

# Mekanik I - Sammanfattning

*Med reseveration för att formler och/eller fakta är felaktiga och övriga skrivfel. Den senaste versionen av formelbladet finns att hitta, free of charge, no strings attached, på <https://github.com/sotpotatis/mechanik-i-cheatsheet/blob/main/main.pdf>. **Lycka till!***

# Statik

## Vektoralgebra

### Enhetsvektor

För att göra en vektor till en enhetsvektor (längd 1):

$$\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

### Skalärprodukt

Skalärproduktens samband med vinkeln:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

### Projektion på enhetsvektor

Storleken av projektionen av en godtycklig vektor  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$  ges av formeln för vinkeln ovan. Projicera  $\vec{a}$  på enhetsvektorn  $\hat{e}_v$

$$\text{proj}_{\hat{e}_v}(\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \hat{e}_v) \cdot \hat{e}_v$$

observera att här vi en enhetsvektor gäller

$$(\vec{a} \cdot \hat{e}_v) = \|\vec{a}\| \cos \alpha$$

$\alpha$  är vinkeln mellan vektorerna.

## Moment

### Allmän formel

Momentet för en kraft i en punkt A:

$$\vec{M}_P = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M} : \text{Moment} \\ \vec{r}_{OA} : \text{Radie från origo till punkten A} \\ \vec{F} : \text{Kraft} \end{array} \right.$$

Observera att i  $\mathbb{R}^2$  gäller att

$$M = Fd$$

där  $d$  är det *vinkelräta avståndet* (hävarmen) som kraften har på momentpunkten.

### Moment med avseende på en axel

$$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_P \cdot \hat{e}_\lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_\lambda : \text{Moment med avsikt på axeln } \lambda \\ \vec{M}_P : \text{Moment i punkten (se ovan)} \\ \hat{e}_\lambda : \text{Enhetsvektor för axeln } \lambda \end{array} \right.$$

**Observera:** momentet med avseende på en axel är en *skalär*!

### Övriga momentrelaterade samband

Observera att *en kraft har samma moment längs hela sin verkningslinje*. Att flytta en kraft längs med sin verkningslinje kan förenkla beräkningar.

**Vektorkomponenter**

Se bild.

$$\begin{cases} a_x = a \cos \alpha \\ a_y = a \cos \beta \\ a_z = a \cos \gamma \end{cases}$$

**Kryssprodukt**

Kryssproduktens samband med vinkeln:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha$$

Räkneregler & area:

Observera att kryssproduktens belopp=arean som spänns upp av  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$

Kryssprodukten är inte kommutativ:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Determinant-minnesregel för kryssprodukten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

**Dimensionsanalys****Storheter i mekaniken**

Storhet	Namn
$M$	Massa
$L$	Längd
$T$	Tid

**Anmärkning:** dimensionen av en storhet betecknas [*storhet*], t.ex.  $[s] = L$ . Alternativ beteckning: *dim*storhet, t.ex. *dims* =  $L$

**Exempel:**

- Hastighet:  $LT^{-1}$
- Acceleration:  $LT^{-2}$
- Kraft:  $MLT^{-2}$

**Ansats för dimensioner**

Ansätt att vänsterledet ska vara lika med högerledet: (när vi har en storhet  $x$  som beror på variablerna  $a, b, c$ , ansätt potenserna  $\alpha, \beta$  och  $\gamma$  samt den dimensionslösa konstanten  $c$ )

$$x = ca^\alpha b^\beta c^\gamma$$

**Högerhandsregeln för kryssprodukt:**

- Rikta alla fingrar utom tummen längs med första vektorn ( $\vec{a}$ ).
- Skruva fingrarna i riktning mot andra vektorn ( $\vec{b}$ )
- Tummen pekar i riktningen  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

**Dubbla kryssprodukten:**

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

**Olika typer av kraftsystem****Ekvivalenta kraftsystem**

Relation mellan två system där kraftsumman *och* momentsumman är densamma i alla punkter.

**Ekvimomenta kraftsystem**

Ett system där:

1. Kraftsumman är samma
2. Momentsumman är samma i en punkt.

→ Ekvimomenta kraftsystem är ekvivalenta. Vad detta betyder rent praktiskt är att det räcker med att kolla

**Kraftsystem**

Ett kraftsystem består av *flera krafter och moment*.

**Inledande principer**

Definitionen av ett kraftsystem är

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1, \quad P_1 \leftarrow \text{kraft } F_1 \text{ med angreppspunkt } P_1 \\ F_2, \quad P_2 \leftarrow \text{kraft } F_2 \text{ med angreppspunkt } P_2 \\ \vdots \\ F_n, \quad P_n \leftarrow \text{kraft } F_n \text{ med angreppspunkt } P_n \end{array} \right.$$

Ett kraftsystem har också **en kraftsumma**, som fås av att summera de individuella krafterna:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Detsamma gäller för momentsumman med avseende på en punkt  $A$ :

$$\vec{M} = \vec{M}_{A1} + \vec{M}_{A2} + \dots + \vec{M}_{An}$$

**Kraftigt reducerade kraftsystem**

(pun intended i rubriken!)

momentsumman i en punkt - om den är lika m.a.p. en punkt är den lika m.a.p. alla punkter!

