MAT-2904 : Complément d'analyse

Jérôme Soucy

Table des matières

Liste des Figures

Liste des Tables

Présentation

Bienvenue sur un site web complémentaire au site monPortail du cours **MAT-2904 : Complément d'analyse**, à l'Université Laval.

Ce site contient principalement des séries d'exercices conçues pour accompagner les étudiants et étudiantes dans le cours. Chaque série d'exercices est soigneusement élaborée pour approfondir votre compréhension des concepts clés et vous préparer aux évaluations.

Les fonctions exponentielles et logarithmiques

Ce document vous invite à explorer en profondeur les fonctions exponentielles et logarithmiques, des outils mathématiques essentiels tant en théorie qu'en applications pratiques. À travers onze exercices soigneusement structurés, vous allez découvrir les multiples facettes de ces fonctions.

Nous commençons par des exercices techniques de résolution d'équations exponentielles, avant d'aborder des problèmes plus théoriques qui vous feront découvrir les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle, notamment son unicité comme solution de l'équation différentielle f'=f.

Le document intègre également des applications concrètes avec des problèmes d'intérêts composés et de croissance de populations bactériennes, illustrant ainsi l'utilité pratique de ces fonctions.

Nous terminons par une exploration rigoureuse de la définition du nombre e, démontrant comment ce nombre fondamental émerge naturellement des limites de suites. Les solutions détaillées vous guideront à travers les raisonnements mathématiques nécessaires pour maîtriser ces concepts clés de l'analyse mathématique.

Les fonctions puissances

Ce document vous propose une exploration approfondie des fonctions puissances, un concept fondamental en analyse mathématique. À travers onze exercices progressifs, vous allez consolider votre compréhension des propriétés algébriques et analytiques de ces fonctions.

Nous commençons par établir les propriétés fondamentales des puissances en utilisant la définition $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$, puis nous abordons des questions plus subtiles comme la rationalité des puissances de nombres irrationnels.

Le document vous guide ensuite vers l'étude des dérivées des fonctions puissances, avec une attention particulière portée à l'analyse complète de la fonction racine cubique.

Les exercices culminent avec des applications pratiques :

- Calcul de limites
- Résolution d'équations et d'inéquations
- Calcul d'intégrales faisant intervenir des puissances réelles

Chaque exercice est accompagné d'une solution détaillée et, lorsque pertinent, de représentations graphiques pour faciliter votre compréhension.

L'intégrale de Riemann

Ce document vous propose une série d'exercices approfondis sur l'intégrale de Riemann, un concept fondamental en analyse mathématique. Vous y trouverez six questions (incluant plusieurs sous-questions) qui vous permettront de maîtriser différentes techniques d'intégration et de comprendre leurs applications.

La première partie vous invite à pratiquer l'intégration indéfinie à travers douze cas différents, chacun nécessitant des techniques spécifiques comme :

- Les changements de variables
- L'intégration par parties
- La décomposition en fractions partielles

Les exercices suivants vous amènent vers des concepts plus avancés :

- Le calcul d'intégrales définies, y compris avec des bornes infinies
- Le calcul d'aire entre des courbes
- Une démonstration rigoureuse par la méthode de Riemann
- Des questions plus théoriques sur les propriétés des fonctions impaires dans l'intégration

Chaque exercice est accompagné d'une solution détaillée qui vous permet de comprendre pas à pas la méthode de résolution.

Les fonctions hyperboliques

Dans cette série d'exercices sur les fonctions hyperboliques, nous explorons d'abord les fonctions de base sinh, cosh et tanh, en mettant l'accent sur leurs graphiques et leurs propriétés fondamentales. Une attention particulière est portée à la fonction tanh et sa réciproque arctanh, où nous démontrons notamment la formule importante reliant arctanh(x) au logarithme naturel. Les graphiques sont systématiquement tracés pour visualiser le comportement de ces fonctions.

La série progresse ensuite vers des aspects plus théoriques avec la démonstration d'identités hyperboliques importantes, comme la formule d'addition pour cosh(x+y). Ces identités sont suivies d'exercices de résolution d'équations impliquant sinh et cosh, montrant comment ces fonctions sont interconnectées par des relations fondamentales comme $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Une partie intéressante de la série est consacrée à la comparaison graphique de sinh et cosh, nous permettant de mieux comprendre leurs comportements respectifs.

La série se termine par une application concrète et fascinante : l'étude de la chaînette, qui représente la forme que prend un câble suspendu sous son propre poids. Ce problème pratique nous montre comment les fonctions hyperboliques apparaissent naturellement dans des situations physiques réelles, illustrant ainsi leur importance au-delà des mathématiques pures.

Licence et attributions

Figure 1: Licence Creative Commons BY-NC

Figure 2: Généré avec assistance IA

Figure 3: Certains éléments de code de ce site ont été générés par l'IA. Vous êtes libre d'utiliser le contenu de ce site dans la mesure où vous citez la source et n'en tirez pas de bénéfice financier.

partie I

Exercices

Chapitre 1

Les fonctions exponentielles et logarithmiques

1.1 Question 1

Résolvez les équations ci-dessous.

1.
$$\exp(e^{2x+1}) = e^{\pi}$$

Solution.
$$x = \frac{-1 + \log \pi}{2}$$

2.
$$e^{3x} - e^{2x} - 5e^{x} = 0$$

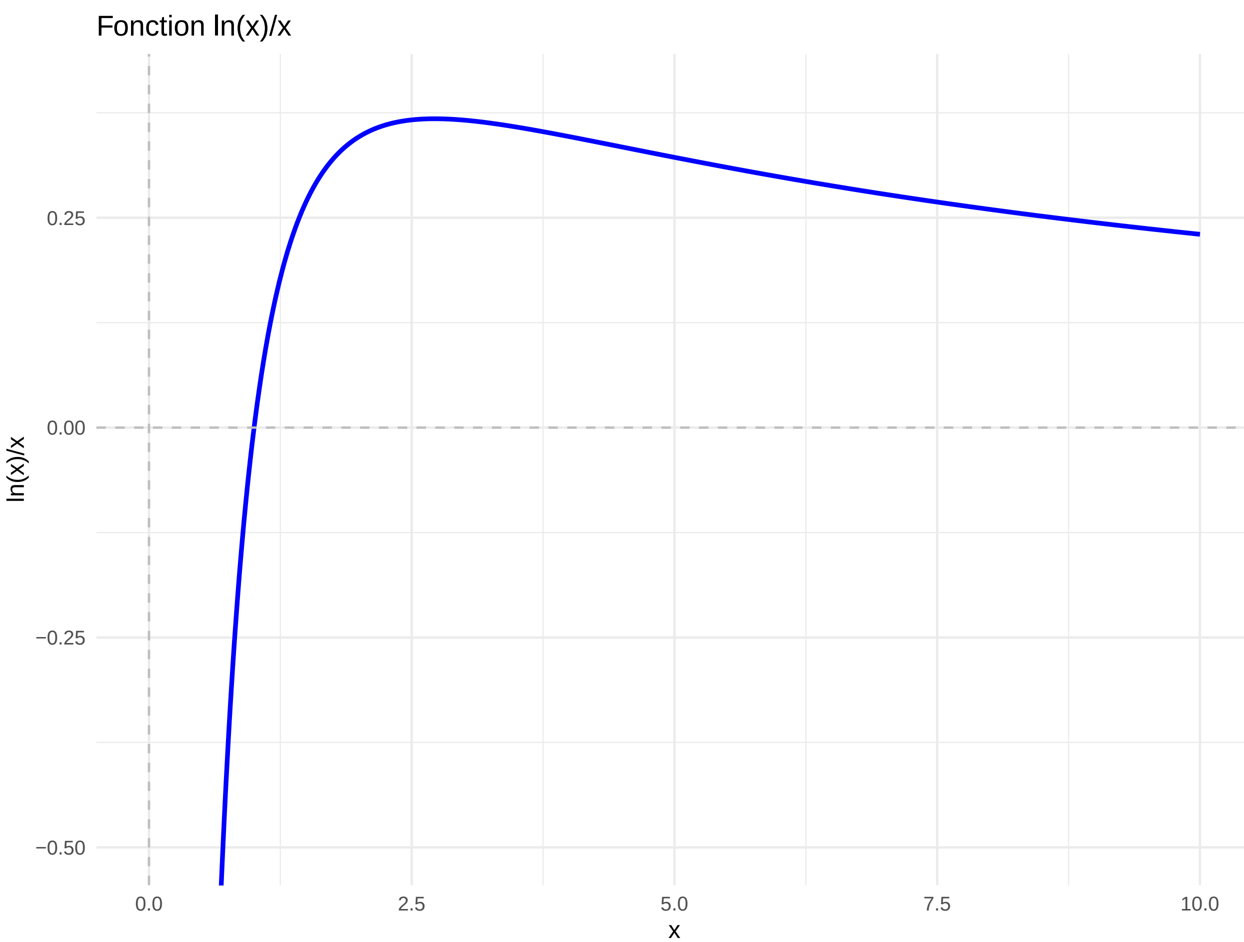
Solution.
$$x = \log\left(1 + \sqrt{21}\right) - \log 2 = \log \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

1.2 Question 2

Considérons l'équation $x^y = y^x$.

1. Vérifiez que $(x, y) = (2, 4)$ et $(x, y) = (4, 2)$ sont des solutions de cette équation.
   Solution. Il suffit de remplacer et constater.
2. En étudiant le graphique de la fonction $\frac{\log(x)}{x}$, montrez que les solutions énumérées en (a) sont les seules solutions telles que x et y soient des nombres naturels.
   Solution. Voici le graphique de la fonction, que vous pouvez obtenir en faisant une analyse des dérivées première et seconde.

```r
library(ggplot2)

# Création des données
x <- seq(0.1, 10, length.out = 1000)
y <- log(x)/x

# Création du graphique
ggplot(data.frame(x = x, y = y), aes(x = x, y = y)) +
  geom_line(color = "blue", size = 1) +
  labs(title = "Fonction ln(x)/x",
       x = "x",
       y = "ln(x)/x") +
  theme_minimal() +
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed", color = "gray") +
  geom_vline(xintercept = 0, linetype = "dashed", color = "gray") +
  coord_cartesian(ylim = c(-0.5, 0.4))
```



On constate que l'égalité $x^y = y^x$ est équivalente à l'égalité $\frac{\log(x)}{x} = \frac{\log(y)}{y}$. Ainsi, Comme la fonction est strictement décroissante à partir de $x = e$, il faut qu'une des valeurs se trouve avant e et une autre après e. La seule possibilité pour une valeur entière avant e est 2, ce qui correspond à la solution trouvée en (a).

