MI-SPOL-19

Markovské řetězce se spojitým časem. Souvislost s Markovskými řetezci s diskrétním časem a s Poissonovým procesem.

Poissonův proces

Náhodný proces $\{N_t | t \geq 0\}$ je **čítací proces**, pokud jsou jeho trajektorie nezáporné, celočíselné a neklesající, tj:

- $N_t \geq 0$
- $N_t \in \mathbb{Z}$
- $s \leq t \Rightarrow N_s \leq N_t$

Pro $s < t$ udává $N_t - N_s$ počet událostí, které nastaly během časového intervalu $(s, t]$

Binomický proces: čítací proces takový, že časy mezi událostmi nezávislé, geometricky rozdělené

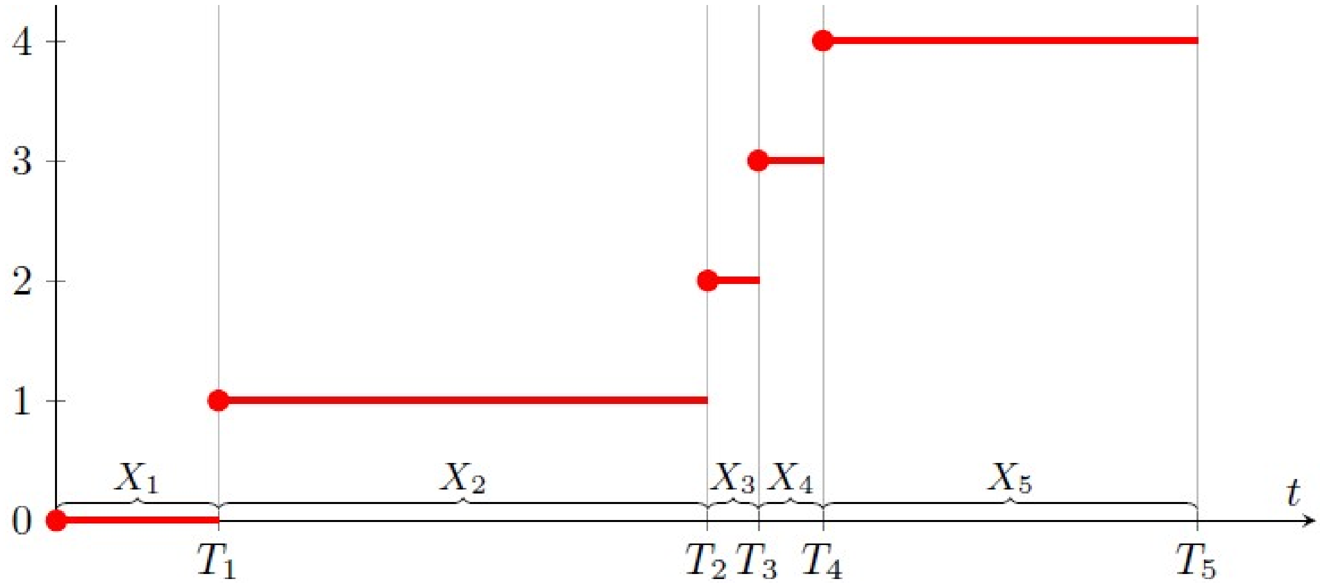
Poissonův proces: čítací proces s nezávislými exponenciálně rozdělenými časy mezi událostmi
Definice: $\{X_j | j \in \mathbb{N}\}$ i.i.d náhodné vličiny s rozdělením $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Definujeme $\{T_n | n \in \mathbb{N}\}$:

$$T_n = T_{n-1} + X_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

kde $n \geq 1, T_0 = 0$
Náhodný proces $\{N_t | t \in [0, \infty)\}$, kde

$$N_t(\omega) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 | T_n(\omega) \leq t\}$$

je **Poissonův proces**



Ekvivalentní definice:

Proces $\{N_t | t \in [0, \infty)\}$ je Poissonův, pokud:

- $N_0 = 0$ skoro jistě
- $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$ pro všechna $t > s \geq 0$
- $\{N_t\}$ má nezávislé přírůstky

Exponenciální rozdělení

$T \sim \text{Exp}(\lambda)$

- **hustota pravděpodobnosti:** $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pro $t \geq 0$
- **distribuční funkce:** $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pro $t \geq 0$
- **funkce přežití:** $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ pro $t \geq 0$
- **Momenty:** $ET = \frac{1}{\lambda}$, $varT = \frac{1}{\lambda^2}$

Bezpaměťovost exponenciálního rozdělení: Pokud $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, pak pro všechna $t, s \geq 0$:

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

Silná bezpaměťovost exponenciálního rozdělení: Pokud $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ a A spojitá nezáporná náhodná veličina nezávislá na T, pak pro všechna $s \geq 0$:

$$P(T > A + s | T > A) = P(T > s)$$

Markovskost Poissonova procesu:

- bezpaměťovost: $\{N_{t+s} - N_s | t \geq 0\}$ Poissonův proces s intenzitou λ, pak $N_{t+s} - N_s$ jsou nezávislé na N_r pro $0 \leq r \leq s$
- přírůstky nezávislé $\Rightarrow$

$$P(N_{t+s} = j | N_t = i, N_{t_{n-2}} = k_{n-2}, .., N_{t_0} = k_0) =$$

$$P(N_{t+s} - N_t = j - i | N_t = i, N_{t_{n-2}} = k_{n-2}, ..., N_{t_0} = k_0) =$$

$$P(N_{t+s} - N_t = j - i) = \frac{(\lambda s)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda s}$$

