

# Mekanik I - Sammanfattning

*Med reseveration för att formler och/eller fakta är felaktiga och övriga skrivfel. Den senaste versionen av formelbladet (tillsammans med flashcards) finns att hitta, free of charge, no strings attached, på <https://github.com/sotpotatis/mechanik-i-cheatsheet>. **Lycka till!***

# Statik

## Vektoralgebra

### Enhetsvektor

För att göra en vektor till en enhetsvektor (längd 1):

$$\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

### Skalärprodukt

Skalärproduktens samband med vinkeln:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

### Projektion på enhetsvektor

Storleken av projektionen av en godtycklig vektor  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$  ges av formeln för vinkeln ovan. Projicera  $\vec{a}$  på enhetsvektorn  $\hat{e}_v$

$$proj_{\hat{e}_v}(\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \hat{e}_v) \cdot \hat{e}_v$$

observera att här vi en enhetsvektor gäller

$$(\vec{a} \cdot \hat{e}_v) = \|\vec{a}\| \cos \alpha$$

$\alpha$  är vinkeln mellan vektorerna.

## Moment

### Allmän formel

Momentet för en kraft i en punkt A:

$$\vec{M}_P = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M} : \text{Moment} \\ \vec{r}_{OA} : \text{Radie från origo till punkten A} \\ \vec{F} : \text{Kraft} \end{array} \right.$$

Observera att i  $\mathbb{R}^2$  gäller att

$$M = Fd$$

där  $d$  är det *vinkelräta avståndet* (hävarmen) som kraften har på momentpunkten.

### Moment med avseende på en axel

$$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_P \cdot \hat{e}_\lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_\lambda : \text{Moment med avsikt på axeln } \lambda \\ \vec{M}_P : \text{Moment i punkten (se ovan)} \\ \hat{e}_\lambda : \text{Enhetsvektor för axeln } \lambda \end{array} \right.$$

**Observera:** momentet med avseende på en axel är en *skalär*!

### Övriga momentrelaterade samband

Observera att *en kraft har samma moment längs hela sin verkningslinje*. Att flytta en kraft längs med sin verkningslinje kan förenkla beräkningar.

**Vektorkomponenter**

Se bild.

$$\begin{cases} a_x = a \cos \alpha \\ a_y = a \cos \beta \\ a_z = a \cos \gamma \end{cases}$$

**Kryssprodukt**

Kryssproduktens samband med vinkeln:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha$$

Räkneregler & area:

Observera att kryssproduktens belopp=arean som spänns upp av  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$

Kryssprodukten är inte kommutativ:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Determinant-minnesregel för kryssprodukten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

**Dimensionsanalys****Storheter i mekaniken**

Storhet	Namn
$M$	Massa
$L$	Längd
$T$	Tid

**Anmärkning:** dimensionen av en storhet betecknas  $[storhet]$ , t.ex.  $[s] = L$ . Alternativ beteckning:  $dim$ storhet, t.ex.  $dim s = L$

**Exempel:**

- Hastighet:  $LT^{-1}$
- Acceleration:  $LT^{-2}$
- Kraft:  $MLT^{-2}$

**Ansats för dimensioner**

Ansätt att vänsterledet ska vara lika med högerledet: (när vi har en storhet  $x$  som beror på variablerna  $a, b, c$ , ansätt potenserna  $\alpha, \beta$  och  $\gamma$  samt den dimensionslösa konstanten  $c$ )

$$x = ca^\alpha b^\beta c^\gamma$$

**Högerhandsregeln för kryssprodukt:**

- Rikta alla fingrar utom tummen längs med första vektorn ( $\vec{a}$ ).
- Skruva fingrarna i riktning mot andra vektorn ( $\vec{b}$ )
- Tummen pekar i riktningen  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

**Dubbla kryssprodukten:**

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

**Olika typer av kraftsystem****Ekvivalenta kraftsystem**

Relation mellan två system där kraftsumman *och* momentsumman är densamma.

**Ekvimomenta kraftsystem**

Ett system där:

1. Kraftsumman är samma
2. Momentsumman är samma i en punkt.

→ Ekvimomenta kraftsystem är ekvivalenta.

**Kraftsystem**

Ett kraftsystem består av *flera krafter och moment*.

