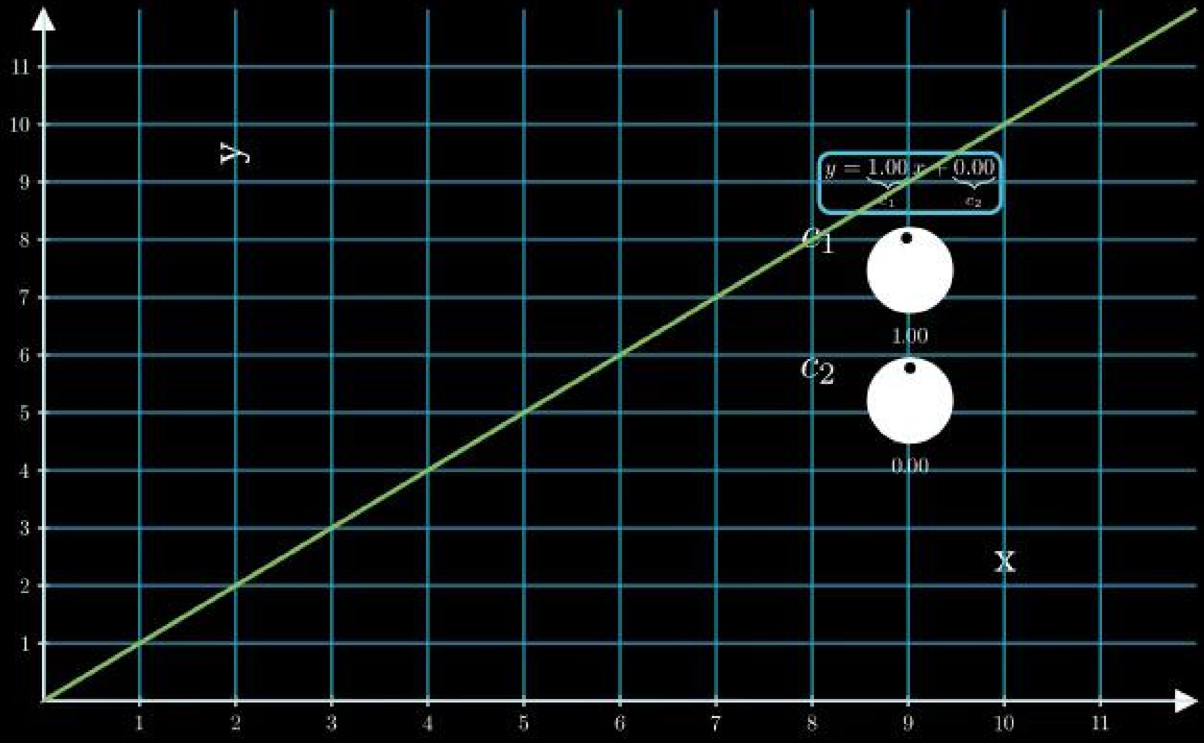
Polynominterpolation

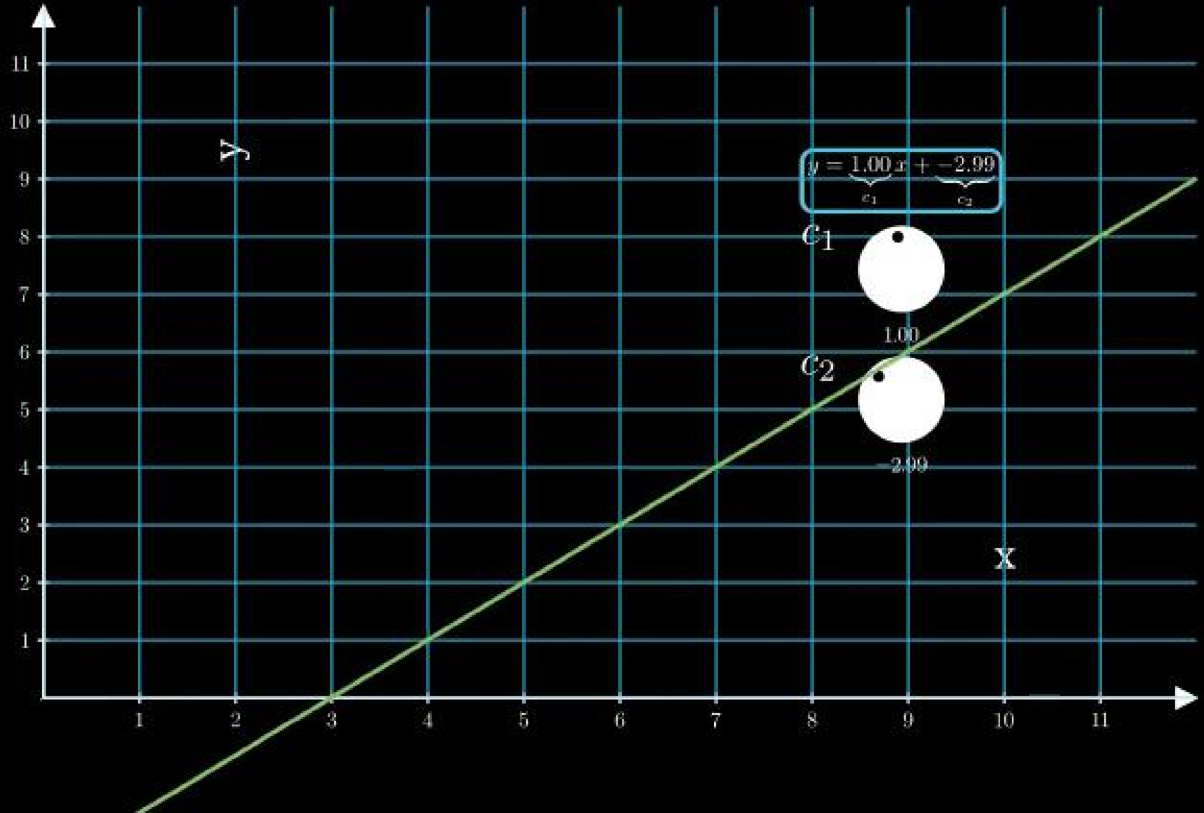
Lektion X

$$\boxed{y = kx + m}$$

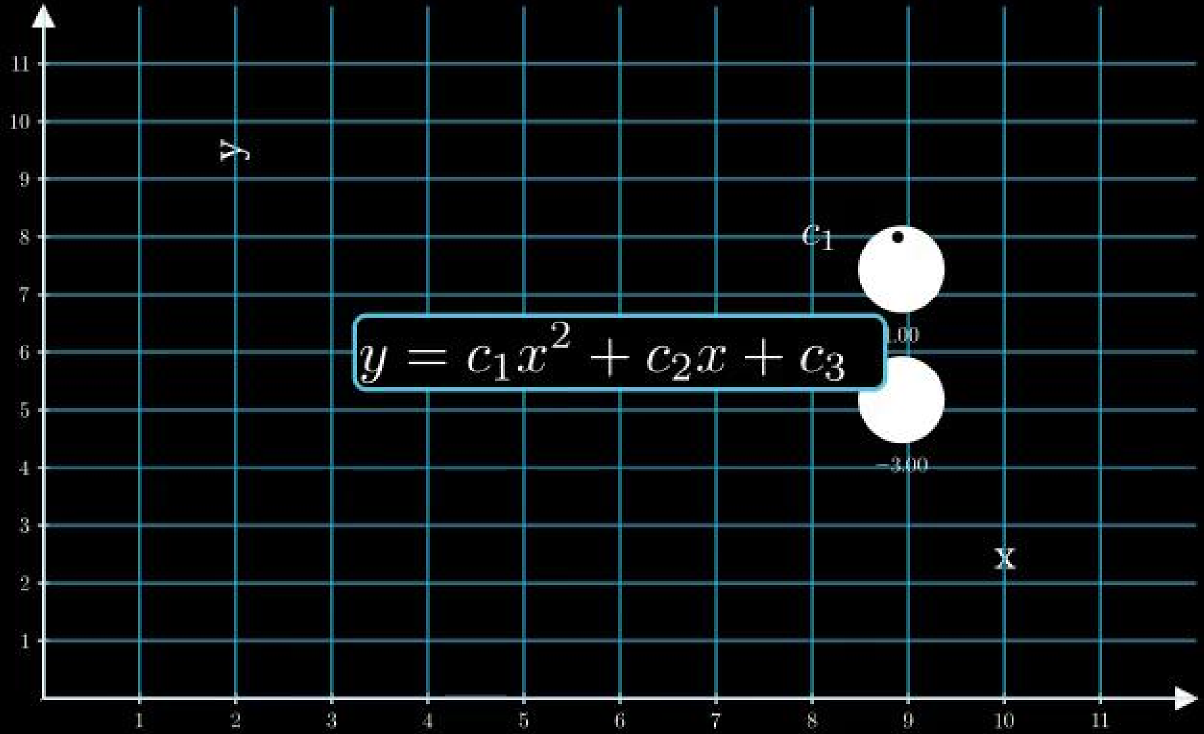
$$\boxed{y = c_1 x + c_2}$$



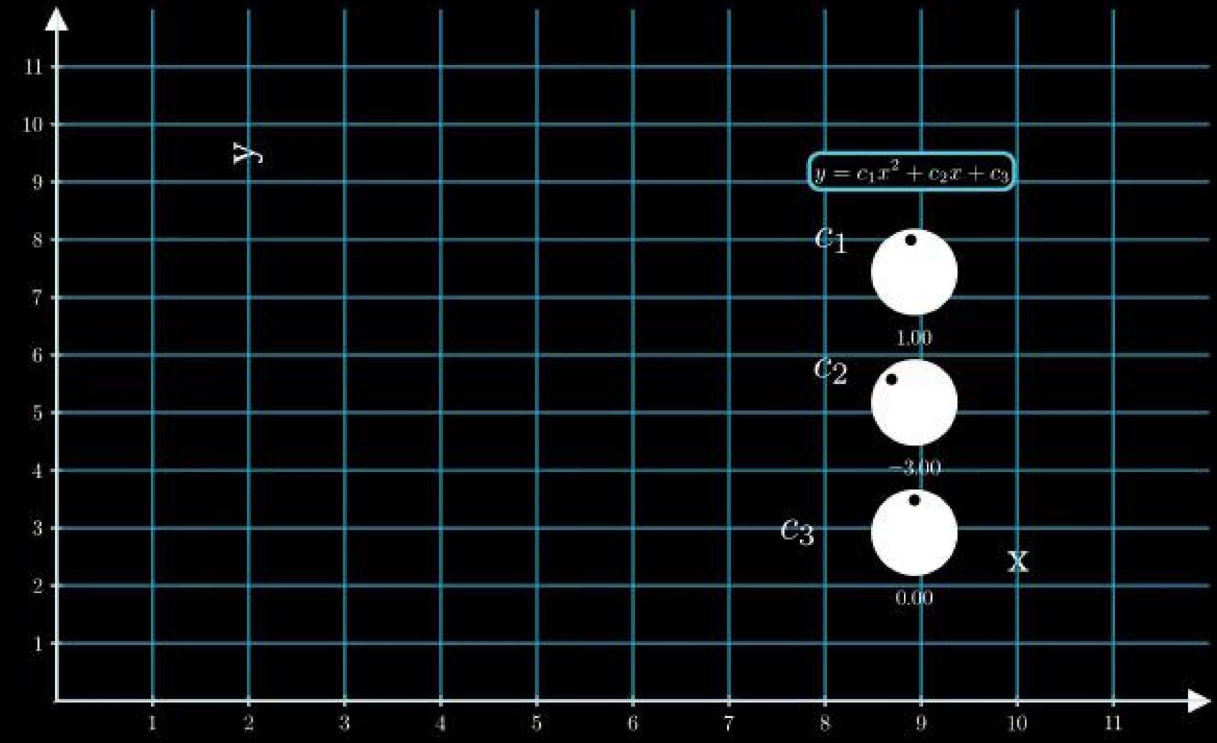
$y = \underbrace{1.00}_{c_1} x + \underbrace{0.00}_{c_2}$
c_1
1.00
c_2
0.00
y
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11



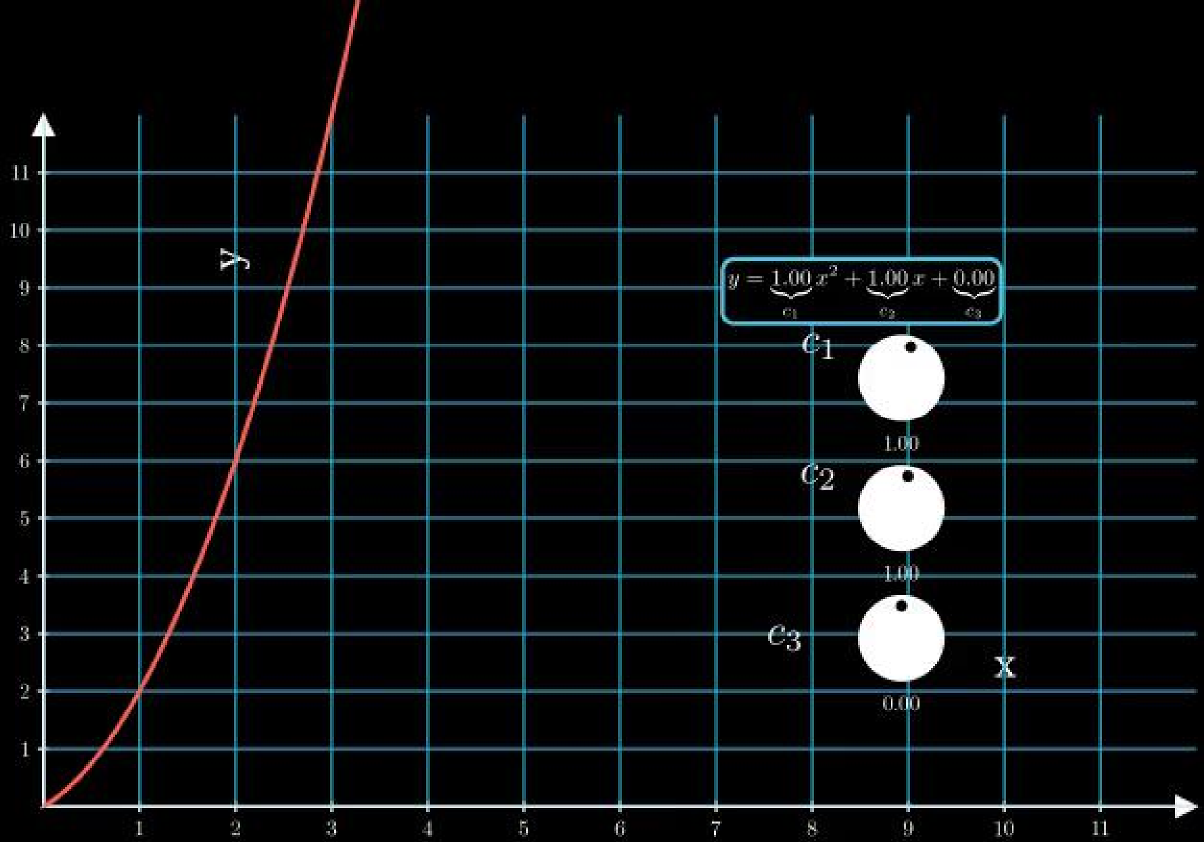
$y = \underbrace{1.00}_{c_1} x + \underbrace{-2.99}_{c_2}$
c_1
1.00
c_2
-2.99
y
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11



