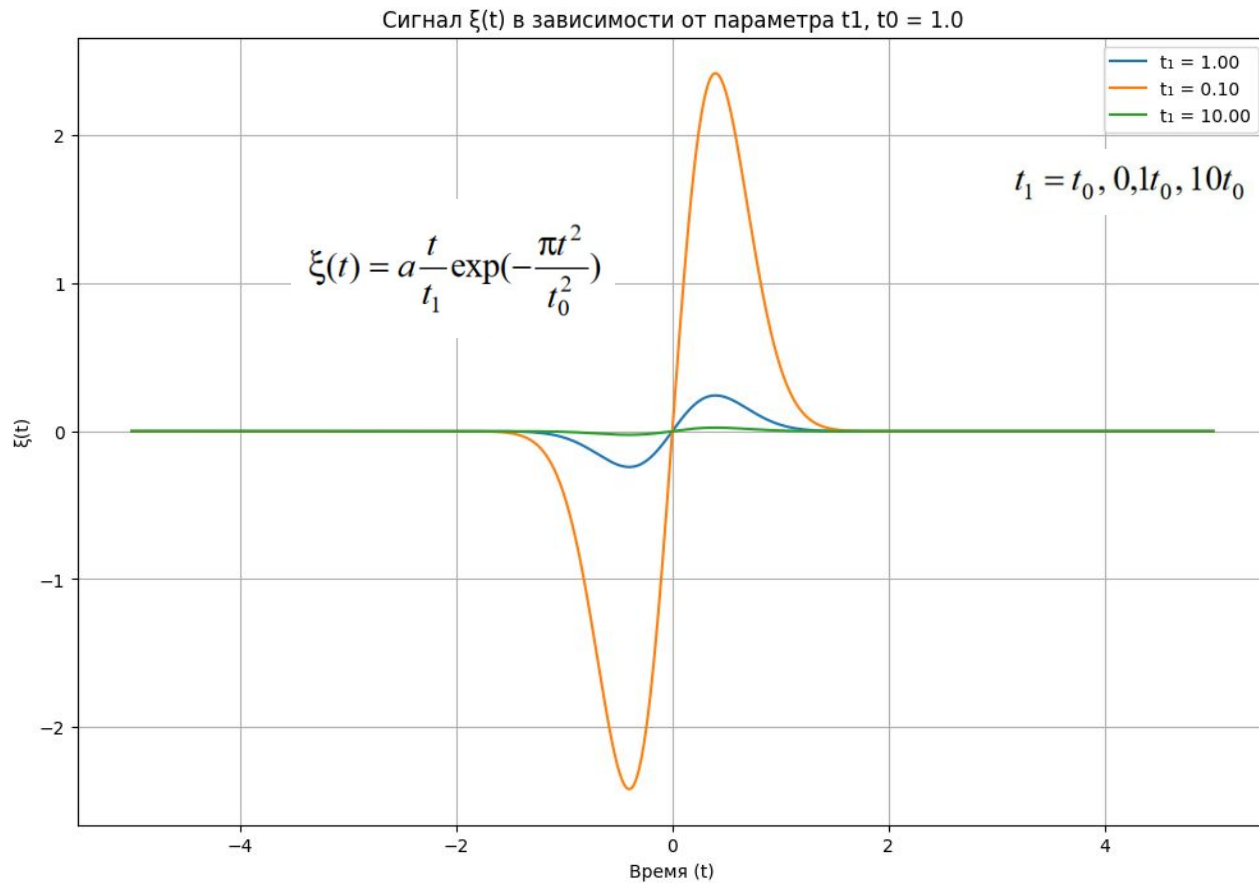


# Задача 4.17

## Условие задачи

4.17. (2) Вычислить спектр сигнала  $\xi(t) = a \frac{t}{t_1} \exp(-\frac{\pi t^2}{t_0^2})$ . Представить графически сигнал  $\xi(t)$  в зависимости от параметра  $t_0$ , и спектр  $S(\omega)$  сигнала в зависимости от переменной  $t_0^{-1}$ , полагая  $t_1 = t_0, 0,1t_0, 10t_0$ . Оценить каким-либо способом ширину спектра и проанализировать ее изменение при варьировании параметра  $t_1$ .