**Inledande principer**

Definitionen av ett kraftsystem är

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1, \quad P_1 \leftarrow \text{kraft } F_1 \text{ med angreppspunkt } P_1 \\ F_2, \quad P_2 \leftarrow \text{kraft } F_2 \text{ med angreppspunkt } P_2 \\ \vdots \\ F_n, \quad P_n \leftarrow \text{kraft } F_n \text{ med angreppspunkt } P_n \end{array} \right.$$

Ett kraftsystem har också **en kraftsumma**, som fås av att summera de individuella krafterna:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Detsamma gäller för momentsumman med avseende på en punkt  $A$ :

$$\vec{M} = \vec{M}_{A1} + \vec{M}_{A2} + \dots + \vec{M}_{An}$$

**Kraftigt reducerade kraftsystem**

(pun intended i rubriken!)

**Kraftpar**

Kraftpar är ett kraftsystem som består av två lika stora och motriktade krafter. **Kraftsumma:** 0.

**Momentsumma:** oberoende av punkt.

Notera även att  $|M_O| = Fh$   $\begin{cases} M_O : \text{Momentet i origo} \\ F : \text{Beloppet av krafterna i systemet} \\ h : \text{Avstånd mellan krafterna} \end{cases}$

eller på vektorform:  $r_{BA} \vec{F} = \vec{M}_A$

**Reduktionsresultatet**

Innebär att vi *reducerar* ett komplext kraftsystem till att bestå bara av en kraft och ett moment. Resultatet kallas ett reduktionsresultat med avseende på en punkt  $P$ .

Varje gång vi flyttar en kraft för att reducera kraftsystemet, måste vi lägga till ett moment för att kompensera för flytten, ett

**ersättningsmoment:**

$$\vec{M}_A = r_{AP} \times \vec{F}$$

Se figur nedan för beteckningar:

**Enkraftsresultant**

Handlar om att vi kan hitta en punkt där vi kan reducera ett system till en kraft och inget moment.

**Ekvationen som hittar punkten:**

$$\vec{r}_{BA} \times \vec{F} = -\vec{M}_A$$

där  $r_{BA}$  är avståndet till den sökta punkten från en vald punkt  $A$ .

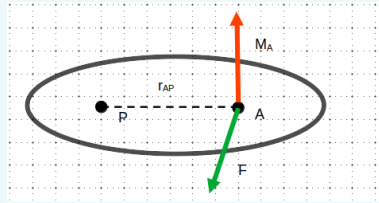
*Notera:* eftersom det krävs att  $\vec{M}_A \perp \vec{F}$ , så är ett bra första test att se om det går att reducera till en enkraftsresultant att kontrollera att  $\vec{M}_A \cdot \vec{F} = 0$

**Kraftskruv**

Alla system går inte att reducera till en enkraftsresultant, men de går att reducera till en *kraftskruv*! En sådan består av ett moment och en kraft, båda i  $\vec{O}$ .

**Masscentrum**

Masscentrum är där tyngdkraften angriper i en punkt, och betecknas med  $G$  eller  $\bullet$ .



Figur 1: Ersättningsmoment

Om vi flyttar alla krafter till samma punkt, får vi en **total kraftsumma vid reduktionsresultat**:

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^n \vec{F}_n$$

Vi får också en **total momentsumma vid reduktionsresultat**:

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^n r_{AP_n} \times \vec{F}_n$$

*Observera att den totala kraftsumman generellt inte är vinkelrät mot momentsumman, och att alla kraftsystem kan reduceras till en kraft och ett moment (se även Kraftskruv).*

Flytt av reduktionsresultat ger att momentsumman ändras

### Masscentrum för ett partikelsystem

(Dvs. ändligt antal partiklar)

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_i \vec{r}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

### Masscentrum för en stelkropp

(Dvs. oändligt antal partiklar) Ges av integration:

$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

där  $\vec{r}$  är små radier och  $dm$  är små massor. eller i komponentform:

$$x_G = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

$$y_G = \frac{\int y dm}{\int dm}$$

$$z_G = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

### Verktyg för integration

Det finns några verktyg som kan förenkla beräkningar av masscentrum.

enligt **sambandsformeln**:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_B : \text{Momentet i ny punkt} \\ \vec{M}_A : \text{Moment i tidigare punkt} \\ \vec{r}_{BA} : \text{Avstånd mellan tidigare och ny punkt} \\ \vec{F} : \text{Ersättnings-/reduktionskraft} \end{array} \right.$$

## Pappus regler

Pappus regler kan användas för att förenkla integraler över masscentrum.

## Pappus arearegel

Gäller för en massbelagd kurva  $C$  som ligger på  $xy$ -planet.

$$A = 2\pi y_G l \implies y_G = \frac{A}{2\pi l} \quad \left\{ \begin{array}{l} A : \text{Area av yta efter rotation} \\ y_G : \text{y-komponenten för masscentrum} \\ l : \text{Längd av kurvan} \end{array} \right.$$

*Notera* att  $A$  är botten-/mantelarean som den yta som bildas om du tänker dig att du skapar en rotationsvolym av din kurva. Exempel: du använder Pappus arearegel för en halvcirkelbåge. Då är rotationsarean en sfär, så  $A = 4\pi r^2$ .  $l$  är däremot längden på din halvcirkel, dvs.  $2\pi r$ . *Notera även* att denna regel appliceras genom att du i de praktiska fallen söker  $y_G$ .