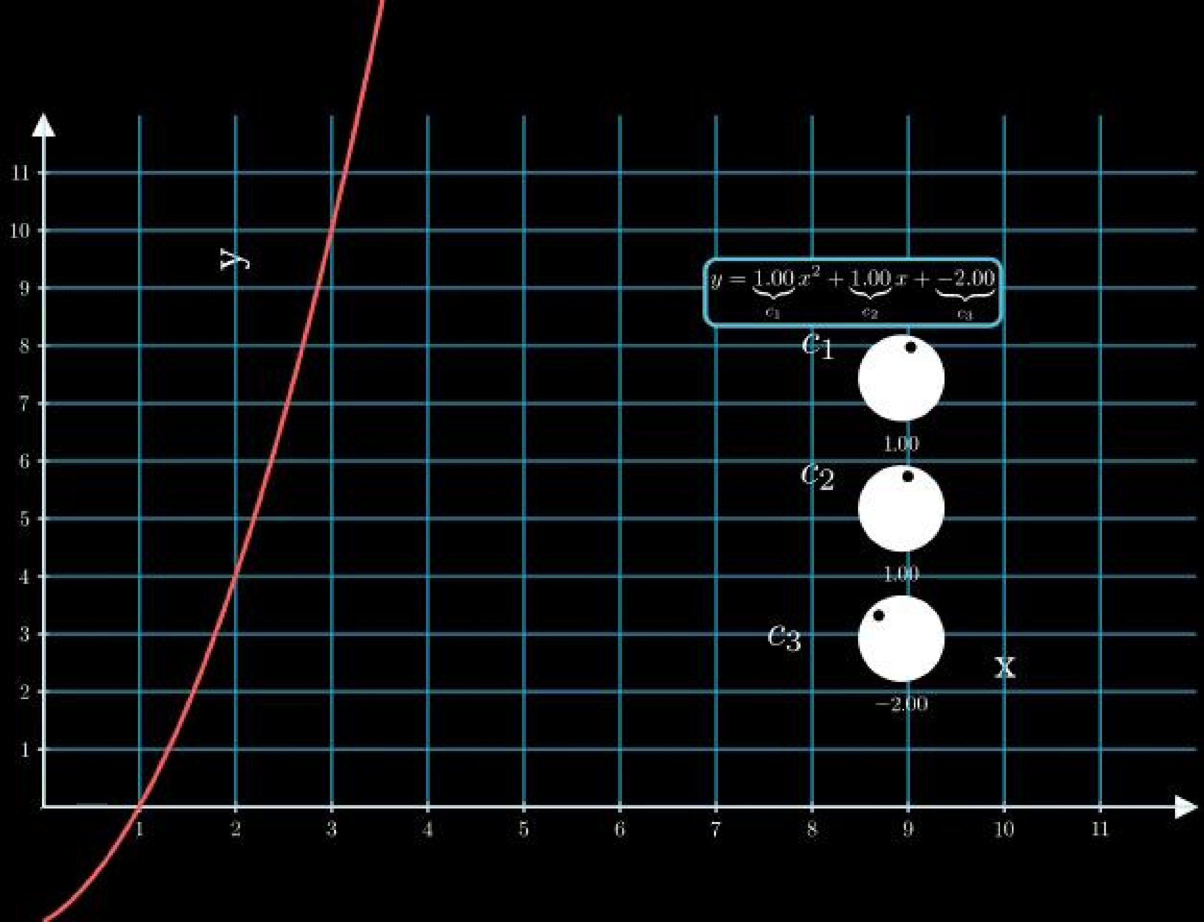
$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$$



$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$
c_1
1.00
c_2
−3.00
c_3
0.00
y
x

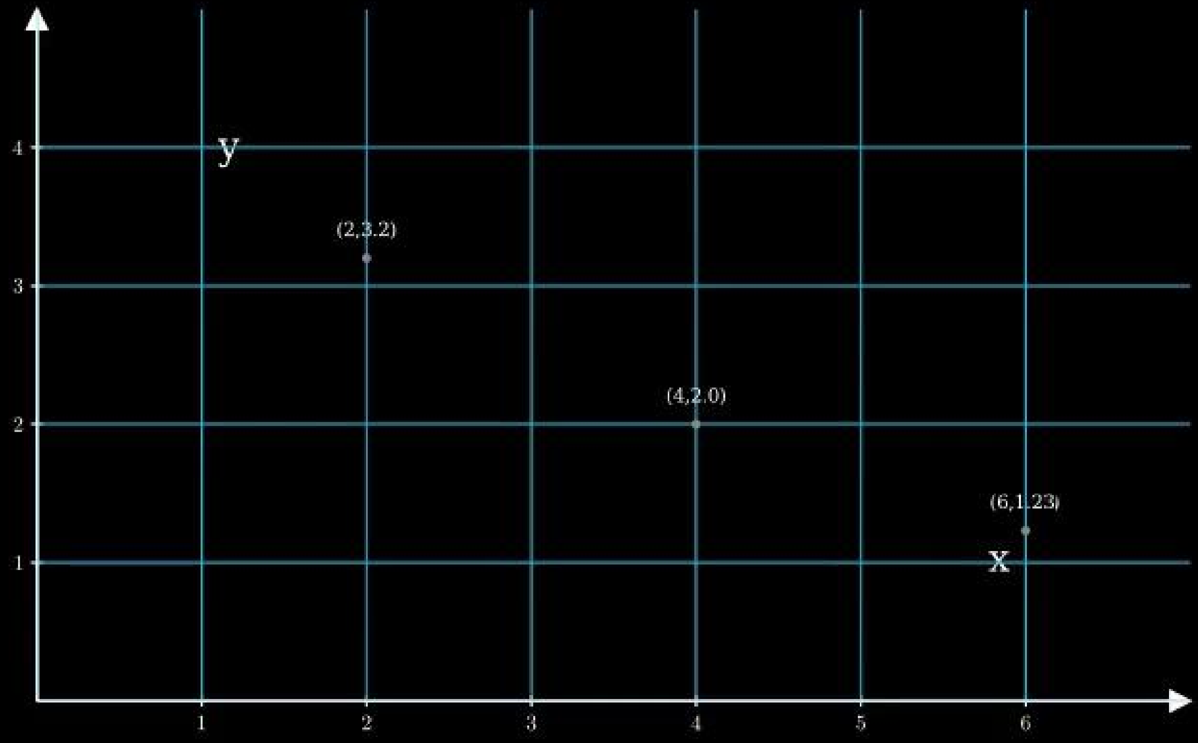


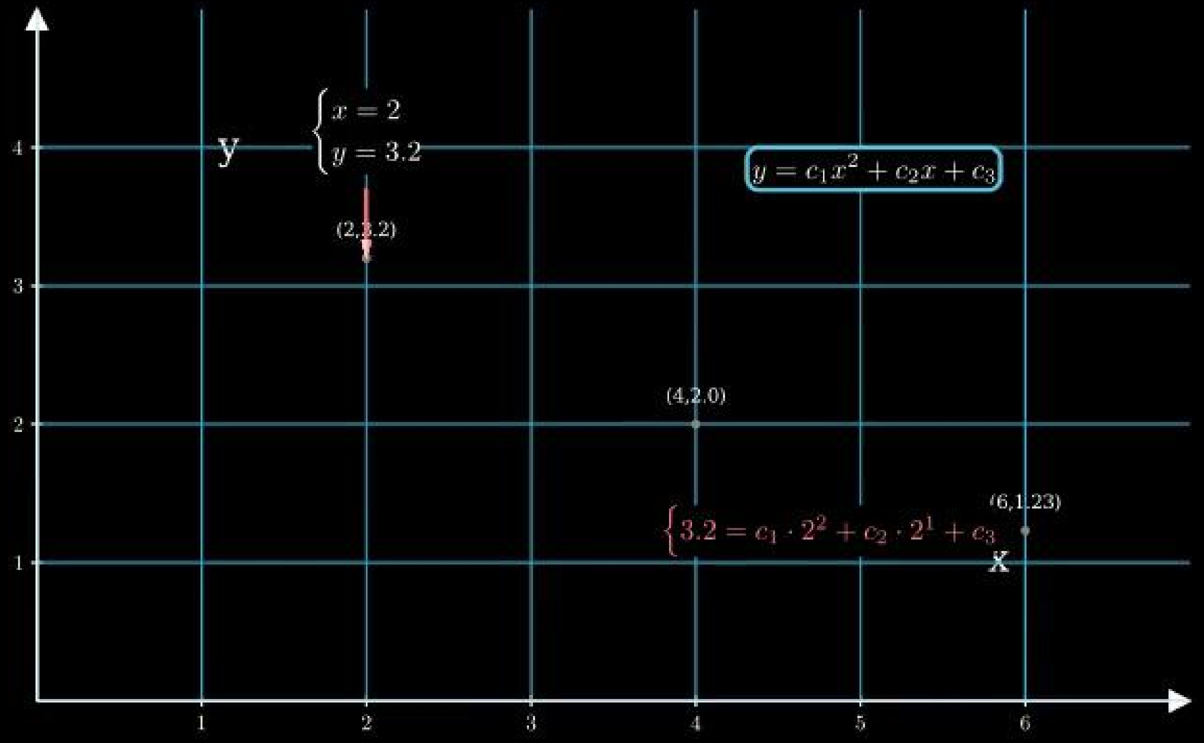
$y = \underbrace{1.00}_{c_1} x^2 + \underbrace{1.00}_{c_2} x + \underbrace{0.00}_{c_3}$
c_1
1.00
c_2
1.00
c_3
0.00
y
x



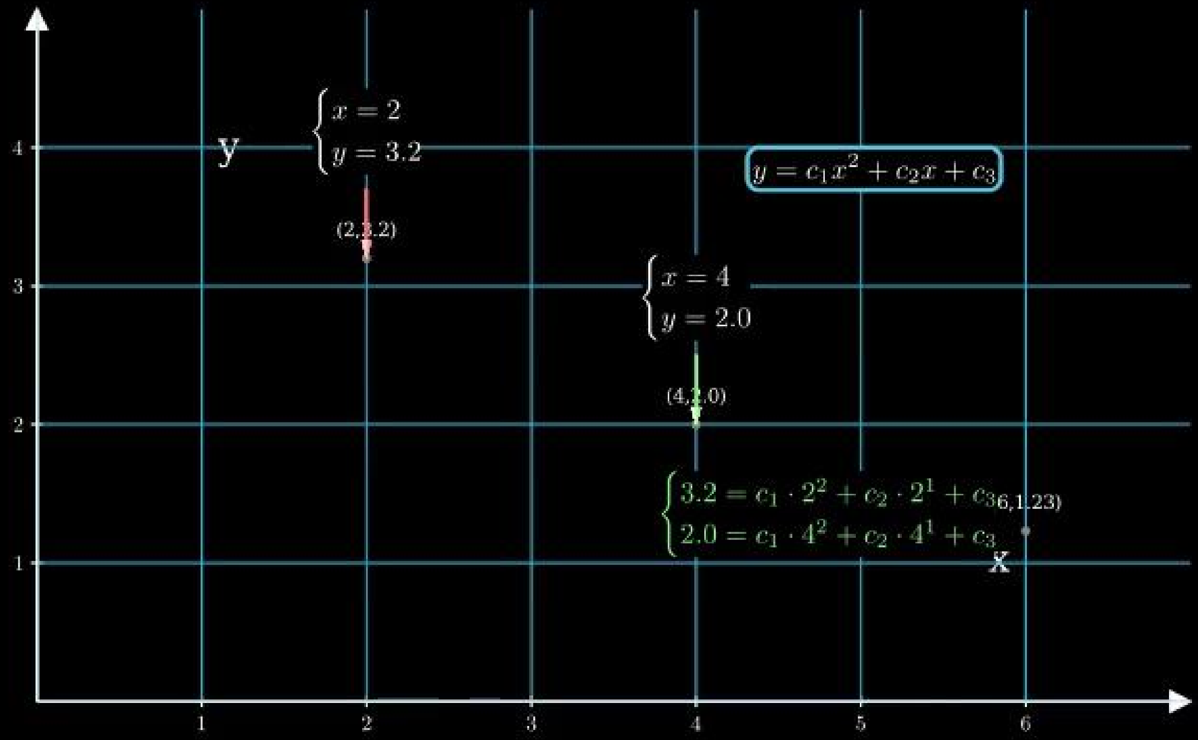
$y = \underbrace{1.00}_{c_1} x^2 + \underbrace{1.00}_{c_2} x + \underbrace{-2.00}_{c_3}$
c_1
1.00
c_2
1.00
c_3
−2.00
y
X
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Interpolation - grundläggande exempel

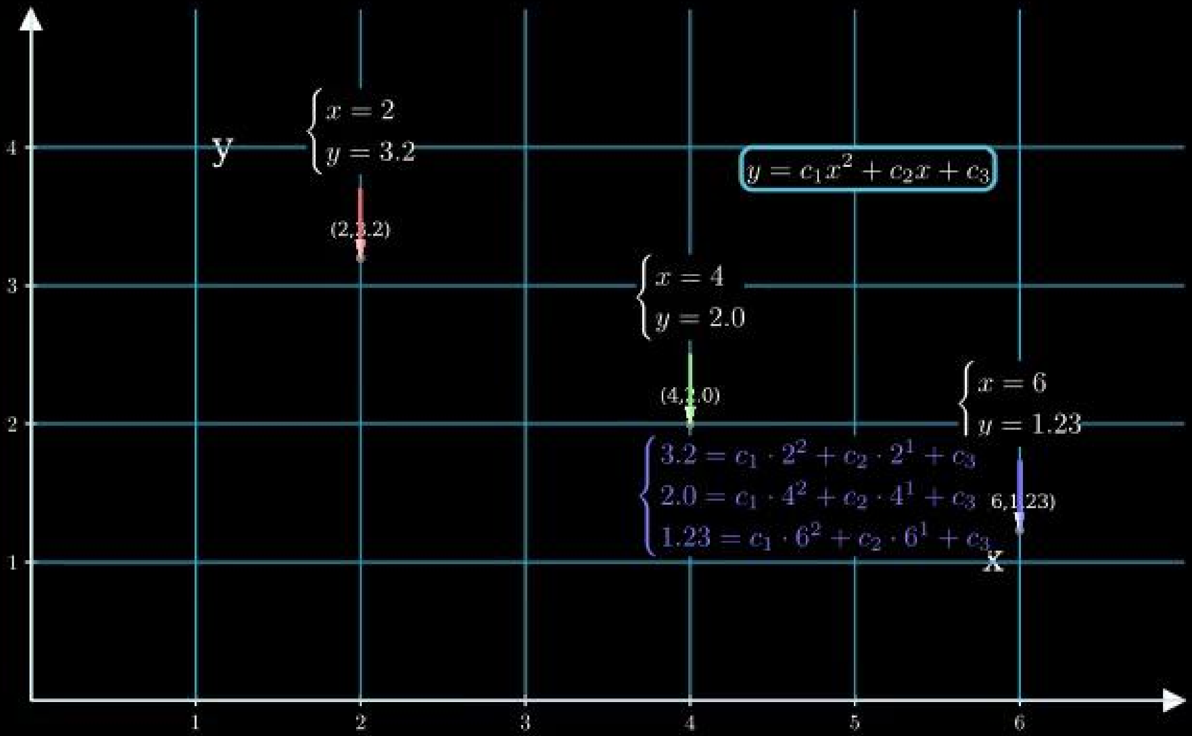

y
x
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
1
2
3
4
5
6



$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3.2 \end{cases}$
y
$y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
$\begin{cases} 3.2 = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2^1 + c_3 \end{cases}$
x
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6



y
x
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3.2 \end{cases}$
(2,3.2)
$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2.0 \end{cases}$
(4,2.0)
$y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$
$\begin{cases} 3.2 = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2^1 + c_3 \\ 2.0 = c_1 \cdot 4^2 + c_2 \cdot 4^1 + c_3 \end{cases}$
6,1.23)



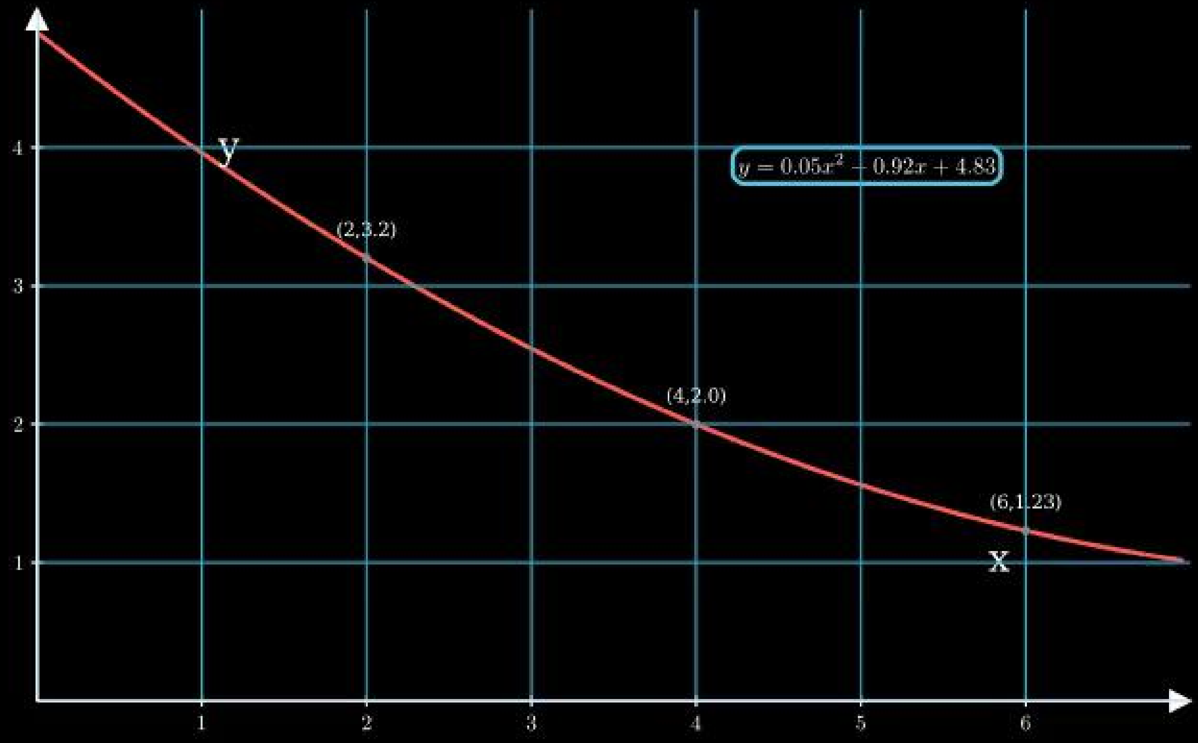
y
x
$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3.2 \end{cases}$
(2,3.2)
$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2.0 \end{cases}$
(4,2.0)
$\begin{cases} x = 6 \\ y = 1.23 \end{cases}$
6,1.23)
$\boxed{y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3}$
$\begin{cases} 3.2 = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2^1 + c_3 \\ 2.0 = c_1 \cdot 4^2 + c_2 \cdot 4^1 + c_3 \\ 1.23 = c_1 \cdot 6^2 + c_2 \cdot 6^1 + c_3 \end{cases}$
1 2 3 4 5 6
1 2 3 4

$$\begin{cases} 3.2 = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2^1 + c_3 \\ 2.0 = c_1 \cdot 4^2 + c_2 \cdot 4^1 + c_3 \\ 1.23 = c_1 \cdot 6^2 + c_2 \cdot 6^1 + c_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2^2 & 2^1 & 1 \\ 4^2 & 4^1 & 1 \\ 6^2 & 6^1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 2.0 \\ 1.23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0.05 \\ c_2 = -0.92 \\ c_3 = 4.83 \end{cases}$$

