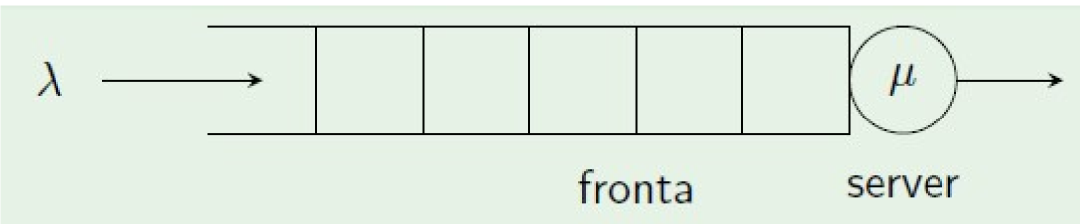
MI-SPOL-20

Systémy hromadné obsluhy a jejich limitní vlastnosti. Souvislost s Markovskými řetězci se spojitým časem.

Exponenciální závody



Frontě běží exponenciální hodiny T (časy příchodu požadavků), serveru běží exponenciální hodiny S (zpracování požadavku) -- **exponenciální závody**

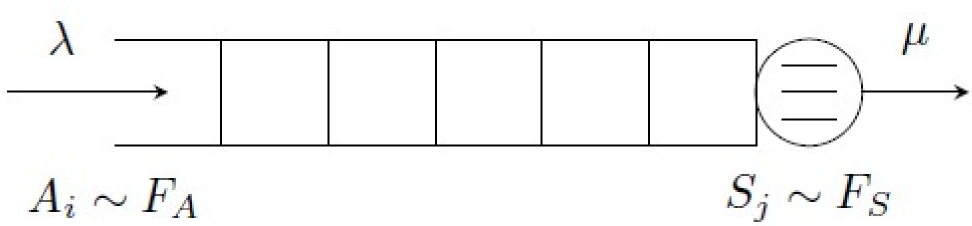
Pokud $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ a $S \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ **nezávislé**, pak $Z := \min\{T, S\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda + \mu)$

Vítez exponenciálních závodů: Pokud $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ a $S \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ **nezávislé**, pak

$$P(T < S) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Proces $\{X_t | t \geq 0\}$ je **markovský řetězec se spojitým časem**, právě když mezi jednotlivými stavy probíhají exponenciální závody

Model hromadné obsluhy



- λ: **intenzita příchodů**
- A_i: náhodný čas mezi příchodem (i-1)-ího a i-tého zákazníka

$A_i \sim F_A$
$EA_i = 1/\lambda$

- μ: **intenzita obsluhy jednoho serveru**
- S_j: čas obsluhy jednoho zákazníka
  $S_j \sim F_S$
  $ES_j = 1/\mu$
- Veličiny $A_1, A_2, ..., S_1, S_2, ...$ **nezávislé**
- Server obsahuje c nezávislých obslužných míst $\Rightarrow$ intenzita obsluhy je nejvýše $c\mu$

Proces hromadné obsluhy

Proces hromadné obsluhy: proces $\mathbf{X} = \{X_t | t \geq 0\}$, který zaznamenává **počet zákazníků v systému** hromadné obsluhy v čase t

Ukazatel $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$:

- $\rho > 1$: počet zákazníků v systému poroste nad všechny meze
- $\rho < 1$: ustálení sysétmu n stabilním rovnovážném rozdělení

Kendallova notace: $A|S|c|K|N|D$
A - rozdělení časů příchodu F_A
S - rozdělení časů obsluhy F_S
c - počet obslužných míst
K - kapacita systému (default ∞)
N - velikost populace (default ∞)
D - typ obsluhy (default FIFO)

Značení rozdělení A a S:

- $M, M(\lambda)$ - exponenciální rozdělení (markovské)
- $D, D(d)$ - degenerované rozdělení, soustředěné v hodnotě d
- G - obecné rozdělení

Systém $M|M|1$

Proces zrodu a zániku s parametry:

$\lambda_n = \lambda, n \in \mathbb{N}_0$
$\mu_m = \mu, m \in \mathbb{N}$

Matice intenzit:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Stacionární rozdělení:

- Pokud $\rho < 1$, existuje jednoznačné stacionární rozdělení π a pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$P(X_t = n) \to \pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

- Pokud $\rho \geq 1$, stacionární rozdělení neexistuje a pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$P(X_t = n) \to 0$$

Stacionární vlastnosti:
Předpoklad: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ a systém je ve stacionárním stavu.