# График для сигнала



# Вычисление спектра сигнала

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a \frac{t}{t_1} e^{-\frac{\pi t^2}{t_0^2}} e^{-i\omega t} dt$$

Сделаем замену:

$$z = t + \frac{i\omega t_0^2}{2\pi} \quad \text{и} \quad dz = dt$$

$$S(\omega) = \frac{a}{2\pi t_1} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( z - \frac{i\omega t_0^2}{2\pi} \right) e^{-\frac{\pi z^2}{t_0^2}} dz$$

$$S(\omega) = \frac{a}{2\pi t_1} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{\pi z^2}{t_0^2}} dz - \frac{i\omega t_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi z^2}{t_0^2}} dz \right)$$

Первый интеграл в скобках обращается в ноль, так как это нечетная функция (нечетная \* четная):

$$S(\omega) = \frac{a}{4\pi^2 t_1} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} \left( -i\omega t_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi z^2}{t_0^2}} dz \right)$$

Сделаем замену:

$$p = \frac{\sqrt{\pi}}{t_0} z \quad \text{и} \quad dp = \frac{\sqrt{\pi}}{t_0} dz$$

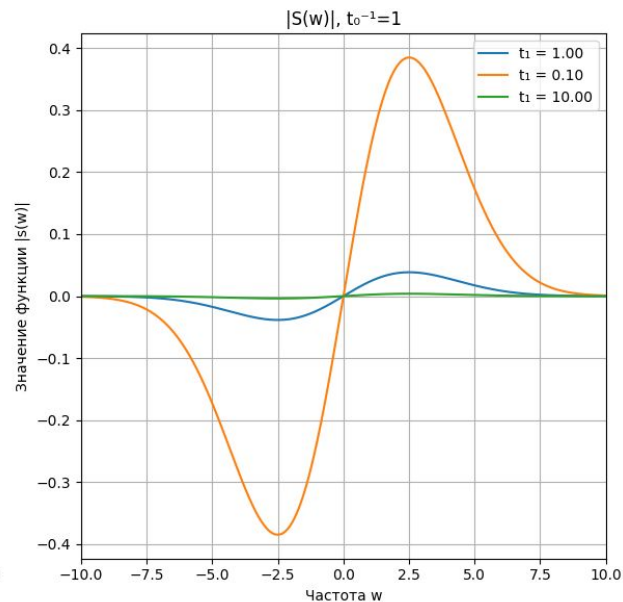
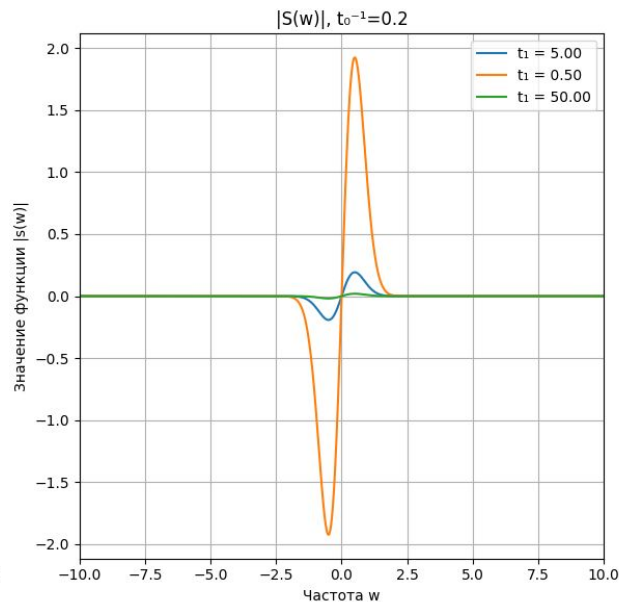
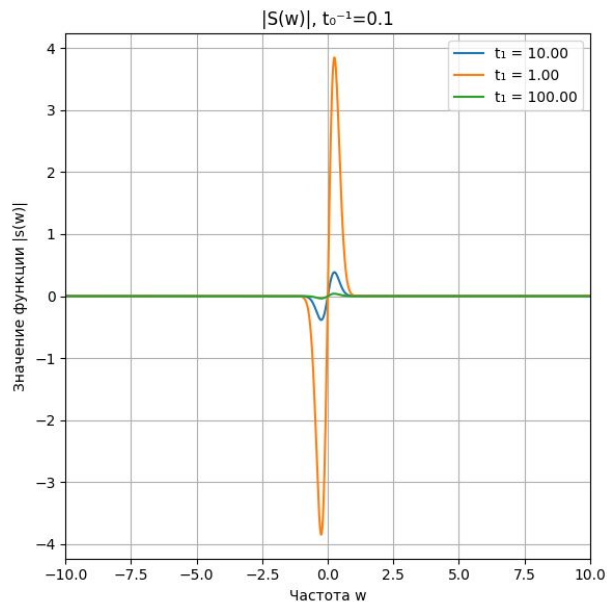
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi z^2}{t_0^2}} dz = \frac{t_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = (\text{интеграл Пуассона}) = \frac{t_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = t_0$$

