



Faculté des sciences et génie  
Département de mathématiques et statistique

# Préparation à l'examen 1

À l'intention des étudiants du cours MAT-2901 : Mathématiques et technologie  
par Jérôme Soucy

## Contenu

1	Détails de l'évaluation . . . . .	1
2	Questions préparatoires . . . . .	2

## 1

## Détails de l'évaluation

- Date et heure : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Pondération : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Local : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Matière à l'étude
  - Série 1 : Introduction aux fractales
  - Série 2 : Transformations du plan
  - Série 3 : Espaces métriques
  - Série 4 : Les points fixes
  - Série 5 : Les SIF
- Matériel requis
  - Crayon et efface
  - Règle graduée en centimètres
  - Calculatrice autorisée par la FSG (voir le site de cours pour connaître les modèles autorisés)
- Aucun matériel ne sera fourni avec l'évaluation

## 2

## Questions préparatoires

**Question 1.** Soit  $w$  la transformation affine correspondant à la rotation de  $\pi/4$  en sens anti-horaire, suivie de la réflexion selon l'axe des  $x$ . Exprimez  $w$  sous la forme  $A\vec{x} + \vec{v}$ , où  $A$  est une matrice et  $\vec{v}$  un vecteur.

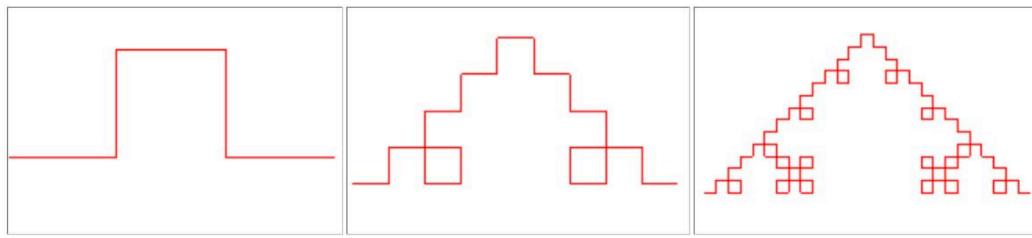
**Question 2.** Soit les ensembles  $A$  et  $B$  suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

Calculez  $d_H(A, B)$ .

**Question 3.** On considère  $C_0$ , l'ensemble des couples  $(x, y)$  du plan où  $y = 0$  et  $0 \leq x \leq 1$  qu'on appelle « courbe à l'étape 0 ». À l'étape 1, on enlève le tiers central du segment, pour le remplacer par 3 segments de longueur  $\frac{1}{3}$  correspondant à trois côtés d'un carré, de telle sorte qu'on obtienne la figure à l'étape 1 ci-dessous, courbe que nous nommons  $C_1$ . On répète ce processus.



Étape 1

Étape 2

Étape 3

- (a) Après combien d'étapes obtient-on la première fois une courbe dont la longueur dépasse 100 unités ?
- (b) Appelons  $C$  la courbe obtenue en prenant la limite de cette construction. Montrez que la longueur de  $C$  est infinie.
- (c) Trouvez les plus petites valeurs de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  telles que le  $\epsilon_1$ -voisinage de  $C_0$  contienne  $C_1$  et le  $\epsilon_2$ -voisinage de  $C_1$  contienne  $C_0$ . Déduez ensuite la valeur de  $d_H(C_0, C_1)$ .

**Question 4.** On considère l'espace métrique formé de l'ensemble  $\mathbb{R}^3$  muni de la distance définie par

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|.$$

- (a) Donnez une représentation graphique d'une boule fermée de rayon 1 centrée à l'origine.

- (b) Trouvez le volume de cette boule.

- (c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit une suite de points dans  $\mathbb{R}^3$  par :

$$P_n = \left( \sin(n\pi), 1 - e^{-n}, 2n^2 + \frac{1}{n} + 3 \right).$$

Est-ce que la suite  $(P_n)$  est convergente ? Si c'est le cas, déterminer sa limite.

**Question 5.** On considère l'espace métrique  $([0, \infty), d_E)$  et la fonction  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ .

- (a) Trouvez les points fixes de  $f$ .
- (b) Est-ce que  $f$  est une contraction sur cet espace ? Justifiez.