) + P_2(u,v) - P_3(u,v)$ 便是所要求构造的曲面(双线性Coons曲面片)。

3.5.2 双线性Coons曲面

- $P(u, v)$ 可进一步改写成矩阵的形式:

$$P(u, v) = - \begin{bmatrix} -1 & 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(u,0) & P(u,1) \\ P(0,v) & P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,v) & P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

- 边界信息矩阵: 包含了曲面的全部边界信息。
- 所构造了双线性Coons曲面片, 进行曲面拼合时, 可以自动保证整张曲面在边界的位置连续。

3.5.2 双三次Coons曲面

- 双线性Coons曲面片边界的跨界切矢是否连续？
- $P(u, 0)$ 的跨界切矢：

$$P_v(u, 0) = P(u, 1) - P(u, 0) + [1-u \quad u] \begin{bmatrix} P_v(0, 0) + P(0, 0) - P(0, 1) \\ P_v(1, 0) + P(1, 0) - P(1, 1) \end{bmatrix}$$

- 跨界切矢不仅与该边界曲线有关，还与该边界端点的切矢有关；
- 双线性Coons曲面在曲面片的边界上跨界切矢一般不连续，不能达到曲面片的光滑拼接。
- 问题：如何构造光滑拼接的Coons曲面？

3.5.2 双三次Coons曲面

- 构造光滑拼接的Coons曲面

- 四条边界曲线

$$P(u,0), P(u,1), P(0,v), P(1,v) \quad u, v \in [0,1]$$

- 四条边界曲线的跨界切矢

$$P_v(u,0), P_v(u,1), P_v(0,v), P_v(1,v) \quad u, v \in [0,1]$$

- 取Hermite基函数 F_0, F_1, G_0, G_1 作为调和函数，以类似双线性Coons曲面的构造方法，构造双三次Coons曲面。

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$G_0(t) = t^3 - 2t^2 + t \quad G_1(t) = t^3 - t^2$$

3.5.2 双三次Coons曲面

- 构造光滑拼接的Coons曲面步骤

- 在 u 向可得曲面 $P_1(u,v)$:

$$P_1(u,v) = F_0(u)P(0,v) + F_1(u)P(1,v) + G_0(u)P_u(0,v) + G_1(u)P_u(1,v) \quad u,v \in [0,1]$$

- 在 v 向可得曲面 $P_2(u,v)$:

$$P_2(u,v) = F_0(v)P(u,0) + F_1(v)P(u,1) + G_0(v)P_v(u,0) + G_1(v)P_v(u,1) \quad u,v \in [0,1]$$

- 对角点的数据进行插值, 可得曲面 $P_3(u,v)$:

$$P_3(u,v) = \begin{bmatrix} F_0(u) & F_1(u) & G_0(u) & G_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

3.5.2 双三次Coons曲面

- 双三次Coons曲面: $P(u,v)=P_1(u,v)+P_2(u,v)-P_3(u,v)$ 的边界及其跨界切矢就是已给定的四条边界曲线和四条边界曲线的跨界切矢

$$P(u,v) = - \begin{bmatrix} -1 \\ F_0(u) \\ F_1(u) \\ G_0(u) \\ G_1(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P(u,1) & P(u,1) & P_v(u,0) & P_v(u,1) \\ P(0,v) & P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,v) & P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,v) & P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,v) & P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

- 边界信息矩阵: 第1行与第1列包含着给定的两对边界与相应的跨界切矢, 剩下的四阶子方阵的元素由四个角点上的信息组成

3.5.2 双三次Coons曲面

$$\begin{bmatrix} 0 & P(u,0) & P(u,1) \\ P(0,v) & P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,v) & P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(u,1) & P(u,1) & P_v(u,0) & P_v(u,1) \\ P(0,v) & P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,v) & P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,v) & P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,v) & P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

双线性Coons曲面

双三次Coons曲面

- 对比边界信息矩阵：
 - 对曲面片满足边界条件的要求提高一阶，曲面方程中的矩阵就要扩大二阶，并且要多用一对调和函数；
 - 矩阵的第一行与第一列包含着全部给定边界信息；
 - 余下的子方阵则包含着角点信息。



谢谢！