**Linje- och ytdensitet** Du kan ersätta masselement  $dm$  genom att anta att alla element har samma densitet, och därmed transformera en massintegral till en "storleksintegral".

**Linjedensitet ges av:**

$$\rho = \frac{m}{l}$$

**Area-/ytdensitet ges av**

$$\rho = \frac{m}{a}$$

*Exempel på en substitution:*

För en halvcirkelbåge, låt  $dm = \rho dA$  där  $\rho$  är areadensiteten och  $dA$  är arean över ditt valda lilla areaelement.

## Jämvikt

Jämvikt definieras med avseende på en referensram, dvs. ett område man kollar om det är jämvikt med avseende på.

**Krav för jämvikt:** Kraftsumman och momentsumman med avseende på en punkt ska vara 0 för alla delsystem, dvs.

$$\left\{ \sum \vec{F} = \vec{0}, \sum \vec{M}_A = \vec{0} \quad \text{för alla delsystem} \right\}$$



**Pappus volymregel**

Samma koncept som arearegeln, gäller en massbelagd yta med arean  $A$ .

$$V = 2\pi y_G A \implies y_G = \frac{V}{2\pi A}$$

*Notera* att  $A$  är arean av den yta som du roterar, och  $V$  är volymen som bildas om du tänker dig att du skapar en rotationsvolym av din kurva. (*skillnad från arearegeln!*) Exempel: du använder Pappus arearegel för en halvcirkelskiva. Då är rotationsvolymen en sfär, så  $V = 4\pi r^3$ .  $A$  är däremot arean för din halvcirkelskiva, dvs.  $\frac{\pi r^2}{2}$ .

*Notera även* att även denna regel appliceras genom att du i de praktiska fallen söker  $y_G$ .

**Friläggning**

Konceptet av friläggning handlar om att välja hur man ska dela upp ett problem i olika delsystem.

**Frihetsgrader****Frihetsgrader i 3D**

1 translation kring x-axeln

**I 2D gäller:**

*Alternativ 1:*

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ M_{A,z} = 0 \end{cases}$$

*Observera* att momentet i  $z$ -led är det enda som behöver vara noll, eftersom de andra kraven implicerar jämvikt i övriga led.

**Alternativa jämviktsekvationer i 2D:**

*Alternativ 2:*

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ M_{A,z} = 0 \\ M_{B,z} = 0 \end{cases} \quad \text{OBS! } \vec{r}_{AB} \text{ ej } \parallel \text{ med verkningslinjen till } \vec{F}.$$

*Alternativ 3:*

$$\begin{cases} M_{A,z} = 0 \\ M_{B,z} = 0 \\ M_{C,z} = 0 \end{cases} \quad \text{OBS! } ABC \text{ ska ej bilda en rät linje.}$$

**Statiskt obestämt problem:**

Ett problem där du har färre oberoende jämviktsekvationer än sökta obekanta.

2 translation kring y-axeln

3 translation kring z-axeln

4 rotation kring x-axeln

5 rotation kring y-axeln

6 rotation kring z-axeln

*Notera:* translation betyder att man kan röra sig i “rymden” (dvs. koordinatsystemet)

#### Frihetsgrader i 2D

1 translation kring x-axeln

2 translation kring y-axeln

3 rotation kring z-axeln


*Notera:* se ovan för information om vad translation betyder.

#### Friktion

Friktionskraften är en kraft som uppkommer i kontakt mellan två ytor och är parallell med ytan där friktionen uppstår.

#### Newtons tredje lag och jämvikt

Newtons tredje lag: “för varje kraft som verkar på ett föremål finns det alltid en motkraft som verkar på föremålet, av samma storlek men i motsatt riktning.”

Kraften och dess motkraft angriper i olika kroppar. Till exempel angriper tyngdkraften på en kopp i koppen masscentrum, , medan koppens normalkraft (motkraften till tyngdkraften i detta fall), angriper i jordens medelpunkt.

#### Reaktionskrafter och -moment

Krafter och moment som uppstår när en kropp är *låst* från att röra sig i någon yta.

Nedan är några exempel.