### Kraftpar

Kraftpar är ett kraftsystem som består av två lika stora och motriktade krafter. **Kraftsumma:** 0.

**Momentsumma:** oberoende av punkt.

Notera även att  $|M_O| = Fh$   $\left\{ \begin{array}{l} M_O : \text{Momentet i origo} \\ F : \text{Beloppet av krafterna i systemet} \\ h : \text{Avstånd mellan krafterna} \end{array} \right.$

eller på vektorform:  $r_{BA} = M_O \times F_1$

### Reduktionsresultatet

Innebär att vi *reducerar* ett komplext kraftsystem till att bestå bara av en kraft och ett moment. Resultatet kallas ett reduktionsresultat med avseende på en punkt  $P$ .

Varje gång vi flyttar en kraft för att reducera kraftsystemet, måste vi lägga till ett moment för att kompensera för flytten, ett

**ersättningsmoment:**

$$\vec{M}_A = r_{AP} \times \vec{F}$$

Om vi flyttar alla krafter till samma punkt, får vi en **total**

### Enkraftsresultant

Handlar om att vi kan hitta en punkt där vi kan reducera ett system till en kraft och inget moment.

**Ekvationen som hittar punkten:**

$$\vec{r}_{BA} \times \vec{F} = -\vec{M}_A$$

där  $r_{BA}$  är avståndet till den sökta punkten från en vald punkt  $A$ .

Notera: eftersom det krävs att  $\vec{M}_A \perp \vec{F}$ , så är ett bra första test att se om det går att reducera till en enkraftsresultant att kontrollera att  $\vec{M}_A \cdot \vec{F} = 0$

### Kraftskruv

Alla system går inte att reducera till en enkraftsresultant, men de går att reducera till en *kraftskruv*! En sådan består av ett moment och en kraft, båda i  $\vec{O}$ .

### Masscentrum

Masscentrum är där tyngdkraften angriper i en punkt, och betecknas med  $G$  eller  $\odot$ .

**kraftsumma vid reduktionsresultat:**

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^n \vec{F}_n$$

Vi får också en **total momentsumma vid reduktionsresultat**:

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^n r_{AP_n} \times \vec{F}_n$$

Observera att den totala kraftsumman generellt inte är vinkelrät mot momentsumman, och att *alla kraftsystem kan reduceras till en kraft och ett moment* (se även *Kraftskruv*).

Flytt av reduktionsresultat ger att momentsumman ändras enligt **sambandsformeln**:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + r_{BA} \times \vec{F} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_B : \text{Momentet i ny punkt} \\ \vec{M}_A : \text{Moment i tidigare punkt} \\ r_{BA} : \text{Avstånd mellan tidigare och ny punkt} \\ \vec{F} : \text{Ersättnings-/reduktionskraft} \end{array} \right.$$

**Pappus regler**

Pappus regler kan användas för att förenkla integraler över masscentrum.

**Masscentrum för ett partikelsystem**

(Dvs. *ändligt antal partiklar*)

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_i \vec{r}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

**Masscentrum för en stelkropp**

(Dvs. *oändligt antal partiklar*) Ges av integration:

$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

där  $\vec{r}$  är små radier och  $dm$  är små massor. eller i komponentform:

$$x_G = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

$$y_G = \frac{\int y dm}{\int dm}$$

$$z_G = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

**Verktyg för integration**

Det finns några verktyg som kan förenkla beräkningar av masscentrum.

**Pappus arearegel**

Gäller för en massbelagd kurva  $C$  som ligger på  $xy$ -planet.

$$A = 2\pi y_G l \implies y_G = \frac{A}{2\pi l} \begin{cases} A : \text{Area av yta efter rotation} \\ y_G : \text{y-komponenten för masscentrum} \\ l : \text{Längd av kurvan} \end{cases}$$

*Notera* att  $A$  är botten-/mantelarean som den yta som bildas om du tänker dig att du skapar en rotationsvolym av din kurva. Exempel: du använder Pappus arearegel för en halvcirkelbåge. Då är rotationsarean en sfär, så  $A = 4\pi r^2$ .  $l$  är däremot längden på din halvcirkel, dvs.  $\pi r$ . *Notera även* att denna regel appliceras genom att du i de praktiska fallen söker  $y_G$ .

**Pappus volymregel**

Samma koncept som arearegeln, gäller en massbelagd yta med arean  $A$ .

$$V = 2\pi y_G A \implies y_G = \frac{V}{2\pi A}$$

*Notera* att  $A$  är arean av den yta som du roterar, och  $V$  är volymen som bildas om du tänker dig att du skapar en rotationsvolym av din yta. (*skillnad från arearegeln!*) Exempel: du använder Pappus arearegel för en halvcirkelskiva. Då är rotationsvolymen en sfär, så  $V = 4\pi r^3$ .  $A$  är däremot arean för din halvcirkelskiva, dvs.  $\frac{\pi r^2}{2}$ .