$$S(\omega) = -\frac{i}{4\pi^2 t_1} a \omega t_0^3 e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}}$$

# Графики для спектра

$$S(\omega) = -\frac{i}{4\pi^2 t_1} a \omega t_0^3 e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}}$$

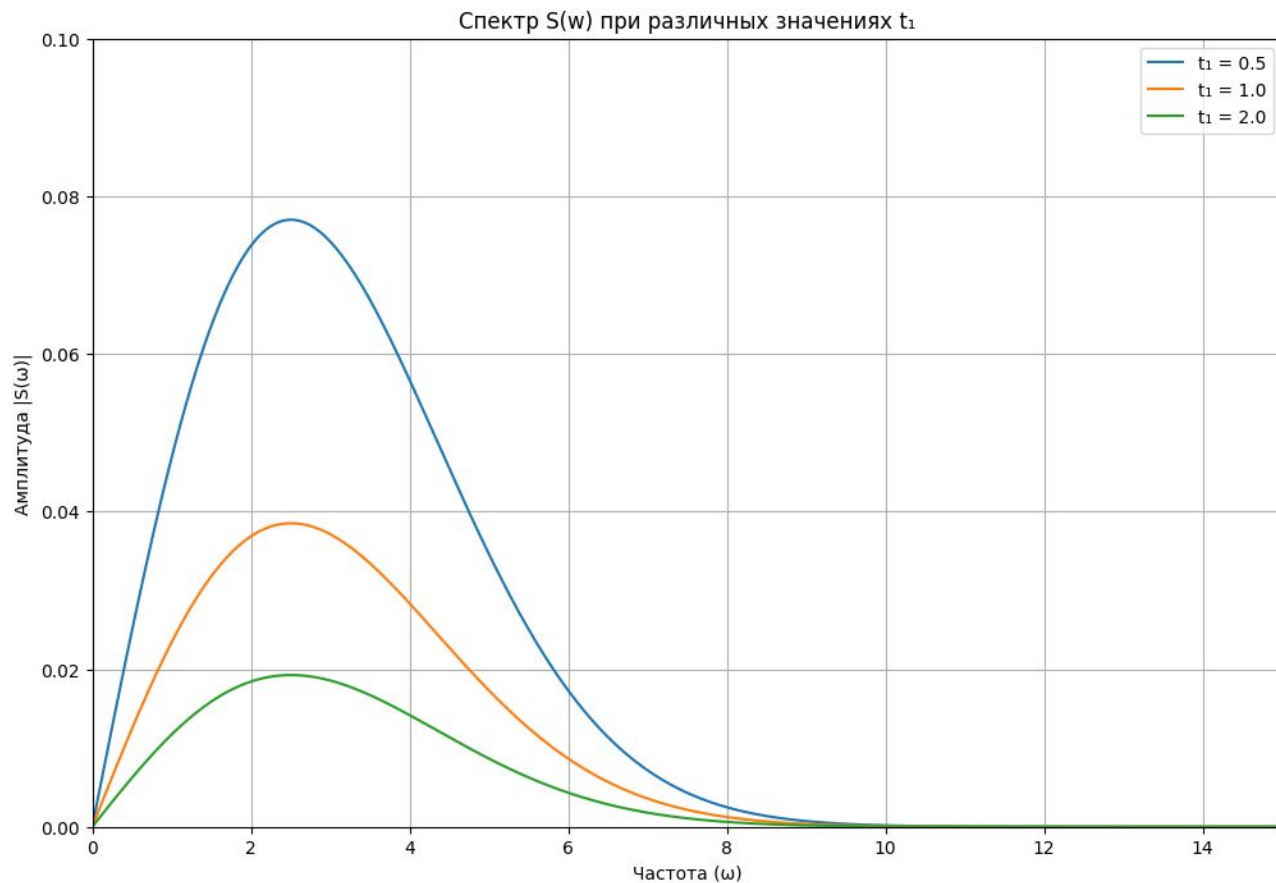
$$t_1 = t_0, 0.1t_0, 10t_0$$



# График спектра

$$S(\omega) = -\frac{i}{4\pi^2 t_1} a \omega t_0^3 e^{\frac{-\omega^2 t_0^2}{4\pi}}$$

$$t_0 = 1.0$$



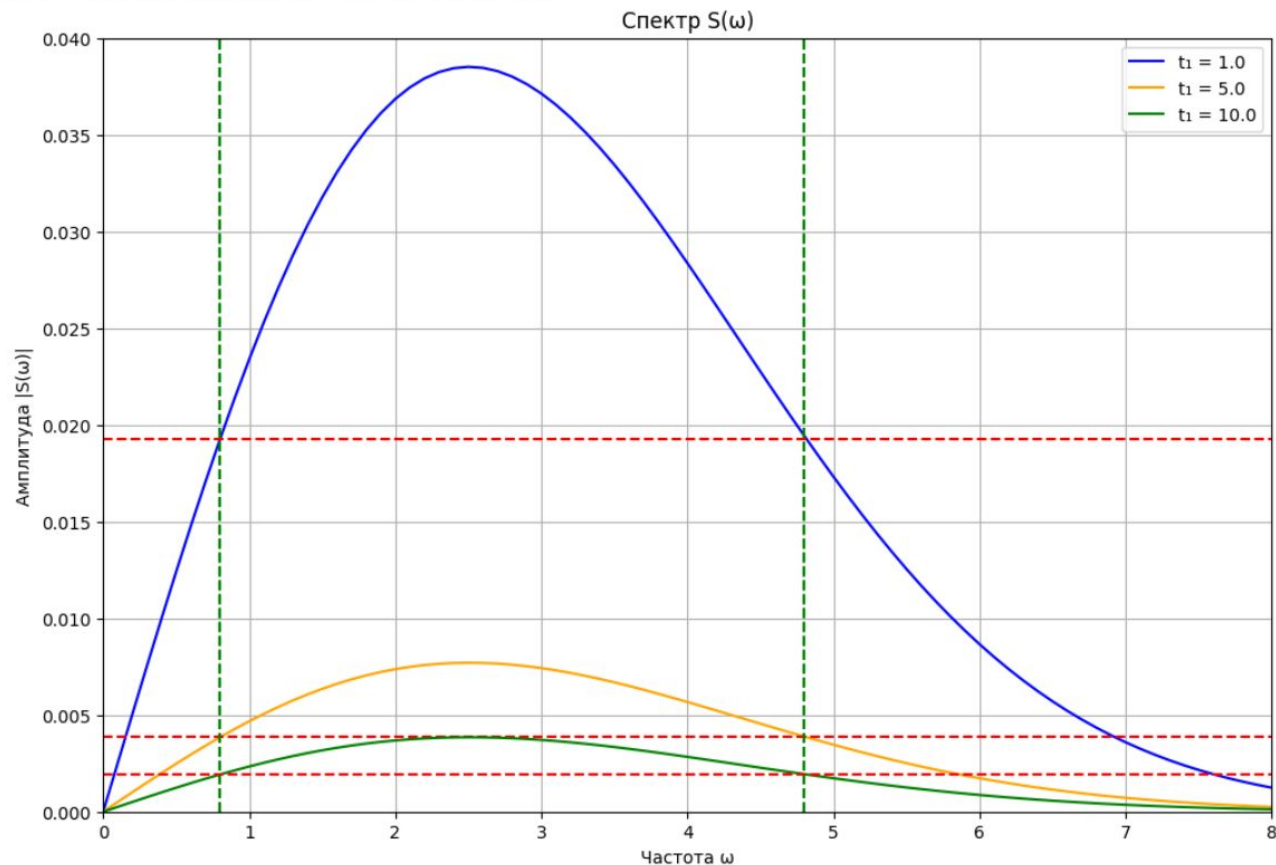
# Ширина спектра (метод половинной ширины)

