# MI-SPOL-14

**Přímé ortogonální a hyperkubické propojovací sítě paralelních počítačů (definice, vlastnosti, vnořování).**

## Teorie grafů

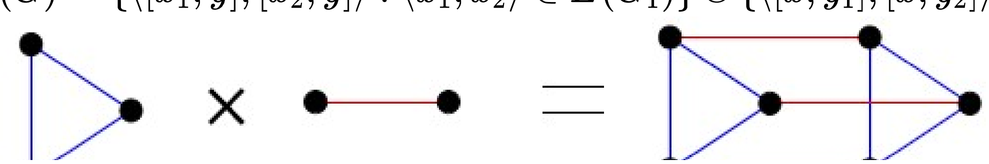
*(pouze jednoduché souvislé grafy bez smyček)*

- **Množina uzlů a hran grafu $G$:** $V(G), E(G)$
- **Velikost** grafu $G$: $N = |V(G)|$
- **Sousední uzly** $u$ a $v$ = **hrana** $\langle u, v \rangle$
- **Stupeň uzlu** $u$: $\deg_G(u) = \#\text{sousedů uzlu } u$
- **Množina stupňů grafu** $G$: $\deg(G) = \{deg_G(u) : u \in V(G)\}$
- **Maximální stupeň grafu** $G$: $\Delta(G) = \max(\deg(G))$
- **Minimální stupeň grafu** $G$: $\delta(G) = \min(\deg(G))$
- $k$**-regulární graf** $G$: $\Delta(G) = \delta(G) = k$

**Topologie:**

- **Tolopogie $G_n$:** množina grafů (= instancí topologie), jejichž velikost a struktura je definovaná parametrem $n$ (= velikostí dimenze).
  Může být **vícedimenzionální.**
- **Hierarchicky rekurzivní topologie:** instance menších dimenzí jsou podgrafy instancí větších dimenzí
- **Inkrementálně škálovatelná topologie:** definovaná $\forall n$
- **Částečne škálovatelná topologie:** definovaná pro některá, ale $\infty$ mnoho $n$
- **Řídká topologie:** $|E(G_n)| = O(|V(G_n)|)$ (stupně uzlů omezeny konstantou)
- **Hustá topologie:** $|E(G_n)| = \omega(|V(G_n)|)$ (stupně uzlů roustoucí funkcí $n$)

**Kartézský součin:** $G = G_1 \times G_2$
$V(G) = \{[x, y] : x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$
$E(G) = \{\langle [x_1, y], [x_2, y] \rangle : \langle x_1, x_2 \rangle \in E(G_1)\} \cup \{\langle [x, y_1], [x, y_2] \rangle : \langle y_1, y_2 \rangle \in E(G_2)\}$



**Komutativní** a **asociativní**
Značení: $G \times G = G^2$

**Uzlově symetrický graf:**
$\forall u_1, u_2 \in V(G) \exists$ automorfismus $f$ t.ž. $f(u_1) = u_2$
$G_1, G_2$ uzlově symetrické $\Rightarrow G = G_1 \times G_2$ také uzlově symetrický
Každý uzlově symetrický graf je regulární
Kružnice a klika uzlově symetrické

**Vzdálenosti a průměr:**

- **Délka cesty** $P(u, v)$: $\operatorname{len}(P(u, v)) = \#$ hran v $P(u, v)$
- **Vzdálenost uzlů** $u, v$: $\operatorname{dist}_G(u, v) =$ délka nejkratší $P(u, v)$
- **Průměrná vzdálenost** v $N$-uzlovém $G$: $\overline{\operatorname{dist}}(G) = \frac{1}{N-1} \sum_{u,v:u \neq v} \operatorname{dist}_G(u, v)$
- **Excentricita uzlu** $u$: $\operatorname{exc}(u) = \max_{v \in V(G)} \operatorname{dist}_G(u, v)$ *(vzdálenost od nejvzdálenějšího vrcholu)*
- **Průměr grafu** $G$: $\operatorname{diam}(G) = \max_{u,v} \operatorname{dist}_G(u, v) = \max_u \operatorname{exc}(u)$ *(největší vzdálenost mezi dvěma vrcholy)*
- **Poloměr grafu** $G$: $r(G) = \min_u \operatorname{exc}(u)$
- **Uzlově disjunktní cesty:** $V(P_1(u, v)) \cap V(P_2(x, y)) = \{u, v\} \cap \{x, y\}$
- **Hranově disjunktní cesty:** $E(P_1(u, v)) \cap E(P_2(x, y)) = \emptyset$

**Uzlový (hranový) řez:** Množina uzlů (hran), jejichž odebráním se rozpojí graf
**Uzlová (hranová) souvislost grafu** $G$: $\kappa(G)(\lambda(G)) =$ velikost minimálního uzlového (hranového) řezu

