Mekanik I - Sammanfattning

Med reseveration för att formler och/eller fakta är felaktiga och övriga skrivfel. Den senaste versionen av formelbladet finns att hitta, free of charge, no strings attached, på https://github.com/sotpotatis/mekanik-i-cheatsheet/blob/main/main.pdf. ***Lycka till!***

Statik

Vektoralgebra

Enhetsvektor

För att göra en vektor till en enhetsvektor (längd 1):

$$\boxed{\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}}$$

Skalärprodukt

Skalärproduktens samband med vinkeln:

$$\boxed{(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \|a\| \, \|b\| \cos \alpha}$$

Projektion på enhetsvektor

Storleken av projektionen av en godtycklig vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$ ges av formeln för vinkeln ovan. Projicera $\vec{a}$ på enhetsvektorn $\hat{e}_v$

$$proj_{\hat{e}_v}(\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \hat{e}_v) \cdot \hat{e}_v$$

observera att har vi en enhetsvektor gäller

$$(\vec{a} \cdot \hat{e}_v) = \|a\| \, cos\alpha$$

α är vinkeln mellan vektorerna.

Moment

Allmän formel

Momentet för en kraft i en punkt A:

$$\vec{M}_P = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} \quad \begin{cases} \vec{M} : \text{Moment} \\ \vec{r}_{OA} : \text{Radie från origo till punkten A} \\ \vec{F} : \text{Kraft} \end{cases}$$

Observera att i $\mathbb{R}^2$ gäller att

$$M = Fd$$

där d är det *vinkelräta avståndet* (hävarmen) som kraften har på momentpunkten.

Moment med avseende på en axel

$$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_P \cdot \hat{e}_\lambda \quad \begin{cases} \vec{M}_\lambda : \text{Moment med avsikt på axeln } \lambda \\ \vec{M}_P : \text{Moment i punkten (se ovan)} \\ \hat{e}_\lambda : \text{Enhetsvektor för axeln } \lambda \end{cases}$$

Observera: momentet med avseende på en axel är en *skalär*!

Övriga momentrelaterade samband

Observera att *en kraft har samma moment längs hela sin verkningslinje*. Att flytta en kraft längs med sin verkningslinje kan förenkla beräkningar.

Vektorkomponenter

Se bild.

$$\begin{cases} a_x = acos\alpha \\ a_y = acos\beta \\ a_y = acos\gamma \end{cases}$$

Kryssprodukt

Kryssproduktens samband med vinkeln:

$$\boxed{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| sin\alpha}$$

Räkneregler & area:

Observera att *kryssproduktens belopp=arean som spänns upp av* $\vec{a}$ & $\vec{b}$

Kryssprodukten är inte kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Determinant-minnesregel för kryssprodukten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

Dimensionsanalys

Storheter i mekaniken

Storhet	Namn
M	Massa
L	Längd
T	Tid

Anmärkning: dimensionen av en storhet betecknas $[storhet]$, t.ex. $[s] = L$. Alternativ beteckning: dimstorhet, t.ex. $dims = L$

Exempel:

- Hastighet: LT^{-1}
- Acceleration: LT^{-2}
- Kraft: MLT^{-2}

Ansats för dimensioner

Ansätt att vänsterledet ska vara lika med högerledet: (när vi har en storhet x som beror på variablerna a, b, c, ansätt potenserna α, β och γ samt den dimensionslösa konstanten c)

$$x = ca^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$$

Högerhandsregeln för kryssprodukt:

- Rikta alla fingrar utom tummen längs med första vektorn ($\vec{a}$).
- Skruva fingrarna i riktning mot andra vektorn ($\vec{b}$)
- Tummen pekar i riktningen $\vec{a} \times \vec{b}$.

Dubbla kryssprodukten:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Olika typer av kraftsystem

Ekvivalenta kraftsystem

Relation mellan två system där kraftsumman *och* momentsumman är densamma i alla punkter.

Ekvimomenta kraftsystem

Ett system där:

1. Kraftsumman är samma
2. Momentsumman är samma i en punkt.

$\rightarrow$ Ekvimomenta kraftsystem är ekvivalenta. Vad detta betyder rent praktiskt är att det räcker med att kolla

Kraftsystem

Ett kraftsystem består av *flera krafter och moment*.

Inledande principer

Definitionen av ett kraftsystem är

$$\begin{cases} F_1, \quad P_1 \leftarrow \text{kraft } F_1 \text{ med angreppspunkt} P_1 \\ F_2, \quad P_2 \leftarrow \text{kraft } F_2 \text{ med angreppspunkt} P_2 \\ \vdots \\ F_n, \quad P_n \leftarrow \text{kraft } F_n \text{ med angreppspunkt} P_n \end{cases}$$

Ett kraftsystem har också **en kraftsumma**, som fås av att summera de individuella krafterna:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Detsamma gäller för momentsumman med avseende på en punkt A:

$$\vec{M} = \vec{M}_{A1} + \vec{M}_{A2} + ... + \vec{M}_{An}$$

Kraftigt reducerade kraftsystem

(pun intended i rubriken!)

momentsumman i en punkt - om den är lika m.a.p. en punkt är den lika m.a.p. alla punkter!