Для  $t_1 = 1.0$ : Ширина спектра  $\Delta\omega = 4.00$  (от 0.80 до 4.80)

Для  $t_1 = 5.0$ : Ширина спектра  $\Delta\omega = 4.00$  (от 0.80 до 4.80)

Для  $t_1 = 10.0$ : Ширина спектра  $\Delta\omega = 4.00$  (от 0.80 до 4.80)

$t_0 = 1.0$



# Выводы

- 1) По графику сигнала видно, что по мере увеличения  $t_1$  при фиксированном  $t_0$  уменьшается амплитуда сигнала, при этом колоколообразная форма сигнала сохраняется
- 2) То же самое верно и для спектра сигнала
- 3) Параметр  $t_1$  не влияет на ширину спектра

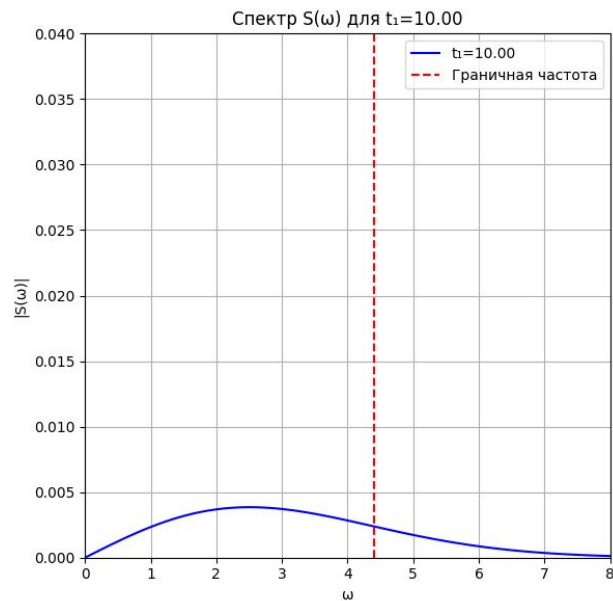
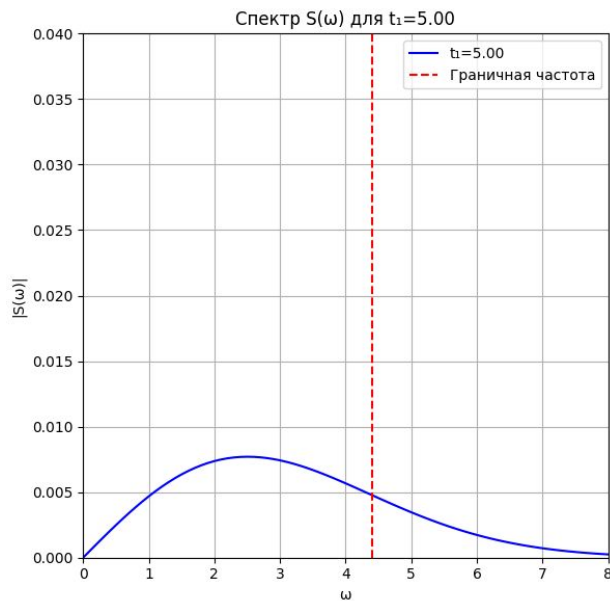
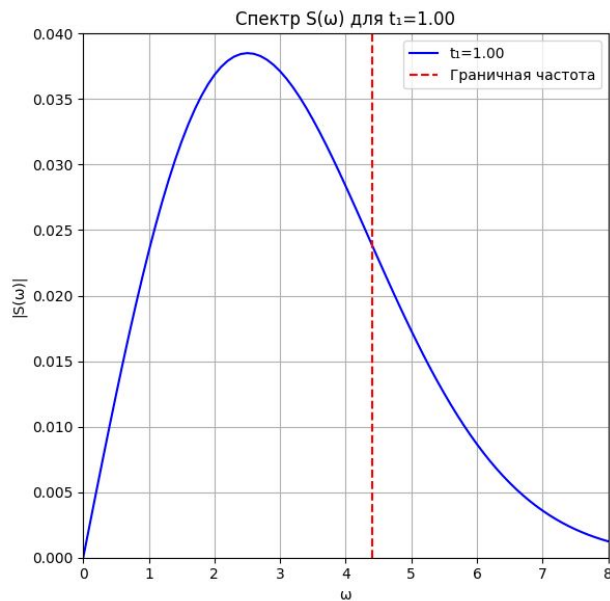


# Ширина спектра (энергетический метод)

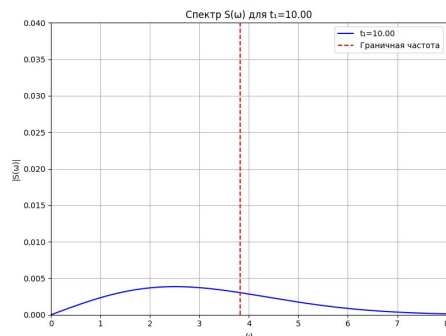
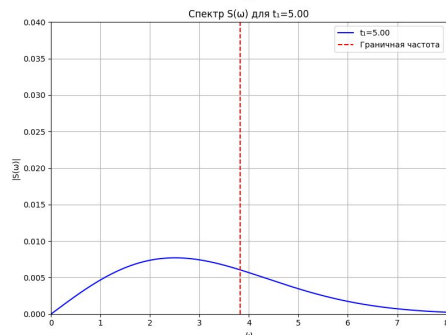
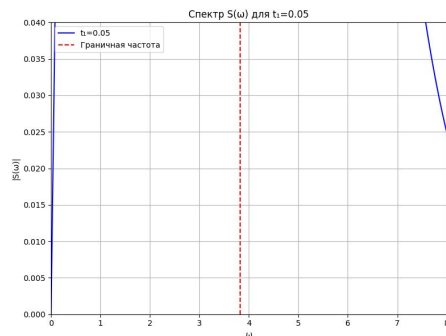
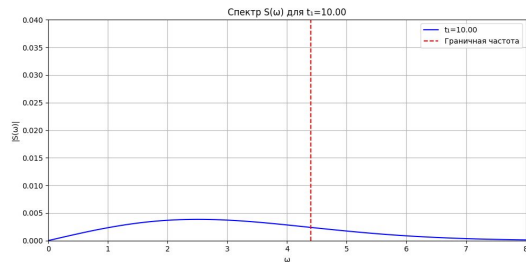
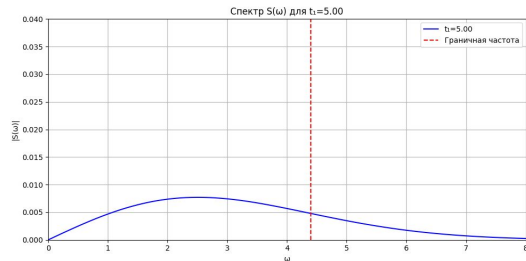
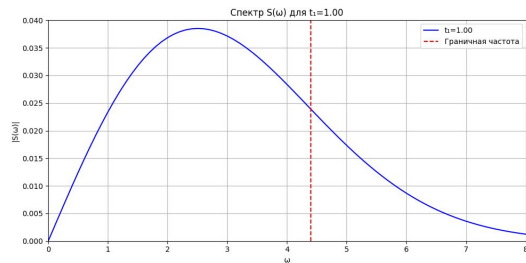
Для  $t_1 = 1.00$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 4.40$  (содержит ~90% энергии)