**Linje- och ytdensitet** Du kan ersätta masselement  $dm$  genom att anta att alla element har samma densitet, och därmed transformera en massintegral till en "storleksintegral".

**Linjedensitet ges av:**

$$\rho = \frac{m}{l}$$

**Area-/ytdensitet ges av**

$$\rho = \frac{m}{a}$$

*Exempel på en substitution:*

För en halvcirkelbåge, låt  $dm = \rho dA$  där  $\rho$  är areadensiteten och  $dA$  är arean över ditt valda lilla areaelement.

**Jämvikt**

Jämvikt definieras med avseende på en referensram, dvs. ett område man kollar om det är jämvikt med avseende på.

**Krav för jämvikt:** Kraftsumman och momentsumman med avseende på en punkt ska vara 0 för alla delsystem, dvs.

$$\left\{ \sum \vec{F} = \vec{0}, \sum \vec{M}_A = \vec{0} \quad \text{för alla delsystem} \right\}$$



Notera även att även denna regel appliceras genom att du i de praktiska fallen söker  $y_G$ .

## Friläggning

Konceptet av friläggning handlar om att välja hur man ska dela upp ett problem i olika delsystem.

### Frihetsgrader

#### Frihetsgrader i 3D

- 1 translation kring x-axeln
- 2 translation kring y-axeln
- 3 translation kring z-axeln
- 4 rotation kring x-axeln
- 5 rotation kring y-axeln
- 6 rotation kring z-axeln

Notera: translation betyder att man kan röra sig i "rymden" (dvs. koordinatsystemet)

#### Frihetsgrader i 2D

- 1 translation kring x-axeln

### I 2D gäller:

Alternativ 1:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ M_{A,z} = 0 \end{cases}$$

Observera att momentet i  $z$ -led är det enda som behöver vara noll, eftersom de andra kraven implicerar jämvikt i övriga led.

### Alternativa jämviktsekvationer i 2D:

Alternativ 2:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ M_{A,z} = 0 \\ M_{B,z} = 0 \end{cases} \quad \text{OBS! } \vec{r}_{AB} \text{ ej } \parallel \text{ med verkningslinjen till } \vec{F}.$$

Alternativ 3:

$$\begin{cases} M_{A,z} = 0 \\ M_{B,z} = 0 \\ M_{C,z} = 0 \end{cases} \quad \text{OBS! } ABC \text{ ska ej bilda en rät linje.}$$

### Statiskt obestämt problem:

Ett problem där du har färre oberoende jämviktsekvationer än sökta obekanta.

2 translation kring y-axeln

3 rotation kring z-axeln

*Notera:* se ovan för information om vad translation betyder.

## Friktion

Friktionskraften är en kraft som uppkommer i kontakt mellan två ytor och är parallell med ytan där friktionen uppstår.

### Friktionskraft

Maximala friktionskraften ges av

$$F \leq \mu_k N$$

där  $N$  är normalkraften.

### Friktionstal

Det finns ett statiskt friktionstal och ett kinematiskt friktionstal, dock kan man förutsätta att  $\mu_s \approx \mu_k \approx \mu$ .  $\mu_k$  är friktionstalet där glidning börjar inträffa.


### Jämvikt och glidning

Om friktionskraftens storlek är enligt

$$0 \leq F \leq \mu_s N \approx \mu N$$

## Newtons tredje lag och jämvikt

Newtons tredje lag: "för varje kraft som verkar på ett föremål finns det alltid en motkraft som verkar på föremålet, av samma storlek men i motsatt riktning."

Kraften och dess motkraft angriper i olika kroppar. Till exempel angriper tyngdkraften på en kopp i koppen masscentrum, , medan koppens normalkraft (motkraften till tyngdkraften i detta fall), angriper i jordens medelpunkt.

## Reaktionskrafter och -moment

Krafter och moment som uppstår när en kropp är *låst* från att röra sig i någon yta.

Nedan är några exempel.

### Vajer/länk

- Påverkas av en reaktionskraft vinkelrätt mot länken

### Objekt mot yta

- Påverkas av en normalkraft  $N$  vinkelrätt mot underlaget.
- *Om friktion finns:* påverkas även av en friktionskraft längs underlaget.

gäller så har vi *jämvikt*. **Observera** alltså att storleken på kraften är variabel!

Vid

$$F = \mu_k N$$

så börjar vi ha *glidning*. Dvs. när

$$F > \mu_k N \approx \mu N$$

### Stjälpningsvillkor

Normalkraften på ett objekt kan angripa utanför objektet. Det går alltså att formulera villkoret

$$r_N \leq L$$

där  $r_N$  är avståndet mellan objektets hörn till normalkraften, och  $L$  är den maximala längden från hörnet som normalkraften kan röra sig på.