*koefficienter har avrundats till 2 decimaler



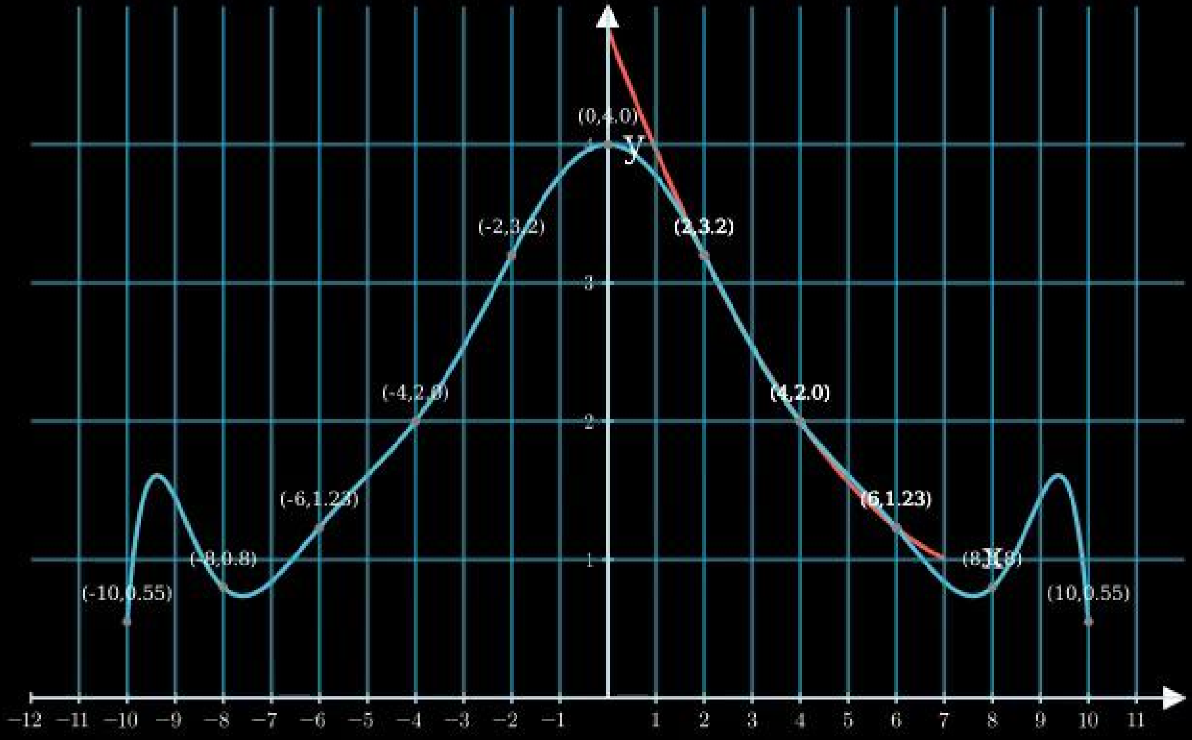
$y = 0.05x^2 - 0.92x + 4.83$
y
x
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
1
2
3
4
1
2
3
4
5
6

Generell polynominterpolation

Givet $n+1$ datapunkter, konstruera ett interpolationspolynom $y_n(x)$ av grad n genom:

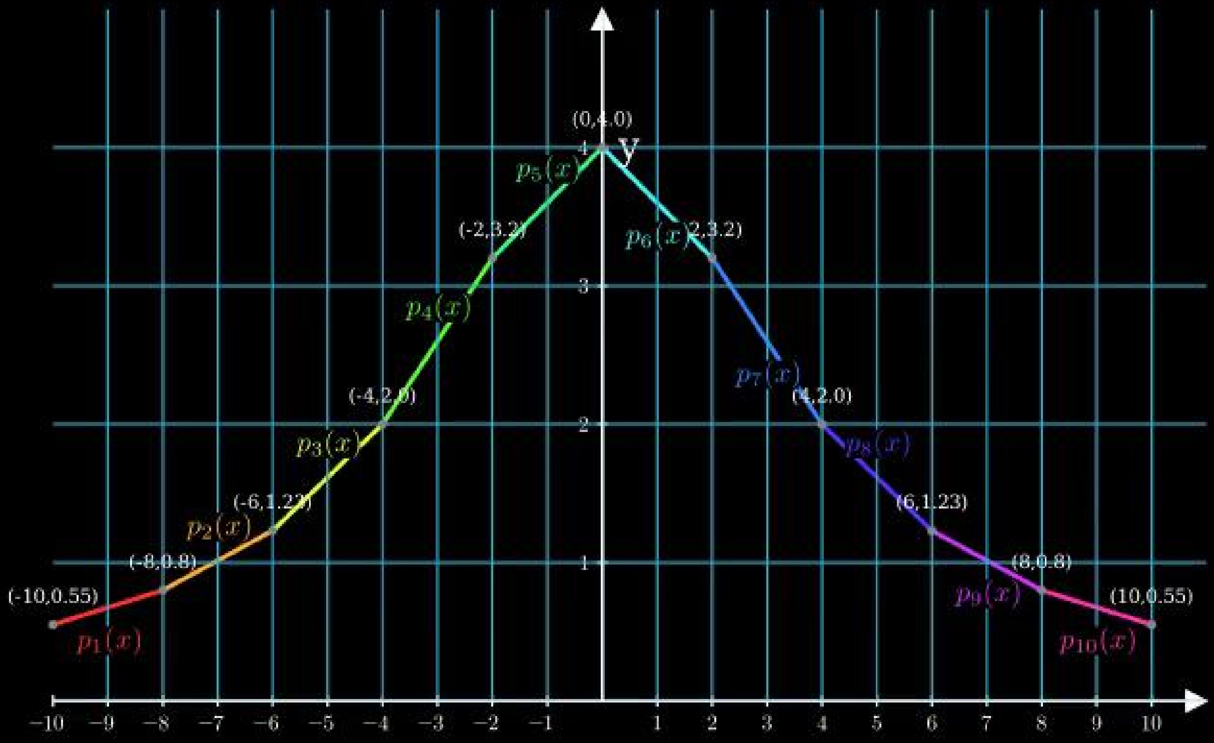
1. För varje punkt (x_i, y_i) i ditt dataset: Infoga ekvationen $y_i = c_1 x_i^n + c_2 x_i^{n-1} + ... + c_{n+1}$ i ett ekvationssystem
2. När alla punkter har en egen ekvation: Lös ekvationssystemet för c_1, c_2, ..., c_{n+1}.
3. Ditt interpolerade polynom ges nu av funktionen $y_n(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + ... + c_{n+1}$

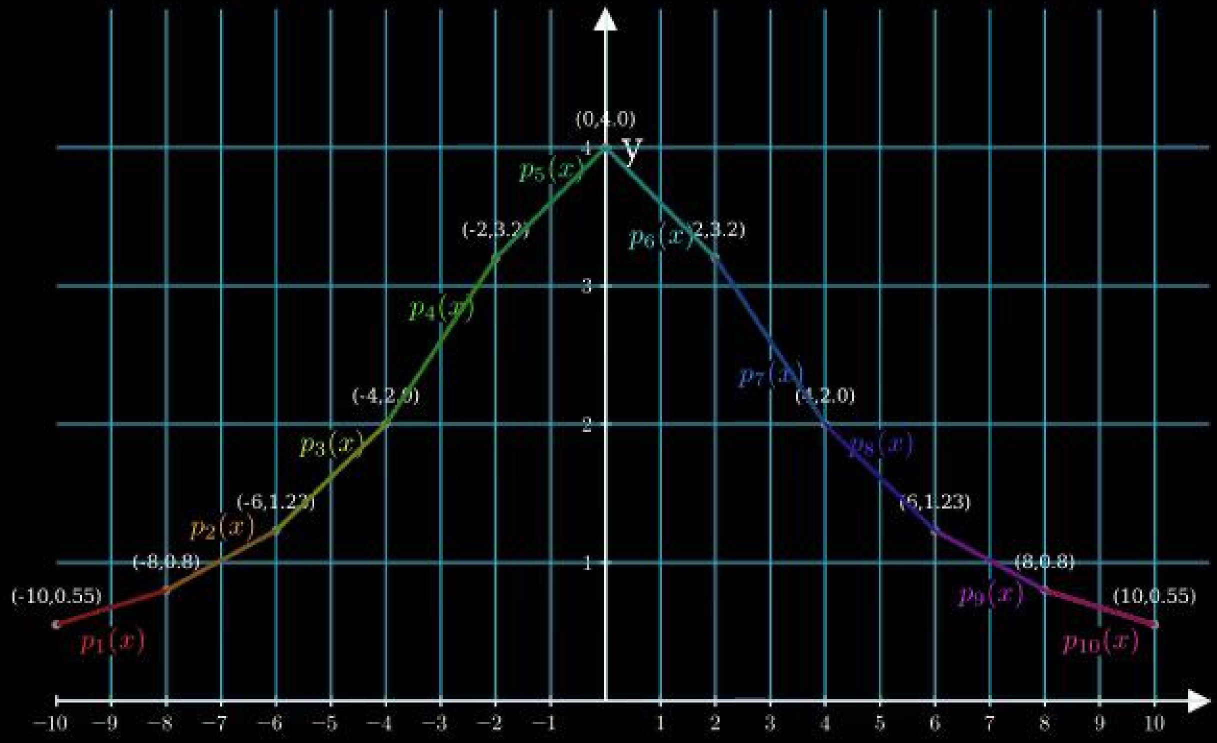
Runges fenomen



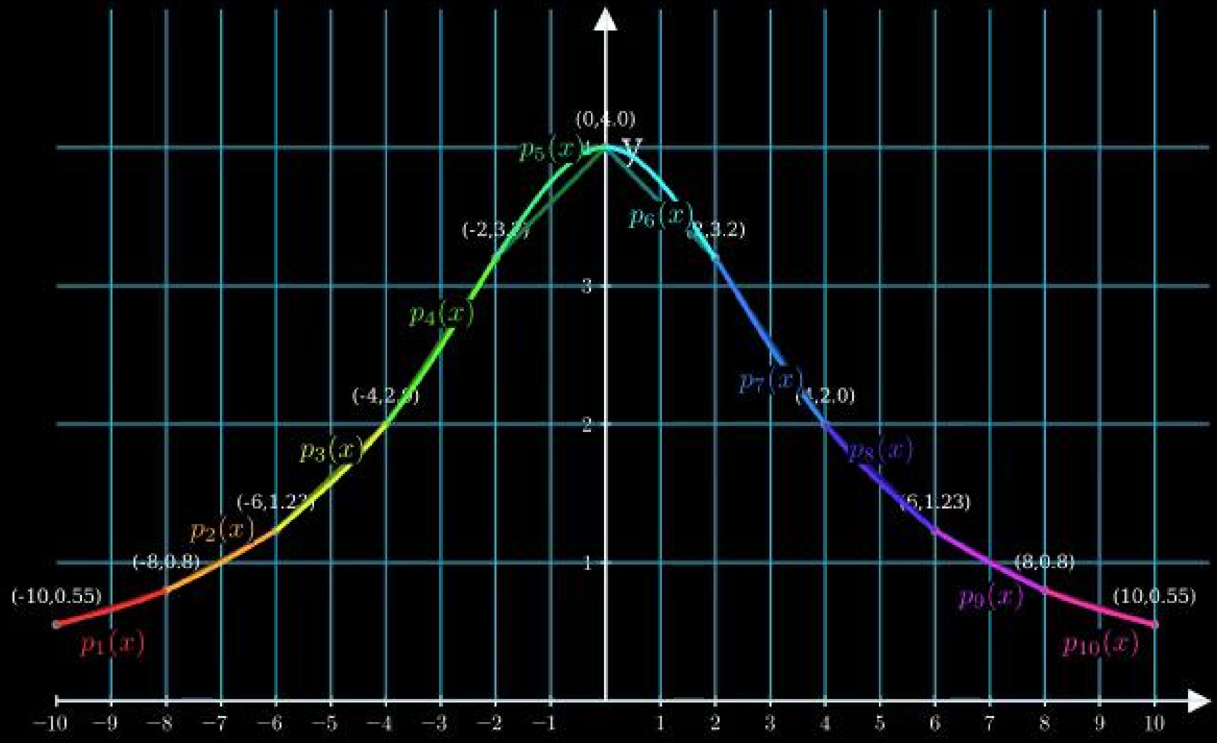
(0,4.0)
y
(-2,3.2)
(2,3.2)
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(10,0.55)
(-10,0.55)
3
2
1
−12
−11
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Splines

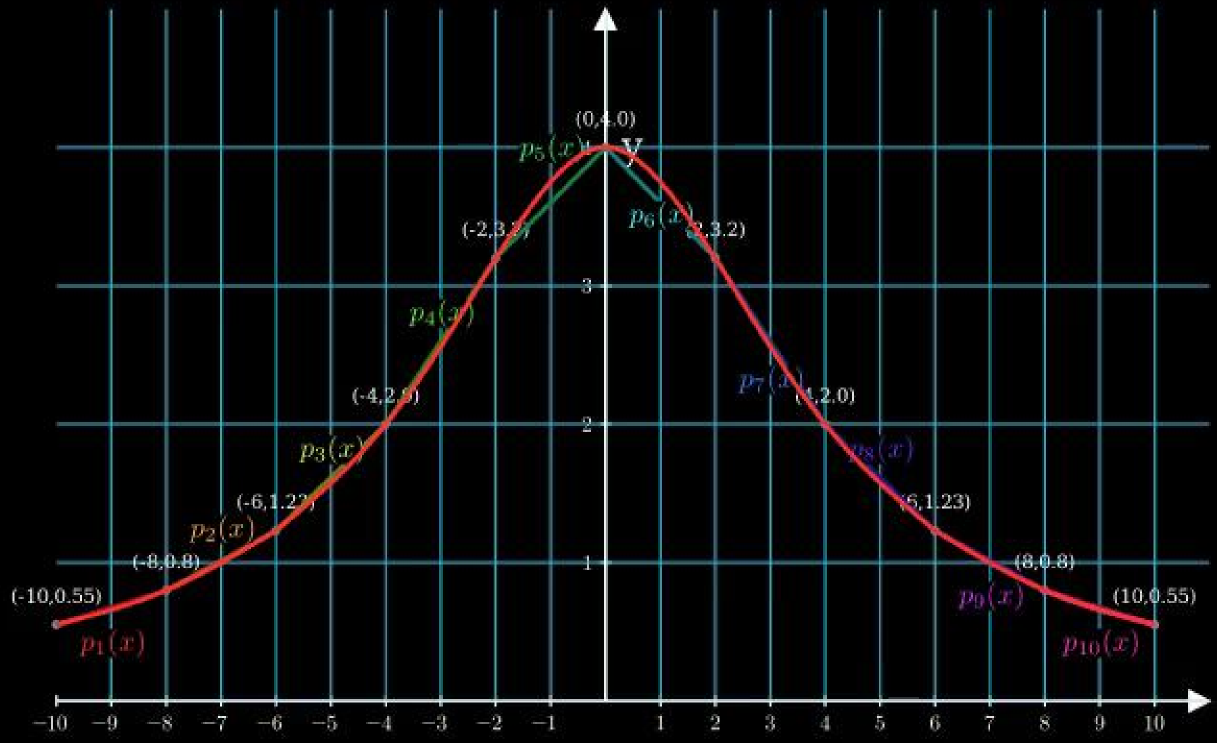

(0,4.0)
y
(-2,3.2)
(2,3.2)
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
$p_1(x)$
$p_2(x)$
$p_3(x)$
$p_4(x)$
$p_5(x)$
$p_6(x)$
$p_7(x)$
$p_8(x)$
$p_9(x)$
$p_{10}(x)$
1
2
3
4
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



y
(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
$p_1(x)$
$p_2(x)$
$p_3(x)$
$p_4(x)$
$p_5(x)$
$p_6(x)$
$p_7(x)$
$p_8(x)$
$p_9(x)$
$p_{10}(x)$