3. Étudiez le graphique de la fonction considérée en (b) pour déterminer lequel des nombres, parmi e^π et π^e, est le plus grand.

   Solution. On constate que l'inégalité $x^y < y^x$ se traduit par $\frac{\log(x)}{x} < \frac{\log(y)}{y}$, car la fonction log est croissante. Comme la fonction $\frac{\log(y)}{y}$ atteint son maximum en $y = e$, il suit que $\frac{\log(e)}{e} > \frac{\log(x)}{x}$ pour tout autre valeur de x. Ainsi, $\pi^e < e^\pi$.

1.3 Question 3

Soit f une fonction vérifiant $f(x) = f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Si f vérifie $f(0) = 1$, montrez que f est unique.

Solution. $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) - f'(x) = 0$. En multipliant de chaque côté par e^{-x}, on obtient que $e^{-x}f(x) + f'(x)(-e^{-x}) = 0$. Or, le membre de gauche de cette équation correspond à la dérivée de la fonction $-e^{-x} \cdot f(x)$ (appliquez la règle de dérivation d'un produit pour vous en convaincre). Puisque la dérivée de la fonction $-e^{-x}f(x)$ est nulle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $-e^{-x}f(x) = C$. En multipliant chaque membre par $-e^x$, on déduit que $f(x) = -Ce^x$. En imposant la condition $f(0) = 1$, on déduit que $C = -1$, d'où $f(x) = e^x$. Ainsi, il n'y a qu'une fonction satisfaisant simultanément les conditions $f(x) = f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$, à savoir la fonction exponentielle de base e.

1.4 Question 4

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Montrez que si f n'est pas identiquement nulle, alors $f(0) = 1$.

Solution. En posant $x = y = 0$ dans l'équation, on trouve que $f(0) = f(0)^2$. De là nous concluons que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Supposons maintenant que $f(0) = 0$. En posant $y = 0$ dans l'équation de départ, nous obtenons que $f(x) = f(x) \cdot 0 = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Cela signifie que f est identiquement nulle. Donc si f n'est pas identiquement nulle, nous ne pouvons pas avoir $f(0) = 0$. Cela implique, par le travail fait précédemment, que $f(0) = 1$.

1.5 Question 5

La fonction $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, et elle satisfait aussi $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$. Trouvez une autre fonction satisfaisant ces propriétés.

Solution. On peut penser à la fonction $f(x) = \exp(2x)$.

1.6 Question 6

On place un capital C_0 à un taux d'intérêt annuel de i. Quelle sera la valeur de ce placement après n années si les intérêts sont versés annuellement?

Solution. **Méthode 1**: Notons C_n le capital après n années. Nous avons, pour $n \geq 1$, que

$$C_n = C_{n-1} + i \cdot C_{n-1} = C_{n-1}(1+i)$$

En exprimant C_{n-1} en fonction de C_{n-2}, puis C_{n-2} en fonction de C_{n-3}, et ainsi de suite, nous arrivons à exprimer C_n en fonction de C_0 (et i) par $C_n = C_0(1+i)^n$.

Méthode 2: Notons C_n le capital après n années. Après une année, on ajoute au capital initial un montant d'argent correspondant à i fois le capital initial. Ainsi, $C_1 = C_0 + i \cdot C_0 = C_0(1+i)$. Pour calculer C_2, on n'a qu'à considérer que le nouveau capital initial est de C_1. On déduit que $C_2 = C_1(1+i)$. En remplaçant C_1 par $C_0(1+i)$, on déduit que $C_2 = C_0(1+i)^2$. On répète pour le calcul de C_3, en constatant que d'une année à l'autre, on multiplie toujours le capital de l'année précédente par $1+i$. Ainsi, après n années on aura multiplié n fois le capital initial par $1+i$, ce qui signifie que $C_n = C_0(1+i)^n$.

1.7 Question 7

On place un capital C_0 à un taux d'intérêt annuel de i. Quelle sera la valeur de ce placement après n années si les intérêts sont versés 52 fois par année à intervalles réguliers?

Solution. Un versement d'intérêt consiste à payer $\frac{i}{52}$ du capital au début de la période correspondante. Ainsi, après un versement, le capital est de $C_0 + \frac{i}{52} \cdot C_0 = C_0(1 + \frac{i}{52})$. Comme c'était le cas dans l'exemple précédent, après chaque versement, on se trouve à avoir un capital correspondant à celui de la semaine précédente, multiplié par $1 + \frac{i}{52}$. Puisqu'il y a 52 versements d'intérêts dans une année, il y en aura $52n$ dans n années. Ainsi,

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{52}\right)^{52n}.$$

1.8 Question 8

La population d'une culture bactérienne double à toutes les 15 minutes. Notons P_0 la population au temps $t = 0$. Exprimez la population en fonction du temps où l'unité de temps choisie est l'heure. Donnez votre réponse sous la forme

$$P(t) = Ae^{Bt},$$

où A et B sont des constantes à déterminer.

Solution. $P(t) = P_0 e^{(4\ln 2)t}$ Si la population double (multipliée par 2) toutes les quinze minutes, elle quadruple (multipliée par 4) après 30 minutes, est multipliée par 8 après 45 minutes, et multipliée par 16 après une heure. Après t heures, la population initiale aura été multipliée t fois par 16, c'est-à-dire par 16^t. Ainsi, $P(t) = P_0 \cdot 16^t$. Pour respecter la forme de la réponse exigée, on doit exprimer 16^t autrement. On observe que par définition, $16^t = e^{t\log 16}$. Ainsi,

$$P(t) = P_0 e^{t\log 16} = P_0 e^{4t\log 2}.$$

Il y a donc différentes réponses possibles, notamment $A = P_0, B = \log 16$ de même que $A = P_0$ et $B = 4\log 2$.

1.9 Question 9

Pouvez-vous trouvez $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tel que $\log_5 x, \log_7 x \subset \mathbb{N}$?

Solution. Impossible : cela voudrait dire qu'un nombre x est à la fois une puissance de 5 et une puissance de 7.

1.10 Question 10

Notre objectif dans ce numéro est de montrer que la suite u_n (pour $n \geq 1$) définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

converge vers e. Pour cet exercice, nous considérons que la définition du nombre e correspond à la valeur de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Utilisez le théorème du binôme pour montrer que
$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq e.$$
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{k}{n}\right) = 1.$$
3. Utilisez la partie (b) et le théorème du binôme pour montrer que pour tout $n \geq n_0$,
$$\lim_{n\to\infty} u_n \geq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!}.$$
4. Conclure en faisant tendre n_0 vers l'infini dans (c), puis en utilisant (a) et le théorème des deux gendarmes.

Solution. Cet exercice sera corrigé en classe.

1.11 Question 11

La question précédente suggère qu'il est possible de définir le nombre e de la manière suivante :

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

En utilisant les propriétés de la fonction ln, de même que la règle de l'Hôpital, montrez que cette définition de e implique que $\ln e = 1$.

Solution. Cet exercice sera corrigé en classe.

Chapitre 2

Les fonctions puissances

2.1 Question 1

Soit $x, y \in,]0, \infty[$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrez les propriétés ci-dessous en supposant que x^α est défini par $e^{\alpha \log x}$.

1. $\log x^\alpha = \alpha \log x$

   Solution.

$$\begin{aligned} \log x^\alpha &= \log e^{\alpha \log x} && \text{par définition de } x^\alpha, && (2.1)\\ &= \alpha \log x && \text{d'après une propriété de la fonction log.} && (2.2) \end{aligned}$$

2. $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$

   Solution.

$$\begin{aligned} x^\alpha \cdot y^\alpha &= e^{\alpha \log x} \cdot e^{\alpha \log y} && \text{par définition de } x^\alpha \text{ et } y^\alpha, && (2.3)\\ &= e^{\alpha \log x + \alpha \log y} && \text{d'après une propriété de la fonction exp,} && (2.4)\\ &= e^{\alpha(\log x + \log y)}, && && (2.5)\\ &= e^{\alpha \log(xy)}, && \text{d'après une propriété de la fonction log,} && (2.6)\\ &= (xy)^\alpha, && \text{par définition de } (xy)^\alpha. && (2.7) \end{aligned}$$

3. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$

   Solution.

$$\begin{aligned} x^\alpha \cdot x^\beta &= e^{\alpha \log x} \cdot e^{\beta \log x} && \text{par définition de } x^\alpha \text{ et } x^\beta, && (2.8)\\ &= e^{\alpha \log x + \beta \log x} && \text{d'après une propriété de la fonction exp,} && (2.9)\\ &= e^{(\alpha+\beta) \log x}, && && (2.10)\\ &= x^{\alpha+\beta}, && \text{par définition de } x^{\alpha+\beta}. && (2.11) \end{aligned}$$

4. $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$

   Solution.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= \exp\left(\alpha \log \frac{x}{y}\right) && \text{par définition de } \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha, && (2.12)\\
&= \exp\left(\alpha(\log x - \log y)\right) && \text{d'après une propriété de la fonction log,} && (2.13)\\
&= \exp\left(\alpha \log x - \alpha \log y\right), && && (2.14)\\
&= \exp(\alpha \log x) \cdot \exp(-\alpha \log y) && \text{d'après une propriété de la fonction exp,} && (2.15)\\
&= \frac{x^\alpha}{y^\alpha} && \text{par définition de } x^\alpha \text{ et } y^\alpha. && (2.16)
\end{aligned}$$

5. $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$

   Solution.

$$\begin{aligned}
x^{-\alpha} &= e^{-\alpha \log x} && \text{par définition de } x^{-\alpha}, && (2.17)\\
&= \frac{1}{\exp(\alpha \log x)} && \text{d'après une propriété de la fonction exp,} && (2.18)\\
&= \frac{1}{x^\alpha} && \text{d'après la définition de } x^\alpha. && (2.19)
\end{aligned}$$

2.2 Question 2

Donnez une preuve non-constructive qu'un nombre irrationnel élevé à une puissance irrationnelle peut être un nombre rationnel. Suggestion: considérez le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Solution. On sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, alors nous avons un exemple d'un nombre irrationnel élevé à une puissance irrationnelle qui correspond à un nombre rationnel. Si ce n'est pas le cas, alors $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel. Prenons alors ce dernier nombre et élevons-le à la puissance $\sqrt{2}$. On obtient alors 2, un nombre rationnel. Ainsi, que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ soit rationnel ou non, nous sommes certains de l'existence de nombres rationnels qui s'écrivent comme un nombre irrationnel élevé à une puissance irrationnelle.