Kraftpar

Kraftpar är ett kraftsystem som består av två lika stora och motriktade krafter. **Kraftsumma:** 0.

Momentsumma: oberoende av punkt.

Notera även att $|M_O| = Fh \quad \begin{cases} M_O : \text{Momentet i origo} \\ F : \text{Beloppet av kraften i systemet} \\ h : \text{Avstånd mellan krafterna} \end{cases}$

eller på vektorform: $r_{\vec{BA}} = M_O \times F_1$

Reduktionsresultatet

Innebär att vi *reducerar* ett komplext kraftsystem till att bestå bara av *en kraft* och *ett moment*. Resultatet kallas ett reduktionsresultat med avseende på en punkt P.

Varje gång vi flyttar en kraft för att reducera kraftsystemet, måste vi lägga till ett moment för att kompensera för flytten, ett
ersättningsmoment:

$$\vec{M}_A = r_{\vec{AP}} \times \vec{F}$$

Om vi flyttar alla krafter till samma punkt, får vi en **total**

Enkraftsresultant

Handlar om att vi kan hitta en punkt där vi kan reducera att system till *en kraft* och *inget moment*.

Ekvationen som hittar punkten:

$$\vec{r}_{BA} \times \vec{F} = -\vec{M}_A$$

där r_{BA} är avståndet till den sökta punkten från en vald punkt A.

Notera: eftersom det krävs att $\vec{M}_A \perp \vec{F}$, så är ett bra första test att se om det får att reducera till en enkraftsresultant att kontrollera att $\vec{M}_A \cdot \vec{F} = 0$

Kraftskruv

Alla system går inte att reducera till en enkraftsresultant, men de går att reducera till en *kraftskruv*! En sådan består av *ett moment* och *en kraft*, båda i $\vec{O}$.

Masscentrum

Masscentrum är där tyngdkraften angriper i en punkt, och betecknas med G eller ◕.

kraftsumma vid reduktionsresultat:

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^{n} \vec{F}_n$$

Vi får också en en **total momentsumma vid reduktionsresultat:**

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^{n} r_{\vec{AP_n}} \times \vec{F_n}$$

Observera att den totala kraftsumman generellt inte är vinkelrät mot momentsumman, *och* att *alla kraftsystem kan reduceras till en kraft och ett moment* (se även *Kraftskruv*).

Flytt av reduktionsresultat ger att momentsumman ändras enligt **sambandsformeln:**

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + r_{\vec{BA}} \times \vec{F} \begin{cases} \vec{M}_B : \text{Momentet i ny punkt} \\ \vec{M}_A : \text{Moment i tidigare punkt} \\ \vec{r}_{BA} : \text{Avstånd mellan tidigare och ny punkt} \\ \vec{F} : \text{Ersättnings-/reduktionskraft} \end{cases}$$

Pappus regler

Pappus regler kan användas för att förenkla integraler över masscentrum.

Masscentrum för ett partikelsystem

(Dvs. *ändligt antal partiklar*)

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_i\vec{r}_i}{m_1 + m_2 + ... + m_i}$$

Masscentrum för en stelkropp

(Dvs. ***o**ändligt antal partiklar*) Ges av integration:

$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

där $\vec{r}$ är små radier och dm är små massor. eller I komponentform:

$$x_G = \frac{\int x \; dm}{\int dm}$$

$$y_G = \frac{\int y \; dm}{\int dm}$$

$$z_G = \frac{\int z \; dm}{\int dm}$$

Verktyg för integration

Det finns några verktyg som kan förenkla beräkningar av masscentrum.

Pappus astearegel

Gäller för en massbelagd kurva $\mathcal{C}$ som ligger på xy-planet.

$$A = 2\pi y_G l \implies y_G = \frac{A}{2\pi l} \begin{cases} A: \text{Area av yta efter rotation} \\ y_G: \text{y-komponenten för masscentrum} \\ l: \text{Längd av kurvan} \end{cases}$$

Notera att A är botten-/mantelarean som den yta som bildas om du tänker dig att du skapar en rotationsvolym av din kurva. Exempel: du använder Pappus astearegel för en halvcirkelbåge. Då är rotationsarean en sfär, så $A = 4\pi r^2$. l är däremot längden på din halvcirkel, dvs. πr *Notera även* att denna regel appliceras genom att du i de praktiska fallen söker y_G.

Pappus volymregel

Samma koncept som arearegeln, gäller en massbelagd yta med arean A.

$$V = 2\pi y_G A \implies y_G = \frac{V}{2\pi A}$$

Notera att A är arean av den yta som du roterar, och V är volymen som bildas om du tänker dig att du skapar en rotationsvolym av din yta. (*skillnad från arearegeln!*) Exempel: du använder Pappus arearegel för en halvcirkel*skiva*. Då är rotationsvolymen en sfär, så $V = 4\pi r^3$. A är däremot arean för din halvcirkelskiva, dvs. $\frac{\pi r^2}{2}$

Linje- och ytdensitet Du kan ersätta masselement dm genom att anta att alla element har samma densitet, och därmed transformera en massintegral till en “storleksintegral“.