(0,4.0)
y
$p_5(x)$
$p_6(x)$
(-2,3.2)
(2,3.2)
$p_4(x)$
$p_7(x)$
(-4,2.0)
(4,2.0)
$p_3(x)$
$p_8(x)$
(-6,1.23)
(6,1.23)
$p_2(x)$
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
$p_1(x)$
$p_9(x)$
$p_{10}(x)$
3
2
1
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


(0,4.0)
$p_5(x)$
y
$p_6(x)$
(2,3.2)
(-2,3.2)
3
$p_4(x)$
$p_7(x)$
(4,2.0)
(-4,2.0)
2
$p_3(x)$
$p_8(x)$
(-6,1.23)
(6,1.23)
$p_2(x)$
(-8,0.8)
1
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
$p_9(x)$
$p_1(x)$
$p_{10}(x)$
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Karaktäristiskt för splines p_1 och p_2:

- Första polynomet p_1, går genom $(-10, 0.55)$ och $(-8, 0.8)$

Karaktäristiskt för splines p_1 och p_2:

- Första polynomet p_1, går genom $(-10, 0.55)$ och $(-8, 0.8)$
- Andra polynomet, p_2 går genom $(-8, 0.8)$ och $(-6, 1.23)$

Karaktäristiskt för splines p_1 och p_2:

- Första polynomet p_1, går genom $(-10, 0.55)$ och $(-8, 0.8)$
- Andra polynomet, p_2 går genom $(-8, 0.8)$ och $(-6, 1.23)$
- $p_1'(-8) = p_2'(-8)$ (samma *första*derivata vid mittpunkten)

Karaktäristiskt för splines p_1 och p_2:

- Första polynomet p_1, går genom $(-10, 0.55)$ och $(-8, 0.8)$
- Andra polynomet, p_2 går genom $(-8, 0.8)$ och $(-6, 1.23)$
- $p_1^{'}(-8) = p_2^{'}(-8)$ (samma *första*derivata vid mittpunkten)
- $p_1^{''}(-8) = p_2^{''}(-8)$ (samma *andra*derivata vid mittpunkten)

Karaktäristiskt för splines p_1 och p_2:

- Första polynomet p_1, går genom $(-10, 0.55)$ och $(-8, 0.8)$
- Andra polynomet, p_2 går genom $(-8, 0.8)$ och $(-6, 1.23)$
- $p_1^{'}(-8) = p_2^{'}(-8)$ (samma *första*derivata vid mittpunkten)
- $p_1^{''}(-8) = p_2^{''}(-8)$ (samma *andra*derivata vid mittpunkten)
- $p_1^{''}(-10) = 0$ och $p_2^{''}(-6) = 0$ (andraderivator noll vid ändpunkter)

Karaktäristiskt för splines p_1 och p_2:

- Första polynomet p_1, går genom $(-10, 0.55)$ och $(-8, 0.8)$
- Andra polynomet, p_2 går genom $(-8, 0.8)$ och $(-6, 1.23)$
- $p_1^{'}(-8) = p_2^{'}(-8)$ (samma *första*derivata vid mittpunkten)
- $p_1^{''}(-8) = p_2^{''}(-8)$ (samma *andra*derivata vid mittpunkten)
- $p_1^{''}(-10) = 0$ och $p_2^{''}(-6) = 0$ (andraderivator noll vid ändpunkter)

Karaktäristiskt för splines p_2 och p_3:

- Första polynomet p_2, går genom $(-8, 0.8)$ och $(-6, 1.23)$
- Andra polynomet, p_3 går genom $(-6, 1.23)$ och $(-4, 2.0)$
- $p_2^{'}(-6) = p_3^{'}(-6)$ (samma *första*derivata vid mittpunkten)
- $p_2^{''}(-6) = p_3^{''}(-6)$ (samma *andra*derivata vid mittpunkten)
- $p_2^{''}(-8) = 0$ och $p_3^{''}(-4) = 0$ (andraderivator noll vid ändpunkter)

Karaktäristiskt för splines p_3 och p_4:

- Första polynomet p_3, går genom $(-6, 1.23)$ och $(-4, 2.0)$
- Andra polynomet, p_4 går genom $(-4, 2.0)$ och $(-2, 3.2)$
- $p_3'(-4) = p_4'(-4)$ (samma *första*derivata vid mittpunkten)
- $p_3''(-4) = p_4''(-4)$ (samma *andra*derivata vid mittpunkten)
- $p_3''(-6) = 0$ och $p_4''(-2) = 0$ (andraderivator noll vid ändpunkter)

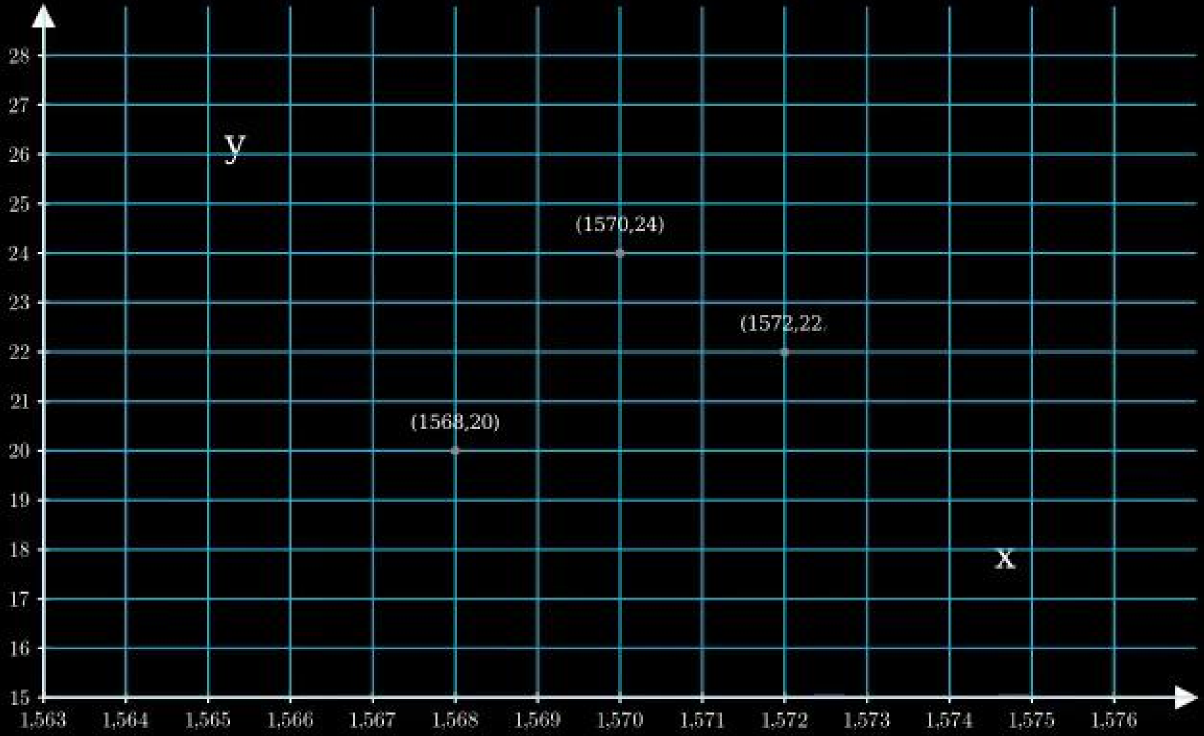
...och så vidare!

Minnesregler

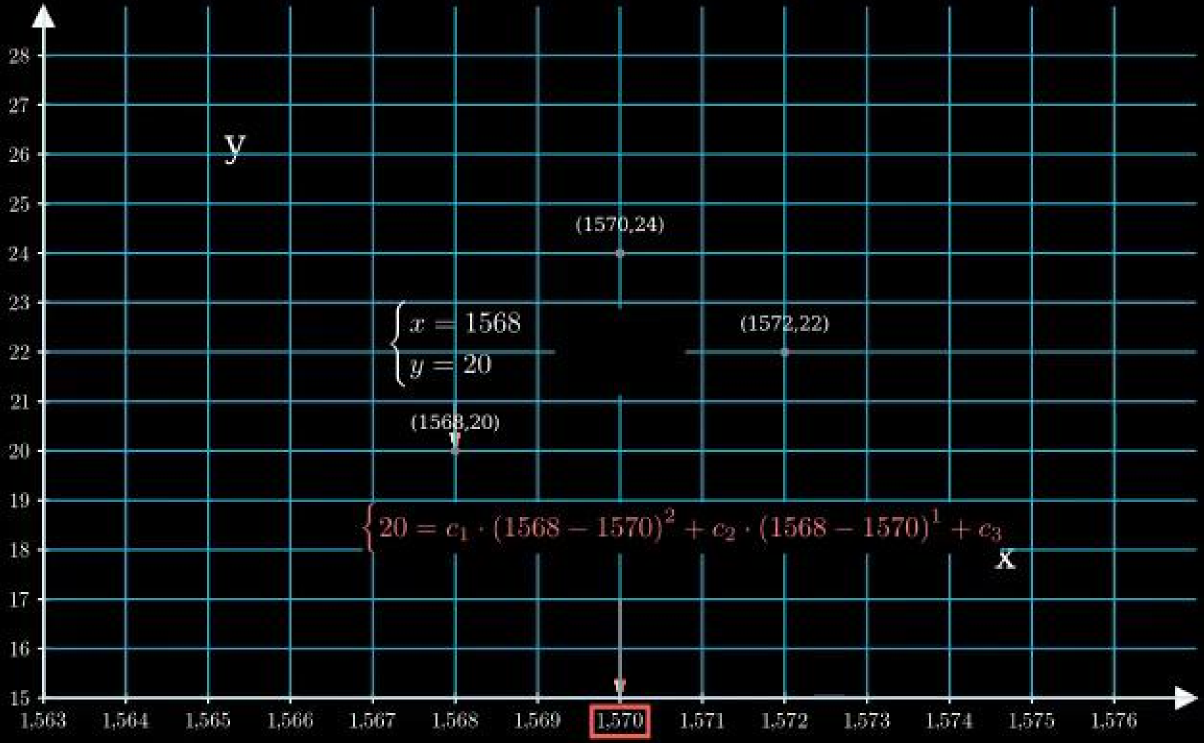
Antal (individuella) splines-polynom = Antal datapunkter − 1

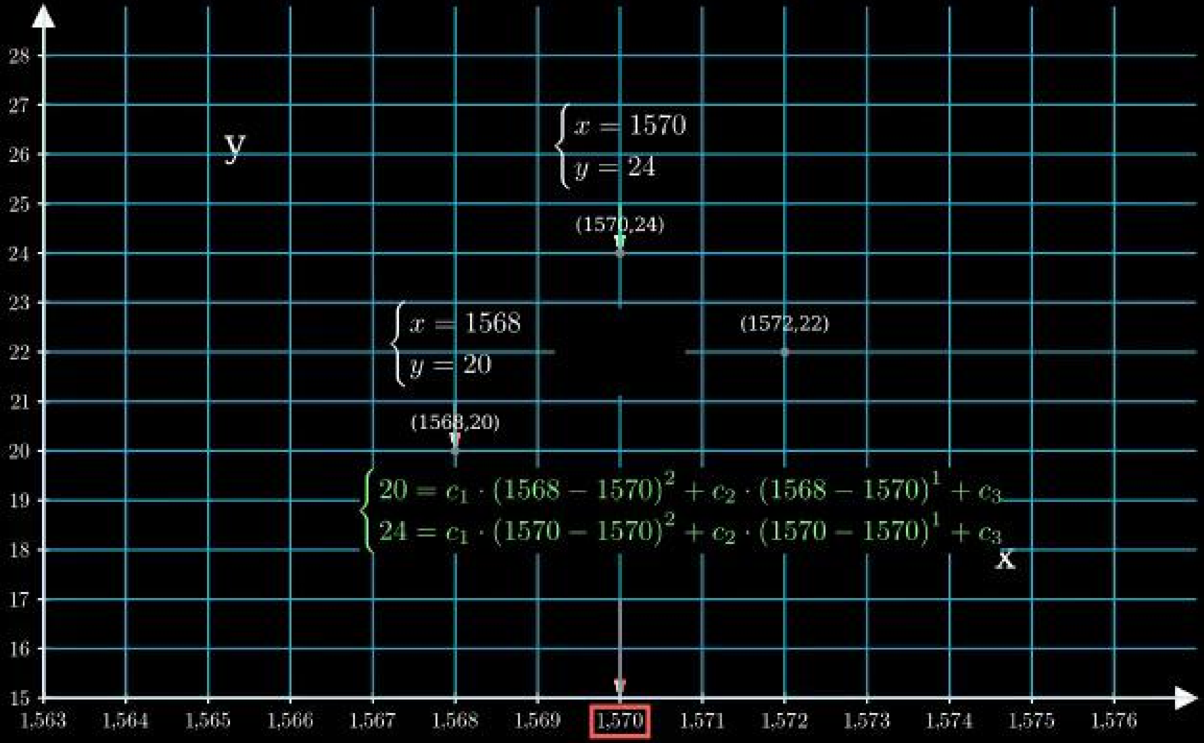
Antal ekvationer som krävs: $4 \cdot$ Antal datapunkter (för kubiska splines)