On dit qu'il s'agit d'une preuve non constructive, car on ne construit pas explicitement un nombre qui jouit de la propriété mentionnée.

2.3 Question 3

Qu'est-ce qui cloche dans ce raisonnement?

$$x^2 = \underbrace{x + x + ... + x}_{x \text{ fois}} \tag{2.20}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{x + x + ... + x}_{x \text{ fois}}\right) \tag{2.21}$$

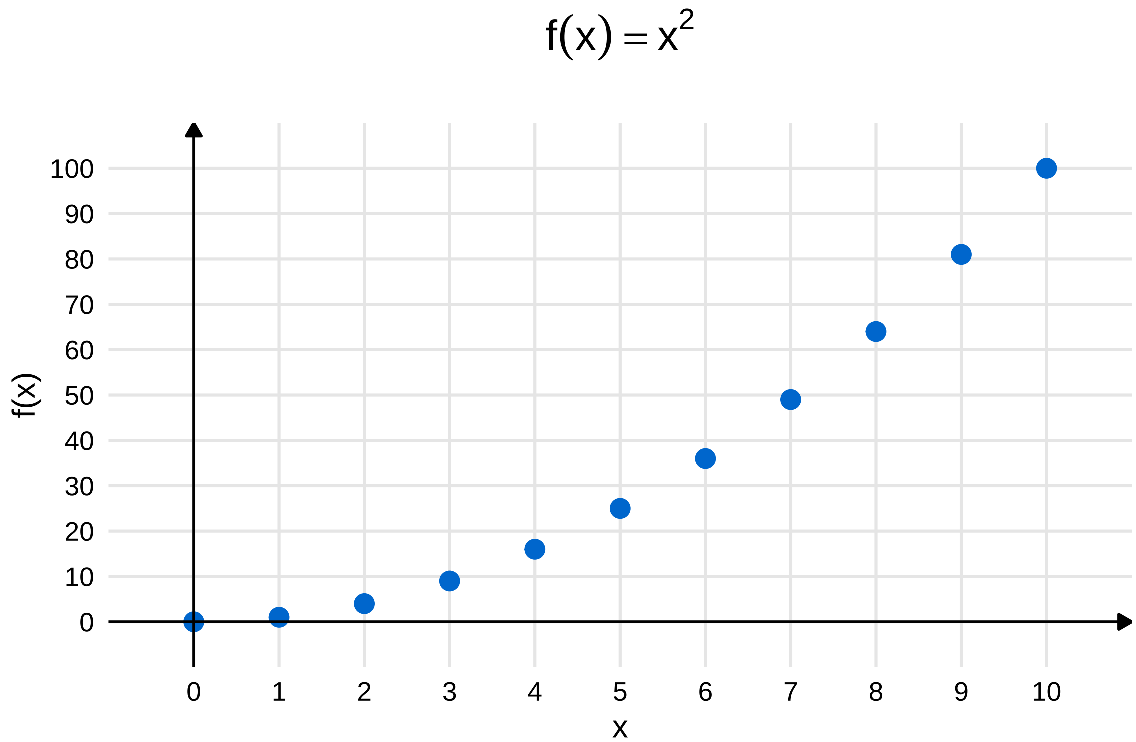
$$2x = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{x \text{ fois}} = x \tag{2.22}$$

$$2 = 1 \tag{2.23}$$

Solution. L'égalité n'est vraie que pour des valeurs de x correspondant à des nombres naturels. Voici le graphe de la fonction :

```
library(latex2exp)
library(ggplot2)
#| label: square-function
#| fig-width: 8
#| fig-height: 6
#| fig-align: center
#| fig-cap: "Fonction carré sur les entiers naturels de 0 à 10"



# Création des données pour les entiers de 0 à 10
df <- data.frame(
  n = 0:10,
  y = (0:10)^2
)

# Création du graphique
ggplot(df, aes(x = n, y = y)) +
  # Points
  geom_point(color = "#0066CC", size = 3) +

  # Axes avec flèches
  geom_segment(
    data = data.frame(
      x = c(-1, 0),
      xend = c(11, 0),
      y = c(0, -10),
      yend = c(0, 110)
    ),
```

```
    aes(x = x, y = y, xend = xend, yend = yend),
    arrow = arrow(length = unit(0.2, "cm"), type = "closed"),
    color = "black",
    linewidth = 0.5
  ) +

  # Personnalisation du thème
  theme_minimal(base_size = 12) +
  theme(
    plot.title = element_text(size = 16, hjust = 0.5, margin = margin(b = 20)),
    panel.grid.major = element_line(color = "gray90"),
    panel.grid.minor = element_blank(),
    plot.background = element_rect(fill = "white", color = NA),
    panel.background = element_rect(fill = "white", color = NA),
    axis.text = element_text(color = "black")
  ) +

  # Étiquettes
  labs(
    title = TeX("$f(x) = x^2$"),
    x = "x",
    y = "f(x)"
  ) +

  # Échelles
  scale_x_continuous(
    breaks = 0:10,
    limits = c(-1, 11),
    expand = c(0, 0)
  ) +
  scale_y_continuous(
    breaks = seq(0, 100, by = 10),
    limits = c(-10, 110),
    expand = c(0, 0)
  )
```



Comme une telle fonction n'est pas continue, elle ne peut pas être dérivable. En effet, pour des valeurs de h qui ne sont pas des nombres naturels, $f(x+h)$ n'est pas définie lorsque que x est un nombre naturel.

2.4 Question 4

Calculez la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

1. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

   Solution.
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. $h(x) = x^{\pi}$

   Solution.
$$h'(x) = \pi x^{\pi-1}$$

2.5 Question 5

Étudier la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ sur $\mathbb{R}$. Vous devrez entre autre déterminer son domaine de définition, calculer les dérivées première et seconde puis étudier leur signe à différents endroits. Finalement, vous devrez tracer la courbe représentative de la fonction f.

Solution. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ car la fonction x^3 prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ et elle bijective.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad (x \neq 0).$$

De même,

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \qquad (x \neq 0).$$

Pour $x \neq 0$, $f'(x) > 0$. Pour $x < 0$, $f''(x) > 0$ alors que $f''(x) < 0$ pour $x > 0$. Les dérivées d'ordre 1 et 2 ne sont pas définies en $x = 0$.

La fonction f est croissante et concave vers le haut sur $]-\infty, 0[$ alors qu'elle est croissante et concave vers le bas sur $]0, +\infty[$.

La courbe admet une tangente verticale en 0.

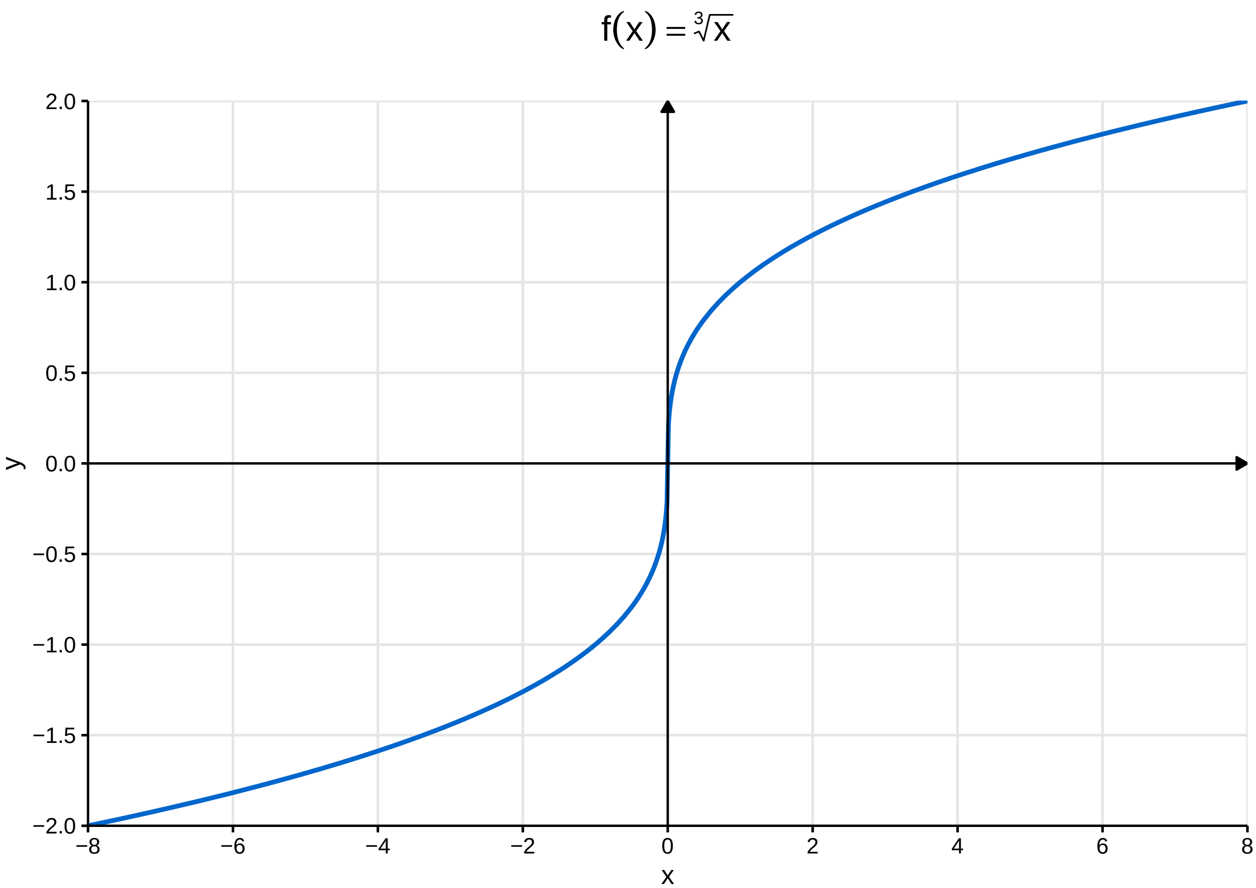


Figure 2.1: Graphique de la fonction racine cubique $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2.6 Question 6

