MI-SPOL-18

Markovské řetězce s diskrétním časem. Jejich limitní vlastnosti.

Náhodný proces: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravděpodobnostní prostor a $T \subseteq \mathbb{R}$ indexová množina. Systém náhodných veličin $\mathbf{X} = \{X_t | t \in T\}, X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ je **reálný náhodný proces.**

T lze chápat jako **čas:** pokud T nejvýše spočetná, jde o diskrétní čas, jinak spojitý čas

Množina stavů S: minimální podmnožina $\mathbb{R}$, pro kterou platí $P(X_t \in S) = 1$ pro každé $t \in T$ -- množina S je společná množina hodnot veličin X_t

$\mathbf{X} = \{X_t | t \in T\}$ náhodný proces a $\omega \in \Omega$ elementární jev. Funkce $f : T \to \mathbb{R}$, kde $\forall t \in T :$ $f(t) = X_t(\omega)$ je **trajektorie** nebo **realizace** náhodného procesu $\mathbf{X}$

Rozdělení v čase $n \in \mathbb{N}$ charakterizované pravděpodobnostní funkcí: $\mathbf{p}_i(n) = P(X_n = i)$, $\mathbf{p}(n) = (\mathbf{p}_1(n), \mathbf{p}_2(n), ...)$
(vektor pravděpodobností pro jednotlivé stavy v čase n)

Matice pravděpodobností přechodu za čas mezi n a $m \geq n$: $\mathbf{P}_{ij}(n,m) = P(X_m = j | X_n = i)$, $\mathbf{P}(n,m) = (\mathbf{P}_{ij}(n,m))_{i,j \in S}$

Markovský řetězec

Náhodný proces $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ s nejvýše spočetnou množinou stavů S je **markovský řetězec s diskrétním časem**, pokdu splňuje **markovskou podmínku:** *(zapomínání historie)* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s, s_0, ..., s_n - 1 \in S$ platí:

$$P(X_n = s | X_{n-1} = s_{n-1}, ..., X_1 = s_1, X_0 = s_0) = P(X_n = s | X_{n-1} = s_{n-1})$$

Ekvivaltentní formulace markovské podmínky:

- $P(X_{n+m} = s | X_m = s_m, ..., X_1 = s_1, X_0 = s_0) = P(X_{n+m} = s | X_m = s_m)$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n_0 < n_1 < ... < n_k \in \mathbb{N}_0, \forall s_0, ..., s_k \in S$ platí: $P(X_{n_k} = s_k | X_{n_{k-1}} = s_{k-1}, ..., X_{n_0} = s_0) = P(X_{n_k} = s_k | X_{n_{k-1}} = s_{k-1})$

Ekvivalentní definice markovského řetězce:
Náhodný proces $\{X_n|n \in \mathbb{N}_0\}$ s nejvýše spočetnou množinou stavů S je markovský, právě když $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n_0 < n_1 < ... < n_k \in \mathbb{N}_0, \forall s_0, ..., s_k \in S$ platí:

$$P(X_{n_0} = s_0, ..., X_{n_k} = s_k) = \mathbf{p}_{s_0}(n_0) \cdot \mathbf{P}_{s_0 s_1}(n_0, n_1) \cdot \mathbf{P}_{s_1 s_2}(n_1, n_2) \cdot ... \cdot \mathbf{P}_{s_{k-1} s_k}(n_{k-1}, n_k)$$

Chapman-Kolmogorova rovnice: Pro matice přechodu markovského řetězce platí $\forall n \leq m \leq r \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbf{P}(n, r) = \mathbf{P}(n, m) \cdot \mathbf{P}(m, r)$$

Homogenní markovský řetězec

Markovský řetězec je **homogenní**, pokud $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i, j \in S$ platí:

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_1 = j|X_0 = i)$$

(Jednokroková) matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(0, 1) = (P(X_1 = j|X_0 = i))_{i,j \in S}$$

Pro homogenní markovský řetězec platí $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbf{P}(m, m+n) = \mathbf{P}(0, n) = \mathbf{P}^n$$

Matice $\mathbf{P}^n$ se značí i $\mathbf{P}(n)$.
Pravděpodobnost přechodu z $i \in S$ do $j \in S$ během n kroků: $P(X_n = j|X_0 = i) = \mathbf{P}_{ij}(n) = (\mathbf{P})_{ij}$

Chapman kolmogorova rovnice pro homogenní řetězec: $\mathbf{P}(n+m) = \mathbf{P}(n) \cdot \mathbf{P}(m)$, jinými slovy $\mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{P}^m$