Centrering

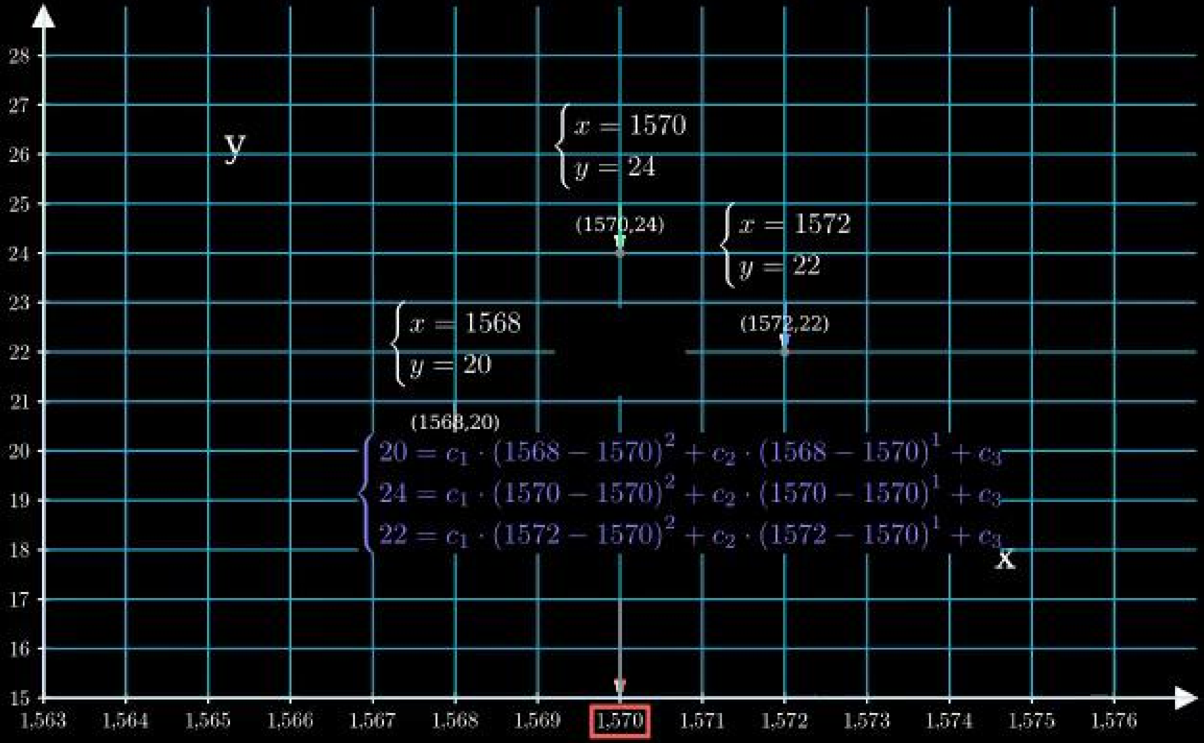

y
x
(1570,24)
(1572,22.
(1568,20)
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
1,563
1,564
1,565
1,566
1,567
1,568
1,569
1,570
1,571
1,572
1,573
1,574
1,575
1,576


y
x
(1570,24)
(1572,22)
(1568,20)
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
1,563
1,564
1,565
1,566
1,567
1,568
1,569
1,570
1,571
1,572
1,573
1,574
1,575
1,576


y
x
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
1,563
1,564
1,565
1,566
1,567
1,568
1,569
1,570
1,571
1,572
1,573
1,574
1,575
1,576
(1570,24)
(1572,22)
(1568,20)
$\begin{cases} x = 1568 \\ y = 20 \end{cases}$
$\{ 20 = c_1 \cdot (1568 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1568 - 1570)^1 + c_3$



y
x
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
1,563
1,564
1,565
1,566
1,567
1,568
1,569
1,570
1,571
1,572
1,573
1,574
1,575
1,576
$\begin{cases} x = 1570 \\ y = 24 \end{cases}$
(1570,24)
$\begin{cases} x = 1568 \\ y = 20 \end{cases}$
(1572,22)
(1568,20)
$\begin{cases} 20 = c_1 \cdot (1568 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1568 - 1570)^1 + c_3 \\ 24 = c_1 \cdot (1570 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1570 - 1570)^1 + c_3 \end{cases}$


y
x
$\begin{cases} x = 1570 \\ y = 24 \end{cases}$
(1570,24)
$\begin{cases} x = 1572 \\ y = 22 \end{cases}$
(1572,22)
$\begin{cases} x = 1568 \\ y = 20 \end{cases}$
(1568,20)
$\begin{cases} 20 = c_1 \cdot (1568 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1568 - 1570)^1 + c_3 \\ 24 = c_1 \cdot (1570 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1570 - 1570)^1 + c_3 \\ 22 = c_1 \cdot (1572 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1572 - 1570)^1 + c_3 \end{cases}$
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
1,563
1,564
1,565
1,566
1,567
1,568
1,569
1,570
1,571
1,572
1,573
1,574
1,575
1,576

$$\begin{cases} 20 = c_1 \cdot (1568 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1568 - 1570)^1 + c_3 \\ 24 = c_1 \cdot (1570 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1570 - 1570)^1 + c_3 \\ 22 = c_1 \cdot (1572 - 1570)^2 + c_2 \cdot (1572 - 1570)^1 + c_3 \end{cases}$$

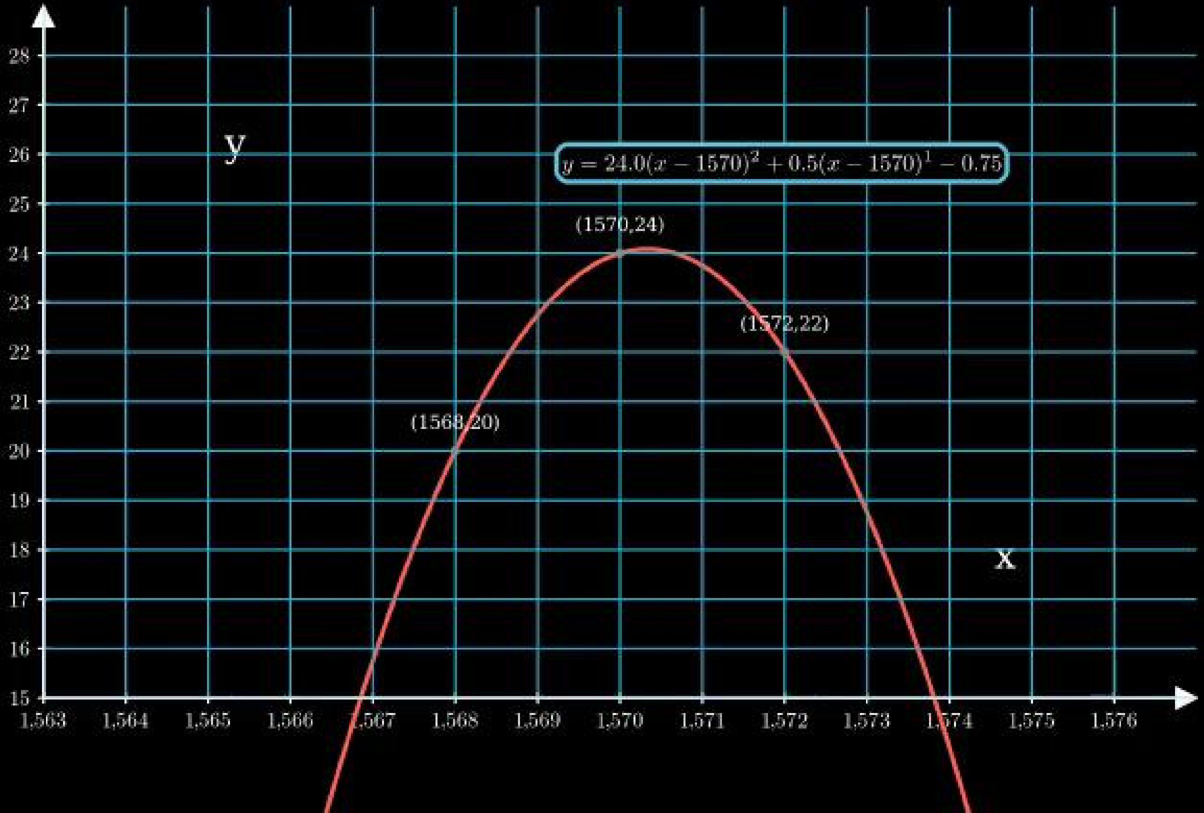
$$\begin{cases} 20 = c_1 \cdot (-2)^2 + c_2 \cdot (-2)^1 + c_3 \\ 24 = c_1 \cdot 0^2 + c_2 \cdot 0^1 + c_3 \\ 22 = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2^1 + c_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = c_1 \cdot (-2)^2 + c_2 \cdot (-2)^1 + c_3 \\ 24 = c_1 \cdot 0^2 + c_2 \cdot 0^1 + c_3 \\ 22 = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2^1 + c_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (-2)^2 & (-2)^1 & 1 \\ 0^2 & 0^1 & 1 \\ 2^2 & 2^1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = 24.0 \\ c_2 = 0.5 \\ c_3 = -0.75 \end{cases}$$

*konstanter har avrundats till 2 decimaler



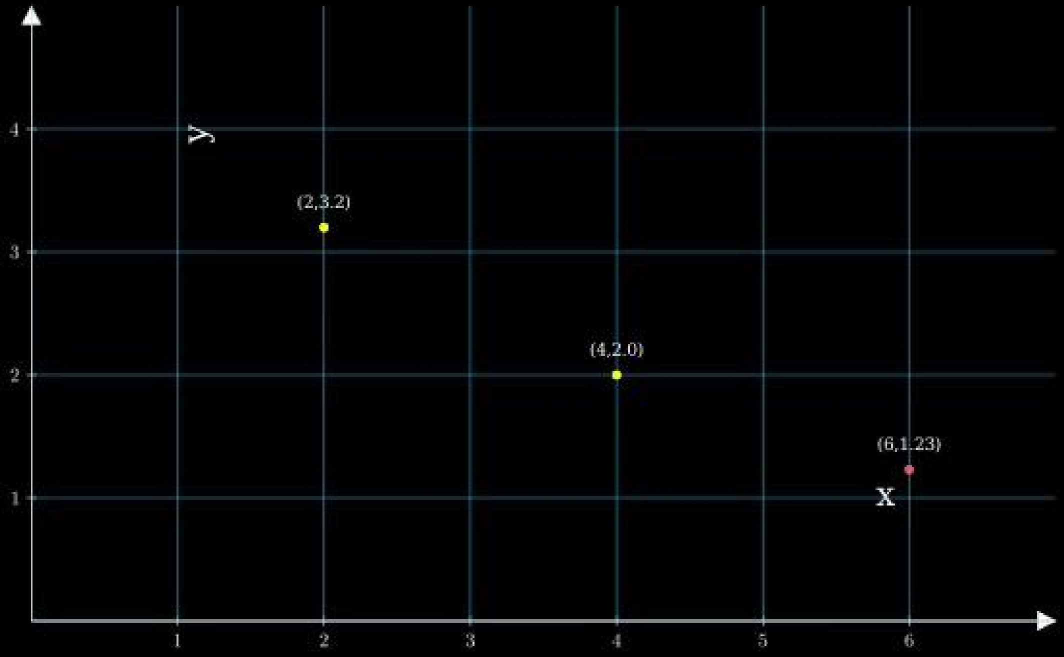
$y = 24.0(x - 1570)^2 + 0.5(x - 1570)^1 - 0.75$
(1570,24)
(1572,22)
(1568,20)
y
x
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
1,563
1,564
1,565
1,566
1,567
1,568
1,569
1,570
1,571
1,572
1,573
1,574
1,575
1,576

Centrering

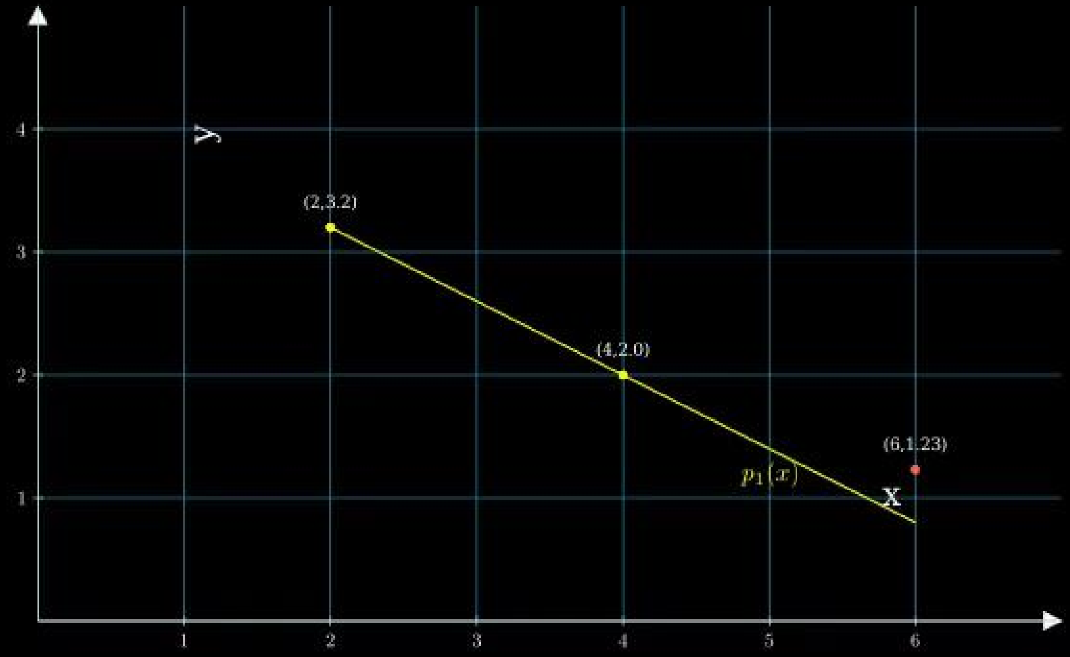
Givet $n+1$ datapunkter, konstruera ett interpolationspolynom $y_n(x)$ av grad n centrerat kring punkten med x-värde m genom:

1. För varje punkt (x_i, y_i) i ditt dataset: Infoga ekvationen $y_i = c_1\underline{(x_i - m)}^n + c_2\underline{(x_i - m)}^{n-1} + ... + c_{n+1}$ i ett ekvationssystem
2. När alla punkter har en egen ekvation: Lös ekvationssystemet för c_1, c_2, ..., c_{n+1}.
3. Ditt interpolerade polynom ges nu av funktionen $y_n(x) = c_1\underline{(x - m)}^n + c_2\underline{(x - m)}^{n-1} + ... + c_{n+1}$

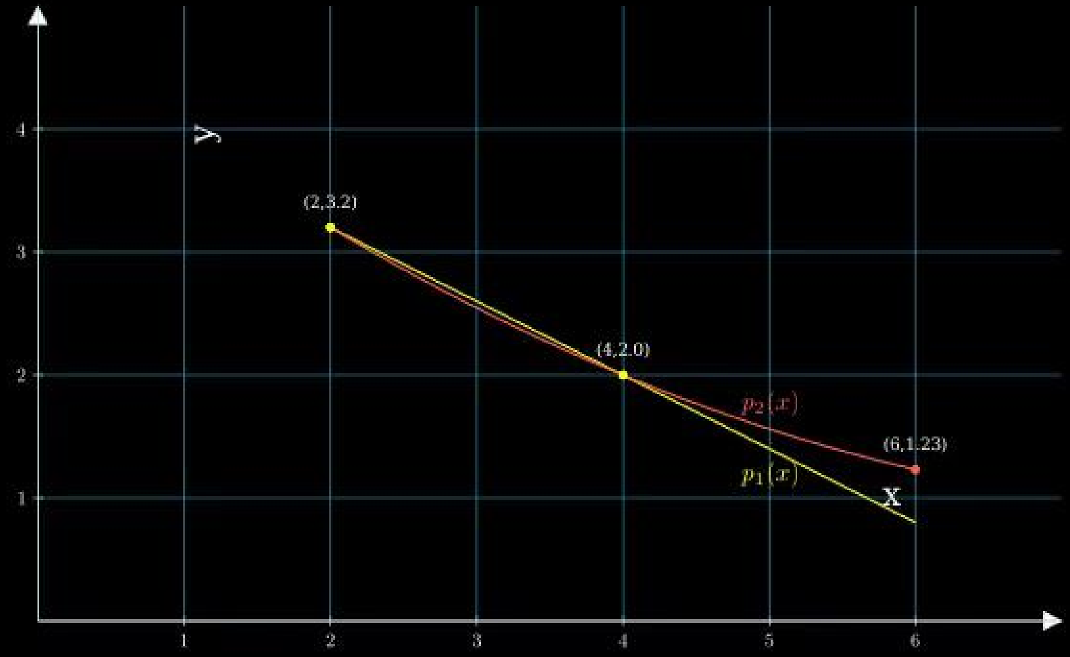
(<u>understrykningar</u> markerar skillnader i beräkningar mellan centrering och "vanlig" generell polynominterpolation).