- **Střední počet zákazníků v systému:** $EN := E_\pi X_t$
  Platí, že

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- $EN = EN_s + EN_f$ *(server + fronta)*
- $EN_s = 1 - \pi_0 = \rho$
- $EN_f = EN - EN_s = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

Doba čekání ve frontě: W

- Zákazník **nečeká,** pouze pokud je **server prázdný:**
  $P(W=0) = P(X_t = 0) = \pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
- V době příchodu je v **systému** $n > 0$ **zákazníků:**
  W je součet n exponenciálně rozdělených nezávislých veličin s parametrem μ

$$(W|W>0) \sim \mathrm{Exp}(\mu - \lambda) \Rightarrow P(W > s) = \rho e^{-(\mu-\lambda)s}$$

Systém $M|M|\infty$

Nekonečně obslužných míst -- každý zákazník **okamžitě obsloužen**

Proces zrodu a zániku s parametry:
$\mathbf{Q}_{n,n+1} = \lambda_n \equiv \lambda$
$\mathbf{Q}_{n,n-1} = \mu_n = n\mu$

Matice intenzit:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Podmínka detailní rovnováhy pro $n \in \mathbb{N}$:
$n\mu\pi_n = \lambda\pi_{n-1}$
$\Rightarrow \pi_n = \frac{\lambda}{n\mu}\pi_{n-1} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0$

Stacionární rozdělení: Poissonovo s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$:

$$P_\pi(X_t = n) = \pi_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Systém $M|M|c$

Server má $1 < c < \infty$ obslužných míst -- pokud všechna **obsazena,** zákazník jde do **fronty**

Proces zrodu a zániku s intenzitami:
$\mathbf{Q}_{n,n+1} = \lambda_n \equiv \lambda$
$\mathbf{Q}_{n,n-1} = \mu_n = \min\{c, n\} \cdot \mu$

Matice intenzit:

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\
0 & 0 & 0 & c\mu & -(\lambda+c\mu) & \lambda & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & c\mu & -(\lambda+c\mu) & \lambda & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

Stacionární rozdělení:

Pokud $\rho < 1$:

$$
\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 & n \leq c \\ \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n \pi_0 & n > c \end{cases}
$$

Jinak psáno:

$$
\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{\Pi_{k=1}^n \min\{k, c\}} \pi_0
$$

Pokud $\rho \geq 1$: stacionární rozdělení neexistuje

Proces odchodů:

- Pokud $M|M|c$ ce stacionárním stavu ($\lambda < c\mu$), pak proces odchodů (**počet obsloužených do času** t) je Poissonův proces s intenzitou λ

Littleho věta

Buď $\{X_t | t \geq 0\}$ striktně stacionární proces hromadné obsluhy. Buďte dále:

- EN - střední počet zákazníků v systému
- ET - střední doba strávená zákazníkem v systému
- λ - intenzita příchodů

Jsou-li všechny střední hodnoty konečné, pak

$$
EN = \lambda \cdot ET
$$

Systém $G|G|1$

Obecné rozdělení příchodů i obsluhy

Doba strávená k-tým zákazníkem v systému:
$T_k = W_k + S_k$,
kde W_k - doba čekání ve frontě, S_k - doba obsluhy

Littleho věta:
Celý sysétm: $EN = \lambda ET_k = \lambda EW_k + \lambda ES_k$
Samotná fronta: $EN_f = \lambda EW_k$

Protože $EN = EN_f + (1 - \pi_0)$:

$$\pi_0 = 1 - (EN - EN_f) = 1 - \lambda(ET_k - EW_k) = 1 - \lambda ES_k = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Dva servery $M|M|1$ v sérii

Stav systému: vektor $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_0^2$ (počet zákazníků na prvním a druhém serveru)

Ve stacionárním stavu:

$$P_\pi(X_t^1 = n_1) = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right)$$

$$P_\pi(X_t^2 = n_2) = \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^{n_2} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)$$

Pro servery $M|M|1$ v rovnovážnném stavu platí, že **proces odchodů** a **proces zaznamenávající počet zákazníků** v sysétmu jsou **nezávislé**
Sdružené stacionární rozdělení potom je:

$$P(X_t^1 = n_1, X_t^2 = n_2) = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^{n_2} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)$$