

Structure de données abstraites (SDA)	Structures Relationnelles	Les graphes - Etude théorique
---------------------------------------	---------------------------	-------------------------------

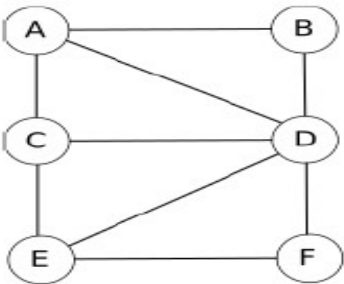
A) **Introduction :** Qu'est- qu'un graphe?

Imaginez un réseau social ayant 6 abonnés (A, B, C, D, E et F) où :

- A est ami avec B, C et D
- B est ami avec A et D
- C est ami avec A, E et D
- D est ami avec tous les autres abonnés
- E est ami avec C, D et F
- F est ami avec E et D

On peut représenter ce réseau social par un schéma où :

- Chaque abonné est représenté par un cercle avec son nom.
- Chaque relation "X est ami avec Y" par un segment de droite reliant X et Y ("X est ami avec Y" et "Y est ami avec X" étant représenté par le même segment de droite



Ce genre de figure s'appelle un **graphe**. Les graphes sont des objets mathématiques très utilisés, notamment en informatique. Les cercles sont appelés des **sommets** et les segments de droites des **arêtes**.

B) **Définitions et vocabulaire :**

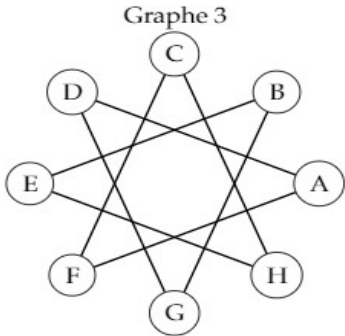
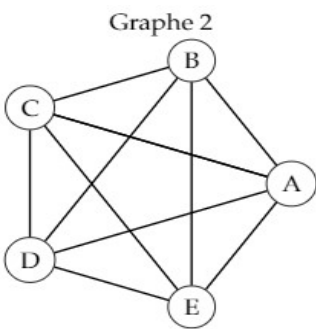
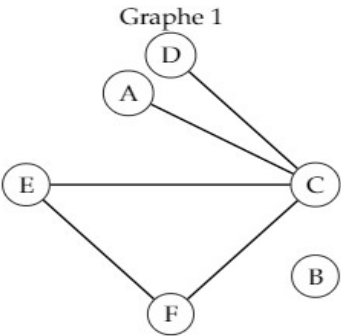
Définition d'un graphe : On appelle graphe la donnée d'un ensemble de points appelés **sommets** et d'un ensemble de lignes appelées **arêtes** qui relient certains sommets entre eux

Vocabulaire :

- L'ordre d'un graphe est le **nombre de sommets** du graphe.
- Deux **sommets** sont dits **adjacents** s'ils sont reliés entre eux par une arête.
- Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe est dit isolé.
- Le **degré** d'un sommet est le **nombre d'arêtes** issues de ce sommet.
- Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques distincts sont toujours adjacents. Autrement dit, **tous** les sommets sont **reliés deux à deux** par une arête.

Exercice 1 :

Pour chacun des 3 graphes ci-dessous, déterminer l'ordre de ces graphes, le degré des sommets A, B et C. A et B sont-ils adjacents? A et C sont-ils adjacents? Un ou plusieurs sommets sont-ils isolés? Ces graphes sont-ils complets?

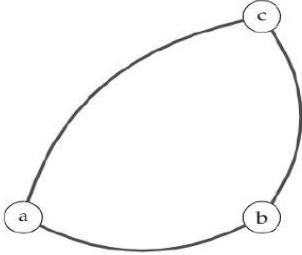
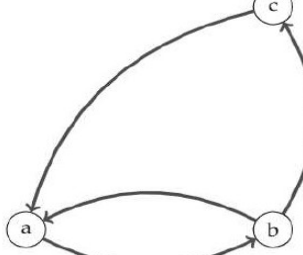
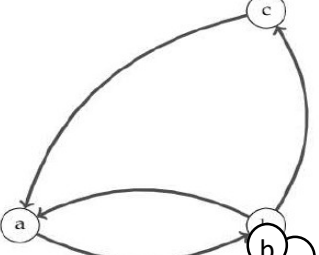
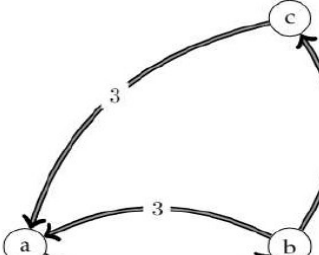


Exercice 2 : Sur le graphe du réseau social de l'introduction, donner son ordre : est-il complet ?
Donner le degré des sommets du graphe :
Comparez cette somme avec le nombre d'arêtes.

Propriété : La somme des degrés des sommets.....