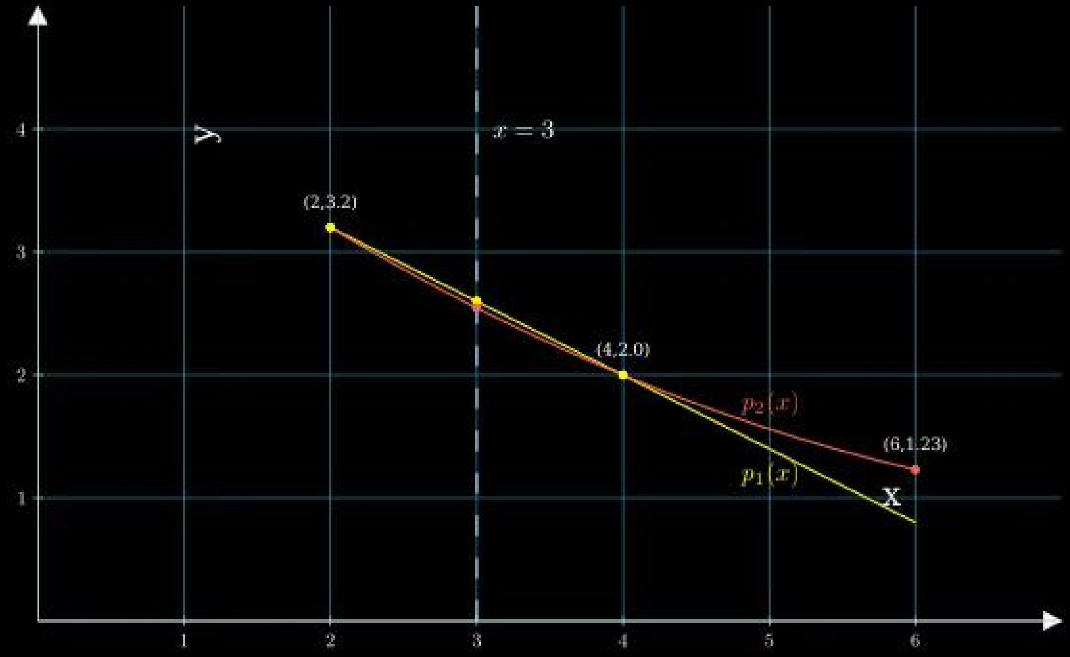
y
4
3
2
1
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
x
1
2
3
4
5
6

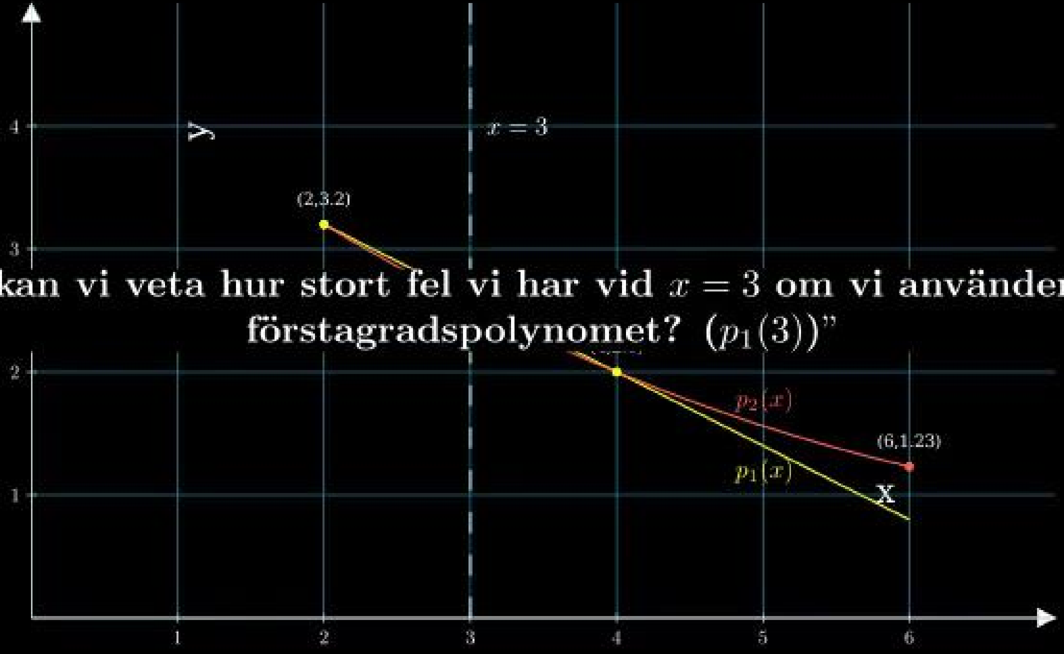


y
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
$p_1(x)$
X
1
2
3
4
1
2
3
4
5
6

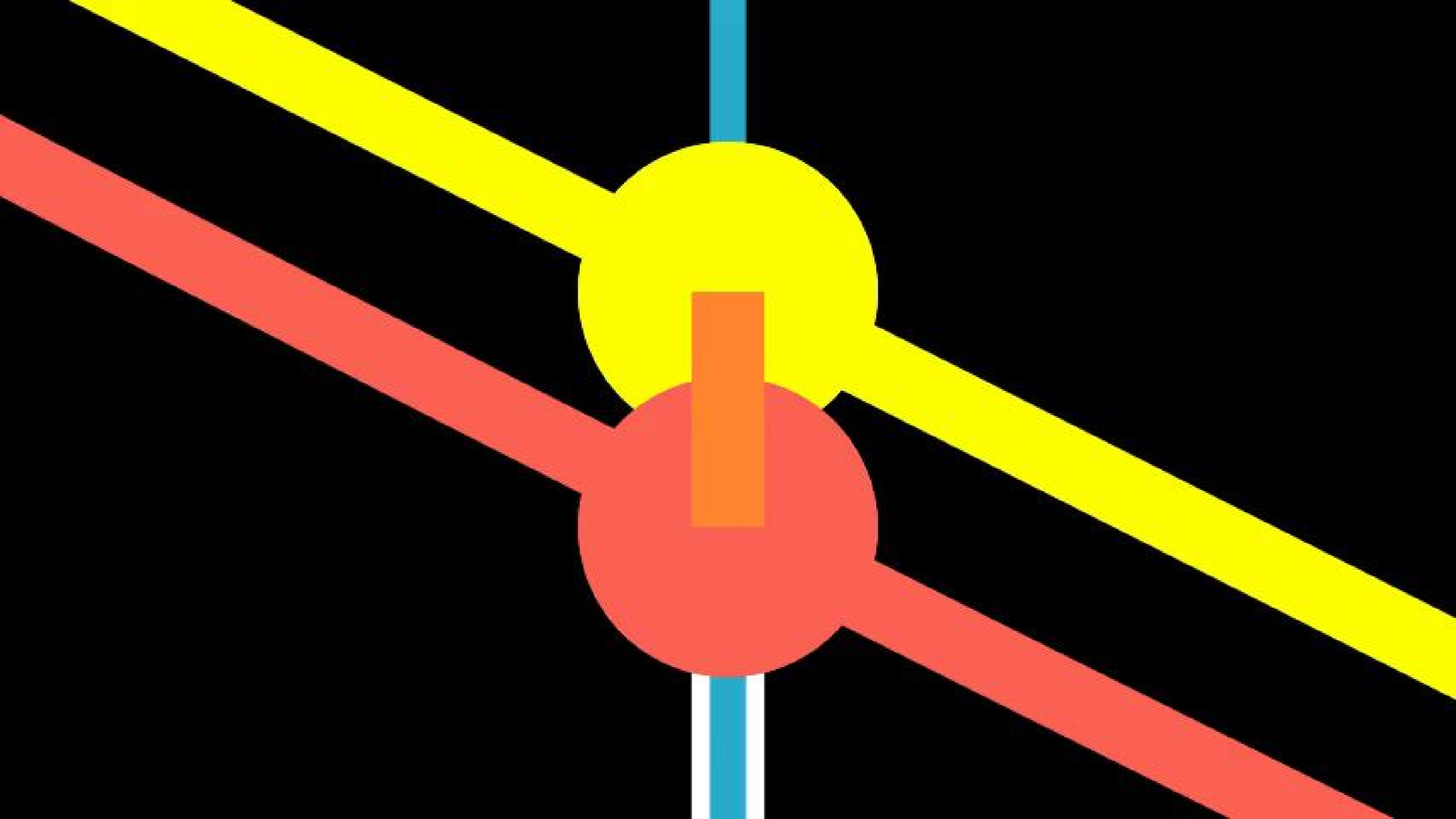


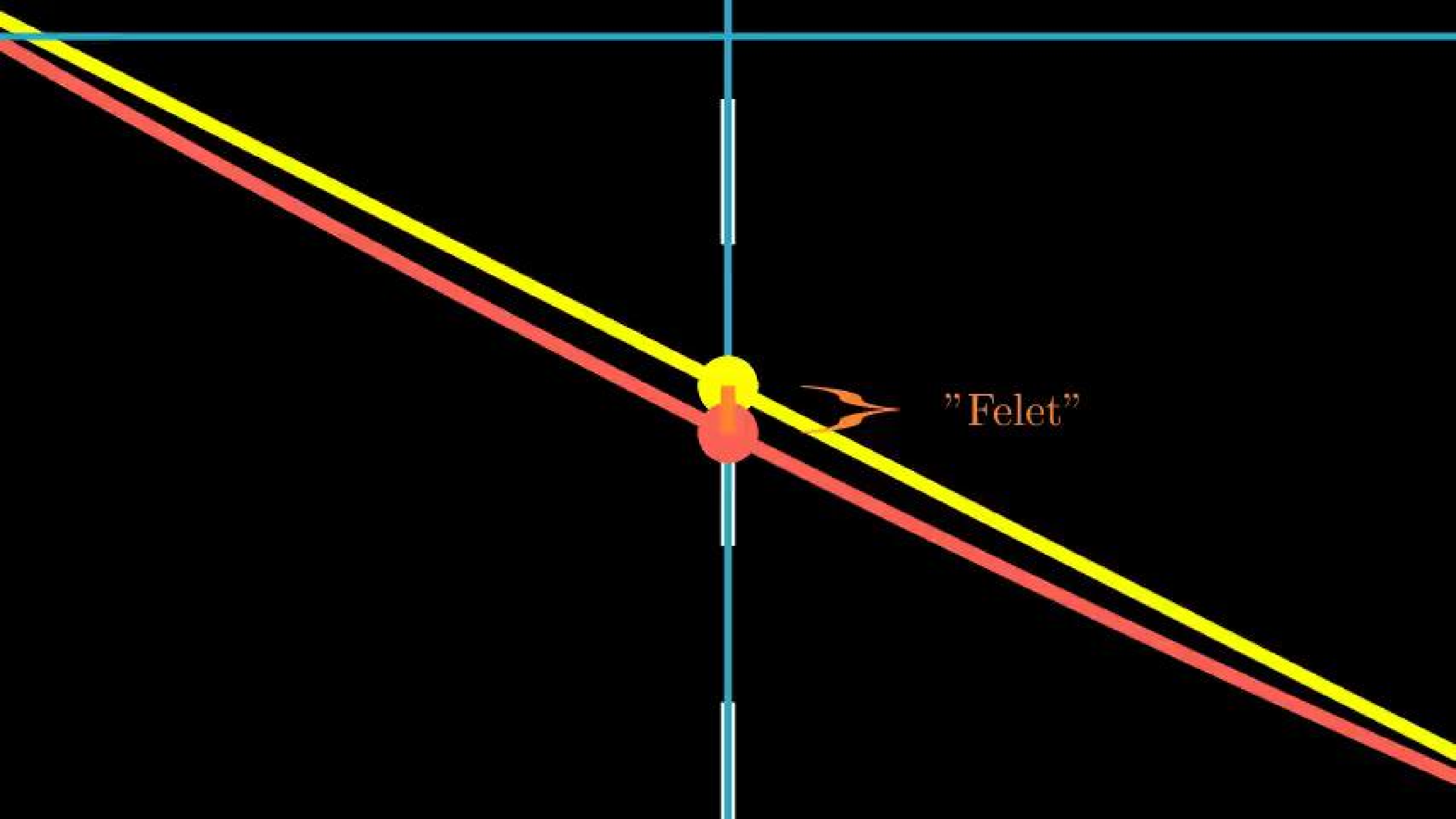
y
X
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
$p_2(x)$
$p_1(x)$
1
2
3
4
5
6

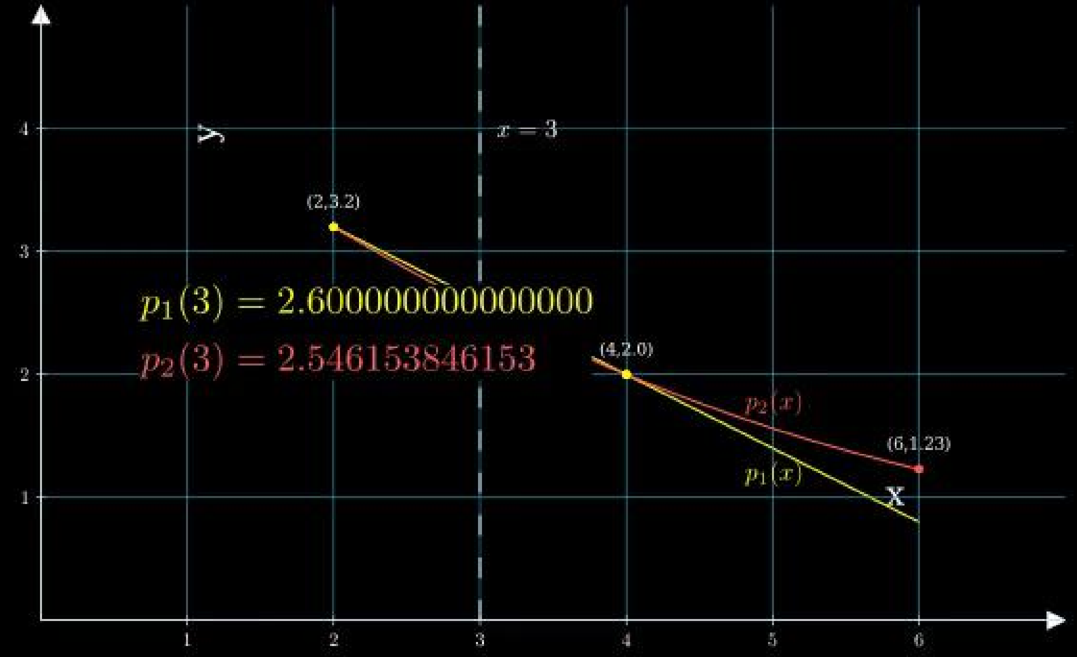

y
$x = 3$
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
$p_2(x)$
$p_1(x)$
X
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4



"Hur kan vi veta hur stort fel vi har vid $x = 3$ om vi använder oss av förstagradspolynomet? $(p_1(3))$"




"Felet"



y
x = 3
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
p_1(3) = 2.6000000000000000
p_2(3) = 2.546153846153
p_2(x)
p_1(x)
X
1
2
3
4
5
6

y
x = 3
(2,3.2)
|2.546153846153845 − 2.600000000000000|
(4,2.0)
p2(x)
(6,1.23)
p1(x)
x
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4

y
x = 3
(2,3.2)
|−0.05384615384615|
(4,2.0)
p2(x)
(6,1.23)
p1(x)
x
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4


y
$x = 3$
(2,3.2)
0.053846153846154
(4,2.0)
$p_2(x)$
(6,1.23)
$p_1(x)$
x
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6

$$0.0538461538461\,54$$

Felskattning, interpolation

1. Konstruera ett interpolationspolynom anpassat till n antal punkter.

Felskattning, interpolation

1. Konstruera ett interpolationspolynom anpassat till n antal punkter.

2. För att skatta felet i punkten x, räkna ut polynomets (från steg 1) värde i denna punkt. Kalla detta värde för $p_1(x)$.

Felskattning, interpolation

1. Konstruera ett interpolationspolynom anpassat till n antal punkter.

2. För att skatta felet i punkten x, räkna ut polynomets (från steg 1) värde i denna punkt. Kalla detta värde för $p_1(x)$.

3. Konstruera ett till interpolationspolynom av en grad högre än steg 1. Detta polynom kommer då behöva gå genom en extra datapunkt jämfört med det i steg 1: $n + 1$ datapunkter.

Felskattning, interpolation

1. Konstruera ett interpolationspolynom anpassat till n antal punkter.

2. För att skatta felet i punkten x, räkna ut polynomets (från steg 1) värde i denna punkt. Kalla detta värde för $p_1(x)$.

3. Konstruera ett till interpolationspolynom av en grad högre än steg 1. Detta polynom kommer då behöva gå genom en extra datapunkt jämfört med det i steg 1: $n+1$ datapunkter.

4. För att skatta felet i punkten x, räkna även ut polynomets (från steg 3) värde i denna punkt. Kalla detta värde för $p_2(x)$.

Felskattning, interpolation

1. Konstruera ett interpolationspolynom anpassat till n antal punkter.

2. För att skatta felet i punkten x, räkna ut polynomets (från steg 1) värde i denna punkt. Kalla detta värde för $p_1(x)$.

3. Konstruera ett till interpolationspolynom av en grad högre än steg 1. Detta polynom kommer då behöva gå genom en extra datapunkt jämfört med det i steg 1: $n+1$ datapunkter.

4. För att skatta felet i punkten x, räkna även ut polynomets (från steg 3) värde i denna punkt. Kalla detta värde för $p_2(x)$.