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

   Solution.
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. $g(x) = (2x+3)^{\frac{3}{2}}$

   Solution.
$$g'(x) = \frac{3}{2}(2x+3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 3(2x+3)^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2x+3}$$

3. $h(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$

   Solution.
$$h'(x) = \frac{1}{3}(x^2-4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3(x^2-4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}$$

2.7 Question 7

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^2+1}$

   Solution.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\pi}}{x^3}$

   Solution.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\pi}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} x^{\pi-3} = +\infty \qquad (\text{car } \pi - 3 > 0)$$

2.8 Question 8

Résoudre dans $]0, +\infty[$:

1. $x^{\frac{1}{2}} = 2$

   Solution.
$$x^{\frac{1}{2}} = 2 \iff x = 4$$

2. $x^{-\frac{1}{3}} \leq 1$

Solution.

$$x^{-\frac{1}{3}} \leq 1 \iff x \geq 1$$

car la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et elle prend la valeur 1 lorsque $x = 1$.

3. $x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$

   Solution.

$$x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \iff x^{\frac{1}{2}}(x-1) = 0 \iff x = 0$$

ou $x = 1$. Dans $]0, +\infty[$, la seule solution est $x = 1$.

2.9 Question 9

On considère la fonction $f(x) = x^\alpha - x^\beta$ sur $]0, +\infty[$ avec $\alpha > \beta > 0$.

1. Trouvez les $x \in]0, +\infty[$ pour lesquels la dérivée de f s'annule.

   Solution. $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \beta x^{\beta-1}$

   $f'(x) = 0 \iff x^{\alpha-1}(\alpha - \beta x^{\beta-\alpha}) = 0$

   $\iff x = (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$ car $x > 0$.

2. Déterminer l'allure du graphe en utilisant le travail fait en (a).

   Solution. La valeur de x trouvée est $x_0 = (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$. On peut calculer la dérivée seconde et montrer qu'elle est positive à cet endroit. On peut aussi remarquer que la fonction s'annule seulement en $x = 0$ et en $x = 1$ alors qu'elle tend vers l'infini lorsque x devient très grand. Cela oblige f à posséder un minimum lorsque sa dérivée s'annule entre 0 et 1, sans quoi il y aurait forcément d'autres zéros de la dérivée première.

2.10 Question 10

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx$

   Solution.

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^1 = \frac{2}{3}$$

2. $\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}} dx$

   Solution.

$$\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

3. $\int_0^4 (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})dx$

   Solution.

$$\int_0^4 \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_{x=0}^{4} = \frac{3}{4}4^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}4^{\frac{5}{3}} = 3\sqrt[3]{4} + \frac{3\sqrt[3]{4^5}}{5}$$

2.11 Question 11

Montrez que pour tout $x > 0$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha x^\beta) = (\alpha + \beta)x^{\alpha+\beta-1}$$

Solution. On utilise la règle du produit :

$\frac{d}{dx}(x^\alpha x^\beta) = x^\alpha \cdot \frac{d}{dx}(x^\beta) + x^\beta \cdot \frac{d}{dx}(x^\alpha)$

$= x^\alpha \cdot \beta x^{\beta-1} + x^\beta \cdot \alpha x^{\alpha-1}$

$= (\alpha + \beta)x^{\alpha+\beta-1}$

Chapitre 3

L'intégrale de Riemann

Chapitre 4

Question 1

Évaluez les intégrales indéfinies ci-dessous.

1.
$$\int x(x^2+1)^{2007}\ dx$$

Solution. En posant $u = x^2+1$, on obtient que $\frac{du}{2} = x\,dx$. Par conséquent,

$$\int x(x^2+1)^{2007}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{2007}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{2008}}{2008} + C = \frac{(1+x^2)^{2008}}{4016} + C.$$

2.
$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

Solution. En posant $u = x-1$, on obtient que $du = dx$. Aussi, $x = u+1$. Par conséquent,

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (u+1)\sqrt{u}\,du \tag{4.1}$$
$$= \int u^{3/2}\,du + \int u^{1/2}\,du \tag{4.2}$$
$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \tag{4.3}$$
$$= \frac{2(x-1)^{5/2}}{5} + \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} + C \tag{4.4}$$

3.
$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

Solution. En posant $u = 1+e^{2x}$, on obtient que $\frac{du}{2} = e^{2x}\,dx$. Ainsi,

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{1+e^{2x}} + C.$$

4.

$$\int \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{2+\cos(2x)}$$

Solution. Remarquons en premier lieu que l'intégrande est composée de fonctions trigonométriques d'argument différent. Pour réussir à intégrer cette fonction, il serait souhaitable que les fonctions trigonométriques présentes aient le même argument.

Première méthode: L'argument commun des fonctions trigonométrique de l'intégrande est x.

Il nous faut ici utiliser une formule pour exprimer $\cos(2x)$ est fonction de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$. On sait que $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$. Par conséquent,

$$\int \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{2+\cos(2x)} = \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{2+\cos^2(x)-\sin^2(x)}.$$

En posant $u = 2+\cos^2(x)-\sin^2(x)$, on trouve que $du = -4\cos(x)\sin(x)\,dx$. Ainsi,

$$\int \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{2+\cos^2(x)-\sin^2(x)} = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{4}\log(2+\cos^2(x)-\sin^2(x)) + C.$$

Deuxième méthode: l'argument commun des fonctions trigonométrique de l'intégrande est $2x$.

On doit donc exprimer $\cos(x)\sin(x)$ en fonction de $\sin(2x)$ et de $\cos(2x)$. Or, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Par conséquent, nous avons que

$$\int \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{2+\cos(2x)} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin(2x)\,dx}{2+\cos(2x)}.$$

En posant $u = 2+\cos(2x)$, on trouve que $du = -2\sin(2x)\,dx$, et donc

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin(2x)\,dx}{2+\cos(2x)} = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{4}\ln(2+\cos(2x)) + C.$$

5.

$$\int e^x \sin(x)\,dx$$

Solution. On pose $u = e^x$ et $dv = \sin(x)\,dx$. Ainsi, $du = e^x\,dx$ et $v = -\cos(x)$. Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin(x)\,dx &= \int u\,dv && (4.5)\\
&= uv - \int v\,du && (4.6)\\
&= -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\,dx. \qquad (\star) && (4.7)
\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant effectuer l'intégrale de la fonction $e^x \cos(x)$. Encore une fois, on procède en utilisant la méthode d'intégration par parties. Posons $r = e^x$ et $ds = \cos(x)\,dx$. On obtient que $dr = e^x\,dx$ et $s = \sin(x)$. On a ainsi que

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \int r\,ds \tag{4.8}$$

$$= rs - \int s\,dr \tag{4.9}$$

$$= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx. \qquad (\star\star) \tag{4.10}$$

Nous voyons apparaître à nouveau l'intégrale qui est en fait l'inconnu de notre problème de départ. On pourrait penser que tout ce que nous avons fait dans ce problème jusqu'à présent est tourner en rond. Cependant, il n'en est rien de cela puisqu'en utilisant les équations $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient que

$$\int e^x \sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx \qquad \text{(d'après}(\star)) \tag{4.11}$$

$$= -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx. \qquad \text{(d'après}(\star\star)) \tag{4.12}$$

Ainsi, $2\int e^x \sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x)$, d'où

$$\int e^x \sin(x)\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C.$$

6.

$$\int \arctan(x)\,dx$$

Solution. On pose $u = \arctan(x)$ et $dv = dx$. Ainsi, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ et $v = x$. Nous avons donc que

$$\int \arctan(x)\,dx = \int u\,dv \tag{4.13}$$

$$= uv - \int v\,du \tag{4.14}$$

$$= x\arctan(x) - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}. \tag{4.15}$$

En posant $r = 1 + x^2$, on trouve que $\frac{dr}{2} = x\,dx$, d'où

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

Ainsi,

$$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C = x\arctan(x) - \log\left(\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

7.
$$\int \sin(\log x)\,dx$$

Solution. On pose $u = \sin(\log x)$ et $dv = dx$. Ainsi, $du = \frac{\cos(\log x)\,dx}{x}$ et $v = x$. Nous avons donc que

$$\int \sin(\log x)\,dx = \int u\,dv \tag{4.16}$$
$$= uv - \int v\,du \tag{4.17}$$
$$= x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)\,dx. \qquad (\star) \tag{4.18}$$

Il nous faut maintenant effectuer l'intégrale de la fonction $\cos(\log x)$. On procède encore en utilisant la méthode d'intégration par parties. Posons $r = \cos(\log x)$ et $ds = dx$. On obtient que $dr = -\frac{\sin(\log x)}{x}\,dx$ et $s = x$. On a ainsi que

$$\int \cos(\log x)\,dx = \int r\,ds \tag{4.19}$$
$$= rs - \int s\,dr \tag{4.20}$$
$$= x\cos(\log x) + \int \sin(\log x)\,dx. \qquad (\star\star) \tag{4.21}$$

Les équations $(\star)$ et $(\star\star)$ entraînent que

$$\int \sin(\log x)\,dx = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - \int \sin(\log x)\,dx,$$

d'où
$$\int \sin(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\log x) - \cos(\log x)\right) + C.$$

8.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solution. On pose $x = \cos\theta$, d'où $dx = -\sin\theta\,d\theta$. Ainsi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \tag{4.22}$$
$$= -\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}} \tag{4.23}$$
$$= -\int d\theta \tag{4.24}$$
$$= -\theta + C \tag{4.25}$$
$$= -\arccos x + C \tag{4.26}$$

9.