**Hranová bisekční šířka:** $\operatorname{bw}_e(G)$ -- velikost nejmenšího hranového řezu **na 2 poloviny**

## Požadavky na propojovací sítě

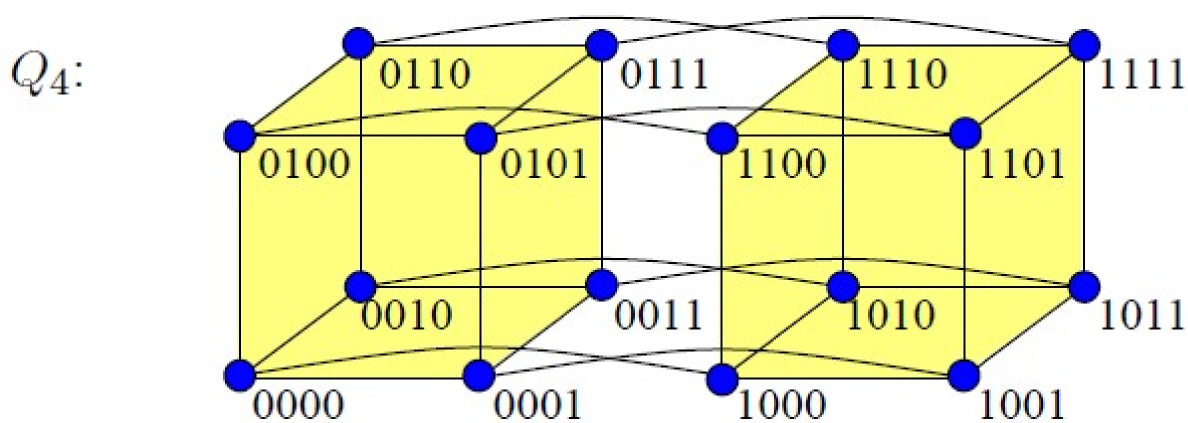
- **Konstantní stupěň uzlu:** univerzální a levné směrovače, řídká topologie (malá souvislost, velké vzdálenosti)
- **Malý průměr a malá průměrná vzdálenost:** snižuje komunikační zpoždění
  Spodní mez průměrů $k$ uzlové řídké sítě: $\Omega(\log N)$
- **Uzlová symetrie a hierarchická rekurzivita:** snazší návrh algoritmů (nezáleží, kde algoritmus začne), částečná škálovatelnost, induktivní návrh

- **Vysoká souvislost:** redundantní cesty pro případ výpadku, dělení paketů a posílání paralelními cestami
- **Vnořitelnost do jiných topologií:** simulace jiné topologie
- **Podpora pro směrování a kolektivní komunikační operace:** permutačín směrování, operace jeden-všem, všichni-všem

## Základní přímé propojovací sítě

- **Ortogonální:** (konstruktor = kartézský součin)
  - Binární hyperkrychle
  - Mřížky
  - Toroidy
- **Hyperkubické**: (odvozené od hyperkrychle rozvinutím každého uzlu hyperkrychle do více uzlů)
  - Motýlci

## Binární hyperkrychle dimenze $n$ $(Q_n)$



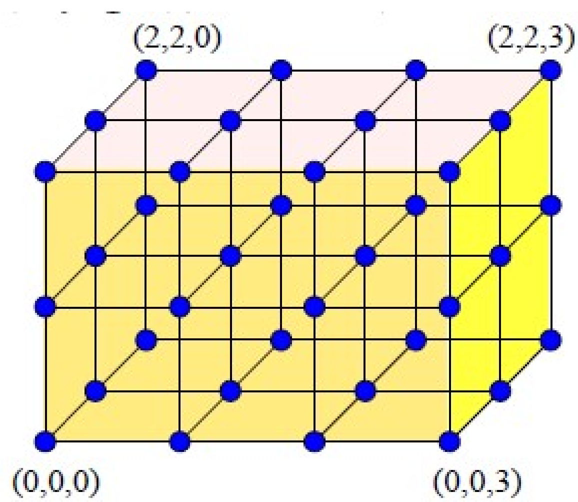

$V(Q_n) = \mathcal{B}^n$, $|V(Q_n)| = 2^n$
$E(Q_n) = \{x, \mathrm{neg}_i(x) : x \in V(Q_n), 0 \le i < n\}$, $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$
$\mathrm{diam}(Q_n) = n$
$\deg(Q_n) = \{n\}$
$\mathrm{bw}_e(Q_n) = 2^{n-1}$