Linjedensitet ges av:

$$\rho = \frac{m}{l}$$

Area-/ytdensitet ges av

$$\rho = \frac{m}{a}$$

Exempel på en substitution:

För en halvcirkelbåge, låt $dm = \rho dA$ där ρ är areadensiteten och dA är arean över ditt valda lilla areaelement.

Jämvikt

Jämvikt definieras med avseende på en referensram, dvs. ett område man kollar om det är jämvikt med avseende på.

Krav för jämvikt: Kraftsumman och momentsumman med avseende på en punkt ska vara 0 för alla delsystem, dvs.

$$\left\{ \sum \vec{F} = \vec{0}, \sum \vec{M}_A = \vec{O} \quad \text{för alla delsystem} \right\}$$

Notera även att även denna regel appliceras genom att du i de praktiska fallen söker y_G.

Friläggning

Konceptet av friläggning handlar om att välja hur man ska dela upp ett problem i olika delsystem.

Frihetsgrader

Frihetsgrader i 3D

1. translation kring x-axeln
2. translation kring y-axeln
3. translation kring z-axeln
4. rotation kring x-axeln
5. rotation kring y-axeln
6. rotation kring z-axeln

Notera: translation betyder att man kan röra sig i "rymden" (dvs. koordinatsystemet)

Frihetsgrader i 2D

1. translation kring x-axeln

I 2D gäller:

Alternativ 1:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ M_{A,z} = 0 \end{cases}$$

Observera att momentet i z-led är det enda som behöver vara noll, eftersom de andra kraven implicerar jämvikt i övriga led.

Alternativa jämviktsekvationer i 2D:

Alternativ 2:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ M_{A,z} = 0 \\ M_{B,z} = 0 \end{cases}$$

OBS! $\vec{r}_{AB}$ej $\parallel$ med verkningslinjen till $\vec{F}$.

Alternativ 3:

$$\begin{cases} M_{A,z} = 0 \\ M_{B,z} = 0 \\ M_{C,z} = 0 \end{cases}$$

OBS! ABC ska ej bilda en rät linje.

Statiskt obestämt problem:

Ett problem där du har färre oberoende jämviktsekvationer än sökta obekanta.

$\boxed{2}$ translation kring y-axeln

$\boxed{3}$ rotation kring z-axeln

Notera: se ovan för information om vad translation betyder.

Friktion

Friktionskraften är en kraft som uppkommer i kontakt mellan två ytor och är parallell med ytan där friktionen uppstår.

Friktionskraft

Maximala friktionskraften ges av

$$F \leq \mu_k N$$

där N är nomalkraften.

Friktionstal

Det finns ett statiskt friktionstal och ett kinematiskt friktionstal, dock kan man förutsätta att $\mu_s \approx \mu_k \approx \mu$. μ_k är friktionstalet där glidning börjar inträffa.

Jämvikt och glidning

Om friktionskraftens storlek är enligt

$$0 \leq F \leq \mu_s N \approx \mu N$$

Newtons tredje lag och jämvikt

Newtons tredje lag: “för varje kraft som verkar på ett föremål finns det alltid en motkraft som verkar på föremålet, av samma storlek men i motsatt riktning.”

Kraften och dess motkraft angriper i olika kroppar. Till exempel angriper tyngdkraften på en kopp i koppen masscentrum, , medan koppens normalkraft (motkraften till tyngdkraften i detta fall), angriper i jordens medelpunkt.

Reaktionskrafter och -moment

Krafter och moment som uppstår när en kropp är *låst* från att röra sig i någon yta.

Nedan är några exempel.

Vajer/länk

- Påverkas av en reaktionskraft vinkelrätt mot länken

Objekt mot yta

- Påverkas av en normalkraft N vinkelrätt mot underlaget.
- *Om friktion finns:* påverkas även av en friktionskraft längs underlaget.

gäller så har vi *jämvikt*. **Observera** alltså att storleken på kraften är variabel!

Vid

$$F = \mu_k N$$

så börjar vi ha *glidning*. Dvs. när

$$F > \mu_k N \approx \mu N$$

Stjälpningsvillkor

Normalkraften på ett objekt kan angripa utanför objektet. Det går alltså att formulera villkoret

$$r_N \leq L$$

där r_N är avståndet mellan objektets hörn till normalkraften, och L är den maximala längden från hörnet som normalkraften kan röra sig på.

Led/sprint

- Påverkas av reaktionskrafter i x och y-led.
- *Om friktion finns:* påverkas även av ett kraftmoment.

Kulled

- Påverkas av reaktionskrafter i x, y och z-led.

Fastsättning

(tänk t.ex. en balk på en vägg). Objektet kan inte röra sig åt någon riktning.

- Påverkas av reaktionskrafter i x och y-led.
- Påverkas även av ett kraftmoment.