### Led/sprint

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$  och  $y$ -led.
- *Om friktion finns:* påverkas även av ett kraftmoment.

### Kulled

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$ ,  $y$  och  $z$ -led.

### Fastsättning

(tänk t.ex. en balk på en vägg). Objektet kan inte röra sig åt någon riktning.

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$  och  $y$ -led.
- Påverkas även av ett kraftmoment.

### Gångjärn

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$ ,  $y$  och  $z$ -led.
- Påverkas av reaktionsmoment i  $x$  och  $z$ -led (alla led förutom den led man kan vrida gångjärnet kring)

### Fast inspänd balk

- Påverkas av reaktionskrafter i  $x$ ,  $y$  och  $z$ -led.
- Påverkas av reaktionsmoment i  $x$ ,  $y$  och  $z$ -led.

# Appendices

## Masscentrum för några enkla former

Typ	Masscentrum (y-koordinat)
Kvadratskiva	$\frac{a}{2}$ , där $a$ är sidlängden.
Triangelskiva	$\frac{h}{3}$ , där $h$ är höjden.

## Översikt av några vanliga krafter

Dessa förekommer i uppgifter och är därför bra allmänbildning.

- Lyftkraft i en vätska:  $F = \rho \Delta V g$  där  $\Delta V$  är den undanträngda volymen.
- Tryckkraft:  $F = PA$  där  $P$  är trycket och  $A$  är arean som verkas på.

# Dynamik

## Kinematik

### Kartesiska koordinater

#### Rätlinjig rörelse

“Prick-notationen” (även kallat Newtons notation) betecknar *tids*derivator.  $\dot{x} \iff \frac{dx}{dt}$

- **Läge:**  $x(t)$
- **Hastighet:**  $v(t) = \dot{x}(t)$
- **Acceleration**  $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

#### Generell kurvlinjär rörelse

Skillnaden från rätlinjig rörelse är att läget beskrivs som en vektorvärd funktion av tiden, dvs.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

till exempel. (i kartesiska koordinater)

### Rörelserelaterade integraler

1.  $\int$  hastighet = sträcka
2.  $\int$  acceleration = hastighet

### (Mycket) användbara samband vid beräkning

(Se “*Mechanics for Engineers, Dynamics (13th ed.)*” av Hibbeler, Yap)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v = \frac{dv}{ds} v$$

$$\implies \boxed{ads = vdv}$$

där  $ds$  t.ex. om rörelsen sker längs  $x$ -axeln är  $dx$ .

Relevanta samband:

- $v dt = ds$  *Hastighet-tid*
- $a ds = v dv$  *Acceleration-tid*

Exempel för att bestämma ett uttryck för hastighet, given acceleration:

$$\int_0^{s_0} a ds = \int_0^v v dv \implies \frac{v^2}{2} = \int_0^{s_0} a ds$$

där  $s_0$  är övre gränsen för sträckan.

### Kurvlinjär rörelse i naturliga komponenter

Naturliga komponenter betraktar acceleration och hastighet från perspektivet av partikeln som rör sig.

**Kurvlinjär rörelse i kartesiska koordinater****Enhetsvektorer**

- Enhetsvektor i  $x$ -led,  $\vec{e}_x$ :

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0)$$

- Enhetsvektor i  $y$ -led,  $\vec{e}_y$ :

$$\vec{e}_y = (0, 1, 0)$$

- Enhetsvektor i  $z$ -led (3D),  $\vec{e}_z$ :

$$\vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

**Läge, hastighet, acceleration**

- **Läge:**  $\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$
- **Hastighet:**  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$
- **Acceleration:**  $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$

**Kurvlinjär rörelse i cylindriska koordinater****Enhetsvektorer**

- $\vec{e}_r$ : Enhetsvektor längs med radien av en cirkel i  $xy$ -planet, dvs. analogt med polära koordinater.

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

**Enhetsvektorer**

- $\vec{e}_t$  Tangentiell komponent
- $\vec{e}_n$  Normalkomponent
- $\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$  (3D): Binormalen. I 3D har vi tre komponenter av hastighet och acceleration  $\vec{e}_b$  är *normalen* till det *oskulderade planet*, dvs. planet som spänns upp av  $\vec{e}_t$  och  $\vec{e}_n$ .

$$\tilde{\vec{e}}_b = \tilde{\vec{e}}_t \times \tilde{\vec{e}}_n$$

$s(t)$  beskriver partikelns båglängd ("sträcka längs kurvan") som beroende av tiden.