- **regulární** graf

- logaritmický stupeň uzlů $\Rightarrow$ **není řídká** (škálování pouze po mocninách dvojky -- v praxi hyperkrychle vzácné)
- **hierarchicky rekurzivní:** $Q_n \equiv Q_p \times Q_{n-p} \equiv Q_p \times Q_q \times Q_{n-p-q} \equiv Q_1^n$
  - Podkrychle: $s_{n-1}...s_1s_0$, kde $s_i \in \{0, 1, *\}$ ($*$ -- neutrální symbol) *(termy v booleovské algebře)*
- **uzlová symetrie:** $Q_n \equiv Q_1^n$
- **automorfismy:** $2^n \times n!$
  - **přeložení** $u \to v$**:** $\forall x \in V(Q_n) : x \to x \oplus_2 (u \oplus_2 v)$
  - **permutace (přejmenování) dimenzí**
- optimální souvislost: $\lambda(Q_n) = \kappa(Q_n) = n$
- největší možná bisekční šířka -- vyvážený bipartitní graf
- $\#$ uzlů ve vzdálenosti $i$ je $\binom{n}{i} \Rightarrow \bar{\text{dist}}(Q_n) = \lceil n/2 \rceil$
- $k!$ různých nejkratších cest mezi uzly ve vzdálenosti $k$
- **směrování:** testování bitů v adresách zprava doleva

## $n$-rozměrná mřížka rozměrů $z_1, z_2, ..., z_n : M(z_1, z_2, ..., z_n)$

mřížka $M(3, 3, 4)$:




$V(M(...)) = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : 0 \leq a_i \leq z_i - 1 \forall i \in \{1, ..., n\}\}$ *(vrchol má celočíselné souřadnice)*
$|V(M(...))| = \Pi_{i=1}^n z_i$ *(produkt rozměrů)*

$E(M(...)) = \{\langle(..., a_i, ...), (..., a_i + 1, ...)\rangle : 0 \leq a_i \leq z_i - 2\}$
*(hrana mezi vrcholy lišící se v jedné souřadnici o 1)*
$|E(M(...))| = \sum_{i=1}^n (z_i - 1)\Pi_{j=1, j\neq i}^n z_j$

$\text{diam}(M(...)) = \sum_{i=1}^n (z_i - 1) = \Omega(\sqrt[n]{|V(M(...))|})$

*(Vzdálenost po 1 rozměru: rozměr-1. Ve více rozměrech: suma(rozměr-1))*

$\deg(M(...)) = \{n, ..., n + j\}, j = |\{z_i : z_i > 2\}|$
*($n$ je v rohu, $j$ je počet rozměrů větších než 2)*

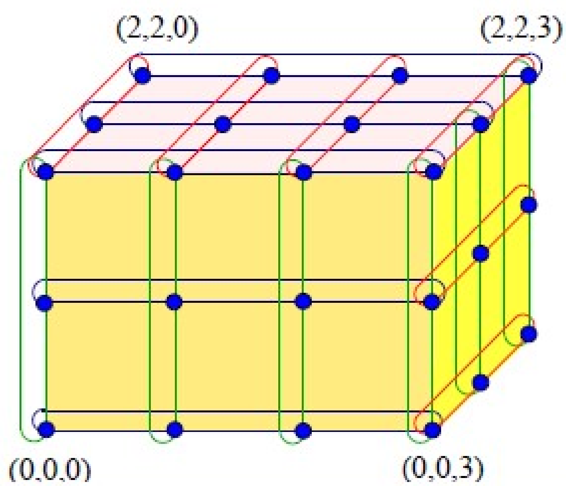
$\mathrm{bw}_e(M(...)) = (\Pi_{i=1}^{n} z_i)/\max_i z_i$ pro $\max_i z_i$ sudé, $\Omega((\Pi_{i=1}^{n} z_i)/\max_i z_i)$ pro liché

- *(předpoklad, že dimenze $n$ je konstantní)*
- $M(k, k, ..., k)$: **$k$-ární $n$-krychle**
- **není regulární** ani uzlově symetrická
- **velký průměr**
- **počet uzlů ve vzdálenosti $i$** (2D mřížka): od $i + 1$ do $4i$
- **hierarchicky rekurzivní:**
  - $M(z_1, z_2, ..., z_n) \equiv M(z_1) \times M(z_2) \times ... \times M(z_n)$
- optimální souvislost
- přesná hodnota bisekční šířky pro obecné $n$ je kombinatorickým problémem
- **směrování:** dimenzně uspořádané (= **XY** a **XYZ** směrování)
- vždy bipartitní

## $n$-rozměrný toroid dimenzí $z_1, z_2, ..., z_n : K(z_1, z_2, ..., z_n)$

**Toroid:** zabalená mřížka = $n$-rozměrná kružnice

toroid $K(3, 3, 4)$:




$V(K(...)) = V(M(...))$ *(vrchol má celočíselné souřadnice)*

$E(K(...)) = \{\langle(..., a_i, ...), (..., a_i \oplus_{z_i} 1, ...)\rangle : 0 \leq a_i \leq z_i\}$
*(hrana mezi vrcholy lišící se v jedné souřadnici o modulo 1)*

$|E(K(...))| = n \times \Pi_{i=1}^{n} z_i$

$\text{diam}(K(...)) = \sum_{i=1}^{n} \lfloor z_i/2 \rfloor$
*(Vzdálenost po 1 rozměru: maximálně rozměr/2.)*

$\deg(K(...)) = \{2n\}$

$\text{bw}_e(K(...)) = 2\text{bw}_e(M...))$

- $K(k, k, ..., k)$: $k$-ární $n$-toroid
- **regulární**
- **uzlově symetrický** (automorfismy = přeložení)
- **hierarchicky rekurzivní:**
  - $K(z_1, z_2, ..., z_n) \equiv K(z_1) \times K(z_2) \times ... \times K(z_n)$
  - Na rozdíl od mřížek nelze rozdělit na stejnorozměrné podtoroidy
- Bipartitní $\Leftrightarrow$ všechny délky stran jsou sudé

## Porovnání hyperkrychlí, mřížek a toroidů

- $M(2, 2, ..., 2) \equiv Q_n$
- $n$-rozměrné mřížky a toroidy jsou zobecněním $Q_n$
- Pro určitá $k, n, k < n$, $k$-rozměrná mřížka/toroid může být podgrafem $Q_n$
- $K(4, 4) \equiv Q_4$

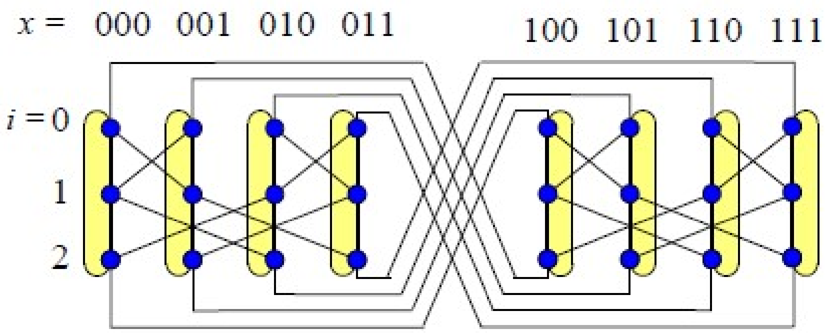
## Hyperkubické sítě

Grafy odvozené od hyperkrychle rozvinutím všech uzlů hyperkrychle do více uzlů
**Spolčené vlastnosti:**

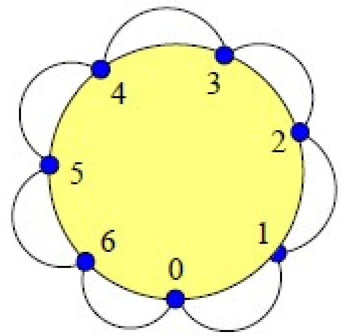
- $O(1)$ stupeň
- $O(\log N)$ průměr
- škálovatelné hůř než hyperkrychle
- bisekční šířka $\Omega(N/\log N)$

**Normální hyperkubický algoritmus:** v každém kroku algoritmu použity pouze hrany jedné dimenze hyperkrychle, v po sobě jdoucích krocích používány po sobě jdoucí dimenze

## Zabalený motýlek dimenze $n$: $wBF_n$




$wBF_3$




$wBF_7$

$V(wBF_n) = \{(i,x) : 0 \leq i < n \wedge x \in \mathcal{B}^n\}$ *(souřadnice v kružnici a v krychli)*
$|V(wBF_n)| = n2^n$ *(kružnice x krychle)*

$E(wBF_n) = \{\langle(i,x),(i \oplus_n 1, x)\rangle, \langle(i,x),(i \oplus_n 1, \mathrm{neg}_i(x))\rangle : (i,x) \in V(wBF_n)\}$
*(hrana mezi vrcholy lišící se v krychlové souřadnici o 1 (mod n), případně ještě o jeden bit krychlové souřadnice)*
$|E(wBF_n)| = n2^{n+1}$
*($n$ hran v kružnici, $2^n$ kružnic)*

$\mathrm{diam}(wBF_n) = n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
*(Vzdálenost v krychli a pak v kružnici)*