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Solution. On observe que le dénominateur s'annule lorsque $x = 1$. Ainsi, $x - 1$ est un de ses facteurs. En divisant $x^3 - x^2 + x - 1$ par $x - 1$, on obtient $1 + x^2$. Il existe donc des constantes A, B et C telles que

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}.$$

On trouve que $A = 1/2$ et $B = C = -1/2$. Comme $\int \frac{1/2\,dx}{x-1} = \frac{1}{2}\ln(x-1) + C_1$ et $\int -\frac{1}{2}\frac{(x+1)\,dx}{1+x^2} = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C_2$, il suit que

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C.$$

10.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x^2}}$$

Solution.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{1}{3}\sqrt{9+4x^2}} \tag{4.27}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{4x^2}{9}}} \tag{4.28}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2}} \tag{4.29}$$

Posons $u = \frac{2x}{3}$. Ainsi, $\frac{3}{2}\,du = dx$, d'où

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

On effectue maintenant le changement de variable $u = \tan\theta$. Nous avons donc que $du = \sec^2\theta\, d\theta$, ce qui nous permet d'écrire que

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \tag{4.30}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} \tag{4.31}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta \tag{4.32}$$

$$= \frac{1}{2}\log|\sec\theta + \tan\theta| + C \tag{4.33}$$

$$= \frac{1}{2}\log|\sqrt{1+u^2} + u| + C \tag{4.34}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\sqrt{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} + \frac{2x}{3}\right| + C \tag{4.35}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{3}\sqrt{9+4x^2} + \frac{2x}{3}\right| + C \tag{4.36}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{3}\left(\sqrt{9+4x^2} + 2x\right)\right| + C \tag{4.37}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log\left|\sqrt{9+4x^2} + 2x\right| + C \tag{4.38}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\sqrt{9+4x^2} + 2x\right| + D \tag{4.39}$$

11.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

Solution. En complétant le carré, on obtient que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}.$$

En posant $u = x - 1$, on trouve que $dx = du$, ce qui permet d'écrire

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}} \tag{4.40}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{1}{2}\sqrt{u^2+4}} \tag{4.41}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}} \tag{4.42}$$

$$= \int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}. \qquad \text{(en posant } v = u/2\text{)} \tag{4.43}$$

Au numéro précédent, nous avons montré que

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \log\left|\sqrt{1+v^2}+v\right| + C.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} &= \log\left|\sqrt{1+v^2}+v\right| + C && (4.44)\\
&= \log\left|\sqrt{1+u^2/4}+u/2\right| + C && (4.45)\\
&= \log\left|\frac{1}{2}\sqrt{4+u^2}+u/2\right| + C && (4.46)\\
&= \log\left|\frac{\sqrt{4+u^2}+u}{2}\right| + C && (4.47)\\
&= \log\left|\sqrt{4+u^2}+u\right| + D && (4.48)\\
&= \log\left|\sqrt{4+(x-1)^2}+x-1\right| + D && (4.49)
\end{aligned}$$

12.

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^{4x}}$$

Solution. Posons $u = e^{2x}$. Ainsi, $\frac{du}{2} = e^{2x}\,dx$ et $u^2 = e^{4x}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^{4x}} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} && (4.50)\\
&= \arctan(u) + C && (4.51)\\
&= \frac{\arctan(e^{2x})}{2} + C && (4.52)
\end{aligned}$$

4.1 Question 2

Évaluez les intégrales définies ci-dessous.

1.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

Solution. Nous avons que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}(\log b - \log 1) = \infty.$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx$$

Solution. Nous avons que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. Ainsi,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx \tag{4.53}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\,dx \tag{4.54}$$
$$= \frac{x}{2}\bigg|_{x=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\sin(2x)\bigg|_{x=-\pi}^{\pi} \tag{4.55}$$
$$= \pi \tag{4.56}$$

3.

$$\int_0^{\pi/4} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\,dx$$

Solution. Posons $u = \theta/2$. Ainsi, $2\,du = \,d\theta$. Nous avons donc que

$$\int_0^{\pi/4} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\,d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \tan(u)\,du \tag{4.57}$$
$$= 2\log|\sec u|\big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \tag{4.58}$$
$$= 2\log|\sec\theta/2|\big|_0^{\pi/4} \tag{4.59}$$
$$= 2\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{\cos 0}\right) \tag{4.60}$$
$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} - 1\right) \tag{4.61}$$
$$= \frac{2\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - 2 - \sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}} \tag{4.62}$$

Pour obtenir que $\cos(\pi/8) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, nous avons utilisé l'identité $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ en observant que $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et en posant $x = \pi/4$.

4.2 Question 3

Représentez la région bornée délimitée par les courbes $y = x\sin x$, $y = -x$, $x = 0$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ dans le plan Oxy. Déterminez ensuite son aire.