**Läge, hastighet, acceleration**

- **Läge:**  $\vec{r} = s\vec{e}_t$
  - **Hastighet:**  $\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t + 0\vec{e}_n + 0\vec{e}_b$
  - **Acceleration:**  $\underbrace{\dot{v}\vec{e}_t}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}_{\textcircled{2}} + \underbrace{0\vec{e}_b}_{\textcircled{3}}$
- $$\vec{a}_b = 0$$

gäller alltid. där

$$\begin{cases} \textcircled{1} : \text{tangentiella accelerationen} \\ \textcircled{2} : \text{normalaccelerationen} \\ \textcircled{3} : \text{binormalaccelerationen} \end{cases}$$

- $\vec{e}_\theta$ : Enhetsvektor längs med vinkeln mot  $\vec{e}_r$  i  $xy$ -planet, enligt

$$e_\theta = (\cos [\theta + \frac{\pi}{2}], \sin [\theta + \frac{\pi}{2}], 0)$$

(observera att  $\cos [\theta + \frac{\pi}{2}] = -\sin \theta$  och  $\sin [\theta + \frac{\pi}{2}] = \cos \theta$ )

- $\vec{e}_z$ : Enhetsvektor i vertikalriktningen:

$$(0, 0, 1)$$

#### Läge, hastighet, acceleration

- **Läge:**  $r_{OP} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- **Hastighet:**  $\vec{v} = \dot{r}_{OP} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$
- **Acceleration:**  $\vec{a} = \ddot{r}_{OP} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\textcircled{1}}\vec{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\textcircled{2}}\vec{e}_\theta +$

$$\underbrace{\ddot{z}}_{\textcircled{3}}\vec{e}_z$$

där  $\begin{cases} \textcircled{1} : \text{radiella accelerationen} \\ \textcircled{2} : \text{transversella accelerationen} \\ \textcircled{3} : \text{vertikala accelerationen} \end{cases}$

**Nämnvärda samband vid cirkelrörelse** För en partikel som rör sig med vinkelhastighet  $\omega$  i en cirkelbana med radie  $R$  gäller  $v = \omega R$ .

där  $\rho$  är krökningsradie, "radie av den perfekta cirkeln som passar kring riktningen".

#### Krökningsradie

#### I 2D gäller, för en plan kurva:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

(Observera att  $\rho = R$  för en cirkel, om cirkelns radie är  $R$ )

#### I 3D gäller:

$$\rho = \frac{|v|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

⇒ Notera följande:

- $|v| = \dot{s}$
- $\vec{v}$  och  $\vec{a}$  är funktioner av tiden som ger hastighet och accelerationen i en viss punkt. Detta är analogt med  $\vec{v} = \vec{r}'$ ,  $\vec{a} = \vec{r}''$ . OBS att det går att derivera med avseende på annat än tiden beroende på hur  $r$  är uttryckt!

#### Nämnvärda samband vid naturliga komponenter

$$\Delta s = \rho \Delta \theta \implies v = \rho \Delta \theta$$



## Energi och arbete

### Potentialer

#### Gravitation

Potentialen mellan två kroppar med massor  $m$  och  $M$  på ett avstånd  $r$  ges enligt

$$V(r) = -\frac{GmM}{r}$$

**Viktigt!** Det går nära jordytan att byta ut  $GM \longleftrightarrow gR^2$   
Så vid rörelse kring jorden gäller

$$V(r) = -\frac{mgR^2}{r}$$

och vid närheten av jordytan gäller

$$V(z) = mgz$$

Notera även **allmänna gravitationskraften** mellan två kroppar som är  $F_g = \frac{GMm}{r^2}$ . (observera  $r^2$ !)

#### Fjäder

Notera att fjäderkraften är  $F_{\text{fjäder}} = k\Delta l$  Potentialen för en fjäder är

$$V = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

. där  $\Delta l = l_1 - l_0$  och  $l_0$  är fjäderns naturliga (ospända) läge (jämför med fjäderkraften:  $^2$  och  $\frac{1}{2}$ )

## Dynamikens kraftekvationer

### Rörelsemängd

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

### Rörelsemängden för ett system

Rörelsemängden för ett system **bevaras**, dvs

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_{\text{tot}}$$

om inga yttre krafter verkar på systemet!

### Newtons lagar

#### Newtons 1:a lag

I. "En kropp är i vila eller rör sig med konstant hastighet om kraftsumman är 0."

$$\vec{F} = 0 \iff \vec{v} : \text{konstant}$$

#### Kraftsumma (och Newtons 2:a lag)

Summan av alla krafter som verkar på ett system är tidsderivatan av dess rörelsemängd:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

II. "Då massan inte ändras över tid (t.ex för en partikel), gäller

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

## Rörelsemängdsmoment

Rörelsemängdsmoment definieras som

$$H_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

( $\vec{p} = m\vec{v}$ ) *Notera* hur detta bara är det allmänna fallet av momentekvationen från statiken!

## Rörelsemängdsmomentlagen

Med avseende på origo gäller

$$\dot{H}_O = M_O$$

$\Rightarrow$  **(Väldigt) användbar följd:** Om  $M_O = 0$  är  $H_O$  konstant.