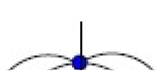
$\deg(wBF_n) = \{4\}$

$\mathrm{bw}_e(wBF_n) = 2^n$

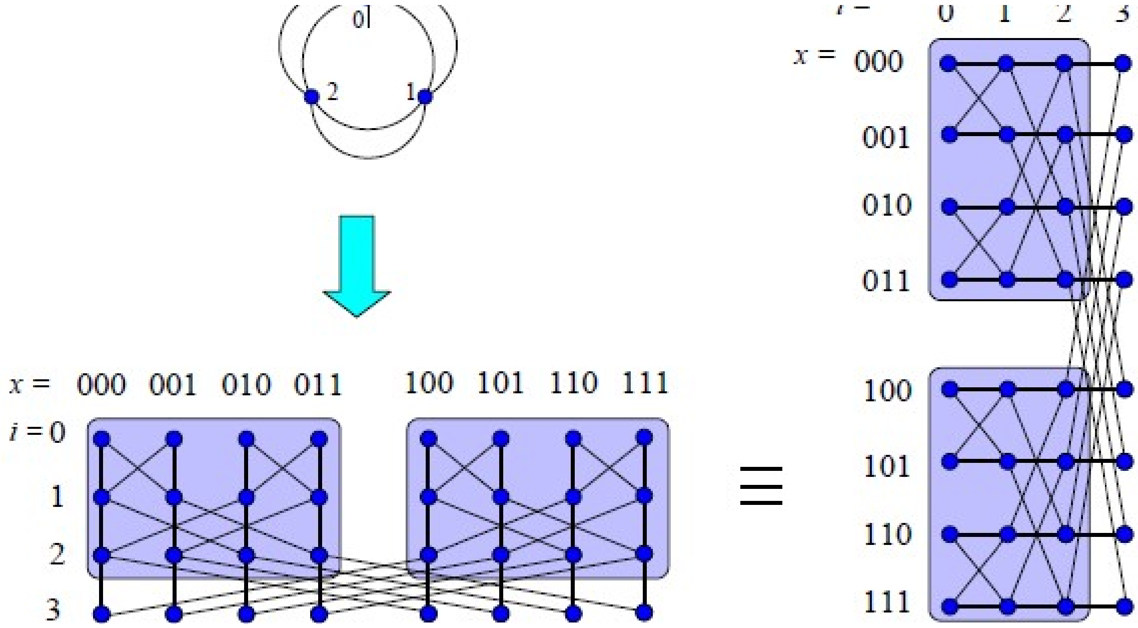
- **řídký** grf s optimálním průměren
- **uzlově symetrický**
- **není** hierarchicky rekurzivní
- vyvážený bipartitní $\Leftrightarrow$ $n$ sudé

## Obyčejný motýlek dimenze $n$: $oBF_n$

Otevřením kružnic vznikl další vrchol a kružnicová souřadnice tak má $n$ hran a $n+1$ vrcholů
Otevřená kružnice = 1D mřížka



$oBF_3$:




$V(oBF_n) = \{(i,x) : 0 \leq i < n \wedge x \in \mathcal{B}^n\}$ *(souřadnice v otevřené kružnici a v krychli)*
$|V(oBF_n)| = (n+1)2^n$ *(kružnice x krychle, kružnice se bere jako n+1)*

$E(oBF_n) = \{\langle (i,x),(i+1,x)\rangle, \langle (i,x),(i+1,\mathrm{neg}_i(x))\rangle : i < n\}$
*(hrana mezi vrcholy lišící se v krychlové souřadnici o 1, případně ještě o jeden bit krychlové souřadnice)*
$|E(oBF_n)| = n2^{n+1}$
*($n$ hran v otevřené kružnici, $2^n$ kružnic)*

$\mathrm{diam}(oBF_n) = 2n$
*(Vzdálenost v krychli a pak v otevřené kružnici)*

$\mathrm{deg}(oBF_n) = \{2,4\}$

$\mathrm{bw}_e(oBF_n) = 2^n$

- uzly organizovány do **sloupců (stupňů)** $0 \leq i \leq n$ a **řad** $0 \leq x \leq 2^n - 1$
- dva druhy hran: **přímé** a **křížové (hyperkubické)**
- **není** uzlově symetrický ani regulární
- **hierarchicky rekurzivní:** $oBF_n$ obsahuje dva $oBF_{n-1}$
- bipartitní
- $\forall x, y$ existuje **jediná nejkratší cesta** mezi $(0,x)$ a $(n,y)$

## Vnořování

**Vnoření** $G \xrightarrow{\text{emb}} H$ zdrojového grafu $G = (V(G), E(G))$ do cílové sítě $H = (V(H), E(H))$ je **dvojice zobrazení** $(\varphi, \xi)$, kde
$\varphi : V(G) \to V(H)$ a $\xi : E(G) \to \mathcal{P}(H)$
*($\mathcal{P}(H) =$ množina všech **cest** sítě $H$)*