Solution. Nous allons représenter la région bornée délimitée par les courbes suivantes : 1. $y = x\sin(x)$ 2. $y = -x$ 3. $x = 0$ 4. $x = \frac{3\pi}{2}$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Création des points pour les courbes
x = np.linspace(0, 3*np.pi/2, 1000)
y1 = x * np.sin(x)  # Courbe y = x*sin(x)
y2 = -x             # Droite y = -x
# Création de la figure
plt.figure(figsize=(7.5, 8))
# Tracer les courbes
plt.plot(x, y1, 'b-', label='y = x·sin(x)')
plt.plot(x, y2, 'r-', label='y = -x')  # Changé ici de 'b-' à 'r-'
# Remplir la région entre les courbes
plt.fill_between(x, y1, y2, color='darkblue', alpha=0.3)
plt.axvline(x=3*np.pi/2, color='k', linestyle='--', label='x = 3 /2')
# Paramètres des axes
plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='-', alpha=0.3)
plt.axvline(x=0, color='k', linestyle='-', alpha=0.3)
# Étiquettes des axes
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
# Limites des axes
plt.xlim(-0.1, 5)
plt.ylim(-5, 5)
# Ajouter les ticks spéciaux pour
ticks = [0, np.pi/2, np.pi, 3*np.pi/2]
labels = ['0', ' /2', ' ', '3 /2']
plt.xticks(ticks, labels)
# Ajouter une grille
plt.grid(True, alpha=0.3)
# Ajouter une légende
plt.legend()
# Ajuster la mise en page
plt.tight_layout()
# Afficher le graphique
plt.show()
```

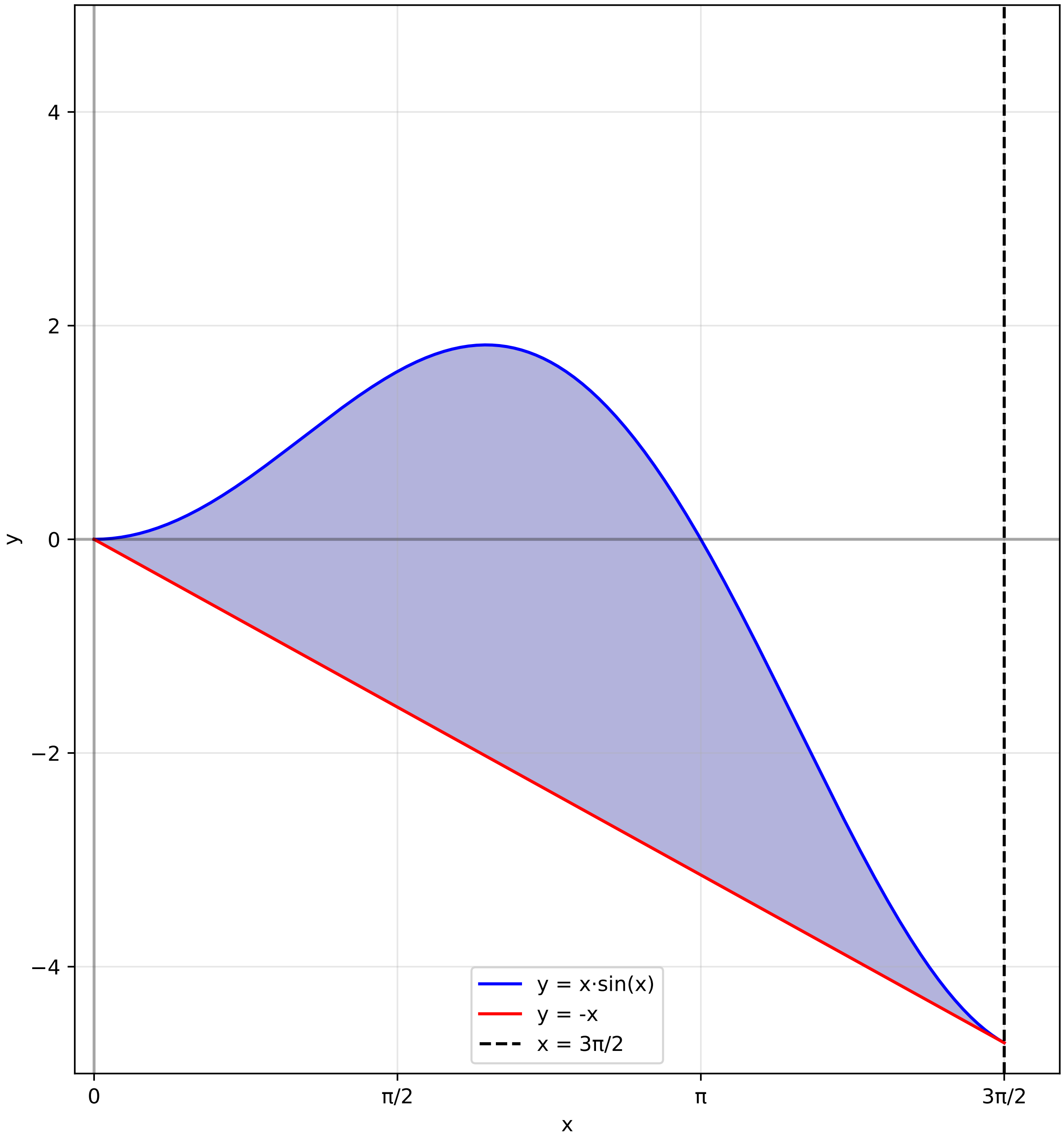


Figure 4.1: Région bornée par les courbes

L'aire de la région considérée correspond à l'intégrale $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (x\sin(x) - (-x))\, dx$. D'abord, en intégrant par parties, on trouve que la fonction $-x\cos(x) + \sin(x)$ est une primitive de la fonction $x\sin(x)$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (x\sin(x) - (-x))\,dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} x\sin(x)\,dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} x\,dx \tag{4.63}$$

$$= (-x\cos(x) + \sin(x))\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} \tag{4.64}$$

$$= \frac{9\pi^2 - 8}{8} \tag{4.65}$$

4.3 Question 4

En utilisant la méthode de Riemann, montrez que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

Solution. On divise l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de longueur $1/n$. Soit A_n l'aire de la région occupée par les n rectangles inscrits sous la parabole. Posons $f(x) = x^2$. Ainsi,

$$A_n = \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f\left(0 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(0 + \frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n}f\left(0 + \frac{n-1}{n}\right) \tag{4.66}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{4.67}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} \tag{4.68}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \tag{4.69}$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2(n-1)+1)}{6} \tag{4.70}$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \tag{4.71}$$

Au passage, nous avons utilisé la formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi,

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \tag{4.72}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \tag{4.73}$$

$$= 1/3. \tag{4.74}$$

4.4 Question 5

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction continue et impaire sur l'intervalle $[-a, a]$. Montrez que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Solution. Géométriquement, le fait que la fonction soit impaire entraîne que l'axe des x partage la région entre le graphe de la fonction et l'axe des x en deux régions dont l'aire géométrique est la même. La région sous l'axe des x possède une aire algébrique négative, et celle au-dessus de l'axe des x possède une aire algébrique positive. Donc en choisissant un intervalle qui possède son point milieu en 0, on a nécessairement que la somme de l'aire (algébrique) de la région considérée est nulle.

$$\begin{align}
\int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} -f(-x)\,dx && \text{(car } f(-x) = -f(x) \text{ si } f \text{ est impaire)} \tag{4.75}\\
&= -\int_{x=-a}^{x=0} f(-x)\,dx \tag{4.76}\\
&= \int_{x=-a}^{x=0} f(u)\,du && \text{(en posant } u = -x\text{)} \tag{4.77}\\
&= \int_{u=a}^{u=0} f(u)\,du \tag{4.78}\\
&= -\int_{u=0}^{u=a} f(u)\,du && \text{(propriété de l'intégrale)} \tag{4.79}\\
&= -\int_{0}^{a} f(u)\,du. \tag{4.80}
\end{align}$$

4.5 Question 6

Évaluez l'intégrale définie

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{2017} \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\,dx.$$

Solution. La fonction est impaire et l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à 0, donc l'intégrale vaut 0.

Chapitre 5

Les fonctions hyperboliques

5.1 Question 1

1. La fonction $\tanh x$ est définie par :

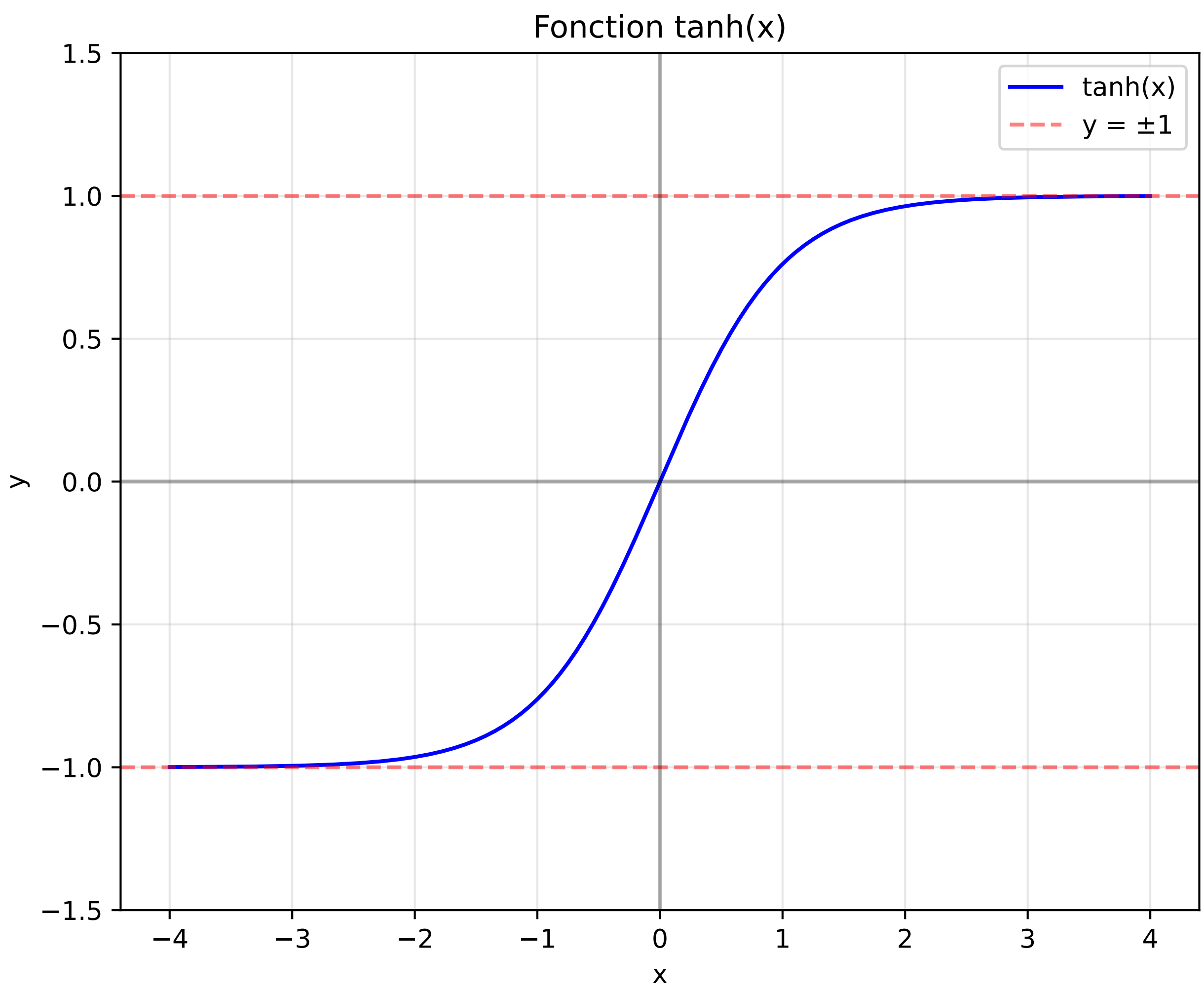
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Effectuez l'analyse de cette fonction afin de pouvoir esquisser son graphique.

Solution

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Création des données
x = np.linspace(-4, 4, 1000)  # Intervalle de -4 à 4
y = np.tanh(x)

# Création de la figure
plt.figure(figsize=(7.5, 6))

# Tracé de la fonction
plt.plot(x, y, 'b-', label='tanh(x)')

# Ajout des asymptotes horizontales
plt.axhline(y=1, color='r', linestyle='--', alpha=0.5, label='y = ±1')
plt.axhline(y=-1, color='r', linestyle='--', alpha=0.5)

# Ajout des axes
plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='-', alpha=0.3)
plt.axvline(x=0, color='k', linestyle='-', alpha=0.3)

# Configuration du graphique
```

```
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.title('Fonction tanh(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()

# Ajustement des limites
plt.ylim(-1.5, 1.5)

plt.show()
```



2. Montrez que la fonction réciproque de $\tanh x$, notée $\operatorname{arctanh} x$, peut s'exprimer par

$$\operatorname{arctanh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Solution. Montrons que $\operatorname{arctanh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Posons $y = \operatorname{arctanh} x$. Par définition, cela signifie que $x = \tanh y$. La fonction tanh est définie par :

$$\tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$

Donc nous avons que $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$. Multiplions les deux membres par $(e^y + e^{-y})$:

$$x(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y}.$$

Développons :

$$xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y}.$$

Regroupons les termes en e^y et e^{-y} :

$$e^y(x-1) = e^{-y}(x+1).$$

Donc :

$$\frac{e^y}{e^{-y}} = \frac{x+1}{1-x}. \qquad (x \neq 1)$$

Simplifions :

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}.$$

Prenons le logarithme naturel des deux côtés :

$$2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Donc :

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Puisque $y = \operatorname{arctanh} x$, nous avons bien