Rozdělení náhodné veličiny X_n:
Pro homogenní řetězec platí: $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(m) \cdot \mathbf{P}^{n-m} = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n$
(vektor pravděpodobností pro jednotlivé časy v čase 0 n-krát vynásobený maticí)

Stochastická matice

Matice přechodu $\mathbf{P}$ je **stochastická:**

- $\forall i, j \in S : P_{ij} \geq 0$
- $\forall i \in S : \sum_{j \in S} \mathbf{P}_{ij} = 1$ *(součet řádku = 1)*

Součin stochastický matic je opět stochastická matice

$\Rightarrow$ k libovolné čtvercové stochastické matici $\mathbf{P}$ existuje **homogenní markovský řetězec s diskrétním časem** takový, že $\mathbf{P}$ je jeho maticí přechodu

Stacionární rozdělení:
$\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ homogenní markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P}$. Pokud existuje vektor π t.ž.:

- $\forall i \in S : \pi_i \geq 0$
- $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$

Pro který platí, že $\pi \cdot \mathbf{P} = \pi$, nazývá se **stacionárním rozdělením** řetězce.
(rozdělení, ze kterého neuteču)

Pokud existuje stacionární rozdělení, pak

$$\mathbf{p}(0) = \pi \Rightarrow \mathbf{p}(n) = \pi \mathbf{P}^n = ... = \pi \mathbf{P} = \pi$$

Potom platí, že

$$P_\pi(X_n = i) = \pi_i$$

(P_π je šance při počátečním rozdělení π)

Klasifikace stavů

Stav $i \in S$ je:

- **Trvalý (rekurentní):** $P(\exists n \in \mathbb{N} : X_n = i | X_0 = i) = 1$
  (každá trajektorie začínající v i se do něj někdy v budoucnu stoprocentně vrátí)
- **Přechodný (transientní):** $P(\exists n \in \mathbb{N} : X_n = i | X_0 = i) < 1$
  (existují trajektorie, které se do stavu i už nikdy nevrátí)

Časy návštěv

Čas první návštěvy stavu $i \in S$: $\tau_i = \min\{n \in \mathbb{N} | X_n = i\}$, pokud množina neprázdná. Jinak $\tau_i = +\infty$

První návštěva j při startu v i nastane právě v n-tém kroku:

$$f_{ij}(n) = P(\tau_j = n | X_0 = i), n \geq 1, f_{ij}(0) = 0$$

Pravděpodobnost, že řetězec někdy navštíví j, pokud začal v i:

$$f_{ij} = P(\tau_j < +\infty | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

Důsledek:

- $i \in S$ **trvalý** $\Leftrightarrow f_{ii} = P(\tau_i < +\infty | X_0 = i) = 1$
- $i \in S$ **přechodný** $\Leftrightarrow f_{ii} = P(\tau_i < +\infty | X_0 = i) < 1$

Střední doba návratu do stavu $i \in S$:

$$\mu_i = E(\tau_i | X_0 = i) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) & \text{pokud } i \text{ trvalý} \\ +\infty & \text{pokud } i \text{ přechodný} \end{cases}$$

Stav $i \in S$ je:

- **Nenulový:** $\mu_i < +\infty$
- **Nulový:** $\mu_i = +\infty$

Periodicita

Perioda stavu $i \in S$: $d(i) = \gcd\{n \in \mathbb{N} | \mathbf{P}_{ii}(n) > 0\}$
(gcd časů, kdy se řetězec vrátí do stavu i)
Stav i **periodický**, pokud $d(i) > 1$, jinak **aperiodický**

Pro libovolný aperiodický stav $i \in S$ platí:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_{ii}(n) = \frac{1}{\mu_i}$$

Pro jakýkoliv jiný stav $j \in S$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{ji}(n) = \frac{f_{ji}}{\mu_i}$$

Pro **periodický stav** $i \in S$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{ii}(f \cdot d(i)) = \frac{d(i)}{\mu_i}$$

Klasifikace stavů pomocí matice přechodu

Stav $i \in S$ je:

- **přechodný:** $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_{ii}(n) < +\infty$
- **trvalý nulový:** $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_{ii}(n) = +\infty \wedge \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{ii}(n) = 0$
- **trvalý nenulový aperiodický:** $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{ii}(n) = \frac{1}{\mu_i} > 0$
- **trvalý nenulový periodický:** Má periodu $d(i)$ a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{ii}(k \cdot d(i)) = \frac{d(i)}{\mu_i} > 0$

Dosažitelnost

Stav j je **dosažitelný ze stavu** i ($i \to j$), pokud se lze dostat z i do j v konečném čase: $\exists n \in \mathbb{N}_0 : \mathbf{P}_{ij}(n) > 0$