**Měřítka vnoření:**

- **Maximální zatížení cílového uzlu:** $\mathrm{load}(\varphi, \xi) = \max_{v \in V(H)} |\{u \in V(G) : \varphi(u) = v\}|$ *(kolik se maximálně zobrazí vrcholů na cílový vrchol)*
- **Expanze vnoření:** $\mathrm{vexp}(\varphi, \xi) = \frac{|V(H)|}{|V(G)|}$
- **Maximální dilatace zdrojových hran v cílové síti:** $\mathrm{dil}(\varphi, \xi) = \max_{e_1 \in E(G)} \mathrm{len}(\xi(e_1))$ *(maximální délka obrazu hrany -- na kolik maximálně hran se zobrazí jedna hrana zdroje)*
Pokud $|V(G)| = |V(H)|$ a $\mathrm{load}(\varphi, \xi) = 1$, pak $\mathrm{dil}(\varphi, \xi) \geq \lceil \mathrm{diam}(H)/\mathrm{diam}(G) \rceil$
- **Maximální zahlcení cílové hrany:** $\mathrm{ecng}(\varphi, \xi) = \max_{e_2 \in E(H)} |\{e_1 \in E(G) : e_2 \subseteq \xi(e_1)\}|$ *(kolik maximálně hran je zobrazeno na jednu hranu cíle)*

Grafy $G$ a $H$ jsou **kvaziizomaterické**, pokud existují vnotření $G \xrightarrow{\text{emb}} H$ i $H \xrightarrow{\text{emb}} G$ s konstantními hodnotami měřítek

$H$ **simuluje** $G$ **se zpomalením** $h$, pokud jeden krok výpočtu na $G$ může být simulován na $H$ v $O(h)$ krocích

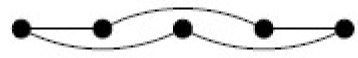
$G$ **a** $H$ **jsou výpočetně ekvivalentní sítě**, pokud $G$ dokáže simulovat $H$ s konstantním zpomalením a naopak

**Problém vnoření:**

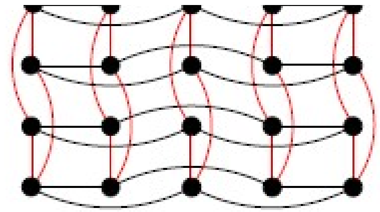
- Problém existence libobolného vnoření stromu $S$ do $Q_n$, kde $n$ je dáno nebo $n = \log |V(S)|$ s dil $=$ ecng $= 1$, je **NP-úplný**
- Dán graf $G$ a celá čísla $k, n$. Problém existence vnoření $G$ do $Q_n$ (nebo $n$-rozměrné mřížky) s dilatací $k$ je **NP-úplný**

**Hyperkrychle** simuluje optimálně většinu topologií
Je nativní topologií pro realizaci výpočtu **Rozděl-a-polovinu-nech**

$M(z_1, z_2, ..., z_n)$ a $K(z_1, z_2, ..., z_n)$ jsou **kvaziizometrické** $\Rightarrow$ **výpočetně ekvivalentní.**
$M \subset K \Rightarrow K$ simuluje $M$ bez zpomalení
Existuje $K \xrightarrow{emb} M$ s load = 1 a dil = ecng = 2: kartézská dekompozice



(a) $K(5) \xrightarrow{\text{emb}} M(5)$.

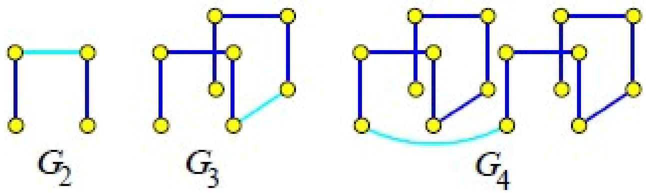


(b) $K(4,5) \xrightarrow{\text{emb}} M(4,5)$.

**Vnoření cest a kružnic do hyperkrychle:**

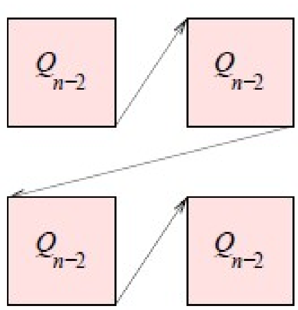
Binární zrcadlový Grayův kód:

$G_1 = \{0, 1\}$, $G_n = \{0G_{n-1}, 1G^R_{n-1}\}$

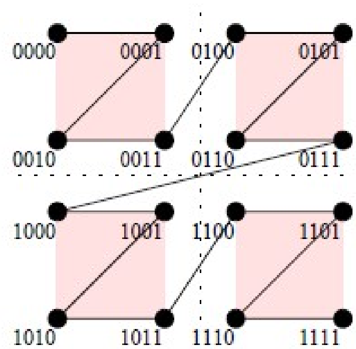



**Vnoření hyperkrychle do mřížky/toroidu:**

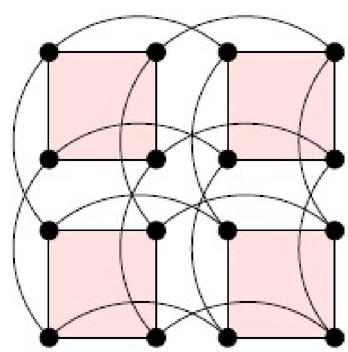
- Dolní mez na dilataci s load $= 1$ je $2^k/k$
- **Mortonova křivka:** spojení uzlů v lexikografickém pořadí při dělení střídavě podle osy $x$ a $y$ (sudé bity mapovány na $x$, liché na $y$)




(a) Indukční krok.