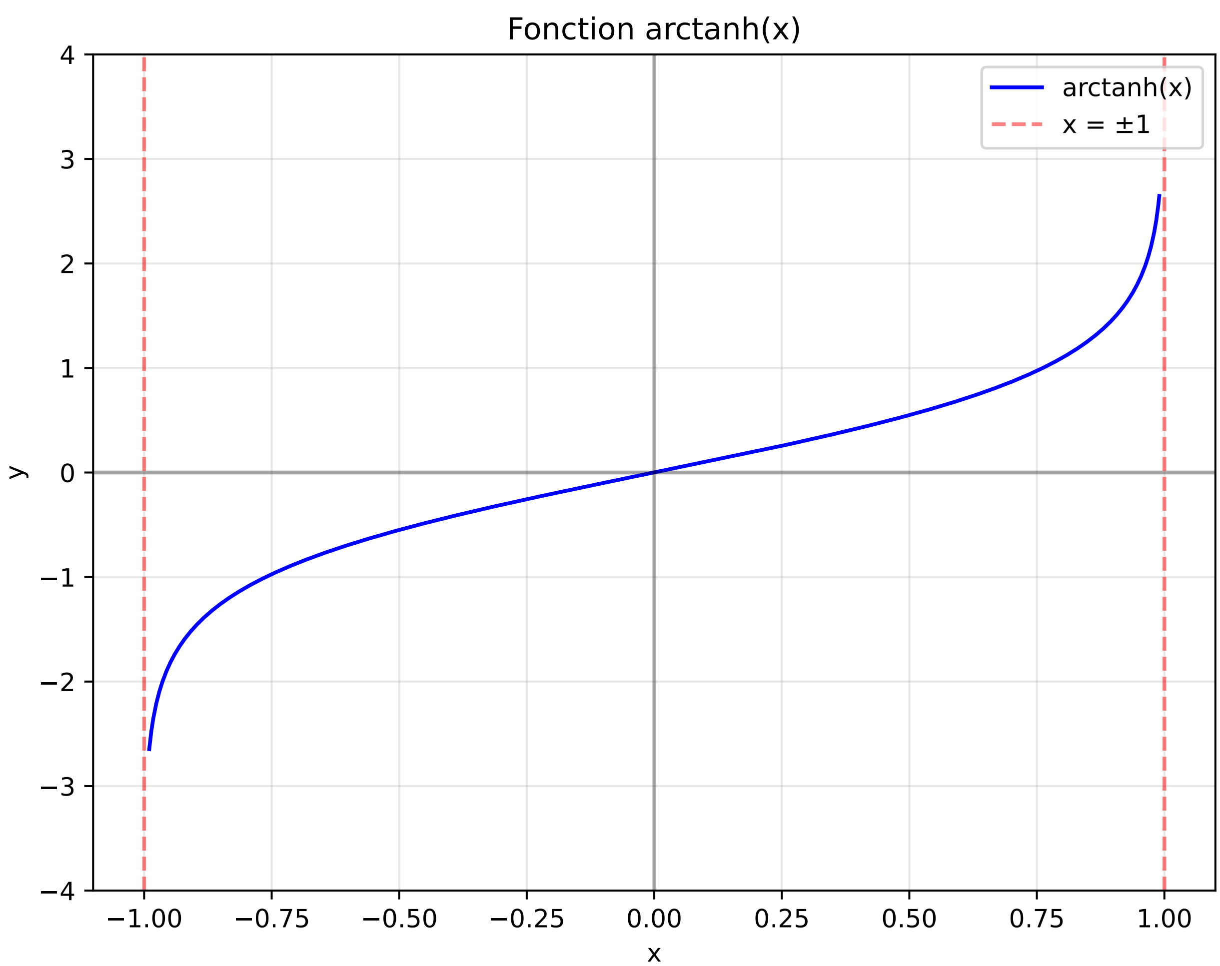
$$\operatorname{arctanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

3. Esquissez le graphique de $\operatorname{arctanh} x$.

Solution.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Création des données
x = np.linspace(-0.99, 0.99, 1000)  # On évite -1 et 1 car arctanh non défini
y = np.arctanh(x)
# Création de la figure
plt.figure(figsize=(8, 6))
# Tracé de la fonction
```

```
plt.plot(x, y, 'b-', label='arctanh(x)')
# Ajout des axes
plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='-', alpha=0.3)
plt.axvline(x=0, color='k', linestyle='-', alpha=0.3)
# Ajout des asymptotes verticales
plt.axvline(x=1, color='r', linestyle='--', alpha=0.5, label='x = ±1')
plt.axvline(x=-1, color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
# Configuration du graphique
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.title('Fonction arctanh(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
# Ajustement des limites pour mieux voir les asymptotes
plt.ylim(-4, 4)
plt.xlim(-1.1, 1.1)
plt.show()
```



5.2 Question 2

Exprimez $\cosh(x+y)$ en fonction de $\cosh x$, $\cosh y$, $\sinh x$ et $\sinh y$.

Solution. Exprimons $\cosh(x+y)$ en fonction de $\cosh x$, $\cosh y$, $\sinh x$ et $\sinh y$. Rappelons que $\cosh(x+y)$ peut s'écrire en utilisant la forme exponentielle

$$\cosh(x+y) = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2}.$$

Développons e^{x+y} et $e^{-(x+y)}$:

$$\cosh(x+y) = \frac{e^x e^y + e^{-x}e^{-y}}{2}.$$

Rappelons les formules :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Donc :

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad \text{et} \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

Substituons ces expressions dans notre équation :

$$\cosh(x+y) = \frac{(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) + (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)}{2}.$$

Développons les produits :

$$\cosh(x+y) = \frac{1}{2}\left(\cosh x \cosh y + \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y + \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y\right. \tag{5.1}$$

$$\left. - \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y + \sinh x \sinh y\right). \tag{5.2}$$

Regroupons les termes semblables :

$$\cosh(x+y) = \frac{2\cosh x \cosh y + 2\sinh x \sinh y}{2}$$

Simplifions :

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Nous avons donc la formule cherchée : $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

5.3 Question 3

1. Résolvez l'équation $\sinh(2x) = 3$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\cosh(2x) = \sqrt{10}$.

3. Ces deux équations sont-elles liées ? Justifier votre réponse.

Solution. 1. Par définition,

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 3.$$

On en déduit que $e^{2x} - e^{-2x} = 6$. Posons $y = e^{2x}$. Ainsi, $y - \frac{1}{y} = 6$, d'où $y^2 - 6y - 1 = 0$. On en déduit que

$$y = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Comme $e^{2x} > 0$, on déduit que $e^{2x} = 3 + 2\sqrt{2}$. En prenant le logarithme, on arrive à isoler x pour obtenir

$$x = \frac{1}{2} \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

2. Utilisons l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, valable pour toute valeur de x. Si $\sinh(2x) = 3$, alors $\cosh^2(2x) = 10$. Ainsi, $\cosh(2x) = \pm\sqrt{10}$. Comme $\cosh(x) \geq 1$ pour tout x, $\cosh(2x) = \sqrt{10}$. On trouve la même solution, à savoir

$$x = \frac{1}{2} \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

3. Ces équations sont liées par l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Quand on connaît $\sinh(2x)$, on peut déduire $\cosh(2x)$. Les solutions sont les mêmes car $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$ sont liés.

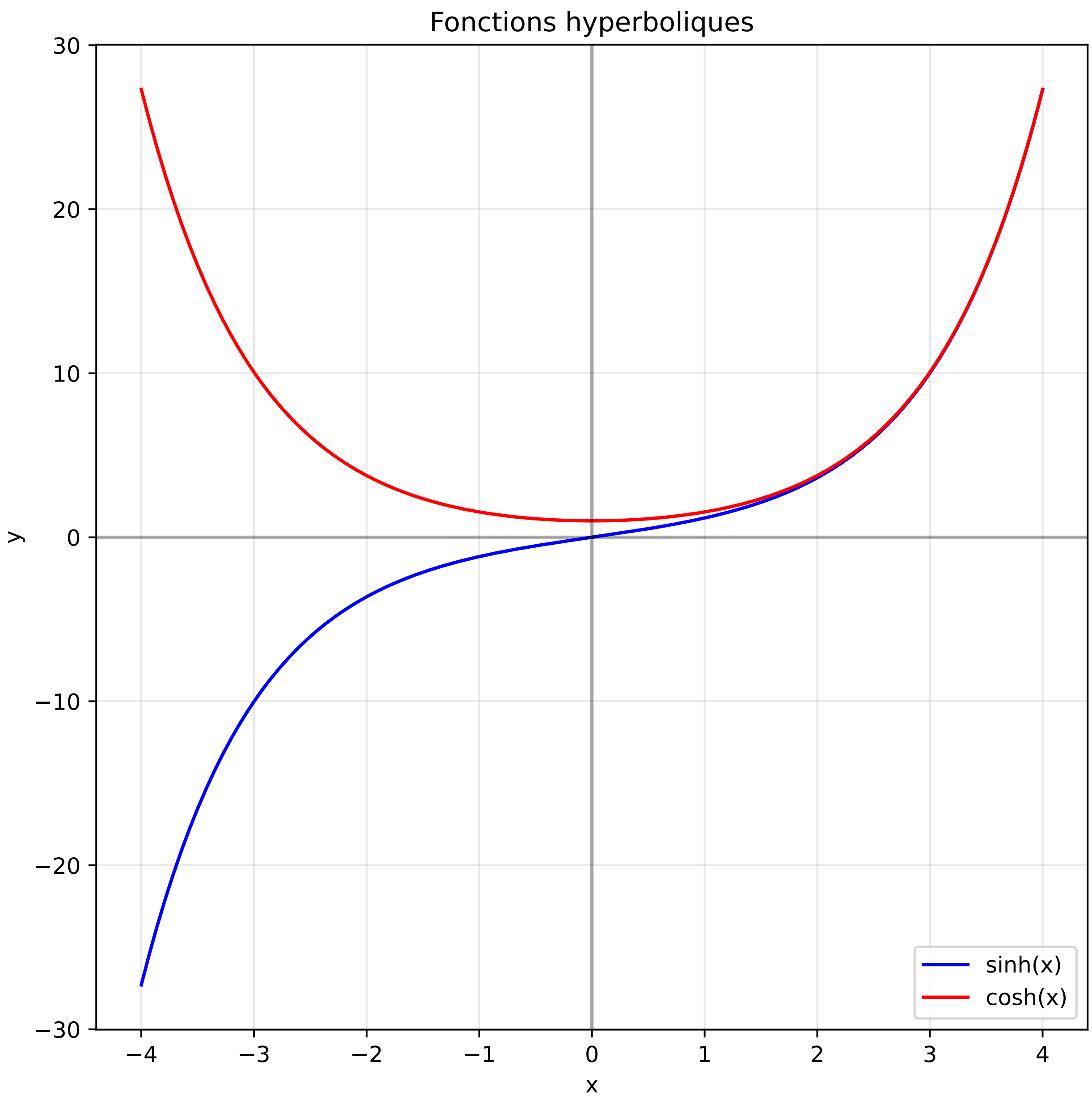
5.4 Question 4

Tracer sur un même graphique les fonctions $f(x) = \sinh(x)$ et $g(x) = \cosh(x)$.

Solution.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Création des données
x = np.linspace(-4, 4, 1000)
sinh = np.sinh(x)
cosh = np.cosh(x)

# Création du graphique
plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(x, sinh, 'b-', label='sinh(x)')
plt.plot(x, cosh, 'r-', label='cosh(x)')

# Configuration du graphique
plt.grid(True, alpha=0.3)
```

```
plt.title('Fonctions hyperboliques')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='-', alpha=0.3)
plt.axvline(x=0, color='k', linestyle='-', alpha=0.3)

plt.show()
```



