

Préparation à l'examen 1

À l'intention des étudiants du cours MAT-2901 : Mathématiques et technologie
par Jérôme Soucy

Contenu

1	Détails de l'évaluation	1
2	Questions préparatoires	2

1

Détails de l'évaluation

- Date et heure : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Pondération : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Local : Sur le site du cours, rendez-vous dans la section *Évaluations et résultats* → *Examen 1*
- Matière à l'étude
 - Série 1 : Introduction aux fractales
 - Série 2 : Transformations du plan
 - Série 3 : Espaces métriques
 - Série 4 : Les points fixes
 - Série 5 : Les SIF
- Matériel requis
 - Crayon et efface
 - Règle graduée en centimètres
 - Calculatrice autorisée par la FSG (voir le site de cours pour connaître les modèles autorisés)
- Aucun matériel ne sera fourni avec l'évaluation

Questions préparatoires

Question 1. Soit w la transformation affine correspondant à la rotation de $\pi/4$ en sens anti-horaire, suivie de la réflexion selon l'axe des x . Exprimez w sous la forme $A\vec{x} + \vec{v}$, où A est une matrice et \vec{v} un vecteur.

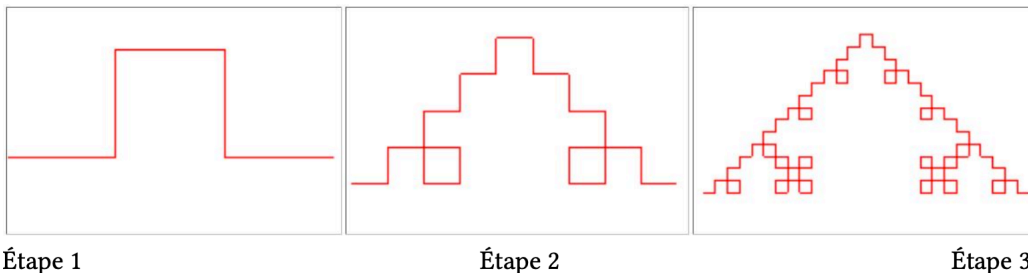
Question 2. Soit les ensembles A et B suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

Calculez $d_H(A, B)$.

Question 3. On considère C_0 , l'ensemble des couples (x, y) du plan où $y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$ qu'on appelle « courbe à l'étape 0 ». À l'étape 1, on enlève le tiers central du segment, pour le remplacer par 3 segments de longueur $\frac{1}{3}$ correspondant à trois côtés d'un carré, de telle sorte qu'on obtienne la figure à l'étape 1 ci-dessous, courbe que nous nommons C_1 . On répète ce processus.



- Après combien d'étapes obtient-on la première fois une courbe dont la longueur dépasse 100 unités ?
- Appelons C la courbe obtenue en prenant la limite de cette construction. Montrez que la longueur de C est infinie.
- Trouvez les plus petites valeurs de ϵ_1 et ϵ_2 telles que le ϵ_1 -voisinage de C_0 contienne C_1 et le ϵ_2 -voisinage de C_1 contienne C_0 . Déduisez ensuite la valeur de $d_H(C_0, C_1)$.

Question 4. On considère l'espace métrique formé de l'ensemble \mathbb{R}^3 muni de la distance définie par

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|.$$

- Donnez une représentation graphique d'une boule fermée de rayon 1 centrée à l'origine.
- Trouvez le volume de cette boule.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une suite de points dans \mathbb{R}^3 par :

$$P_n = \left(\sin(n\pi), 1 - e^{-n}, 2n^2 + \frac{1}{n} + 3 \right).$$

Est-ce que la suite (P_n) est convergente ? Si c'est le cas, déterminer sa limite.

Question 5. On considère l'espace métrique $([0, \infty), d_E)$ et la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

- Trouvez les points fixes de f .
- Est-ce que f est une contraction sur cet espace ? Justifiez.