

Modos rotacionales y vibracionales en moléculas

José Soto García

31 de diciembre de 2018

1. La molécula como un sólido rígido: hamiltoniano asociado a la rotación de la misma en torno a su centro de masas.

Un sólido rígido se define como una colección de partículas, cuyas distancias relativas se mantienen fijas [3]. El momento de inercia I_i de un sólido rígido con n partículas sobre un eje i se define como:

$$I_i = \sum_{j=1}^n m_j r_j^2 \quad (1)$$

con r_j la distancia desde la partícula de masa m_j al eje i .

1.1. El rotor rígido diatómico

El rotor rígido de dos partículas consiste en dos masas m_1 y m_2 unidas a una barra sin masa con una distancia fija d . Dado que la distancia es fija, la energía potencial no varía con la rotación del rotor, luego $V = 0$. [2] El momento de inercia de una molécula diatómica puede escribirse como:

$$I = \mu R^2 \quad (2)$$

Podemos determinar los niveles de energía de este sistema resolviendo la ecuación de Schrödinger. Suponiendo que el radio entre los dos átomos no varía, la ecuación de Schrödinger queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] Y_l^m(\theta, \phi) = E_l Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3)$$

Con

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$$

Si llamamos

$$B \equiv \frac{h}{8\pi^2 I}$$

obtenemos que:

$$E/h = BJ(J+1) \quad (4)$$

La energía está $2l+1$ veces degenerada debido a que para un l fijo, distintos valores de m tienen la misma energía.

1.2. El rotor rígido poliatómico

Se define el tensor de inercia \tilde{I} como:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,1} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,1} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,2} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Clásicamente, la energía cinética rotacional del sistema se obtiene como:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{i,j} \omega_i \omega_j \quad (6)$$

Una clara simplificación se encuentra si diagonalizamos el tensor de inercia. Los vectores que diagonalizan la matriz de inercia son los denominados ejes principales de inercia. La energía cinética rotacional clásica del sistema queda por tanto [3]:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_a \omega_a^2 + I_b \omega_b^2 + I_c \omega_c^2) \quad (7)$$

con I_a , I_b , e I_c los autovalores del momento de inercia.

Para formar el hamiltoniano del sistema, necesitamos la energía en función del momento angular P , con $P_i = I_i \omega_i$. La energía cinética queda entonces como:

$$T_{rot} = \frac{P_a^2}{2I_a} + \frac{P_b^2}{2I_b} + \frac{P_c^2}{2I_c} \quad (8)$$

El nuevo sistema de referencia $\{a, b, c\}$ se consigue mediante tres rotaciones $\{\theta, \phi, \chi\}$ a través del centro de masas O . Son los llamados ángulos de Euler (figura 1). De la figura 1 podemos ver que:

$$\hat{P}_{\phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \hat{P}_N = \frac{\partial}{\partial N}, \quad \hat{P}_{\chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} P_N &= P_a \sin \chi + P_b \cos \chi \\ P_Z &= -P_a \sin \theta \cos \chi + P_b \sin \theta \sin \chi + P_c \cos \theta \end{aligned}$$

Obtenemos que:

$$\hat{P}_a = i\hbar \left[\cos \chi \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \cos \chi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \chi} - \sin \chi \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \quad (10)$$

$$\hat{P}_b = i\hbar \left[-\sin \chi \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \sin \chi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \chi} - \cos \chi \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \quad (11)$$

$$\hat{P}_c = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (12)$$

O también:

$$\hat{P}_X = i\hbar \left[\cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \cos \phi \csc \theta \frac{\partial}{\partial \chi} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \quad (13)$$

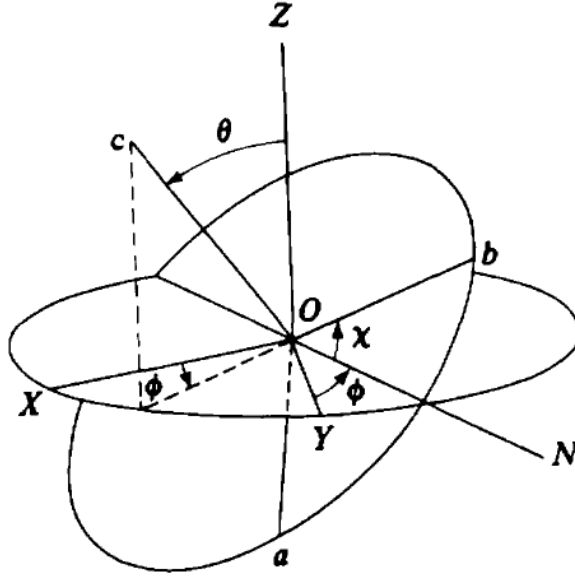


Figura 1: EXPLICAR

$$\hat{P}_Y = i\hbar \left[\sin\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} - \sin\phi \csc\theta \frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} \right] \quad (14)$$