Для  $t_1 = 5.00$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 4.40$  (содержит ~90% энергии)

Для  $t_1 = 10.00$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 4.40$  (содержит ~90% энергии)



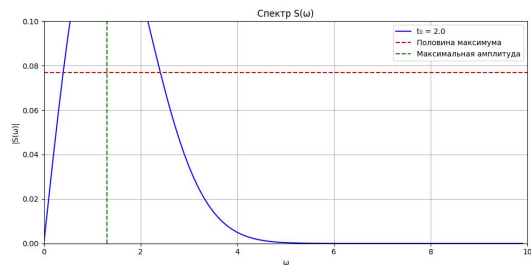
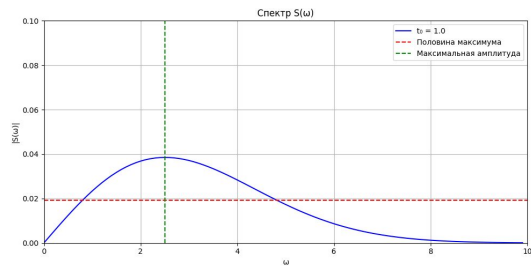
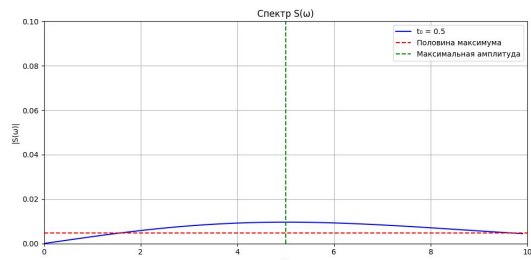
# Варьируем $t_1$



Для  $t_1 = 1.00$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 4.40$  (содержит ~90% энергии)  
Для  $t_1 = 5.00$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 4.40$  (содержит ~90% энергии)  
Для  $t_1 = 10.00$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 4.40$  (содержит ~90% энергии)

Для  $t_1 = 0.05$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 3.82$  (содержит ~90% энергии)  
Для  $t_1 = 5.00$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 3.82$  (содержит ~90% энергии)  
Для  $t_1 = 10.00$ : Ширина спектра  $\Delta\omega \approx 3.82$  (содержит ~90% энергии)

# Варьируем $t_0$



Для  $t_0 = 0.5$ : Ширина спектра  $\Delta\omega = 8.00$  (от 1.60 до 9.60)

Для  $t_0 = 1.0$ : Ширина спектра  $\Delta\omega = 4.00$  (от 0.80 до 4.80)

Для  $t_0 = 2.0$ : Ширина спектра  $\Delta\omega = 2.00$  (от 0.40 до 2.40)