Markovský řetězec se spojitým časem

Náhodný proces $\{X_t | t \geq 0\}$ s nejvýše spočetnou množinou stavů S je **markovský řetězec se spojitým časem**, pokud splňuje **markovskou podmínku:** $\forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k \in \mathbb{R}_0^+, \forall s_0, ..., s_k \in S$ platí

$$P(X_{t_k} = s_k | X_{t_{k-1}} = s_{k-1}, ..., X_{t_0} = s_0) = P(X_{t_k} = s_k | X_{t_{k-1}} = s_{k-1})$$

Rozdělení v čase $t \in [0, \infty)$ pro $i \in S$:

$$\mathbf{p}_i(t) = P(X_t = i)$$

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), ...)$$

Matice pravděpodobností přechodu za čas mezi s a $t \leq s$:

$$\mathbf{P}_{ij}(t, s) = P(X_s = j | X_t = i)$$

$$\mathbf{P}(t, s) = (\mathbf{P}_{ij}(t, s))_{i,j \in S}$$

Náhodný proces $\{X_t | t \geq 0\}$ s nejvýše početnou množinou stavů S je markovský právě když $\forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k, \forall s_0, ..., s_k \in S$ platí:

$$P(X_{t_0} = s_0, ..., X_{t_k} = s_k) = \mathbf{p}_{s_0}(t_0) \cdot \mathbf{P}_{s_0 s_1}(t_0, t_1) \cdot ... \cdot \mathbf{P}_{s_{k-1} s_k}(t_{k-1}, t_k)$$

Chapman-Kolmogorova věta: Pro matice přechodu markovského řetězce platí $\forall t \leq s \leq r \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbf{P}(t,r) = \mathbf{P}(t,s) \cdot \mathbf{P}(s,r)$$

Homogenní markovský řetězec

MArkovský řetězec $\{X_t | tgeq0\}$ je **homogenní**, pokud $\forall t, s \geq 0$:

$$\mathbf{P}(t, t+s) = \mathbf{P}(0,s) := \mathbf{P}(s)$$

Matice skokových intenzit

Matice skokových intenzit: Pokud pro všechna $i, j \in S$ existují konečné limity

$$\mathbf{Q}_{ii} = \lim_{h \to 0+} \frac{\mathbf{P}_{ii}(h) - 1}{h}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \lim_{h \to 0+} \frac{\mathbf{P}_{ij}(h)}{h}$$

Je matice $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_{ij})_{i,j \in S}$ **maticí skokových intenzit.**

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}'(0)$$

Vlastnosti:

- $\mathbf{Q}_{ii} \leq 0$, $\mathbf{Q}_{i,j} \geq 0$ pro $i \neq j$
- $\mathbf{Q}_{ii} = -\sum_{j \neq i} \mathbf{Q}_{ij}$
- $\mathbf{P}_{ij}(h) = \mathbf{Q}_{ij} \cdot h + o(h)$

Spojitý řetězec jako diskrétní řetězec časovaný Poissonem

Homogenní markovský řetězec se spojitým časem X_t s maticí intenzit $\mathbf{Q}$.
Existuje ekvivaltentní vyjádření X_t jako:

$$X_t = Y_{N_t}$$

kde $\{N_t\}$ a Y_n jsou nezávislé procesy:

- $\{N_t | T \geq 0\}$ je **Poissonův proces** s intenzitou λ_M
- $\{Y_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ je **homogenní markovský řetězec s diskrétním časem** a maticí přechodu $\mathbf{D}$, kde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\lambda_M}\mathbf{Q} + \mathbf{E}$$

Simulace trajektorie X_t:

- Začátek v náhodném $i \in S$
- Vygenerovat náhodný čas $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_M)$, kde $\lambda_M = \sup_{i \in S}(-\mathbf{Q}_{ii})$
- "Posunout hodiny" o τ_i: nastavit $\forall s \in [t, t + \tau_i)$: $X_s = X_t$
- Krok v diskrétním řetězci: $Y_n \to Y_{n+1}$
- $X_{t+\tau_i} = Y_{n+1}$
- $t = t + \tau_i$,
  $n = n + 1$

Stacionární rozdělení

Kolmogorova dopředná rovnice: $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}$
Kolmogorova zpětná rovnice: $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(t)$

Rozdělení $\mathbf{p}(t)$ je řešením soustavy diferenciálních rovnic $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}, \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_{initial}$

$X_t | t \geq 0$ markovský řetězec s pravděpodobnostmi přechodu $\mathbf{P}(t)$. Vektor π je **stacionární rozdělení**, pokud pro všechna $t \geq 0$:

$$\pi\mathbf{P}(t) = \pi$$

$\Rightarrow$ Vektor π je stacionární rozdělení, právě když

$$\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

Markovský řetězec **nerozložitelný**, pokud se z každého stavu $i \in S$ mohu dostat do libovolného stavu $j \in S$ v konečně mnoha krocích

Existuje-li stacionární rozdělení π, pak je **jednoznačné** a pro všechna $i, j \in S$:
$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \pi_j$
Pokud stacionární rozdělení neexistuje, pak pro všechna $i, j \in S$:
$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = 0$

Množina stavů S **končená** $\Rightarrow$ stacionární rozdělení **existuje**

Pokud rozdělení π splňuje **detailní rovnováhu**: $\forall i \neq j \in S$:

$$\pi_j \mathbf{Q}_{ji} = \pi_i \mathbf{Q}_{ij}$$

pak je stacionárním rozdělením