Gångjärn

- Påverkas av reaktionskrafter i x, y och z-led.
- Påverkas av reaktionsmoment i x och z-led (alla led förutom den led man kan vrida gångjärnet kring)

Fast inspänd balk

- Påverkas av reaktionskrafter i x, y och z-led.
- Påverkas av reaktionsmoment i x, y och z-led.

Appendices

Masscentrum för några enkla former

Typ	Masscentrum (y-koordinat)
Kvadratskiva	$\frac{a}{2}$, där a är sidlängden.
Triangelskiva	$\frac{h}{3}$, där h är höjden.

Översikt av några vanliga krafter

Dessa förekommer i uppgifter och är därför bra allmänbildning.

- Lyftkraft i en vätska: $F = \rho \Delta V g$ där ΔV är den undanträngda volymen.
- Tryckkraft: $F = PA$ där P är trycket och A är arean som verkas på.

Dynamik

Kinematik

Kartesiska koordinater

Rätlinjig rörelse

"Prick-notationen" (även kallat Newtons notation) betecknar *tids*derivator. $\dot{x} \iff \frac{dx}{dt}$

- **Läge:** $x(t)$
- **Hastighet:** $v(t) = \dot{x}(t)$
- **Acceleration** $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

Generell kurvlinjär rörelse

Skillnaden från rätlinjig rörelse är att läget beskrivs som en vektorvärd funktion av tiden, dvs.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

till exempel. (i kartesiska koordinater)

Rörelserelaterade integraler

1. $\int$ hastighet $=$ sträcka
2. $\int$ acceleration $=$ hastighet

(Mycket) användbara samband vid beräkning

(Se "Mechanics for Engineers, Dynamics (13th ed.)" av Hibeller, Yap)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = \frac{dv}{ds}v$$

$$\implies \boxed{ads = vdv}$$

där ds t.ex. om rörelsen sker längs x-axeln är dx.

Relevanta samband:

- $vdt = ds$ *Hastighet-tid*
- $ads = vdv$ *Acceleration-tid*

Exempel för att bestämma ett uttryck för hastighet, given acceleration:

$$\int_0^{s_0} ads = \int_0^{v} vdv \implies \frac{v^2}{2} = \int_0^{s_0} ads$$

där s_0 är övre gränsen för sträckan.

Kurvlinjär rörelse i naturliga komponenter

Naturliga komponenter betraktar acceleration och hastighet från perspektivet av partikeln som rör sig.

Kurvlinjär rörelse i kartesiska koordinater

Enhetsvektorer

- Enhetsvektor i x-led, $\vec{e}_x$:

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0)$$

- Enhetsvektor i y-led, $\vec{e}_y$:

$$\vec{e}_y = (0, 1, 0)$$

- Enhetsvektor i z-led (3D), $\vec{e}_z$:

$$\vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

Läge, hastighet, acceleration

- **Läge:** $\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$
- **Hastighet:** $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$
- **Acceleration:** $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$

Kurvlinjär rörelse i cylindriska koordinater

Enhetsvektorer

- $\vec{e}_r$: Enhetsvektor längs med radien av en cirkel i xy-planet, dvs. analogt med polära koordinater.

$$e_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

Enhetsvektorer

- $\vec{e}_t$ Tangentiell komponent
- $\vec{e}_n$ Normalkomponent
- $\vec{e}_b = \vec{e}_t \times e_n$ (3D): Binormalen. I 3D har vi tre komposanter av hastighet och acceleration $\vec{e}_b$ är *normalen* till det *oskulderade planet*, dvs. planet som spänns upp av $\vec{e}_t$ och $\vec{e}_n$.

$$\boxed{\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{t} \times \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{n}}$$

$s(t)$ beskriver partikelns båglängd ("sträcka längs kurvan") som beroende av tiden.

Läge, hastighet, acceleration

- **Läge:** $\vec{r} = s\vec{e}_t$
- **Hastighet:** $\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t + 0\vec{e}_n + 0\vec{e}_b$
- **Acceleration**: $\underbrace{\dot{v}\vec{e}_t}_{①} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}_{②} + 0\underbrace{\vec{e}_b}_{③}$.

$$\vec{a}_b = 0$$

gäller alltid. där

$$\begin{cases} ① : \text{tangentiella accelerationen} \\ ② : \text{normalaccelerationen} \\ ③ : \text{binormalaccelerationen} \end{cases}$$

- $\vec{e}_\theta$: Enhetsvektor längs med vinkeln mot $\vec{e}_r$ i xy-planet, enligt

$$e_\theta = (\cos\left[\theta + \frac{\pi}{2}\right], \sin\left[\theta + \frac{\pi}{2}\right], 0)$$

(observera att $\cos\left[\theta + \frac{\pi}{2}\right] = -sin\theta$ *och* $\sin\left[\theta + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\theta$*)*

- $\vec{e}_z$: Enhetsvektor i vertikalriktningen:

$$(0, 0, 1)$$

Läge, hastighet, acceleration

- **Läge:** $r\vec{_{OP}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$
- **Hastighet:** $\vec{v} = \dot{\vec{r}}_{OP} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}$
- **Acceleration:** $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{①}\vec{e_r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{②}e_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{③}\vec{e_z}$

där $\begin{cases} ① : \text{radiella accelerationen} \\ ② : \text{transversella accelerationen} \\ ③ : \text{vertikala accelerationen} \end{cases}$

Nämnvärda samband vid cirkelrörelse För en partikel som rör sig med vinkelhastighet ω i en cirkelbana med radie R gäller $v = \omega R$.

där ρ är krökningsradie, "radie av den perfekta cirkeln som passar kring riktningen".