#### Vajer/länk

- Påverkas av en reaktionskraft vinkelrätt mot länken

#### Objekt mot yta

- Påverkas av en normalkraft  $N$  vinkelrätt mot underlaget.
- *Om friktion finns:* påverkas även av en friktionskraft längs underlaget.

**Friktionskraft**

Maximala friktionskraften ges av

$$F \leq \mu_k N$$

där  $N$  är normalkraften.

**Friktionstal**

Det finns ett statiskt friktionstal och ett kinematiskt friktionstal, dock kan man förutsätta att  $\mu_s \approx \mu_k \approx \mu$ .  $\mu_k$  är friktionstalet där glidning börjar inträffa.

**Jämvikt och glidning**

Om friktionskraftens storlek är enligt

$$0 \leq F \leq \mu_s N \approx \mu N$$

gäller så har vi *jämvikt*. **Observera** alltså att storleken på kraften är variabel!

Vid

$$F = \mu_k N$$

så börjar vi ha *glidning*. Dvs. när

$$F > \mu_k N \approx \mu N$$

**Led/sprint**

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$  och  $y$ -led.
- Om friktion finns: påverkas även av ett kraftmoment.

**Kulled**

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$ ,  $y$  och  $z$ -led.

**Fastsättning**

(tänk t.ex. en balk på en vägg). Objektet kan inte röra sig åt någon riktning.

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$  och  $y$ -led.
- Påverkas även av ett kraftmoment.

**Gångjärn eller fast inspänd balk**

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$ ,  $y$  och  $z$ -led.
- Påverkas av reaktionsmoments i  $x$ ,  $y$  och  $z$ -led.

### Stölpningsvillkor

Normalkraften på ett objekt kan angripa utanför objektet. Det går alltså att formulera villkoret

$$r_N \leq L$$

där  $r_N$  är avståndet mellan objektets hörn till normalkraften, och  $L$  är den maximala längden från hörnet som normalkraften kan röra sig på.

# Appendices

## Masscentrum för några enkla former

Typ	Masscentrum
Kvadratskiva	$\frac{a}{2}$ , där $a$ är sidlängden.
Triangelskiva	$\frac{h}{3}$ , där $h$ är höjden.

## Översikt av några vanliga krafter

Dessa förekommer i uppgifter och är därför bra allmänbildning.

- Lyftkraft i en vätska:  $F = \rho \Delta V g$  där  $\Delta V$  är den undanträngda volymen.
- Tryckkraft:  $F = PA$  där  $P$  är trycket och  $A$  är arean som verkas på.

# Dynamik

## Kinematik

### Kartesiska koordinater

#### Rätlinjig rörelse

“Prick-notationen” (även kallat Newtons notation) betecknar *tids*derivator.  $\dot{x} \iff \frac{dx}{dt}$

- **Läge:**  $x(t)$
- **Hastighet:**  $v(t) = \dot{x}(t)$
- **Acceleration**  $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

#### Generell kurvlinjär rörelse

Skillnaden från rätlinjig rörelse är att läget beskrivs som en vektorvärd funktion av tiden, dvs.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

till exempel. (i kartesiska koordinater)

### Rörelserelaterade integraler

1.  $\int$  hastighet = sträcka
2.  $\int$  acceleration = hastighet

### (Mycket) användbara samband vid beräkning

(Se “*Mechanics for Engineers, Dynamics (13th ed.)*” av Hibbeler, Yap)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v = \frac{dv}{ds} v$$

$$\implies \boxed{ads = vdv}$$

där  $ds$  t.ex. om rörelsen sker längs  $x$ -axeln är  $dx$ .

Relevanta samband:

- $v dt = ds$  *Hastighet-tid*
- $a ds = v dv$  *Acceleration-tid*

Exempel för att bestämma ett uttryck för hastighet, given acceleration:

$$\int_0^{s_0} a ds = \int_0^v v dv \implies \frac{v^2}{2} = \int_0^{s_0} a ds$$

där  $s_0$  är övre gränsen för sträckan.

### Kurvlinjär rörelse i naturliga komponenter

Naturliga komponenter betraktar acceleration och hastighet från perspektivet av partikeln som rör sig.

**Kurvlinjär rörelse i kartesiska koordinater****Enhetsvektorer**

- Enhetsvektor i  $x$ -led,  $\vec{e}_x$ :

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0)$$

- Enhetsvektor i  $y$ -led,  $\vec{e}_y$ :

$$\vec{e}_y = (0, 1, 0)$$

- Enhetsvektor i  $z$ -led (3D),  $\vec{e}_z$ :

$$\vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

**Läge, hastighet, acceleration**

- **Läge:**  $\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$
- **Hastighet:**  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$
- **Acceleration:**  $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$

**Kurvlinjär rörelse i cylindriska koordinater****Enhetsvektorer**

- $\vec{e}_r$ : Enhetsvektor längs med radien av en cirkel i  $xy$ -planet, dvs. analogt med polära koordinater.