$$\hat{P}_Z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \quad (15)$$

Sabemos que el hamiltoniano rotacional es

$$\hat{H}_{rot} = \frac{\hat{P}_a^2}{2I_a} + \frac{\hat{P}_b^2}{2I_b} + \frac{\hat{P}_c^2}{2I_c} \quad (16)$$

y el operador momento angular total es:

$$\hat{P}^2 = \hat{P}_a^2 + \hat{P}_b^2 + \hat{P}_c^2 = \hat{P}_X^2 + \hat{P}_Y^2 + \hat{P}_Z^2 \quad (17)$$

Una forma de obtener los autovalores de Energía sería sustituir los valores de P y resolver la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, estos autovalores se pueden obtener mediante relaciones de conmutación. Las relaciones de conmutación que necesitaremos son las siguientes:

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = -i\hbar \delta_{i,j} \hat{P}_k \quad (18)$$

$$[\hat{P}_I, \hat{P}_J] = i\hbar \delta_{I,J} \hat{P}_K \quad (19)$$

$$[\hat{P}^2, \hat{P}_j] = [\hat{P}^2, \hat{P}_I] = 0 \quad (20)$$

$$[\hat{P}_J, \hat{P}_j] = 0, \quad \forall J,j \quad (21)$$

con $J = \{X, Y, Z\}$ y $j = \{a, b, c\}$

Con estas relaciones de conmutación es fácil comprobar que:

$$[H_{rot}, \hat{P}^2] = 0 \quad (22)$$

$$[H_{rot}, \hat{P}_J] = 0 \quad (23)$$

$$[H_{rot}, \hat{P}_c] = i\hbar \left(\frac{1}{2I_a} - \frac{1}{2I_b} \right) (\hat{P}_a \hat{P}_b + \hat{P}_b \hat{P}_a) \quad (24)$$

Puesto que H_{rot} conmuta con \hat{P}^2 y con \hat{P}_Z , se pueden elegir las autofunciones ψ del hamiltoniano rotacional como autofunciones de ambos operadores. Además, como los operadores \hat{P}_X , \hat{P}_Y y \hat{P}_Z cumplen las relaciones generales de conmutación del momento angular, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (25)$$

$$\hat{H}\psi = J(J+1)\hbar^2\psi, \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$\hat{P}_Z\psi = M\hbar\psi, \quad M = 0, \pm 1, \dots, \pm J \quad (27)$$

Los autovalores de energía dependerán de las simetrías de rotación que presente la molécula, estas son:

Rotor esférico $I_a = I_b = I_c = I$

Rotor simétrico $I_a = I_b \neq I_c$ o $I_a \neq I_b = I_c$

Rotor asimétrico $I_a \neq I_b \neq I_c$

Tomaremos siempre los ejes principales de inercia de manera que $I_a \leq I_b \leq I_c$.

2. Rotor rígido cuántico: Estados propios y autovalores.

2.1. El rotor esférico

El rotor esférico se caracteriza porque los tres momentos principales de inercia son iguales:

$$I_a = I_b = I_c = I$$

El hamiltoniano del sistema queda por tanto como:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2I} \quad (28)$$

La ecuación de Schrödinger es:

$$\frac{1}{2I} \hat{P}^2 \psi = E\psi \quad (29)$$

Resolviendo la ecuación obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2I} J(J+1)\hbar^2 \psi &= E\psi \\ E &= \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I}, \quad J = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

En este caso, tenemos además que

$$[\hat{H}, \hat{P}_c] \quad (31)$$

con

$$\hat{P}_c \psi = K \hbar \psi, \quad K = 0, \pm 1, \dots, \pm J$$

Luego la energía está $(2J + 1)^2$ veces degenerada.