Krökningsradie

I 2D gäller, för en plan kurva:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

(Observera att $\rho = R$ för en cirkel, om cirkelns radie är R)

I 3D gäller:

$$\rho = \frac{|v|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

$\Rightarrow$ Notera följande:

- $|v| = \dot{s}$
- $\vec{v}$ och $\vec{a}$ är funktioner av tiden som ger hastighet och accelerationen i en viss punkt. Detta är analogt med $\vec{v} = \vec{r}'$, $\vec{a} = \vec{r}''$. OBS att det går att derivera med avseende på annat än tiden beroende på hur r är uttryckt!

Nämnvärda samband vid naturliga komponenter

$$\Delta s = \rho\Delta\theta \implies v = \rho\Delta\theta$$

Energi och arbete

Potentialer

Gravitation

Potentialen mellan två kroppar med massor m och M på ett avstånd r ges enligt

$$V(r) = -\frac{GmM}{r}$$

Viktigt! Det går nära jordytan att byta ut $GM \longleftrightarrow gR^2$ Så *vid rörelse kring jorden gäller*

$$V(r) = -\frac{mgR^2}{r}$$

och *vid närheten av jordytan gäller*

$$V(z) = mgz$$

Notera även **allmäna gravitationskraften** mellan två kroppar som är $F_g = \frac{GMm}{r^2}$. (observera r^2!)

Fjäder

Notera att fjäderkraften är $F = k\Delta l$ Potentialen för en fjäder är

$$V = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

. där $\Delta l = l_1 - l_0$ och l_0 är fjäderns naturliga (ospända) läge (jämför med fjäderkraften: ^{2} och $\frac{1}{2}$)

Dynamikens kraftekvationer

Rörelsemängd

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Rörelsemängden för ett system

Rörelsemängden för ett system **bevaras**, dvs

$$\vec{p}'_{\text{tot}} = \vec{p}_{\text{tot}}$$

om inga yttre krafter verkar på systemet!

Newtons lagar

Newtons 1:a lag

I. *"En kropp är i vila eller rör sig med konstant hastighet om kraftsumman är* 0.*"*

$$\vec{F} = 0 \iff \vec{v} : \text{konstant}$$

Kraftsumma (och Newtons 2:a lag)

Summan av alla krafter som verkar på ett system är tidsderivatan av dess rörelsemängd:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

II. *"Då massan inte ändras över tid (t.ex för en partikel), gäller*

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

Rörelsemängdsmoment

Rörelsemängdsmoment definieras som

$$H_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

($\vec{p} = m\vec{v}$) *Notera* hur detta bara är det allmäna fallet av momentekvationen från statiken!

Rörelsemängdsmomentlagen

Med avseende på origo gäller

$$\dot{H}_O = M_O$$

$\implies$ **(Väldigt) användbar följd:** Om $M_O = 0$ är H_O konstant.

Impuls

Impuls betraktar inverkan från krafter eller moment under en ändlig tid.

Kraftimpuls

KraftImpuls är *ändringen av rörelsemängden* vid en viss tidpunkt. Dvs.

$$\text{Kraftimpuls: } I = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = \underbrace{F\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}_{\text{kallas } \textit{kraftimpuls(lagen)}}$$

" (Newtons andra lag) Detta gäller i alla koordinatsystem, exempelvis i naturliga komponenter:

$$\sum \vec{F} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$$

Newtons 3:e lag

III. *"Två kroppar påverkar varandra med lika men motåtriktade krafter - varje kraft har en motkraft"*

Arbete, allmänt

Arbete definieras som en kurvintegral

$$U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Arbetet utfört av ett moment ges av

$$U = M d\theta$$

där $d\theta$ är ändringen av vinkeln där momentet vrider kring.

Effekt

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Alternativt

$$dU = Pdt \implies U_{0-1} = \int_{t_0}^{t_1} Pdt$$

Momentimpulslagen

Det gäller även för moment att

$$\Delta \vec{H}_O = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O \mathrm{dt}$$

Centralrörelse

Principen för en centralrörelse är att *endast en centralkraft (en kraft som alltid går genom samma punkt)*, inga andra krafter, utför *arbete*. *Exempelvis:* en satellits rörelse runt jorden, en fjäder fäst i en punkt (om alla krafter utom fjäderkraften kan försummas)

Kännetecken för centralrörelse:

- *Kraft*momentet är $0 \implies$ *rörelsemängds*momentet är konstant.
- Partikelbanorna är plana, normalen ges av $\frac{\vec{H}_O}{\|H_0\|}$

Keplers 2:a lag:Sektorhastigheten (vid centralrörelse!) är konstant. $\boxed{\text{Låt } h = |\vec{r} \times \vec{v}|}$, då gäller

- Sektorhastighet, allmänt:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}h$$

- Sektorhastighet i cylinderkoordinater:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

Potentiell energi

En potentiell energi är en potentialfunktion till ett kraftfält. *Observera att* den definieras åt “andra riktningen“ än vad man kanske är van med från flervariabeln!