5. Nu ges en uppskattning av felet i punkten x av $|p_1(x) - p_2(x)|$

Felskattning, interpolation

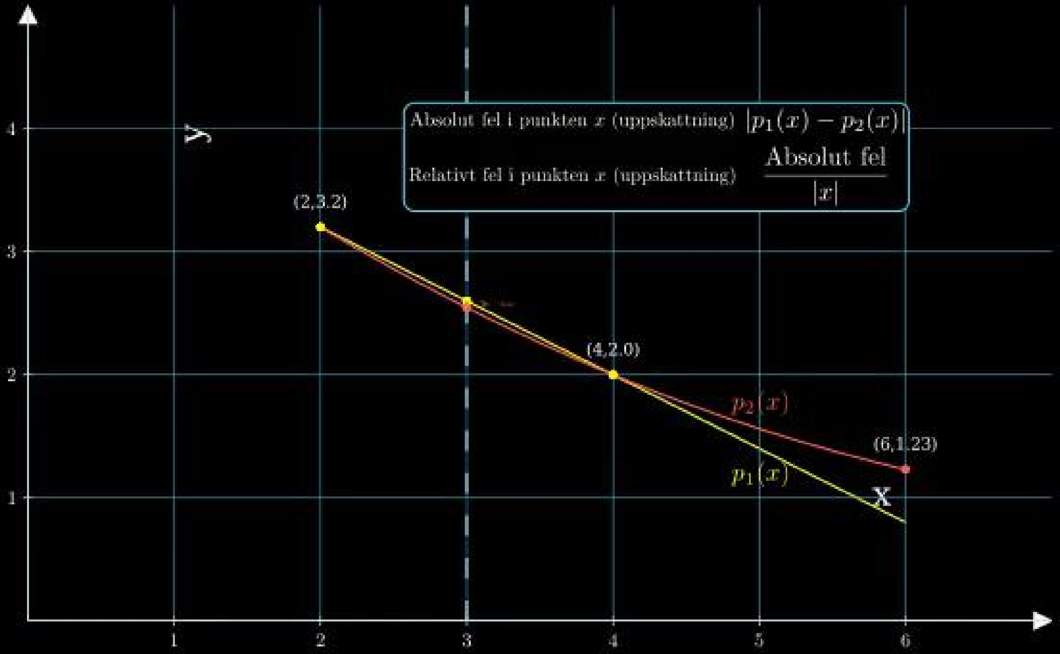
1. Konstruera ett interpolationspolynom anpassat till n antal punkter.

2. För att skatta felet i punkten x, räkna ut polynomets (från steg 1) värde i denna punkt. Kalla detta värde för $p_1(x)$.

3. Konstruera ett till interpolationspolynom av en grad högre än steg 1. Detta polynom kommer då behöva gå genom en extra datapunkt jämfört med det i steg 1: $n+1$ datapunkter.

4. För att skatta felet i punkten x, räkna även ut polynomets (från steg 3) värde i denna punkt. Kalla detta värde för $p_2(x)$.

5. Nu ges en uppskattning av felet i punkten x av $|p_1(x) - p_2(x)|$



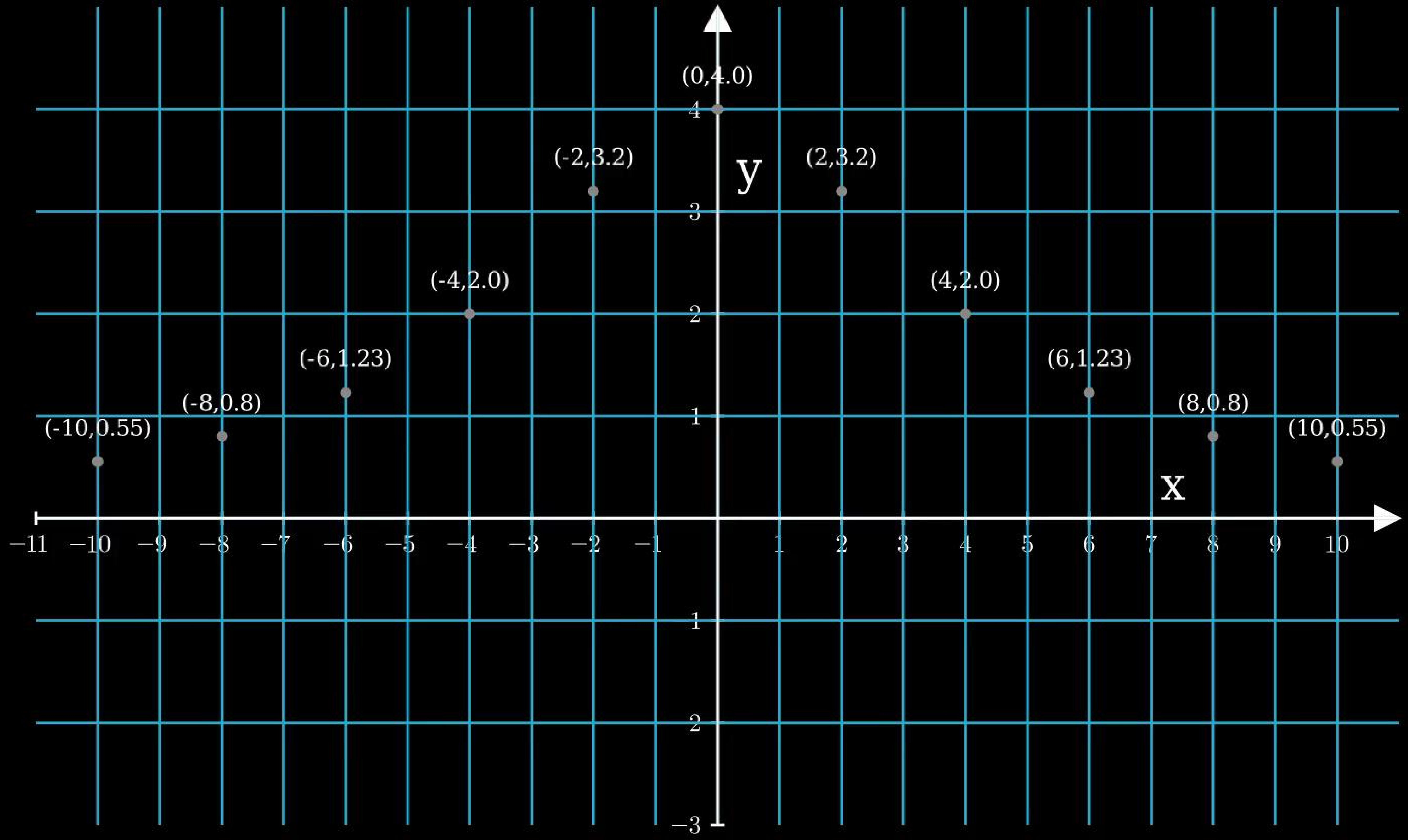
Absolut fel i punkten x (uppskattning) $|p_1(x) - p_2(x)|$
Relativt fel i punkten x (uppskattning) $\frac{\text{Absolut fel}}{|x|}$
y
(2,3.2)
(4,2.0)
(6,1.23)
$p_2(x)$
$p_1(x)$
x
1
2
3
4
5
6

Absolut fel i punkten x (uppskattning) $|p_1(x) - p_2(x)|$

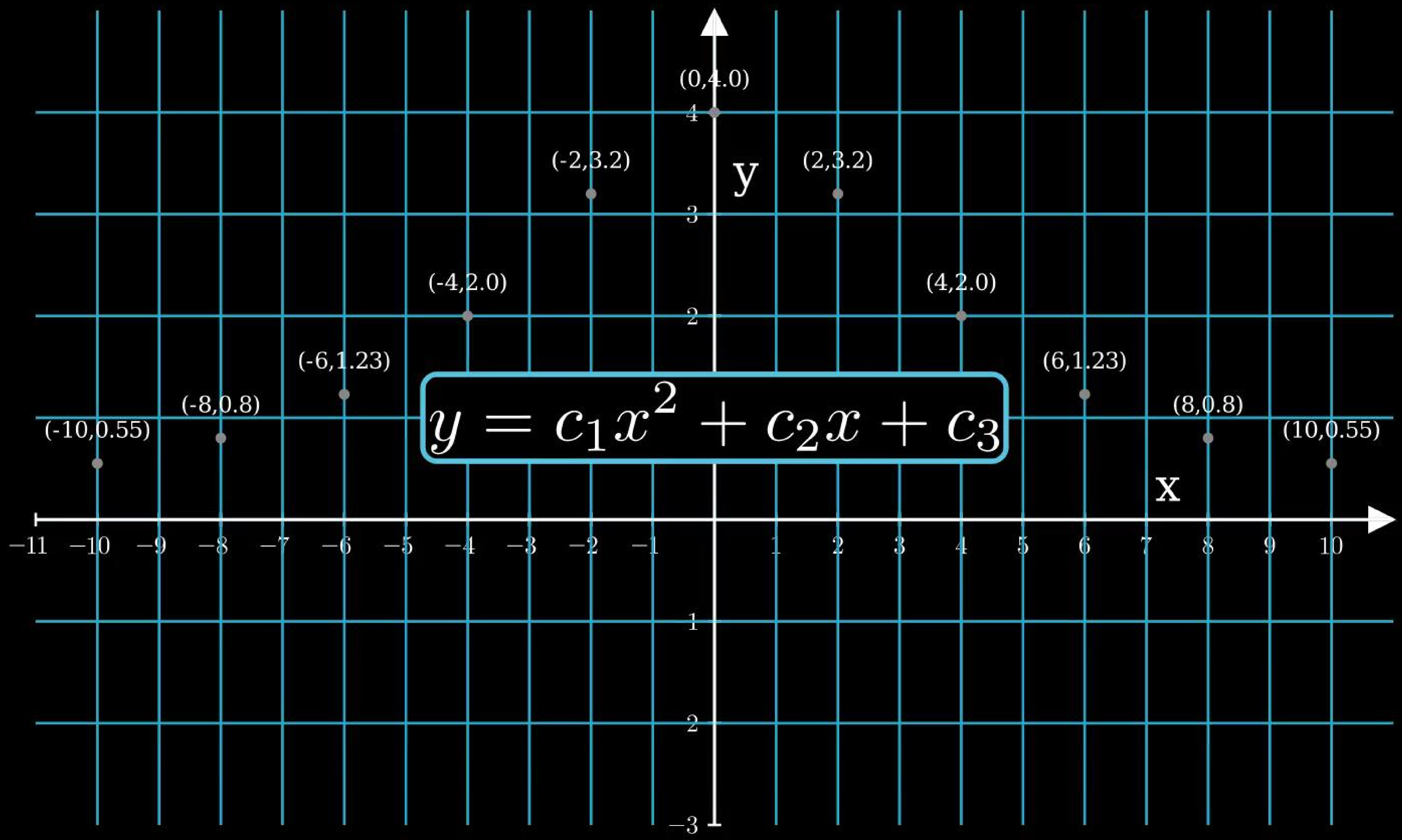
Relativt fel i punkten x (uppskattning) $\dfrac{\text{Absolut fel}}{|x|}$

där p_1 är ett polynom av gradtal n, p_2 är ett polynom av gradtal $n+1$, och x är en punkt du vill veta felet i

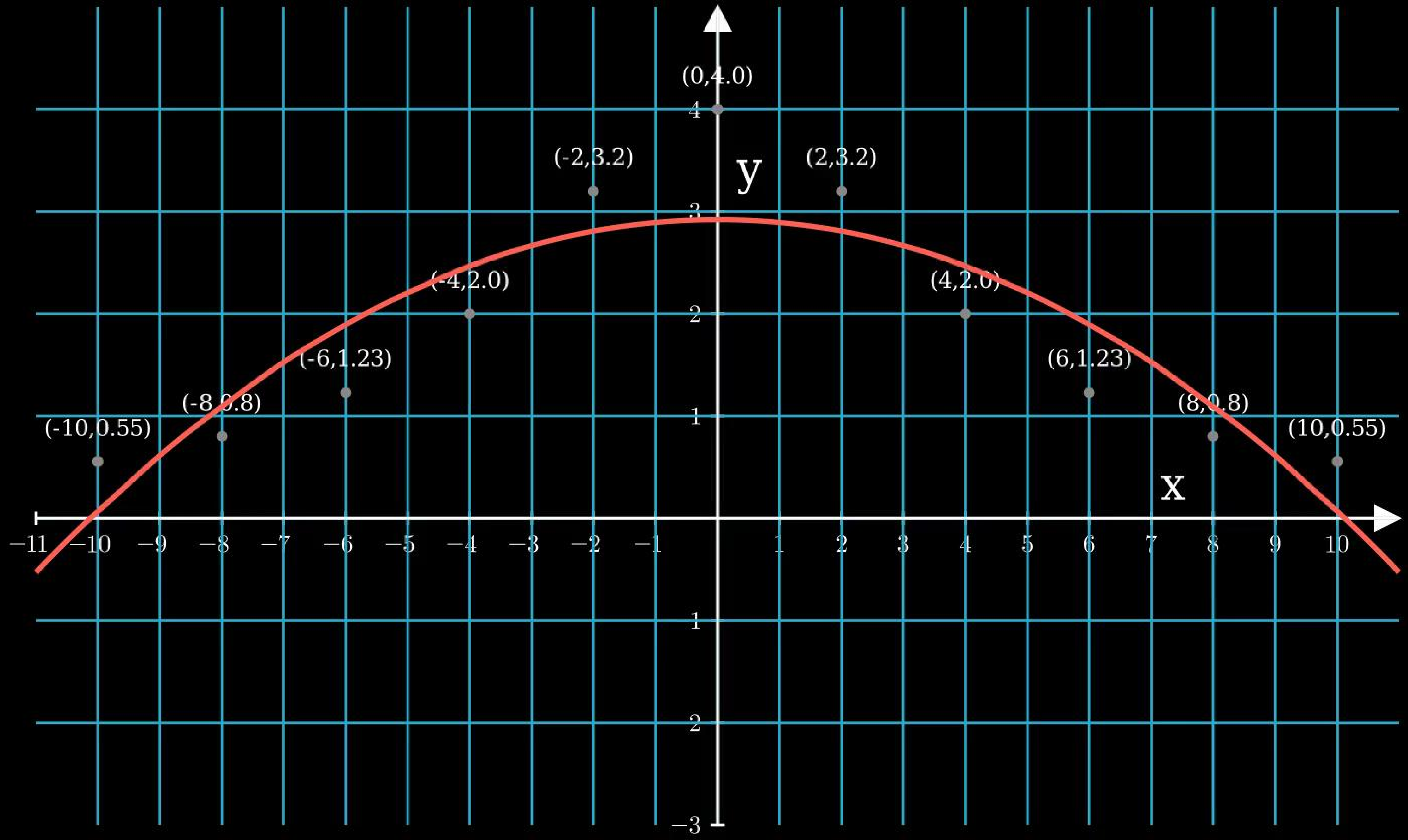
Minsta kvadratmetoden



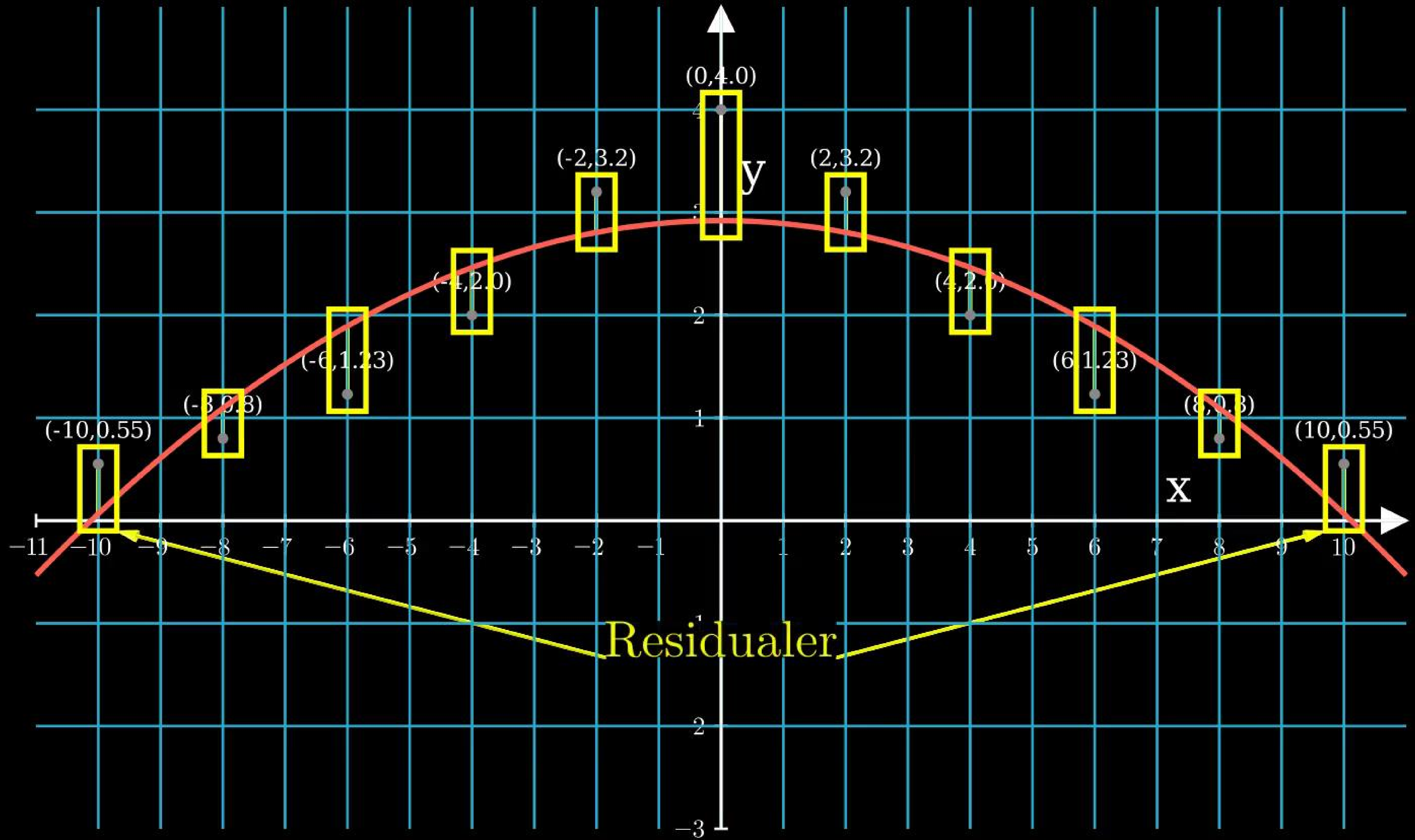
(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
x
y