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

**Enhetsvektorer**

- $\vec{e}_t$  Tangentiell komponent
- $\vec{e}_n$  Normalkomponent
- $\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$  (3D): Binormalen. I 3D har vi tre komponenter av hastighet och acceleration  $\vec{e}_b$  är *normalen* till det *oskulderade planet*, dvs. planet som spänns upp av  $\vec{e}_t$  och  $\vec{e}_n$ .

$$\tilde{\vec{e}}_b = \tilde{\vec{e}}_t \times \tilde{\vec{e}}_n$$

$s(t)$  beskriver partikelns båglängd ("sträcka längs kurvan") som beroende av tiden.

**Läge, hastighet, acceleration**

- **Läge:**  $\vec{r} = s\vec{e}_t$
  - **Hastighet:**  $\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t + 0\vec{e}_n + 0\vec{e}_b$
  - **Acceleration:**  $\underbrace{\dot{v}\vec{e}_t}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}_{\textcircled{2}} + 0 \underbrace{\vec{e}_b}_{\textcircled{3}}$
- $$\vec{a}_b = 0$$

gäller alltid. där

$$\begin{cases} \textcircled{1} : \text{tangentiella accelerationen} \\ \textcircled{2} : \text{normalaccelerationen} \\ \textcircled{3} : \text{binormalaccelerationen} \end{cases}$$



- $\vec{e}_\theta$ : Enhetsvektor längs med vinkeln mot  $\vec{e}_r$  i  $xy$ -planet, enligt

$$e_\theta = (\cos [\theta + \frac{\pi}{2}], \sin [\theta + \frac{\pi}{2}], 0)$$

(observera att  $\cos [\theta + \frac{\pi}{2}] = -\sin \theta$  och  $\sin [\theta + \frac{\pi}{2}] = \cos \theta$ )

- $\vec{e}_z$ : Enhetsvektor i vertikalriktningen:

$$(0, 0, 1)$$

#### Läge, hastighet, acceleration

- **Läge:**  $r_{OP} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- **Hastighet:**  $\vec{v} = \dot{r}_{OP} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$
- **Acceleration:**  $\vec{a} = \ddot{r}_{OP} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\textcircled{1}}\vec{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\textcircled{2}}\vec{e}_\theta +$

$$\underbrace{\ddot{z}}_{\textcircled{3}}\vec{e}_z$$

där  $\begin{cases} \textcircled{1} : \text{radiella accelerationen} \\ \textcircled{2} : \text{transversella accelerationen} \\ \textcircled{3} : \text{vertikala accelerationen} \end{cases}$

**Nämnvärda samband vid cirkelrörelse** För en partikel som rör sig med vinkelhastighet  $\omega$  i en cirkelbana med radie  $R$  gäller  $v = \omega R$ .

där  $\rho$  är krökningsradie, "radie av den perfekta cirkeln som passar kring riktningen".

#### Krökningsradie

#### I 2D gäller, för en plan kurva:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

(Observera att  $\rho = R$  för en cirkel, om cirkelns radie är  $R$ )

#### I 3D gäller:

$$\rho = \frac{|v|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

⇒ Notera följande:

- $|v| = \dot{s}$
- $\vec{v}$  och  $\vec{a}$  är funktioner av tiden som ger hastighet och accelerationen i en viss punkt. Detta är analogt med  $\vec{v} = \vec{r}'$ ,  $\vec{a} = \vec{r}''$ . OBS att det går att derivera med avseende på annat än tiden beroende på hur  $r$  är uttryckt!

#### Nämnvärda samband vid naturliga komponenter

$$\Delta s = \rho \Delta \theta \implies v = \rho \Delta \theta$$

## Energi och arbete

### Potentialer

#### Gravitation

Potentialen mellan två kroppar med massor  $m$  och  $M$  på ett avstånd  $r$  ges enligt

$$V(r) = -\frac{GmM}{r}$$

**Viktigt!** Det går nära jordytan att byta ut  $GM \longleftrightarrow gR^2$   
Så vid rörelse kring jorden gäller

$$V(r) = -\frac{mgR^2}{r}$$

och vid närheten av jordytan gäller

$$V(z) = mgz$$

Notera även **allmänna gravitationskraften** mellan två kroppar som är  $F_g = \frac{GMm}{r^2}$ . (observera  $r^2$ !)