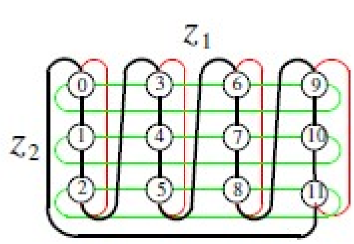


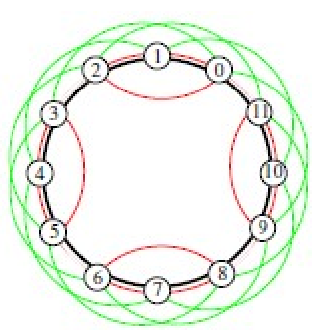

(b) $\varphi$ vnoření $Q_4 \xrightarrow{\text{emb}} M(4,4)$.



(c) $\xi$ vnoření $Q_4 \xrightarrow{\text{emb}} M(4,4)$.

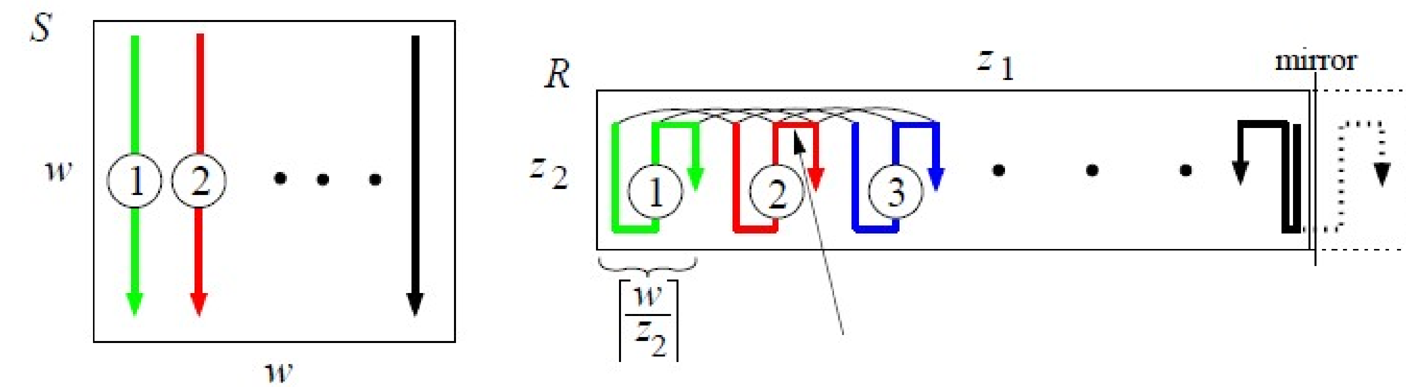
**Vnoření 2D toroidu do 1D toroidu:**



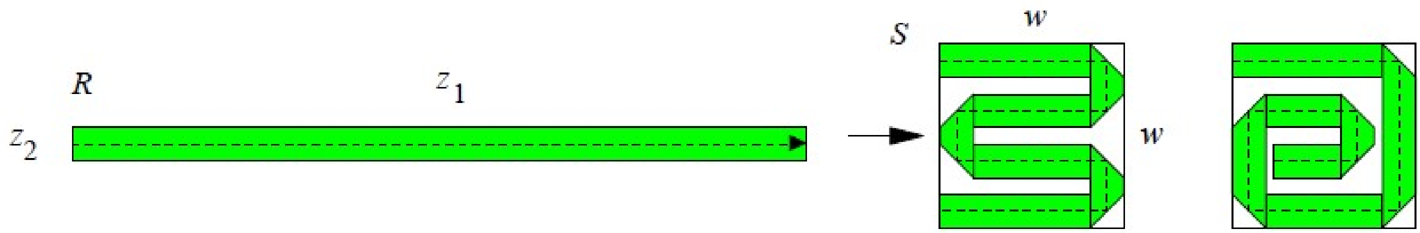
**Vnoření čtvercové mřížky do obdélníkové mřížky:**

Jednotlivé sloupce mřížky S bereme zleva doprava a hadovitě zanořujeme do R tak, že sousední sloupce tvoří stejnolehlé hady, rozmísťované tak, aby se nepřekrývaly. Některé uzly v R tedy zůstávají nevyužity, a proto dorazíme k pravému kraji R dříve, než se všechny sloupce S podaří rozmístit. Had, který narazí na kraj R, se jakoby odrazí a nepřerušeně pokračuje ve zpětném směru. Proto budou některé uzly R zatíženy dvěma uzly S, zatímco některé zůstanou volné.