2.2. El rotor simétrico

El rotor simétrico se caracteriza porque dos de sus momentos principales de inercia son iguales $I_a = I_b \neq I_c$ (caso achatado) o $I_a \neq I_b = I_c$ (caso alargado). Realizaremos el desarrollo del caso $I_a = I_b \neq I_c$ y luego lo adaptaremos al segundo. El hamiltoniano del sistema es:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_a^2 + \hat{P}_b^2}{2I_b} + \frac{\hat{P}_c^2}{2I_c} = \frac{\hat{P}^2 - \hat{P}_c^2}{2I_b} + \frac{\hat{P}_c^2}{2I_c} \quad (32)$$

Como \hat{P}_c conmuta con \hat{P}^2 y con \hat{P}_c^2 , el hamiltoniano conmuta con \hat{P}_c , y las autofunciones del hamiltoniano se pueden elegir como autofunciones de \hat{P}_c . Las energías se obtienen como:

$$\left(\frac{\hat{P}^2 - \hat{P}_c^2}{2I_b} + \frac{\hat{P}_c^2}{2I_c} \right) \psi = E \psi$$

$$\left(\frac{\hbar^2 J(J+1) - \hbar^2 K^2}{2I_b} + \frac{\hbar^2 K^2}{2I_c} \right) \psi = E \psi$$

Luego:

$$E = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I_b} + \hbar^2 K^2 \left(\frac{1}{2I_c} - \frac{1}{2I_b} \right) \quad (33)$$

Se definen las constantes rotacionales como:

$$A \equiv \frac{h}{8\pi^2 I_a} \geq B \equiv \frac{h}{8\pi^2 I_b} \geq C \equiv \frac{h}{8\pi^2 I_c} \quad (34)$$

Teniendo entonces que las energías son

$$E/h = BJ(J+1) + (C - B)K^2 \quad (\text{achatado}) \quad (35)$$

$$E/h = BJ(J+1) + (A - B)K^2 \quad (\text{alargado}) \quad (36)$$

La energía depende de J y K^2 . Hay una degeneración $(2J + 1)$ asociada a M . Además, para $K \neq 0$ hay una degeneración doble debida a los valores de $\pm K$, luego para $K \neq 0$ la degeneración de la energía es $4J + 2$.

2.3. El rotor asimétrico

En el rotor asimétrico $I_a \neq I_b \neq I_c$. En este caso, como $[\hat{H}, \hat{P}_c] \neq 0$ no podemos elegir las autofunciones de \hat{P}_c ; además el hamiltoniano no es separable y necesitaremos otro método para resolver la ecuación de Schrödinger.

Podemos encontrar los autovalores de \hat{H} expandiendo las autofunciones desconocidas ψ_i en términos de algún conjunto completo ortonormal conocido ϕ_i y resolviendo la ecuación de autovalores:

$$\det [\langle \phi_n | \hat{H} | \phi_m \rangle - E_i \delta_{nm}] = 0 \quad (37)$$

Un conjunto completo ortonormal que podemos usar son las autofunciones del rotor simétrico, ya que son funciones de las mismas coordenadas (los ángulos de Euler) y satisfacen las mismas condiciones de contorno:

$$\psi_i = \sum_{J'} \sum_{M'} \sum_{K'} c_{i,J'M'K'} \phi_{J'M'K'} \quad (38)$$

Como ψ_i es autofunción de \hat{P}^2 con autovalor $\hbar^2 J(J+1)$ y de \hat{P}_z con autovalor $\hbar M$ sólo necesitamos incluir funciones ϕ_i con el mismo valor de J y M que ψ_i . La suma infinita sobre J' , M' y K' se reduce ahora a una suma finita sobre los $2J+1$ posibles valores de K'

$$\psi_i = \sum_{K'=-J}^J c_{i,JMK'} \phi_{JMK'} \quad (39)$$

Luego, la ecuación de autovalores queda:

$$\det (H_{K'K''} - E_i \delta_{K'K''}) = 0 \quad (40)$$

con

$$H_{K'K''} \equiv \int \phi_{JMK'}^* \hat{H} \phi_{JMK''} d\tau \quad (41)$$

Cuyo resultado es calculable con los datos que tenemos y vale:

$$\begin{aligned} H_{K'K''} = & \delta_{K''K'} \frac{1}{2} \hbar \left[(2C - A - B) (K')^2 + (A + B) J(J+1) \right] \\ & + \delta_{K''K'+2} \frac{1}{4} \hbar (B - A) [J(J+1) - K'(K'+1)]^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot [J(J+1) - (K'+1)(K'+2)]^{\frac{1}{2}} \\ & + \delta_{K''K'-2} \frac{1}{4} \hbar (B - A) [J(J+1) - K'(K'-1)]^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot [J(J+1) - (K'-1)(K'-2)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (42)$$

Siendo

$$A \equiv \frac{\hbar}{8\pi^2 I_a} \geq B \equiv \frac{\hbar}{8\pi^2 I_b} \geq C \equiv \frac{\hbar}{8\pi^2 I_c}$$

Podemos ver que los autovalores del hamiltoniano no dependen de M , por tanto, la degeneración de la energía será $2J+1$, correspondientes a los posibles valores de M para un J dado. Cada función de onda del rotor asimétrico ψ_i es una combinación lineal de las $2J+1$ funciones de onda de del rotor simétrico con los mismos valores de J y M que ψ_i .

3. Estructura del espectro rotacional.

El espectro rotacional de las moléculas se observa casi exclusivamente como espectro de absorción, ya que la emisión espontánea es muy poco probable dada las bajas energías de transición. El espectro rotacional cae en la región de las microondas, por lo que se requieren espectrómetros del infrarojo lejano o espectrómetros de microondas para observarlos.[1]

Sólo las moléculas con momento dipolar eléctrico permanente permiten la observación de su espectro rotacional. Esto es debido a que este tipo de moléculas, cuando está rotando, parece tener un momento dipolar dependiente del tiempo para un observador estacionario. La rotación de este tipo de moléculas lleva absorción de radiación electromagnética cuando la frecuencia electromagnética irradiada encaja con la frecuencia de rotación del dipolo. Por tanto, moléculas homonucleares diatómicas como el H_2 , el N_2 o el O_2 no presentan espectro rotacional. Lo mismo ocurre con moléculas más grandes como el CCl_4 , a menos que la rotación induzca un momento dipolar o la molécula presente algún tipo de vibración asimétrica que le induzca un momento [1].

Los elementos diagonales del operador \hat{D} dados por:

$$D_{\alpha\alpha} = \langle \psi_\alpha | \hat{D} | \psi_\alpha \rangle, \quad \alpha \equiv (s, v, J, M, K), \quad (43)$$

determinan el momento dipolar eléctrico permanente de la molécula en el estado ψ_α .

Las reglas de selección que aparecen asociadas a las transiciones electromagnéticas en moléculas son las habituales para una transición dipolar eléctrica, esto es, son las que corresponden al valor esperado de un tensor esférico de primer orden entre estados de momento angular definido. Para el rotor simétrico tenemos como reglas de selección

$$\Delta J = 0, \pm 1, \quad \Delta K = 0, \Delta M = 0, \pm 1 \quad (44)$$

Teniendo que cuando $\Delta J = 0$ con $\Delta M \neq 0$ no hay absorción o emisión de radiación.

Para el caso más simple, esto es una molécula heteronuclear diatómica, tenemos que

$$h\nu = E_{J+1} - EJ \quad (45)$$

Luego

$$\nu_{J \rightarrow J+1} = 2B(J+1) \quad (46)$$

De esta ecuación podemos observar que moléculas más pesadas, las cuales tendrán un I mayor y por tanto una constante rotacional B menor, tendrán un espaciado menor entre sus líneas de absorción (figura 2).