## Impuls

Impuls är *ändringen av rörelsemängden* vid en viss tidpunkt. Dvs.

$$\text{impuls: } I = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = \underbrace{F\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}_{\text{kallas kraftimpuls(lagen)}}$$

## Centralrörelse

Principen för en centralrörelse är att *endast en central-kraft (en kraft som alltid går genom samma punkt),*

“ (Newtons andra lag) Detta gäller i alla koordinatsystem, exempelvis i naturliga komponenter:

$$\sum \vec{F} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$$

## Newtons 3:e lag

III. “*Två kroppar påverkar varandra med lika men motåtriktade krafter - varje kraft har en motkraft*”

## Arbete, allmänt

Arbete definieras som en kurvintegral

$$U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

## Effekt

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Alternativt

$$dU = Pdt \Rightarrow U_{0-1} = \int_{t_0}^{t_1} Pdt$$

## Potentiell energi

En potentiell energi är en potentialfunktion till ett kraftfält. *Observera att* den definieras åt “andra riktningen” än vad man kanske är van med från flervariabeln!

inga andra krafter, utför *arbete*. *Exempelvis*: en satellits rörelse runt jorden, en fjäder fäst i en punkt (om alla krafter utom fjäderkraften kan försummas)

### Kännetecken för centralrörelse:

- Kraftmomentet är 0  $\implies$  rörelsemängdsmomentet är konstant.
- Partikelbanorna är plana, normalen ges av  $\frac{\vec{H}_O}{\|\vec{H}_O\|}$

### Keplers 2:a lag: Sektorhastigheten (vid centralrörelse!)

är konstant. Låt  $h = |\vec{r} \times \vec{v}|$ , då gäller

- Sektorhastighet, allmänt:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}h$$

- Sektorhastighet i cylinderkoordinater:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

### Binets formel

Binets formel omvandlar kraftekvationen från att vara beroende av tiden till att vara beroende av vinkeln ( $\theta$ ).

$$a_r = -h^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

där  $u = \frac{1}{r}$  och  $h = r^2\dot{\theta}$  för cirkelrörelse.

En potentialfunktion definieras som en funktion som ger värdet av kurvintegralen

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där  $r_0$  är en referenspunkt/“nollnivå”,  $\vec{r}$  är det aktuella läget.

Arbetet som potentiella energin utför är

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$

(från flervariabeln - andra hållet:  $U_{1-2} = V_2 - V_1$ )

I ett *konserverativt* kraftfält *bevaras* totala mekaniska energin! Läs mer här vid intresse.

### Energilagar

#### Lagen om kinetisk energi

Lagen säger att kinetiska energin i en punkt  $T_2$  ges av energin i en punkt  $T_1$  samt arbetet som utförts mellan de två punkterna. Detta kan matematiskt skrivas  $T_1 + U_{1-2} = T_2$  eller på formen man oftare ser

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

“Arbetet utfört mellan två punkter är lika med ändringen i kinetiska energin mellan punkterna.” (Förväxla inte detta med att en konservativ kraft utför arbetet  $U_{1-2} = V_1 - V_2$ !)

Formeln ger

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \left(\frac{h^2}{GM}\right)C \cos \theta}$$

där  $C$  är en integrationskonstant som kan fås (vid rörelse runt jorden) genom

$$C = \frac{egR^2}{h^2}$$

alternativt genom

$$C = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{gR^2}{r_0 v_0^2}\right)$$

där  $r_0$  är minsta avståndet till jorden (perrigeum) och  $v_0$  är ursprungliga hastigheten av rymdfarkosten.

### Ellipsens geometri

#### Geometrisk attribut

- Storaxelns längd,  $2a$
- "Lill"axelns längd,  $2b$
- Avståndet till brännpunkter/foci:  $c$

#### Användbara samband:

- **Keplers 1:a lag:** Vid rörelse kring en planet eller liknande så är planeten i ellipsbanans ena foci.

### Mekanisk energi och mekaniska energilagen

Mekaniska energin är definierad som summan av kinetiska och potentiella energin i en punkt:  $E = T + V$ . På så sätt är det intuitivt att vi kan gå mellan två punkter genom:

$$T_1 + V_1 + \sum U_{\text{icke-konservativa krafter}} = T_2 + V_2$$

Ur detta kan vi få fram lagen nedan:

#### Mekaniska energilagen

**OBS!** Denna lag gäller bara om alla krafter som utför arbete är konservativa!

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 : \text{Kinetisk energi i punkt 1} \\ V_1 : \text{Potentialenergi i punkt 1} \\ T_2 : \text{Kinetisk energi i punkt 2} \\ V_2 : \text{Potentialenergi i punkt 2} \end{array} \right.$$

på samma sätt gäller  $T + V = E = \text{konst.}$  (den totala mekaniska energin är konstant i alla punkter om endast en konservativ kraft utför arbete).

#### Rörelsemängden för ett system bevaras

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

Detta gäller även vid stötar (se nedan) och samma princip för rörelsemängdsmomentet (se till vänster)

- avstånd till foci 1 + avstånd till foci 2 =  $2a$  i alla punkter
- $a^2 = b^2 + c^2$  (läs detta igen, det är inte samma benämning som Pythagoras sats!)