En potentialfunktion definieras som en funktion som ger värdet av kurvintegralen

$$V(\boxed{\vec{r}}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\boxed{\vec{r}}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där r_0 är en referenspunkt/“nollnivå“, $\vec{r}$ är det aktuella läget.

Arbetet som potentiella energin utför är

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$

(från flervariabeln - andra hållet: $U_{1-2} = V_2 - V_1$)

I ett *konservativt* kraftfält *bevaras* totala mekaniska energin! Läs mer här vid intresse.

Energilagar

Lagen om kinetisk energi

Lagen säger att kinetiska energin i en punkt T_2 ges av energin i en punkt T_1 samt arbetet som utförts mellan de två punkterna. Detta kan matematiskt skrivas $T_1 + U_{1-2} = T_2$ eller på formen man oftare ser

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

Binets formel

Binets formel omvandlar kraftekvationen från att vara beroende av tiden till att vara beroende av vinkeln (θ).

$$a_r = -h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

där $u = \frac{1}{r}$ och $h = r^2\dot{\theta}$ för cirkelrörelse.

Formeln ger

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + (\frac{h^2}{GM})C\cos\theta}$$

där C är en integrationskonstant som kan fås (vid rörelse runt jorden) genom

$$C = \frac{egR^2}{h^2}$$

alternativt genom

$$C = \frac{1}{r_0}(1 - \frac{gR^2}{r_0v_0^2})$$

där r_0 är minsta avståndet till jorden (perrigeum) och v_0 är ursprungliga hastigheten av rymdfarkosten.

Ellipsens geometri

Geometriska attribut

- *Storaxelns längd*, $2a$

"Arbetet utfört mellan två punkter är lika med ändringen i kinetiska energin mellan punkterna." (Förväxla inte detta med att en konservativ kraft utför arbetet $U_{1-2} = V_{\mathbf{1}} - V_{\mathbf{2}}$!)

Mekanisk energi och mekaniska energilagen

Mekaniska energin är definierad som summan av kinetiska och potentiella energin i en punkt: $E = T + V$. På så sätt är det intuitivt att vi kan gå mellan två punkter genom:

$$T_1 + V_1 + \sum U_{\text{icke-konservativa krafter}} = T_2 + V_2$$

Ur detta kan vi få fram lagen nedan:

Mekaniska energilagen

OBS! Denna lag gäller bara om alla krafter som utför arbete är konservativa!

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \begin{cases} T_1 : \text{Kinetisk energi i punkt 1} \\ V_1 : \text{Potentialenergi i punkt 1} \\ T_2 : \text{Kinetisk energi i punkt 2} \\ V_2 : \text{Potentialenergi i punkt 2} \end{cases}$$

på samma sätt gäller $T + V = E =$ konst. *(den totala mekaniska energin är konstant i alla punkter om endast en konservativ kraft utför arbete)*.

- *"Lill"axelns längd*, $2b$
- *Avståndet till brännpunkter/foci:* c

Användbara samband:

- **Keplers 1:a lag:** Vid rörelse kring en planet eller liknande så är planeten i ellipsbanans ena foci.
- avstånd till foci 1 + avstånd till foci 2 $= 2a$ i alla punkter
- $a^2 = b^2 + c^2$ (läs detta igen, det är inte samma benämning som Pythagoras sats!)

Ellipsens ekvation

$$r = \frac{(1-e^2)a}{1+e\cos\theta}$$

Eccentricitet

Ett mätt på hur "nära" en konisk sektion (ellips, parabel eller hyperbel) är från att vara en perfekt cirkel.

$$e = \frac{c}{a}$$

Rörelsemängden för ett system bevaras

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

Detta gäller även vid stötar (se nedan) och samma princip för rörelsemängdsmomentet (se till vänster)

Stötar

En stöt är en impuls som sker under en (mycket) kort tid. En stöt kan vara något på skalan mellan:

- *elastisk* (partiklarna rör sig separat från varandra efter kollisionen) - studstal 1, *ingen* energiförlust om $e = 1$ (annars liten energiförlust).
- *inelastisk* (partiklarna rör sig som en sammanhängande massa efter kollisionen) - studstal 0, *maximal* energiförlust

Stötimpulslagen för en partikel

$$\vec{I}_{12} = p' - p = m(\vec{v}' - \vec{v})$$

Studstal

Studstalet är måttet på hur elastisk en stöt är och definieras:

För en stöt längs en axel, t.ex. x-axeln:

$$e = \frac{\text{hastighetsändringen efter}}{\text{hastighetsändringen före}} = \frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}$$

Värde på e	**Form**
$e < 1$	Ellips
$e = 1$	Parabel
$e > 1$	Hyperbel
$e = 0$	Cirkel

Banenergi

Banenergin för en satellit är

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mGM}{r}$$

och är konstant.

