Faculté des sciences et génie
Département de mathématiques et statistique

# Préparation à l'examen 1

À l'intention des étudiants du cours MAT-2901 : Mathématiques et technologie

par Jérôme Soucy

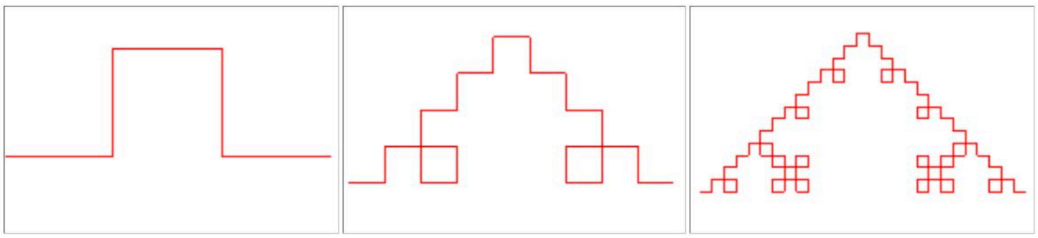
## Contenu

# 1 Détails de l'évaluation

- Date et heure : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Pondération : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Local : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Matière à l'étude
  - Série 1 : Introduction aux fractales
  - Série 2 : Transformations du plan
  - Série 3 : Espaces métriques
  - Série 4 : Les points fixes
  - Série 5 : Les SIF
- Matériel requis
  - Crayon et efface
  - Règle graduée en centimètres
  - Calculatrice autorisée par la FSG (voir le site de cours pour connaître les modèles autorisés)
- Aucun matériel ne sera fourni avec l'évaluation

## 2 Questions préparatoires

**Question 1.** On considère $C_0$, l'ensemble des couples $(x, y)$ du plan où $y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$ qu'on appelle « courbe à l'étape 0 ». À l'étape 1, on enlève le tiers central du segment, pour le remplacer par 3 segments de longueur $\frac{1}{3}$ correspondant à trois côtés d'un carré, de telle sorte qu'on obtienne la figure à l'étape 1 ci-dessous, courbe que nous nommons $C_1$. On répète ce processus.



Étape 1 Étape 2 Étape 3

(a) Après combien d'étapes obtient-on la première fois une courbe dont la longueur dépasse 100 unités ?

(b) Appelons $C$ la courbe obtenue en prenant la limite de cette construction. Montrez que la longueur de $C$ est infinie.

(c) Trouvez les plus petites valeurs de $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ telles que le $\epsilon_1$-voisinage de $C_0$ contienne $C_1$ et le $\epsilon_2$-voisinage de $C_1$ contienne $C_0$. Déduisez ensuite la valeur de $d_H(C_0, C_1)$.

**Question 2.** On considère l'espace métrique formé de l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de la distance définie par

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|.$$

(a) Donnez une représentation graphique d'une boule fermée de rayon 1 centrée à l'origine.

(b) Trouvez le volume de cette boule.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une suite de points dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$P_n = \left(\sin(n\pi), 1 - e^{-n}, 2n^2 + \frac{1}{n} + 3\right).$$

Est-ce que la suite $(P_n)$ est convergente ? Si c'est le cas, déterminer sa limite.

**Question 3.** Dans le problème suivant, on se considère dans le plan muni de la distance euclidienne habituelle. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y < 1\}$ et la suite de points :

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (n \ge 1).$$

(a) Montrez que pour $m > n$,

$$d(P_n, P_m) < \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}.$$

(b) Trouvez un $N(\epsilon) > 0$ tel que $d(P_n, P_m) < \epsilon$ pour $m > n > N(\epsilon)$, et en déduire que $(P_n)$ est une suite de Cauchy.

(c) Montrez que cette suite ne converge pas dans $(E, d_E)$.

**Question 4.** On considère l'espace métrique $([0, \infty), d_E)$ et la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

(a) Trouvez les points fixes de $f$.

(b) Est-ce que $f$ est une contraction sur cet espace ? Justifiez.

**Question 5.** Soit $D$ la région de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 - \sqrt{2x - x^2}, 0 \le x \le 1\}.$$

(a) Donnez une représentation graphique de $D$.

(b) Donnez une représentation graphique du $\epsilon$-voisinage de $D$ pour $\epsilon = \frac{1}{2}$.

(c) Trouvez l'aire de ce $\epsilon$-voisinage.