### Ellipsens ekvation

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 + e \cos \theta}$$

### Eccentricitet

Ett mått på hur "nära" en konisk sektion (ellips, parabel eller hyperbel) är från att vara en perfekt cirkel.

$$e = \frac{c}{a}$$

Värde på $e$	Form
$e < 1$	Ellips
$e = 1$	Parabel
$e > 1$	Hyperbel
$e = 0$	Cirkel

### Banenergi

Banenergin för en satellit är

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mGM}{r}$$

### Stötar

En stöt är en impuls som sker under en (mycket) kort tid. En stöt kan vara något på skalan mellan:

- *elastisk* (partiklarna rör sig separat från varandra efter kollisionen) - studstal 1, *ingen* energiförlust om  $e = 1$  (annars liten energiförlust).
- *inelastisk* (partiklarna rör sig som en sammanhängande massa efter kollisionen) - studstal 0, *maximal* energiförlust

### Stötimpulslagen för en partikel

$$\vec{I}_{12} = p' - p = m(\vec{v}' - \vec{v})$$

### Studstal

Studstalet är måttet på hur elastisk en stöt är och definieras:

**För en stöt längs en axel, t.ex.  $x$ -axeln:**

$$e = \frac{\text{hastighetsändringen efter}}{\text{hastighetsändringen före}} = \frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}$$

**För en sned stöt:** (längs en normal med infallsvinkeln  $\alpha$  och "utfallsvinkeln"  $\beta$ ):

$$e = \frac{v' \cos \beta}{v \cos \alpha} \text{ samt } e = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

och är konstant.

*Banenergin kan relateras till eccentricitet!*

$$\frac{2E}{m} = (e^2 - 1) \left( \frac{GM}{h} \right)^2$$

*Banenergin kan också relateras till storaxelns längd!*  
(gäller **bara** för ellipser):

$$E = -\frac{GmM}{2a}$$

Detta samband gör det EXTREMT enkelt att bestämma hastigheten för något som kretsar kring jorden!

## Svängningar

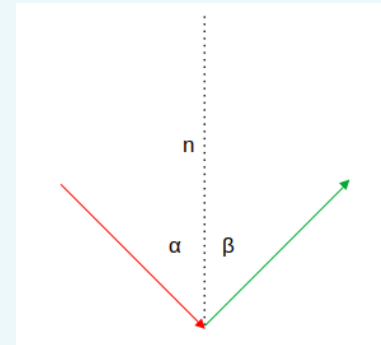
### Allmänt

#### Periodtid

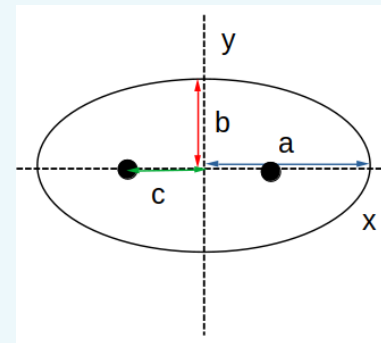
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

där  $\omega$  varierar beroende på vad för typ av svängning det är. För odämpad svängning används  $\omega_n$ , för dämpad svängning används  $\omega_d$ , osv.

x



Figur 1: Snedstöt.



Figur 2: Ellipsens geometri

**Keplers 3:e lag:** omloppstiden  $\tau$  kring en kropp med massan  $M$  förhåller sig till omloppsbanans halva storaxel  $a$  enligt

$$\tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

**Konvertera lösningar**

Konverteringen  $A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \leftrightarrow C \sin(\omega t + \alpha)$  fås genom  $\tan \alpha = \frac{B}{A}$ ,  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  där  $C$  är amplituden och  $\alpha$  är fasvinkeln.

**Komponenter av svängningsekvationen**

Differentialekvationen för svängningar kan innehålla:

- Fjäder:  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$
- Dämpare:  $2\zeta\omega_n = \frac{c}{m}$

**Svängningsterminologi**

- **Fria svängningar:** ett system som svänger av sig självt naturligt, dvs. inte påverkas av någon yttre kraft utsätts för denna typ av svängningar. *Exempel* en vikt som hänger i en fjäder.
- **Påtvungade svängningar:** ett system som svänger på grund av en extern periodisk kraft utsätts för påtvungade svängningar.
- **Odämpade svängningar:** Ingen dämpare är införd (duh!)
- **Dämpade svängningar:** Påverkas av en dämpare med viss konstant som påverkar hur svängningarna utförs.