Banenergin kan relateras till eccentricitet!

$$\frac{2E}{m} = (e^2 - 1)\left(\frac{GM}{h}\right)^2$$

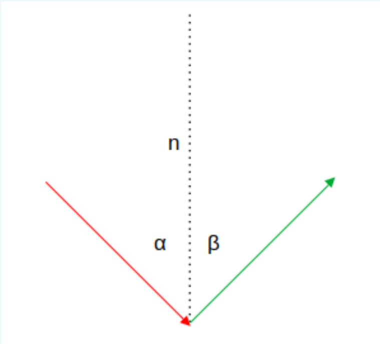
Banenergin kan också relateras till storaxelns längd! (gäller **bara** för ellipser):

$$E = -\frac{GmM}{2a}$$

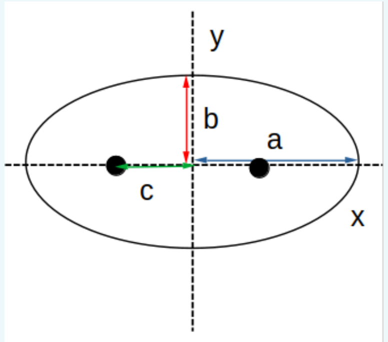
Detta samband gör det EXTREMT enkelt att bestämma hastigheten för något som kretsar kring jorden!

För en sned stöt: (längs en normal med infallsvinkeln α och "utfallsvinkeln" β):

$$e = \frac{v' \cos\beta}{v\cos\alpha} \text{ samt } e = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$



Figur 1: Snedstöt.



Figur 2: Ellipsens geometri

Svängningar

Allmänt

Periodtid

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

där ω varierar beroende på vad för typ av svängning det är. För odämpad svängning används ω_n, för dämpad svängning används ω_d, osv.

x

Konvertera lösningar

Konverteringen $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \leftrightarrow C\sin(\omega t + \alpha)$ fås genom $\tan\alpha = \frac{B}{A}$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ där C är amplituden och α är fasvinkeln.

Komponenter av svängningsekvationen

Differentialekvationen för svängningar kan innehålla:

- Fjäder: $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$
- Dämpare: $2\zeta\omega_n = \frac{c}{m}$

Svängningsterminologi

- **Fria svängningar:** ett system som svänger av sig självt naturligt, dvs. inte påverkas av någon

Keplers 3:e lag: omloppstiden τ kring en kropp med massan M förhåller sig till omloppsbanans halva storaxel a enligt

$$\tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

$\Longrightarrow$ *Trevliga följdsamband*:

- $\tau \propto a^{3/2}$
- $\tau \propto (\frac{1}{E})^{3/2}$ (se *Banenergi kopplat till storaxelns längd*)

Mall för olika typer av svängingar

Differentialekvationen för de olika svängningarna är på formen:

Odämpad svängning

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_n^2 x = \begin{cases} \frac{F_0}{m}\sin\omega t & \text{om påtvingad} \\ 0 & \text{om fri} \end{cases}$$

Dämpad svängning

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{c}{m}\dot{x} = \ddot{x} + \omega_n^2 x + 2\zeta\omega_n\dot{x} = \begin{cases} \frac{F_0}{m}\sin\omega t & \text{om påtvingad} \\ 0 & \text{om fri} \end{cases}$$

yttre kraft utsätts för denna typ av svängningar. *Exempel* en vikt som hänger i en fjäder.

- **Påtvingade svängningar:** ett system som svänger på grund av en extern periodisk kraft utsätts för påtvingade svängningar.
- **Odämpade svängningar:** Ingen dämpare är införd (duh!)
- **Dämpade svängningar:** Påverkas av en dämpare med viss konstant som påverkar hur svängningarna utförs.

Dämpade svängningar

Vinkelfrekvens

Vinkelfrekvensen för dämpade svängningar:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

Olika typer av dämpningar

Stark dämpning, $\zeta > 1$: Två reella negativa rltter. Lösningen till ekvationen beskriver ingen periodisk rörelse. Den passerar jämviktsläget en gång och går sedan mot 0.

Kritisk dämpning, $\zeta = 1$: En reell dubbelrot, $r = -\omega_n$. Se stark dämpning för vad denna svängning gör.

Amplitud för påtvingade svängningar

Om en svängning påverkas av en kraft $\frac{F_0}{m} \sin / \cos \omega t$ gäller (amplituden X är...):

- **Påtvingad, odämpad svängning:**

$$X = \frac{F_0/k}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

- **Påtvingad, dämpad svängning:**

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}}$$

Fullständiga partikulärlösningen: $x_p = X \sin / \cos \omega t$

Kritisk frekvens för påtvingade svängningar

Om $\omega = \omega_n$ kommer amplituden öka obegränsat. Om en uppgift frågar efter den "kritiska" amplituden är det detta som avses!