Vérifier cette propriété avec les graphes de l'exercice 1

C) Les différents types de graphes :

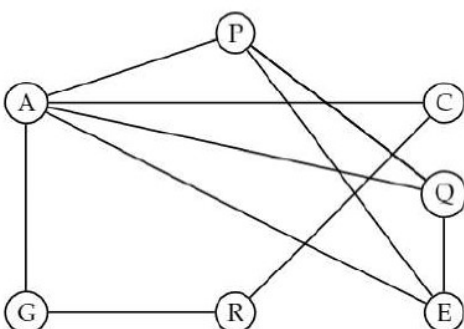
<p>Un graphe non orienté</p>  <p>Dans un graphe non orienté, chaque arête peut être parcourue dans les deux sens</p>	<p>Un graphe orienté</p>  <p>Dans un graphe orienté, chaque arête ne peut être parcourue que dans un seul sens indiqué par une flèche.</p> <p>Chemin de b vers c qu'on appelle arc de b vers c</p>
<p>Un graphe orienté ou non orienté peut contenir des boucles, c'est-à-dire une arête dont l'origine et l'extrémité correspondent au même sommet</p> 	<p>De plus on peut associer des étiquettes aux arêtes d'un graphe. Si les étiquettes sont des nombres positifs, on parle d'arbre pondéré</p>  <p>Les graphes pondérés sont en particulier utilisés dans les algorithmes de routages. Les poids des arêtes correspondent à la métrique utilisée pour mesurer la distance entre deux routeurs (nombre de saut, temps de connexion,...)</p>

D) Chaîne et cycle :

Définition (Chaîne, cycle, connexe) :

- Une **chaîne** ou un **chemin** est une liste **ordonnée** de sommets, deux sommets consécutifs étant **reliés** par une arête. La longueur de la chaîne est le nombre d'arêtes parcourues dans cette chaîne.
- On appelle **chaîne fermée** toute chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident
- Un **cycle** est une chaîne fermée dont les **arêtes** sont toutes **distinctes**.
- Un graphe est **connexe** s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe

Exercice 3 Une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes de sa région. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe ci-dessous

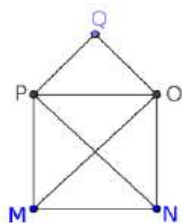


1. Déterminer l'ordre du graphe
2. Donner deux sommets adjacents
3. Donner le degré de tous les sommets
4. Le graphe est-il complet ?
5. Donner une chaîne de longueur 4, de longueur 10.
6. Déterminer un cycle et sa longueur
7. Le graphe est-il connexe ?

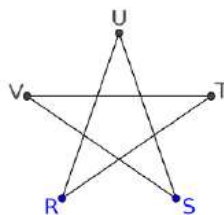
E) Chaîne et cycles eulériens :

Définition :

- Une chaîne est dite **eulérienne** lorsque cette chaîne contient toutes les arêtes du graphe, prises chacune **une fois et une seule**
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne fermée (origine et extrémités confondus)



La chaîne
M-P-Q-O-M-N-P-O-N est une
chaîne eulérienne.



Le cycle R-U-S-V-T-R est un
cycle eulérien.

En effet, cette chaîne
contient bien 8 arêtes
toutes distinctes.

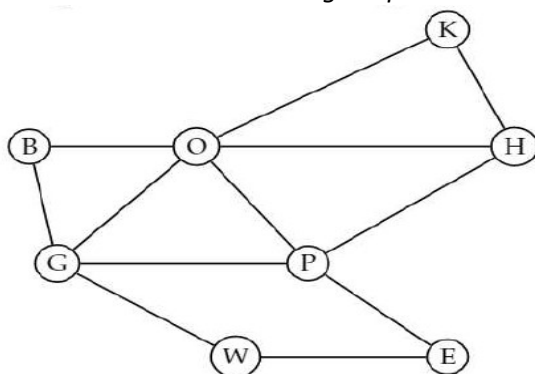
Le théorème d'Euler :

Soit G un graphe connexe.

- G admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets de G sont de degré pair.
- G admet une chaîne eulérienne (non fermée) si et seulement si le nombre de sommets de degré impair dans G est 2. Si tel est le cas, les extrémités de la chaîne eulérienne sont les deux sommets de degré impair.

Exercice 4 :

1. Le graphe de l'exercice 3 admet-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ?
2. On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant les stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiquée dans la légende



Légende :

B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1

- a) Déterminer en justifiant si le graphe est connexe ?
- b) Déterminer en le justifiant si le graphe est complet ?
- c) Déterminer en le justifiant si le graphe admet une chaîne eulérienne. Si oui donner une telle chaîne.

Exercice 5 : On s'intéresse aux pistes cyclables reliant les différentes places d'un quartier.
De nombreuses pistes sont à sens unique comme l'indique le tableau ci-contre.

1. Faire le graphe correspondant à la situation
2. Existe-t-il une chaîne de longueur 4 d'origine la place A et d'extrémité la place C

Places	Places accessibles
A	B, C
B	C, D
C	A, D
D	C, E
E	A, B, D