$\Rightarrow$  *Trevliga följsamband:*

- $\tau \propto a^{3/2}$
- $\tau \propto (\frac{1}{E})^{3/2}$  (se *Banenergi kopplat till storaxelns längd*)

**Mall för olika typer av svängningar**

Differentialekvationen för de olika svängningarna är på formen:

**Odämpad svängning**

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_n^2 x = \begin{cases} \frac{F_0}{m} \sin \omega t & \text{om påtvungad} \\ 0 & \text{om fri} \end{cases}$$

**Dämpad svängning**

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{c}{m}\dot{x} = \ddot{x} + \omega_n^2 x + 2\zeta\omega_n \dot{x} = \begin{cases} \frac{F_0}{m} \sin \omega t & \text{om påtvungad} \\ 0 & \text{om fri} \end{cases}$$

**Amplitud för påtvungade svängningar**

Om en svängning påverkas av en kraft  $\frac{F_0}{m} \sin / \cos \omega t$  gäller (amplituden  $X$  är...):

**Dämpade svängningar****Vinkelfrekvens**

Vinkelfrekvensen för dämpade svängningar:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

**Olika typer av dämpningar**

**Stark dämpning**,  $\zeta > 1$ : Två reella negativa rötter. Lösningen till ekvationen beskriver ingen periodisk rörelse. Den passerar jämviktsläget en gång och går sedan mot 0.

**Kritisk dämpning**,  $\zeta = 1$ : En reell dubbelrot,  $r = -\omega_n$ . Se stark dämpning för vad denna svängning gör.

**Svag dämpning**,  $\zeta < 1$ : Två imaginära rötter. Lösningen till ekvationen beskriver en periodisk rörelse. Jämviktsläget passeras oändligt många gånger men amplituden minskar.

**Logaritmiska dekrementet**

Om man mäter upp två värden  $x(t)$  där  $x$  är din differentialekvation som skiljer sig åt med periodtiden  $\tau_d$ , kan dämpningskonstanten hittas från

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

**• Påtvingad, odämpad svängning:**

$$X = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

**• Påtvingad, dämpad svängning:**

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}}$$

Fullständiga partikulärlösningen:  $x_p = X \sin / \cos \omega t$

**Kritisk frekvens för påtvingade svängningar**

Om  $\omega = \omega_n$  kommer amplituden öka obegränsat. Om en uppgift frågar efter den "kritiska" amplituden är det detta som avses!

Med svängningarnas amplitud  $X$  kan förstöringsfaktorn (hur mycket amplituden ökar jämfört med jämviktsläget om en konstant kraft skulle inverka) definieras som

$$M = \frac{X}{X|_{\omega=0}}$$



$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

|

# Appendices

## Astronomisk ordlista

- **Apogeum:** Den punkt i en satellits eller himlakroppens bana som är längst bort från jorden.
- **Perigeum:** Den punkt i en satellits eller himlakroppens bana som är närmast jorden.
- **Zenit:** En punkt direkt ovanför betraktaren, det vill säga den punkt på himlen som ligger rakt mot jordens yta där betraktaren befinner sig.
- **Geostationär satellit:** En satellit som kretsar runt jorden över ekvatorn och rör sig i samma hastighet som jordens rotation, vilket gör att den verkar vara stillastående från jordens yta.
- **Polärsatellit:** En satellit som kretsar runt jorden i en bana som går nära över jordens poler, vilket möjliggör täckning av nästan hela planeten under dess omloppsbanan.

## Repetition från envariabelanalys: Ordinära linjära differentialekvationer av andra ordningen

### Homogena lösningar

Om ekvationen har två reella rötter:

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

där  $A, B$  är godtyckliga reella konstanter,  $r_1, r_2$  är rötterna till ekvationen.

Om ekvationen har en dubbelrot:

$$y = Ae^{rt} + Bte^{rt} = e^{rt}(A + Bt)$$

där  $A, B$  är godtyckliga reella konstanter,  $r$  är dubbelroten till ekvationen.

Om ekvationen har en komplex rot:

$$y = e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$$

där  $A, B$  är godtyckliga reella konstanter och  $\alpha$  och  $\beta$  är från följande formel:

$$r = \alpha \pm \beta i$$

till exempel, om ekvationen har lösningen  $r = 2 \pm 3i$ , då är  $\alpha = 2, \beta = 3$ .

### Partikulära lösningar

Om vi har en differentialekvation med ett högerled som inte är noll, löser man först den homogena ekvationen med högerledet satt till noll och sedan ansätter man värden för det icke-nollställda högerledet. Värden kan ansättas enligt följande tabell:

Högerled	Ansätt
Konstant, t.ex. 1	$y_p = a$
1:a-gradspolynom, t.ex. $t$	$y_p = at + b$
2:a-gradspolynom, t.ex. $t^2$	$y_p = at^2 + bt + c$
$k \cdot e^{rt}$ , t.ex. $2 \cdot e^{5t}$	$y_p = ae^{rt}$
$\sin(t)$	$y_p = a \sin(t) + b \cos(t)$

Den resulterande lösningen fås genom att addera den partikulära lösningen och den homogena lösningen:

$$y = y_h + y_p$$

### Resonans

Om det man tänker ansätta redan är en del av den homogena lösningen, kan man inte använda samma ansats. I sådana fall kan ansatsen multipliceras med  $t$ .

## Sinus- och cosinusadditionsformler

Förekommer då och då i uppgifter, därför relevant att kunna dessa.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$