**Vnoření obdélníkové mřížky do čtvercové:**

Uzly S blízko vertikálního kraje mají load = 0 nebo load = 2

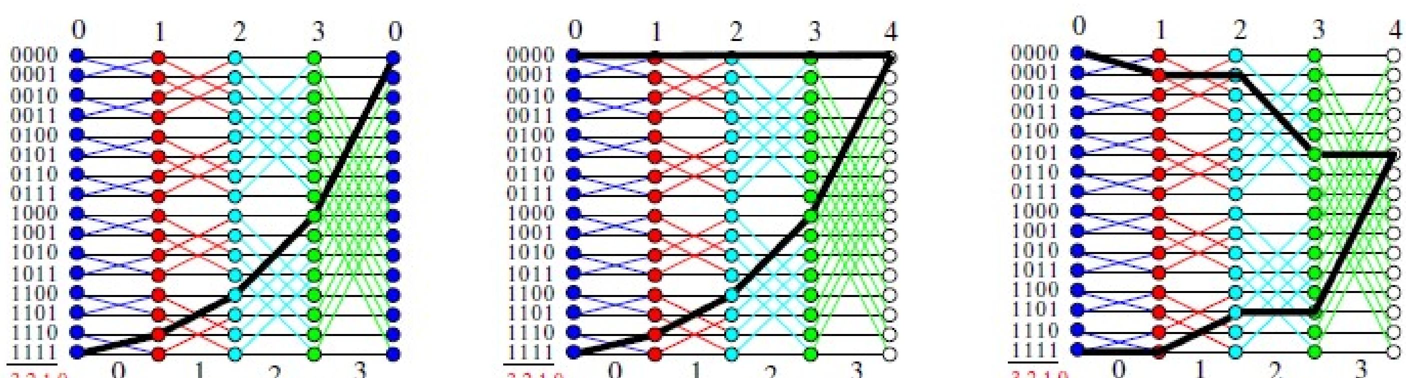



**Otevřený a kružnicový motýlek jsou kvaziizometrické:**

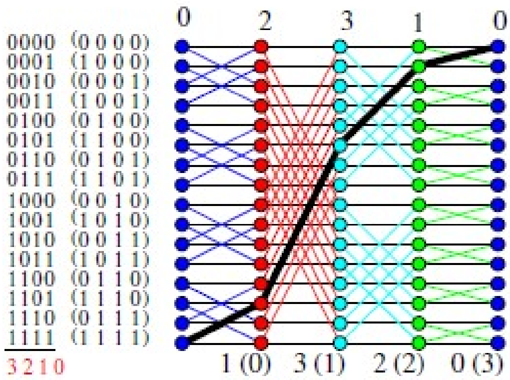
$oBF_n$ lze triviálně vnořit do $wBF_n$ s load = 2 a dil = 1. Sloučením koncových uzlů $oBF_n$ se získají kružnice $wBF_n$

Vnoření $wBF_n$ do $oBF_n$:

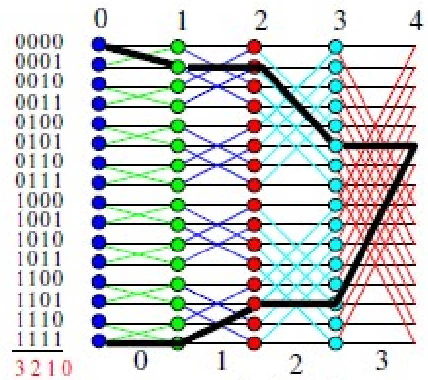
dil $\leq 3$



(a) wBF (b) oBF (c) oBF




(d) wBF




(e) oBF

- Při cestě z (0, 1111) do (0, 0000) nutno navštívit každou krychlovou dimenzi (invertovat všechny bity)
- Při triviálním vnoření (a,b) (invertování bitů v pořadí 0,1,2,3) je dil = $\log N$
- Řešení: invertovat bity v jiném pořadí -- inspirace v kartézské dekompozici (přeskakování) -- pořadí 1,3,2,0 a dilatace je 3, zavedení permutace $\pi : 0, 1, 2, 3 \rightarrow 1, 3, 2, 0$
- Kružnice $wBF_n$ se permutují podle $\pi^{-1}$ (d)
- Permutovaný $wBF_n$ se vnoří do $oBF_n$ (graf d co grafu c)