#### Fjäder

Notera att fjäderkraften är  $F_{\text{fjäder}} = k\Delta l$  Potentialen för en fjäder är

$$V = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

. där  $\Delta l = l_1 - l_0$  och  $l_0$  är fjäderns naturliga (ospända) läge (jämför med fjäderkraften:  $^2$  och  $\frac{1}{2}$ )

## Dynamikens kraftekvationer

### Rörelsemängd

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

### Rörelsemängden för ett system

Rörelsemängden för ett system **bevaras**, dvs

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_{\text{tot}}$$

om inga yttre krafter verkar på systemet!

### Newtons lagar

#### Newtons 1:a lag

I. "En kropp är i vila eller rör sig med konstant hastighet om kraftsumman är 0."

$$\vec{F} = 0 \iff \vec{v} : \text{konstant}$$

#### Kraftsumma (och Newtons 2:a lag)

Summan av alla krafter som verkar på ett system är tidsderivatan av dess rörelsemängd:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

II. "Då massan inte ändras över tid (t.ex för en partikel), gäller

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

## Rörelsemängdsmoment

Rörelsemängdsmoment definieras som

$$H_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

( $\vec{p} = m\vec{v}$ ) *Notera* hur detta bara är det allmänna fallet av momentekvationen från statiken!

## Rörelsemängdsmomentlagen

Med avseende på origo gäller

$$\dot{H}_O = M_O$$

$\Rightarrow$  **(Väldigt) användbar följd:** Om  $M_O = 0$  är  $H_O$  konstant.

## Impuls

Impuls är *ändringen av rörelsemängden* vid en viss tidpunkt. Dvs.

$$\text{impuls: } I = \Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = \underbrace{F \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}_{\text{kallas kraftimpuls(lagen)}}$$

## Centralrörelse

Principen för en centralrörelse är att *endast en central-kraft (en kraft som alltid går genom samma punkt),*

“ (Newtons andra lag) Detta gäller i alla koordinatsystem, exempelvis i naturliga komponenter:

$$\sum \vec{F} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$$

## Newtons 3:e lag

III. “*Två kroppar påverkar varandra med lika men motåtriktade krafter - varje kraft har en motkraft*”

## Arbete, allmänt

Arbete definieras som en kurvintegral

$$U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

## Effekt

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Alternativt

$$dU = P dt \Rightarrow U_{0-1} = \int_{t_0}^{t_1} P dt$$

## Potentiell energi

En potentiell energi är en potentialfunktion till ett kraftfält. *Observera att* den definieras åt “andra riktningen” än vad man kanske är van med från flervariabeln!

inga andra krafter, utför *arbete*. *Exempelvis*: en satellits rörelse runt jorden, en fjäder fäst i en punkt (om alla krafter utom fjäderkraften kan försummas)

### Kännetecken för centralrörelse:

- Kraftmomentet är 0  $\implies$  rörelsemängdsmomentet är konstant.
- Partikelbanorna är plana, normalen ges av  $\frac{\vec{H}_O}{\|\vec{H}_O\|}$

### Keplers 2:a lag: Sektorhastigheten (vid centralrörelse!)

är konstant. Låt  $h = |\vec{r} \times \vec{v}|$ , då gäller

- Sektorhastighet, allmänt:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}h$$

- Sektorhastighet i cylinderkoordinater:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

### Binets formel

Binets formel omvandlar kraftekvationen från att vara beroende av tiden till att vara beroende av vinkeln ( $\theta$ ).

$$a_r = -h^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

där  $u = \frac{1}{r}$  och  $h = r^2\dot{\theta}$  för cirkelrörelse.

En potentialfunktion definieras som en funktion som ger värdet av kurvintegralen

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där  $r_0$  är en referenspunkt/“nollnivå”,  $\vec{r}$  är det aktuella läget.

Arbetet som potentiella energin utför är

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$

(från flervariabeln - andra hållet:  $U_{1-2} = V_2 - V_1$ )

I ett *konserverativt* kraftfält *bevaras* totala mekaniska energin! Läs mer här vid intresse.

### Energilagar

#### Lagen om kinetisk energi

Lagen säger att kinetiska energin i en punkt  $T_2$  ges av energin i en punkt  $T_1$  samt arbetet som utförts mellan de två punkterna. Detta kan matematiskt skrivas  $T_1 + U_{1-2} = T_2$  eller på formen man oftare ser

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

“Arbetet utfört mellan två punkter är lika med ändringen i kinetiska energin mellan punkterna.” (Förväxla inte detta med att en konservativ kraft utför arbetet  $U_{1-2} = V_1 - V_2$ !)

