MI-SPOL-3

Funkce více proměnných: gradient, Hessián, definitnost matic, extrémy funkcí více proměnných bez omezení a s rovnostními omezeními.

Norma na vektorovém prostoru V (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) je zobrazení $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \alpha$:

- $||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$
- $||\alpha \mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||$
- $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ (trojúhelníková nerovnost)

Příklad:

- Eukleidovská norma: $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
- Maximová: $||\mathbf{x}||_\infty = \max\{|x_i|\}, i \in \{1, ..., n\}$
- Součtová: $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Reálná funkce více reálných proměnných je zobrazení $D_f \to \mathbb{R}$ pro $D_f \subset \mathbb{R}^n$

- D_f je definiční obor
- $f(D_f)$ je obor hodnot

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$ je **δ-okolí bodu $\mathbf{x}$** množina $H_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x} - \mathbf{b}|| < \delta\}$

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **hromadným bodem M**, pokud pro všechna $r > 0$ platí $H_r(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\} \cap M \neq \emptyset$
Bod, který není hromadný, je **izolovaný**

Funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$, má **limitu** $L \in \bar{\mathbb{R}}$ **v hromadném bodě $\mathbf{b}$ množiny** D_f, pokud:

$$\forall H(L) \exists H(\mathbf{b}) \forall x \in D_f \setminus \{\mathbf{b}\} : \mathbf{x} \in H(\mathbf{b}) \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in H(L)$$

Značení: $\lim_{x \to b} f(x) = L$

Funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$ je **spojitá v bodě** $x_0 \in D_f$, pokud $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f :$ $x \in H_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in H_\epsilon(f(x_0))$

NEBO: pokud pro všechny neizolované body $x_0 \in D_f$ platí: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Funkce je spojitá, pokud je spojitá ve všech bodech.

Reálná funkce f má v bodě $\mathbf{b} \in D_f$:

- **lokální minimum**, pokud $\exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in H_\delta(\mathbf{b}), f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{b})$
- **ostré lokální minimum**, pokud $\exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in H_\delta(\mathbf{b}) \setminus \{\mathbf{b}\}, f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{b})$
- **globální minimum**, pokud $\forall \mathbf{x} \in D_f, f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{b})$

Spojitá funkce obsahuje globální minimum i maximum, pokud je D_f:

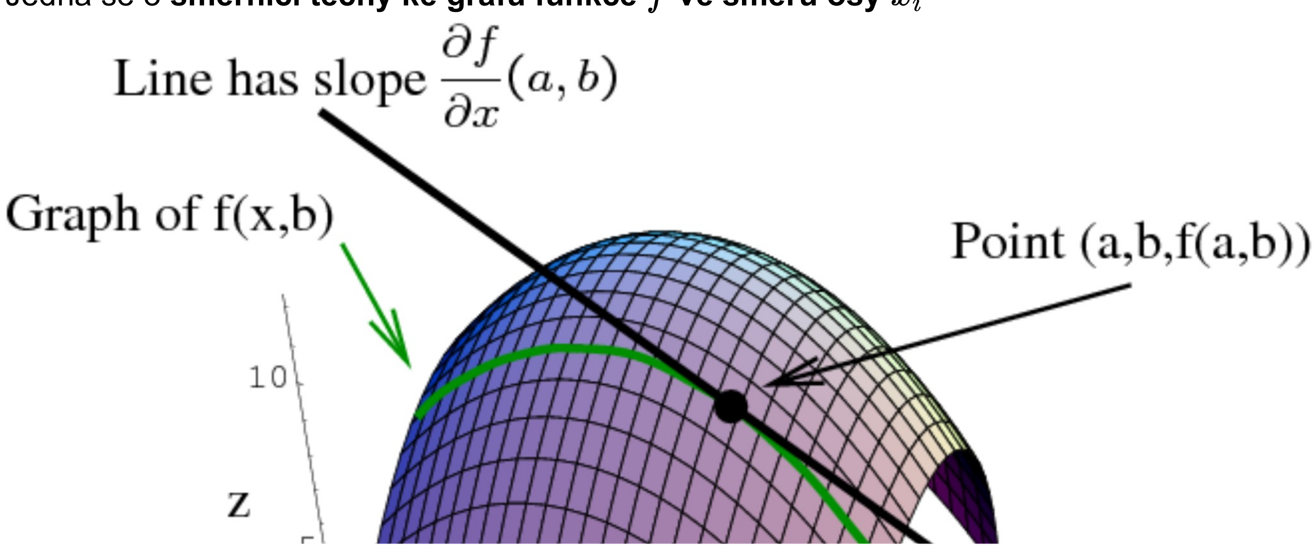
- omezená (je podmnožinou otevřené koule)
- a uzavřená (obsahuje i svou hranici)

