MI-SPOL-4

Integrál funkcí více proměnných (Riemannova konstrukce).

Dán interval $[a, b]$. Konečná množina $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ t.ž. $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ je **rozdělení intervalu** $[a, b]$. Body x_k jsou dělící body.

Číslo $\nu(\sigma) = \max\{\Delta_k : k = 1, 2, ..., n\}$, kde $\Delta_k = x_k = x_{k-1}$ je **norma rozdělení** σ.

Nechť f funkce definovaná na $[a, b]$ a $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$.

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Potom

$$S_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

a

$$s_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

jsou **horní** a **dolní součet funkce f při rozdělení** σ.

Horní integrál funkce f na $[a, b]$: $D_f = \inf\{S_f(\sigma) : \sigma$ je rozdlění na $[a, b]\}$

Dolní integrál funkce f na $[a, b]$: $d_f = \sup\{s_f(\sigma) : \sigma$ je rozdlění na $[a, b]\}$

Pokud $D_f = d_f$, je to **Darbouxův integrál** a značí se $\int_a^b f(x)dx = D_f = d_f$

Posloupnost rozdělní σ_n je **normální**, pokud $lim_{n\to\infty}\nu(\sigma_n) = 0$

Pokud f spojitá, pak existuje $\int_a^b f(x)dx$. Platí, že $\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} s_f(\sigma_n) = lim_{n\to\infty} S_f(\sigma_n)$

Aditivita a multiplikativita integrálu: f, g spojité na $[a, b]$ a $c \in \mathbb{R}$, potom
$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
$\int_a^b (cf)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Funkce f definovaná na (a, b). Funkce F, kde $F' = f(x) \forall x \in (a, b)$ je **primitivní funkce** k f v intervalu (a, b)

Newtonova formule: f spojitá na $[a, b]$ s primitivní funkcí F. Potom platí: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Per Partes: Nechť f, g spojité na $[a, b]$, f má spojitou derivaci na $[a, b]$ a G je primitivní funkce g na $[a, b]$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

Substituce: Pro funkce f a φ platí:

- φ a φ' jsou spojité na $[\alpha, \beta]$
- f spojitá na $\varphi([\alpha, \beta])$

Potom:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Dvě proměnné

$f : D \to \mathbb{R}$, kde $D = [a, b] \times [c, d]$

$\sigma_x = (x_i)_{i=0}^n$ rozdělení na $[a, b]$
$\sigma_y = (y_i)_{i=0}^m$ rozdělení na $[c, d]$
$\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ je rozdělení $D = [a, b] \times [c, d]$

$M_{i,j} = \max\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$
$m_{i,j} = \min\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$

Horní Darbouxova suma f vzhledem k rozdělení σ:

$$S_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

Dolní Darbouxova suma f vzhledem k rozdělení σ:

$$s_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} s_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

Horní Darbouxův integrál: $D_f = \inf\{S_f(\sigma)$: σ je obdélníkové rozdělení D}$

Dolní Darbouxův integrál: $d_f = \sup\{s_f(\sigma)$: σ je obdélníkové rozdělení D}$

Pokud $D_f = d_f$, jde o **dvojitý Darbouxův integrál** f na D a značí se

$$\iint_D f(x, y) dx dy = D_f = d_f$$

Pokud $f(x, y)$ integrabilní na $D = [a, b] \times [c, d]$ a existuje jeden z integrálů

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

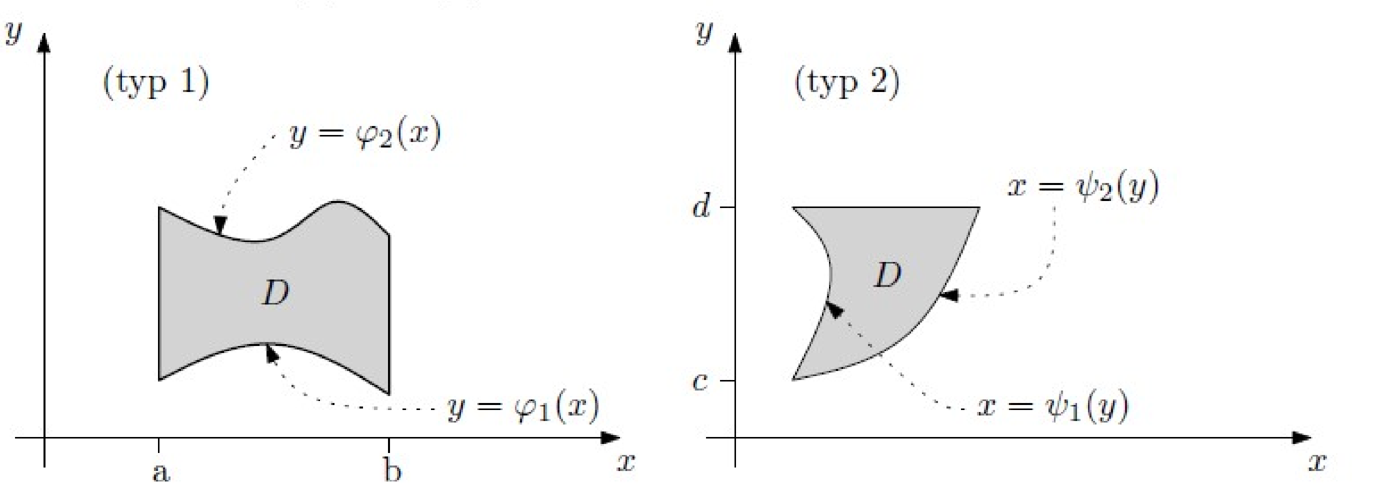
nebo

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Potom je roven

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

Neobdélníková oblast



- **typ 1:** $x \in [a,b]$, y omezené spojitými funkcemi $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, kde $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

- **typ 2:** $y \in [c,d]$, x omezené spojitými funkcemi $\psi_1(y), \psi_2(y)$, kde $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \right) dy$$

Užití dvojného integrálu:

- průměr: $\left(\iint_D f(x,y)dxdy\right)$ / $\left(\iint_D 1dxdy\right)$
- těžiště desky
- povrch grafu