Med svängningarnas amplitud X kan förstoringsfaktorn (hur mycket amplituden ökar jämfört med jämviktsläget om en konstant kraft skulle inverka) defineras som

$$M = \frac{X}{X|_{\omega=0}}$$

.

Svag dämpning, $\zeta < 1$: Två imaginära rötter. Lösningen till ekvationen beskriver en periodisk rörelse. Jämviktsläget passeras oändligt många gånger men amplituden minskar.

Logaritmiska dekrementet

Om man mäter upp två värden $x(t)$ där x är din differentialekvation som skiljer sig åt med periodtiden τ_d, kan dämpningskonstanten hittas från

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

Appendices

Astronomisk ordlista

- **Apogeum**: Den punkt i en satellits eller himlakroppens bana som är längst bort från jorden.
- **Perigeum**: Den punkt i en satellits eller himlakroppens bana som är närmast jorden.
- **Zenit**: En punkt direkt ovanför betraktaren, det vill säga den punkt på himlen som ligger rakt mot jordens yta där betraktaren befinner sig.
- **Geostationär satellit**: En satellit som kretsar runt jorden över ekvatorn och rör sig i samma hastighet som jordens rotation, vilket gör att den verkar vara stillastående från jordens yta.
- **Polärsatellit**: En satellit som kretsar runt jorden i en bana som går nära över jordens poler, vilket möjliggör täckning av nästan hela planeten under dess omloppsbana.

Repetition från envariabelanalys: Ordinära linjära differentialekvationer av andra ordningen

Homogena lösningar

Om ekvationen har två reella rötter:

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

där A, B är godtyckliga reella konstanter, r_1, r_2 är rötterna till ekvationen.

Om ekvationen har en dubbelrot:

$$y = Ae^{rt} + Bte^{rt} = e^{rt}(A + Bt)$$

där A, B är godtyckliga reella konstanter, r är dubbelroten till ekvationen.

Om ekvationen har en komplex rot:

$$y = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$$

där A, B är godtyckliga reella konstanter och α och β är från följande formel:

$$r = \alpha \pm \beta i principle of virtual work$$

till exempel, om ekvationen har lösningen $r = 2 \pm 3i$, då är $\alpha = 2, \beta = 3$.

Partikulära lösningar

Om vi har en differentialekvation med ett högerled som inte är noll, löser man först den homogena ekvationen med högerledet satt till noll och sedan ansätter man värden för det icke-nollställda högerledet. Värden kan ansättas enligt följande tabell:

Högerled	Ansätt
Konstant, t.ex. 1	$y_p = a$
1:a-gradspolynom, t.ex. t	$y_p = at + b$
2:a-gradspolynom, t.ex. t^2	$y_p = at^2 + bt + c$
$k \cdot e^{rt}$, t.ex. $2 \cdot e^{5t}$	$y_p = ae^{rt}$
$\sin(t)$	$y_p = a\sin(t) + b\cos(t)$

Den resulterande lösningen fås genom att addera den partikulära lösningen och den homogena lösningen:

$$y = y_h + y_p$$

Resonans

Om det man tänker ansätta redan är en del av den homogena lösningen, kan man inte använda samma ansats. I sådana fall kan ansatsen multipliceras med t.

Sinus- och cosinusadditionsformler

Förekommer då och då i uppgifter, därför relevant att kunna dessa.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$

Virtuellt arbete

(gås igenom i boken). Bra för kopplade system. **Princip:**

1. Betrakta en liten förflyttning av systemet från det aktuella läget, t.ex. att en arm roterar litegrann åt vänster.
2. Inför t.ex. en x-axel för att beskriva läget av den partikel du vill undersöka, t.ex. en kolv som är kopplad till armen i steg 1.
3. Skriv upp en ekvation för ursprungliga läget av partikeln relaterat till det partikeln är kopplad till, exempelvis
$$x(\theta) = 3l\cos\theta$$
4. Derivera för att få skillnaden av läget vid en liten förflyttning av den relevanta variabeln som styr läget (från exemplet i (3) skulle det vara
$$dx = \frac{dx}{d\theta} = -3l\sin\theta d\theta$$
5. Ta fram ett uttryck för de krafter som utför arbete. Kom ihåg att ett moment utför arbetet $Md\theta$!

   Hypotetiskt exempel **Om statikproblem**:
$$\delta U = \sum \vec{F}\cdot\vec{dr} = Fdx - Md\theta$$
   Om dynamikproblem: sätt istället
$$\delta U = (\sum \vec{F} - m\vec{a})\cdot\vec{dr} = 0$$

6. Lös ut eventuella eftersökta storheter.

Trissor

Tre tumregler:

1. *Absolut-relativ rörelseanalys* är hjälpsamt för att undersöka hur trissors hastigheter relateras till varandra.
2. *Generellt:* om en trissa rör sig nedåt en sträcka x, då behöver repet trissan är fäst med dras en sträcka $2x$. Kan exempelvis visas genom att utförda arbetet ska vara lika inom ett kopplat system.
3. En trissa halverar den kraft som man behöver dra med för att lyfta en vikt eller liknande.