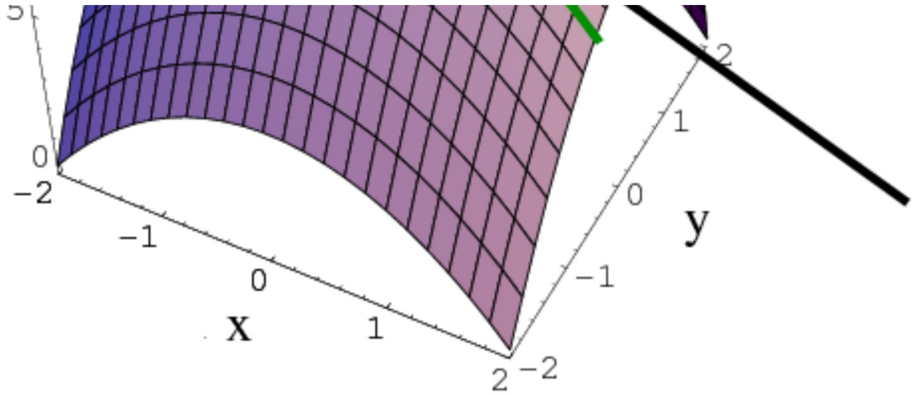
Parciální derivace funkce f ve směru x_i v bodě $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in D_f$ takovém, že $\exists H(\mathbf{b}) \subset D_f$, je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(b_1, b_2, ..., b_i + h, ..., b_n) - f(b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_n)}{h} = L$$

Značení: $\frac{\delta f}{\delta x_i}(\mathbf{b}) = L$

Jedná se o **směrnici tečny ke grafu funkce f ve směru osy x_i**





Gradient funkce f v bodě $b \in D_f$ je vektor

$$\nabla f(\mathbf{b}) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(\mathbf{b}) \frac{\delta f}{\delta x_2}(\mathbf{b}), ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}(\mathbf{b}) \right)$$

Význam: ukazuje směr (v D_f) nejvyššího růstu funkce

Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $||\mathbf{v}|| = 1$. **Derivace funkce f ve směru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{b}$** $\in D_f$ takovém, že $\exists H(\mathbf{b}) \subset D_f$, je

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{b}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{b} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{b})}{h}$$

Význam: **směrnice tečny ke grafu funkce f ve směru $\mathbf{v}$**

Pokud v bodě $\mathbf{b}$ existuje gradient, pak platí $\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{b}) = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}$

Nutná podmínka lokálního extrému: Nechť má funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{b}$ parciální derivaci podle i-té proměnné. Pokud f má v bodě $\mathbf{b}$ lokální extrém, potom $\frac{\delta f}{\delta x_i}(\mathbf{b}) = 0$
Důsledek: pokud existuje gradient funkce f v bodě $\mathbf{b}$, pak existence lokálního extrému implikuje $\nabla f(\mathbf{b}) = 0$

Body $\mathbf{b}$ splňující $\nabla f(\mathbf{b}) = 0$ se nazývají **stacionární**.

Stacionární body a body, kde gradient neexistuje, se nazývají **kritické body**.

Parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(\mathbf{b}) = \frac{\delta}{\delta x_j}(\frac{\delta f}{\delta x_i}(\mathbf{b}))$$

Pokud všechny druhé parciální derivace v bodě $\mathbf{b}$ existují: **Hessova matice**

$$\nabla^2 f(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta^2 x_1}(\mathbf{b}) & ... & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_n}(\mathbf{b}) \\ ... & & ... \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_1}(\mathbf{b}) & ... & \frac{\delta^2 f}{\delta^2 x_n}(\mathbf{b}) \end{pmatrix}$$

Pokud existuje $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\mathbf{b})$ a funkce $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ je v $\mathbf{b}$ spojitá, potom $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\mathbf{b})$ existuje a $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\mathbf{b}) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\mathbf{b})$

Definitnost matic:

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je

- **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$
- **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$
- **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$
- **indefinitní**, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní: právě když $\exists x, y \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ a $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$

Symetrické matice:

- PSD: všechna vlastní čísla nezáporná
- PD: všechna vlastní čísla kladná
- NSD: všechna vlastní čísla nekladná
- ND: všechna vlastní čísla záporná
- indefinitní: alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo

Sylvestrovo kritérium určení definitnosti:

V *symetrické* matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ se nachází matice $A_1, A_2, ..., A_n$, kde $A_k \in \mathbb{R}^{k,k}$ je čtvercová matice v levém horním rohu matice $\mathbf{A}$. Potom:

- Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ determinant všech matic $A_1, ..., A_n$ kladný
- Matice $\mathbf{A}$ je negativně definitní $\Leftrightarrow$ determinant matic A_k záporný pro lichá k a kladný pro sudá

Pokud má čtvercová matice na diagonále dva prvky s různým znaménkem, pak je **indefinitní**

Stacionární bod, který není minimem ani maximem, na jehož okolí má f spojité všechny parciální derivace, je **sedlový bod**

Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu:
$\mathbf{b} \in D_f$ stacionární bod funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$
Existuje okolí $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ t.ž. f má na něm spojité všechny druhé parciální derivace, potom:

- pokud $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ pozitivně definitní, pak $\mathbf{b}$ je ostré lokální minimum
- pokud $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ negativně definitní, pak $\mathbf{b}$ je ostré lokální maximum
- pokud $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ indefinitní, pak $\mathbf{b}$ je sedlový bod

Nutná podmínka existence lokálního extrému:

- pokud $\mathbf{b}$ je lokální minimum, pak $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ je pozitivně definitní
- pokud $\mathbf{b}$ je lokální maximum, pak $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ je negativně definitní

Funkce se spojitými druhými parciálními derivacemi **konvexní**, právě když je její Hessián PSD ve všech bodech vnitřku D_f

Kuchařka na hledání extrémů

- najít podezřelé (kritické) body (body, kde neexistuje aspoň jedna parciální derivace, nebo kde gradient je 0)
- najít Hessián v podezřelém bodě -- pokud je:
  - PD, pak bod je ostré lokální minimum
  - ND, pak bod je ostré lokální maximum
  - IND, pak je sedlovým bodem

Vázané extrémy s rovnostními omezeními

Úloha vázaného extrému s rovnostními omezeními je minimalizování $f(x)$ za podmínek $g_j(x) = 0, j \in \hat{m}$, kde f, g jsou funkce $D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$

Přípustná řešení:
$M = \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall j \in \hat{m})(g_j(x) = 0)\}$
(množina řešení, kde jsou splněny podmínky)

Funkce $L : M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definovaná jako

$$L(x;\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

je **Lagrangeova funkce**.
Koeficienty $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ jsou **Lagrangeovy multiplikátory**

Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima při rovnostních omezeních

Nechť $f, g_j, j \in \hat{m}$ mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině M. Pokud dvojice $(x^*, \lambda^*) \in M \times \mathbb{R}^m$ splňuje následující podmínky, potom je x^* bodem ostrého lokálního minima
Podmínky:

- *(optimalita)* $\forall i, \frac{\delta L}{\delta x_i}(x^*, \lambda^*) = 0$ (nulový gradient Lagrangeovy funkce podle x)
- *(podmínka 2. řádu)* pro každý vektor $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$ splňující
  $z^T \nabla g_j(x^*) = 0 (\forall j \in \hat{m})$
  platí
  $z^T \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*) z > 0$ (PD Hessián za určitých podmínek).