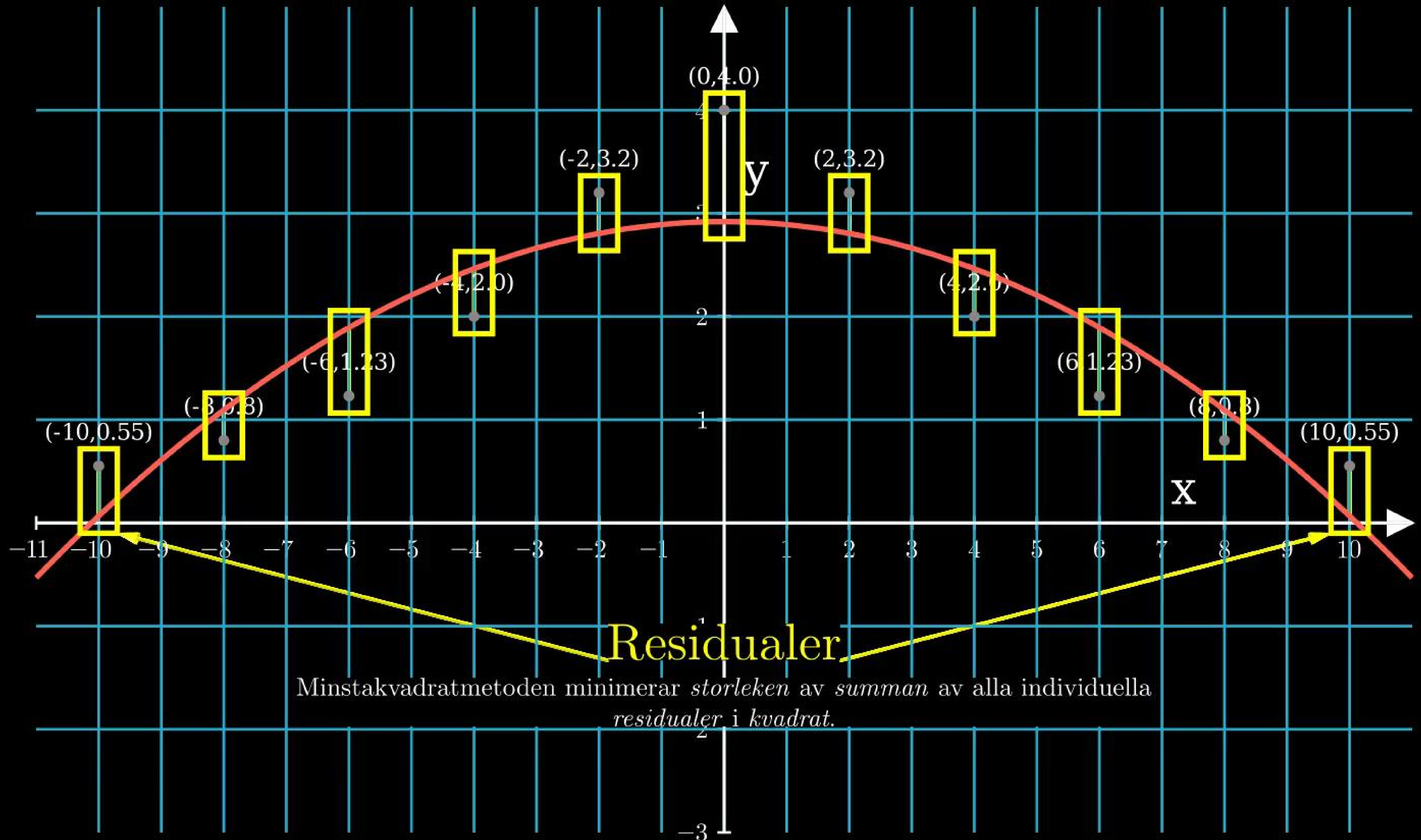
$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$
(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
y
x



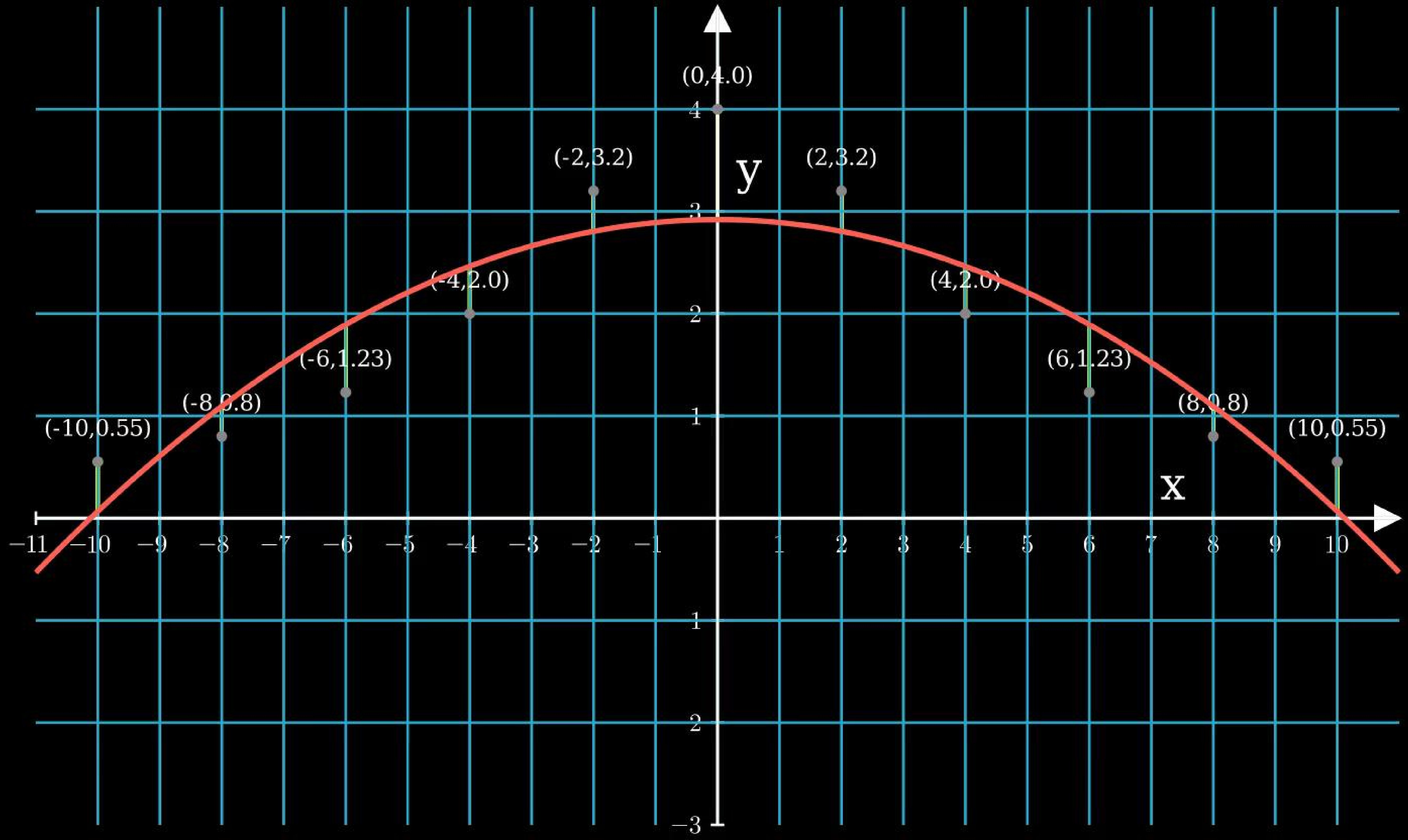
(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
y
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
x
−11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
4 3 2 1 1 2 −3



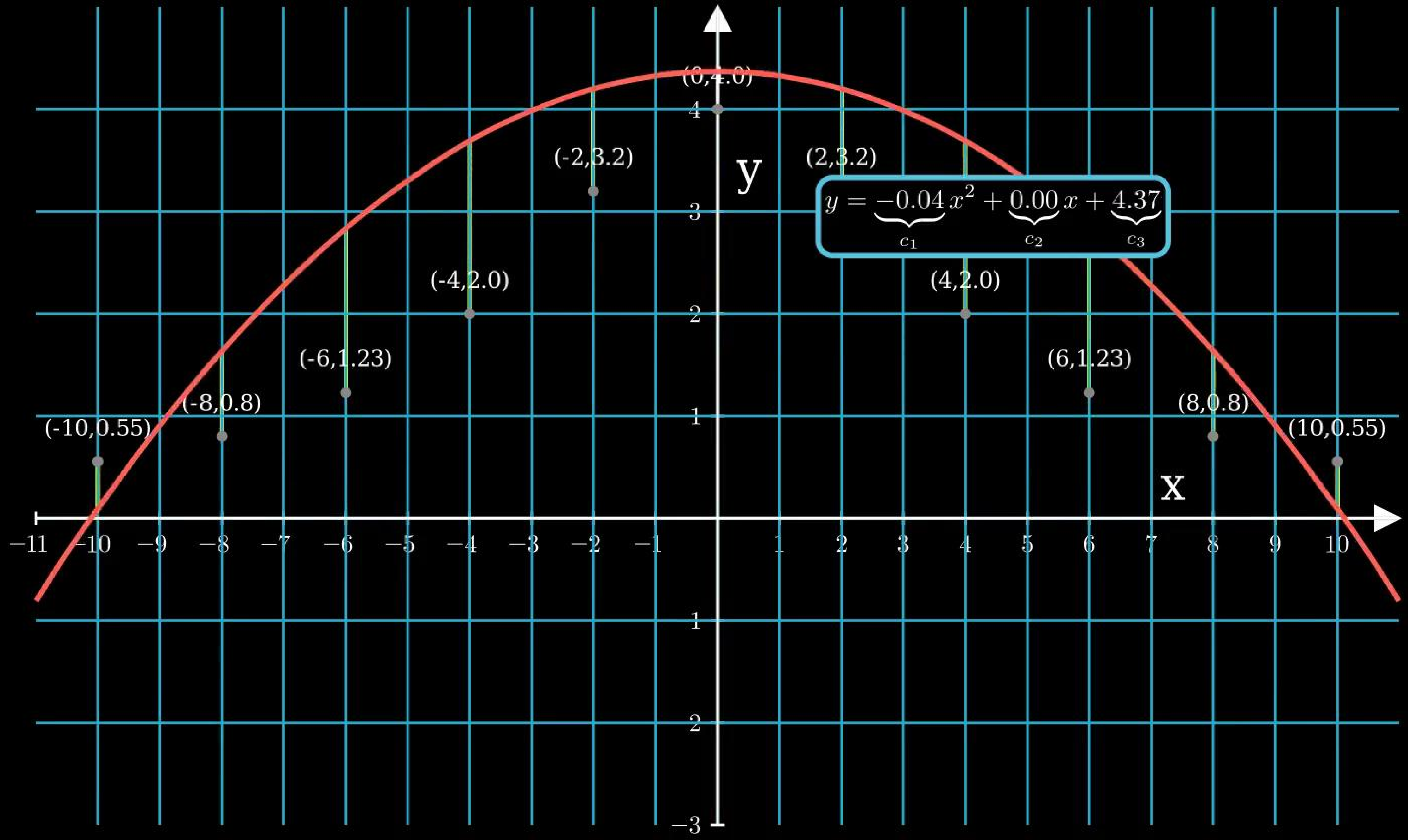
(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
y
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
x
Residualer



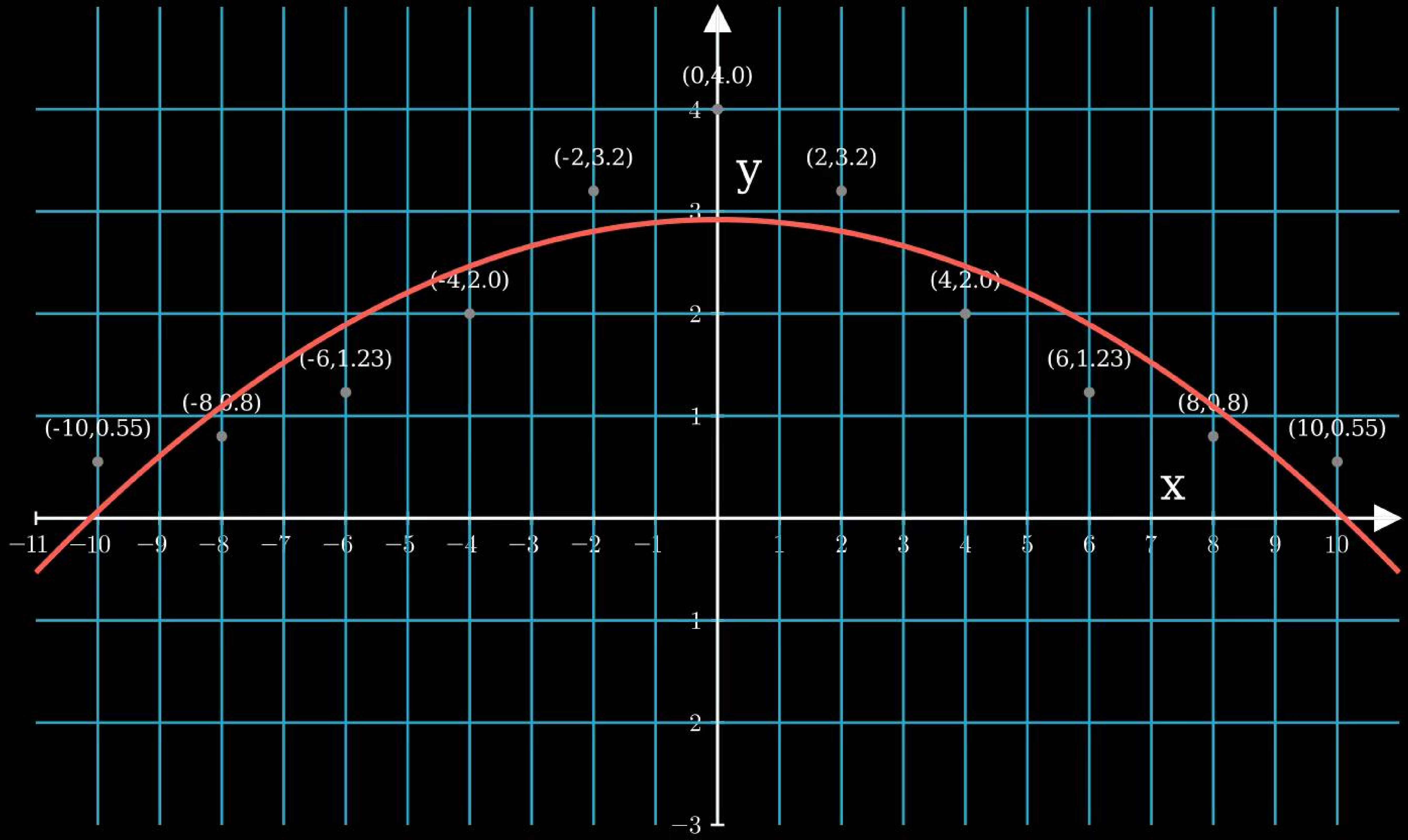
(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
y
x
Residualer
Minstakvadratmetoden minimerar *storleken* av *summan* av alla individuella *residualer* i *kvadrat*.



(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
y
x



$y = \underbrace{-0.04}_{c_1} x^2 + \underbrace{0.00}_{c_2} x + \underbrace{4.37}_{c_3}$
(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
y
x



(0,4.0)
(-2,3.2)
(2,3.2)
y
(-4,2.0)
(4,2.0)
(-6,1.23)
(6,1.23)
(-8,0.8)
(8,0.8)
(-10,0.55)
(10,0.55)
x