Formeln ger

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \left(\frac{h^2}{GM}\right)C \cos \theta}$$

där  $C$  är en integrationskonstant som kan fås (vid rörelse runt jorden) genom

$$C = \frac{egR^2}{h^2}$$

alternativt genom

$$C = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{gR^2}{r_0 v_0^2}\right)$$

där  $r_0$  är minsta avståndet till jorden (perrigeum) och  $v_0$  är ursprungliga hastigheten av rymdfarkosten.

### Ellipsens geometri

#### Geometrisk attribut

- Storaxelns längd,  $2a$
- "Lill"axelns längd,  $2b$
- Avståndet till brännpunkter/foci:  $c$

#### Användbara samband:

- **Keplers 1:a lag:** Vid rörelse kring en planet eller liknande så är planeten i ellipsbanans ena foci.

### Mekanisk energi och mekaniska energilagen

Mekaniska energin är definierad som summan av kinetiska och potentiella energin i en punkt:  $E = T + V$ . På så sätt är det intuitivt att vi kan gå mellan två punkter genom:

$$T_1 + V_1 + \sum U_{\text{icke-konservativa krafter}} = T_2 + V_2$$

Ur detta kan vi få fram lagen nedan:

### Mekaniska energilagen

**OBS!** Denna lag gäller bara om alla krafter som utför arbete är konservativa!

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 : \text{Kinetisk energi i punkt 1} \\ V_1 : \text{Potentialenergi i punkt 1} \\ T_2 : \text{Kinetisk energi i punkt 2} \\ V_2 : \text{Potentialenergi i punkt 2} \end{array} \right.$$

på samma sätt gäller  $T + V = E = \text{konst.}$  (den totala mekaniska energin är konstant i alla punkter om endast en konservativ kraft utför arbete).

### Rörelsemängden för ett system bevaras

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

Detta gäller även vid stötar (se nedan) och samma princip för rörelsemängdsmomentet (se till vänster)

- avstånd till foci 1 + avstånd till foci 2 =  $2a$  i alla punkter
- $a^2 = b^2 + c^2$  (läs detta igen, det är inte samma benämning som Pythagoras sats!)

### Ellipsens ekvation

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 + e \cos \theta}$$

### Eccentricitet

Ett mått på hur "nära" en konisk sektion (ellips, parabel eller hyperbel) är från att vara en perfekt cirkel.

$$e = \frac{c}{a}$$

Värde på $e$	Form
$e < 1$	Ellips
$e = 1$	Parabel
$e > 1$	Hyperbel
$e = 0$	Cirkel

### Banenergi

Banenergin för en satellit är

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mGM}{r}$$

### Stötar

En stöt är en impuls som sker under en (mycket) kort tid. En stöt kan vara något på skalan mellan:

- *elastisk* (partiklarna rör sig separat från varandra efter kollisionen) - studstal 1, *ingen* energiförlust om  $e = 1$  (annars liten energiförlust).
- *inelastisk* (partiklarna rör sig som en sammanhängande massa efter kollisionen) - studstal 0, *maximal* energiförlust

### Stötimpulslagen för en partikel

$$\vec{I}_{12} = p' - p = m(\vec{v}' - \vec{v})$$

### Studstal

Studstalet är måttet på hur elastisk en stöt är och definieras:

**För en stöt längs en axel, t.ex.  $x$ -axeln:**

$$e = \frac{\text{hastighetsändringen efter}}{\text{hastighetsändringen före}} = \frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}$$

**För en sned stöt:** (längs en normal med infallsvinkeln  $\alpha$  och "utfallsvinkeln"  $\beta$ ):

$$e = \frac{v' \cos \beta}{v \cos \alpha} \text{ samt } e = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

och är konstant.

*Banenergin kan relateras till eccentricitet!*

$$\frac{2E}{m} = (e^2 - 1) \left( \frac{GM}{h} \right)^2$$

*Banenergin kan också relateras till storaxelns längd!*  
(gäller **bara** för ellipser):

$$E = -\frac{GmM}{2a}$$

Detta samband gör det EXTREMT enkelt att bestämma hastigheten för något som kretsar kring jorden!