Stavy i a j jsou **vzájemně dosažitelné** ($i \leftrightarrow j$), pokud $i \to j$ a $j \to i$

Pokud $i \leftrightarrow j$, pak jsou **oba stejného typu**

Množiny stavů

Množina $C \subseteq S$ je **uzavřená**, pokud $\forall i \in C \forall j \notin C : \mathbf{P}_{ij} = 0$

Pokud uzavřená množina tvořena jedním stavem, je tento stav **pohlcující (absorpční)**

Množina stavů $C \subseteq S$ je **nerozložitelná (ireducibilní)**, pokud pro všechna $i, j \in C$ platí $i \leftrightarrow j$

Množinu stavů S lze **jednoznačně rozložit** do tvaru $S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup ...$, kde T je množina všechn přechodných stavů a $C_1, C_2, ...$ jsou vzájemně disjunktní nerozložitelné množiny trvalých stavů

Matice přechodu po uspořádání stavů:
Uspořádání: řádek (i sloupec) začíná přechodnými stavy, končí trvalými

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

Kde:

- $\mathbf{T}$: čtvercová matice přechodů mezi přechodnými stavy v T
- $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}_2 \oplus ...$, kde $\mathbf{R}_i$: matice přechodů z množiny přechodných stavů do množiny trvalých stavů
- $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \oplus \mathbf{C}_2 \oplus ...$, kde $\mathbf{C}_i$: čtvercová matice přechodů mezi trvalými stavy v C_i

V řetězci s konečně mnoha stavy **nemohou být všechny přechodné** a **neexistují trvalé nulové**

V končéné množině stavů **existuje stacionární rozdělení**

Celkem existuje tolik **lineárně nezávislých** stacionárních rozdělení, kolik existuje nenulových množin C_r

Věta o existenci stacionárního rozdělení: Pro nerozložitelný markovský řetězec platí:

- Pokud všechny stavy přechodné nebo trvalé nulové, stacionární rozdělení neexistuje
- Pokud všechny stavy trvalé nenulové, stacionární rozdělení existuje a je jediné

Pravděpodobnost pohlcení

Čas absorpce: náhodná veličina $\tau_A : \Omega \to \{0, 1, ..., +\infty\}$, kde $\tau_A(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 | X_n(\omega) \notin T\}$ pokud množina neprázdná, jinak ∞
(minimální čas kdy se opustí množina přechodných stavů)

Pravděpodobnost, že **řetězec startující v** $i \in T$ **opustí** T **přechodem do** $j \in C$**:** $\mathbf{U}_{ij} = P(X_{\tau_A} = j | X_0 = i)$
Matice $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_{ij})_{i \in T, j \in C}$

Matice pravděpodobností pohlcení $\mathbf{U}$ je řešením rovnice $\mathbf{U} = \mathbf{R} + \mathbf{TU}$, tedy $\mathbf{U} = (\mathbf{E} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{R}$ ($\mathbf{E}$ je jednotková matice)

Počet návštěv stavu $j \in S$**:** $W_j = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}}$

Střední počet návštěv stavu $j \in S$, když řetězec startuje v i: $\mathbf{N}_{ij} = E(W_j|X_0 = i)$

Matici $\mathbf{N}$ je **fundamentální matice řetězce** a platí: $\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{T})^{-1}$
Potom: $\mathbf{U} = \mathbf{NR}$

Limita matice $\mathbf{C}^n$

Struktura matice $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & ... \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & ... \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Potom:

$$\mathbf{C}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^n & \mathbf{0} & ... \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2^n & ... \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Pokud všechny trvalé stavy **aperiodické:**

$$\mathbf{C}^n \xrightarrow{n \to \infty} \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} & ... \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}}_2 & ... \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Kde $(\tilde{\mathbf{C}}_r)_{ij} = \tilde{\pi}_j^{(r)}$. Matice $\tilde{\mathbf{C}}_r$ má **v řádcích stacionární rozdělení** pod-řetězce C_r

Limita matice $\mathbf{P}^n$

Pokud $S = T \cup C$ končená množina stavů, C trvalé aperiodické, potom:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^n & \mathbf{R}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{U}\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}} \end{pmatrix}$$

Odhad matice přechodu

Maximálně věrohodným odhadem matice přechodu $\mathbf{P}$ je matice $\hat{\mathbf{P}}$ s prvky

$$\hat{\mathbf{P}}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}$$

Kde n_{ij} počet přechodů z i do j a $n_{i\bullet} = \sum_{j \in S} n_{ij}$

Odhad metodou maximální věrohodnoti je **konzistentní:** $\hat{\mathbf{P}}_{ij} \xrightarrow{\text{skoro jistě}} \mathbf{P}_{ij}$ při $n \to \infty$