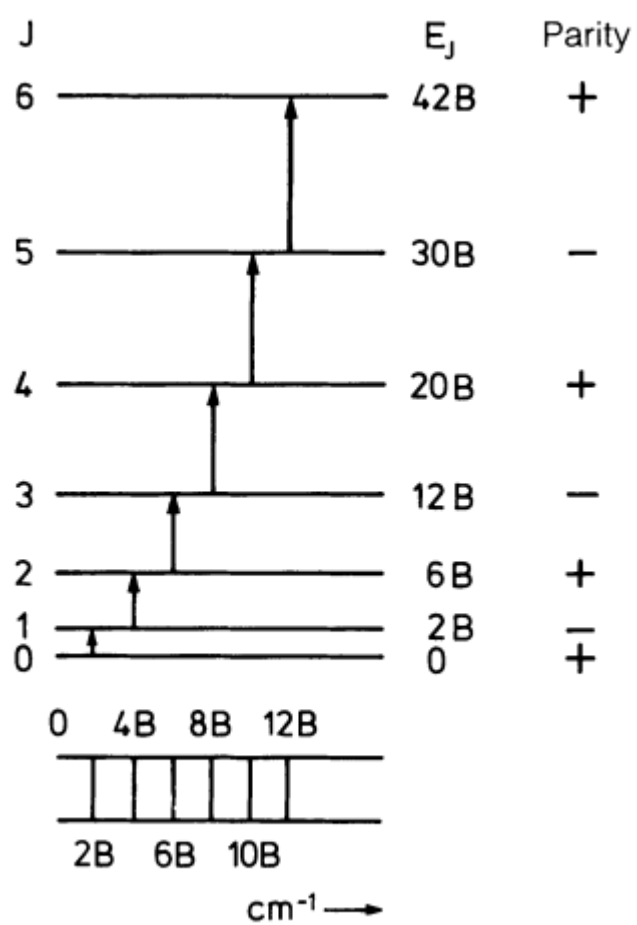


Figura 2: EXPLICAR

4. Momentos de inercia de distintas moléculas respecto de sus ejes principales en sus estados fundamentales: H₂, CO, OH₂, CH₄ ...

4.1. H₂

5. Aproximación de los estados vibracionales de una molécula admitiendo que los núcleos del átomo vibran armónicamente en torno a sus posiciones de equilibrio.

Supongamos un conjunto de N masas puntuales (los núcleos), cada uno de los cuales vibra en torno a una posición de equilibrio. Sean a_α , b_α y c_α las coordenadas cartesianas de un núcleo α en los ejes principales del sistema, y sean $a_{\alpha,e}$, $b_{\alpha,e}$ y $c_{\alpha,e}$ los puntos de equilibrio en esas mismas coordenadas. Definimos los desplazamientos como:

$$x_\alpha = a_\alpha - a_{\alpha,e}, \quad y_\alpha = b_\alpha - b_{\alpha,e}, \quad z_\alpha = c_\alpha - c_{\alpha,e} \quad (47)$$

Ya que hay sólo $3N - 6$ grados de libertad vibracionales, estas coordenadas no son independientes. Están conectadas por seis relaciones, las cuales especifican que los ejes abc se trasladan y rotan con la molécula.

La energía cinética clásica de vibración en torno a las posiciones de equilibrio es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left[\left(\frac{dx_\alpha}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_\alpha}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_\alpha}{dt} \right)^2 \right] \quad (48)$$

Simplificando la notación y llamando $q_i = m_i^{1/2} x_i^j$ con $j = 1, 2, 3$ y $i = 1, \dots, N$, la energía cinética se convierte en:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i^2 \quad (49)$$

Para una molécula, la energía potencial vibracional viene dada por la función U , la suma de las energías electrónicas y las repulsiones nucleares:

$$V = U(q_1, \dots, q_{3N}) \quad (50)$$

Expandiendo la energía potencial en serie de Taylor y teniendo en cuenta que en el equilibrio

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_e = 0, \quad i = 1, \dots, 3N \quad (51)$$

Tenemos que

$$U = U_e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^{3N} u_{ik} q_i q_k \quad (52)$$

$$u_{ik} \equiv \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_e \quad (53)$$

Aplicamos ahora la segunda ley de Newton:

$$F_{x,\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} = m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} \quad (54)$$

que escribiéndolo en coordenadas normales nos da:

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, 3N \quad (55)$$

V contiene una doble sumatoria sobre todas las q' s. Para obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales más simple realizaremos un cambio de variables haciendo que U sea diagonal.

Referencias

- [1] Hermann Haken y Hans Christoph Wolf. *Molecular physics and elements of quantum chemistry: introduction to experiments and theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] Ira N Levine, Antonio Fuster Ortigosa y Alberto Requena Rodríguez. *Espectroscopía molecular*. AC, 1980.
- [3] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.