## Svängningar

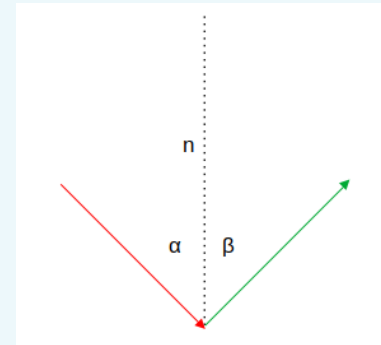
### Allmänt

#### Periodtid

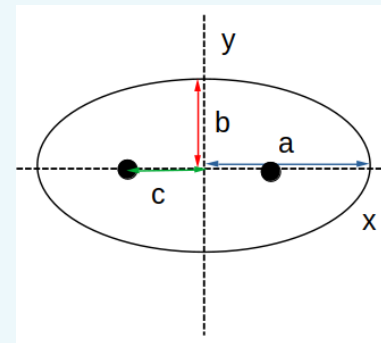
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

där  $\omega$  varierar beroende på vad för typ av svängning det är. För odämpad svängning används  $\omega_n$ , för dämpad svängning används  $\omega_d$ , osv.

x



Figur 1: Snedstöt.



Figur 2: Ellipsens geometri

**Keplers 3:e lag:** omloppstiden  $\tau$  kring en kropp med massan  $M$  förhåller sig till omloppsbanans halva storaxel  $a$  enligt

$$\tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

**Konvertera lösningar**

Konverteringen  $A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \leftrightarrow C \sin(\omega t + \alpha)$  fås genom  $\tan \alpha = \frac{B}{A}$ ,  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  där  $C$  är amplituden och  $\alpha$  är fasvinkeln.

**Komponenter av svängningsekvationen**

Differentialekvationen för svängningar kan innehålla:

- Fjäder:  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$
- Dämpare:  $2\zeta\omega_n = \frac{c}{m}$

**Svängningsterminologi**

- **Fria svängningar:** ett system som svänger av sig självt naturligt, dvs. inte påverkas av någon yttre kraft utsätts för denna typ av svängningar. *Exempel* en vikt som hänger i en fjäder.
- **Påtvängade svängningar:** ett system som svänger på grund av en extern periodisk kraft utsätts för påtvängade svängningar.
- **Odämpade svängningar:** Ingen dämpare är införd (duh!)
- **Dämpade svängningar:** Påverkas av en dämpare med viss konstant som påverkar hur svängningarna utförs.

$\Rightarrow$  *Trevliga följsamband:*

- $\tau \propto a^{3/2}$
- $\tau \propto \left(\frac{1}{E}\right)^{3/2}$  (se *Banenergi kopplat till storaxelns längd*)

**Mall för olika typer av svängningar**

Differentialekvationen för de olika svängningarna är på formen:

**Odämpad svängning**

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_n^2 x = \begin{cases} \frac{F_0}{m} \sin \omega t & \text{om påtvängad} \\ 0 & \text{om fri} \end{cases}$$

**Dämpad svängning**

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{c}{m}\dot{x} = \ddot{x} + \omega_n^2 x + 2\zeta\omega_n \dot{x} = \begin{cases} \frac{F_0}{m} \sin \omega t & \text{om påtvängad} \\ 0 & \text{om fri} \end{cases}$$

**Amplitud för påtvängade svängningar**

Om en svängning påverkas av en kraft  $\frac{F_0}{m} \sin / \cos \omega t$  gäller (amplituden  $X$  är...):



**Dämpade svängningar****Vinkelfrekvens**

Vinkelfrekvensen för dämpade svängningar:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

**Olika typer av dämpningar**

**Stark dämpning**,  $\zeta > 1$ : Lösningen till ekvationen beskriver ingen periodisk rörelse. Den passerar jämviktsläget en gång och går sedan mot 0.

**Kritisk dämpning**,  $\zeta = 1$ : Se stark dämpning.

**Svag dämpning**,  $\zeta < 1$ : Lösningen till ekvationen beskriver en periodisk rörelse. Jämviktsläget passeras oändligt många gånger men amplituden minskar.

**Logaritmiska dekrementet**

Om man mäter upp två värden  $x(t)$  där  $x$  är din differentialekvation som skiljer sig åt med periodtiden  $\tau_d$ , kan dämpningskonstanten hittas från

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

**• Påtvingad, odämpad svängning:**

$$X = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

**• Påtvingad, dämpad svängning:**

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}}$$

Fullständiga partikulärlösningen:  $x_p = X \sin / \cos \omega t$

**Kritisk frekvens för påtvingade svängningar**

Om  $\omega = \omega_n$  kommer amplituden öka obegränsat. Om en uppgift frågar efter den "kritiska" amplituden är det detta som avses!

Med svängningarnas amplitud  $X$  kan förstöringsfaktorn (hur mycket amplituden ökar jämfört med jämviktsläget om en konstant kraft skulle inverka) definieras som

$$M = \frac{X}{X|_{\omega=0}}$$

# Appendices

## Astronomisk ordlista

- 

## Sinus- och cosinusadditionsformler

Förekommer då och då i uppgifter, därför relevant att kunna dessa.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$