Analyse du graphique 1. La fonction $\sinh(x)$: * Est impaire * Passe par l'origine *

N'atteint pas de maximum ni de minimum

2. La fonction $\cosh(x)$:
   - Est paire
   - A un minimum de 1 en $x = 0$
   - Ne possède pas de maximum

5.5 Question 5

Démontrer les identités suivantes :

1. $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$
2. $\tanh(x) + \tanh(y) = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x)\cosh(y)}$

Solution. 1. Démarche semblable à celle exigée à la question 2.

2. Nous avons que

$$\tanh(x) + \tanh(y) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} + \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} \tag{5.3}$$
$$= \frac{\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)} \tag{5.4}$$
$$= \frac{\sinh(x + y)}{\cosh(x)\cosh(y)} \qquad \text{(d'après (a))}. \tag{5.5}$$

5.6 Question 6

Un câble pesant est suspendu entre deux points situés à une hauteur commune de 50 mètres et distants de 10 mètres. Le point le plus bas du câble est à 10 mètres sous les points de suspension. Trouvez l'équation de la chaînette passant par ces points. Remarques : vous pouvez supposer que la droite $x = 0$ est un axe de symétrie de la chaînette. Aussi, vous aurez besoin d'utiliser un logiciel pour calculer un des paramètres.

Solution. La solution sera présentée en classe.

L'équation d'une chaînette est de la forme $y = a\cosh(\frac{x}{a}) + k$. Les points de suspension sont en $(-5, 0)$ et $(5, 0)$ et le point le plus bas est en $(0, -2)$. Ainsi, nous obtenons les équations

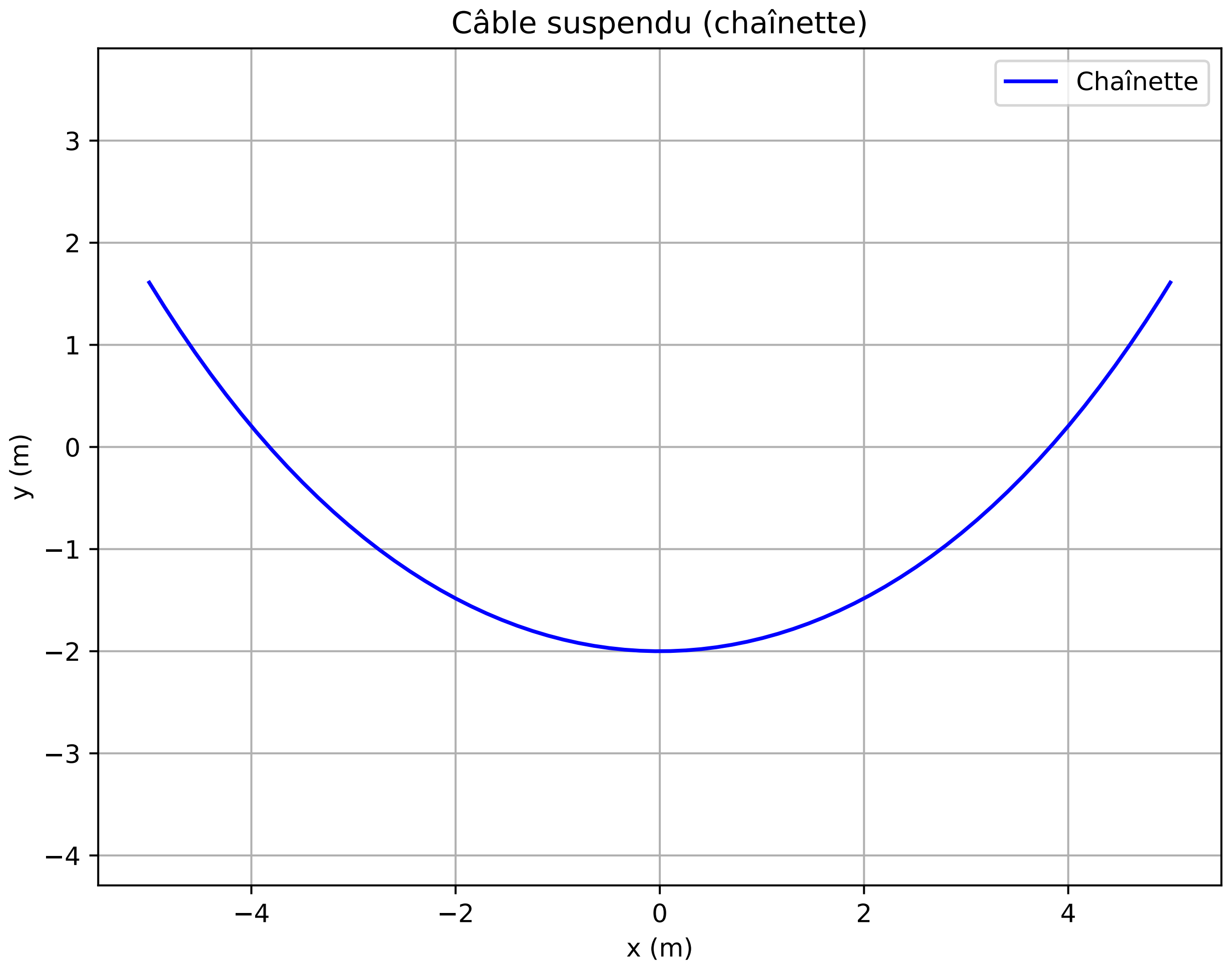
$$-2 = a\cosh(0) + k, \tag{5.6}$$
$$0 = a\cosh(5/a) + k. \tag{5.7}$$

$$-2 = a + k, \tag{5.8}$$
$$0 = a\cosh(5/a) + -2 - a. \tag{5.9}$$

L'équation $0 = a\cosh(5/a) + -2 - a$ se résout numériquement (par exemple avec WolframAlpha). On trouve que $a \approx 3.95$. On en déduit ensuite que $k \approx -5.95$. Ainsi, l'équation de la chaînette est

$$y = 3.95\cosh\left(\frac{x}{3.95}\right) - 5.95.$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres
a = 3.95
k = -5.95

# Points
x = np.linspace(-5, 5, 1000)
y = a * np.cosh(x/a) + k

# Graphique
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x, y, 'b-', label='Chaînette')
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
plt.title('Câble suspendu (chaînette)')
plt.xlabel('x (m)')
plt.ylabel('y (m)')
plt.legend()
plt.show()
```



b) La longueur du câble est donnée par : $L = 2a\sinh(5/a) \approx 10.49$ mètres

Chapitre 6

Les équations différentielles

6.1 Question 1

Résoudre l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = 2xy$

Solution. D'abord, on réorganise l'équation comme $\frac{1}{y}dy = 2xdx$. Nous avons divisé par y, que nous supposons différente de la fonction identiquement nulle pour la suite. Remarquons que la fonction identiquement nulle est une solution de l'équation différentielle.

Intégrons les deux membres de l'équation : $\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx$. Nous obtenons que$\ln|y| = x^2 + C$. En prenant l'exponentielle, nous obtenons que $|y| = e^C e^{x^2}$. Ainsi, $|y| = C_1 e^{x^2}$, où C_1 est une constante strictement positive. De là nous avons que $y = C_2 e^{x^2}$, où C_2 est une constante réelle non nulle. Finalement, on se rappelle que $y = 0$ est solution de l'équation différentielle de départ, ce qui nous permet d'écrire que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est formé de toutes les fonctions de la forme $y = Ke^{x^2}, K \in \mathbb{R}$.

6.2 Question 2

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Solution. On sépare les variables pour obtenir l'équation $ydy = xdx$. On intègre ensuite les deux membres de l'équation : $\int ydy = \int xdx$. Nous obtenons que $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$. Ainsi, la solution générale est

$$y = \pm\sqrt{x^2 + K},$$

où K est une constante arbitraire.

6.3 Question 3

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Solution. On sépare les variables pour obtenir l'équation $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. On a divisé par y, on supposera donc pour la suite que y n'est pas identiquement nulle. On remarque aussi que la fonction identiquement nulle est une solution de l'équation différentielle.

On intègre ensuite les deux membres de l'équation : $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$. Nous obtenons que $\ln|y| = \ln|x| + C$. Comme la fonction ln est une bijection des réels strictement positifs vers $\mathbb{R}$, il existe un unique $k \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $C = \ln k$. Ainsi,

$$\ln|y| = \ln|x| + C = \ln|x| + \ln k = \ln k|x|.$$

L'injectivité de la fonction ln implique que $y = \pm k|x|$. Si on trace ces courbes, on constate qu'il s'agit des droites de pente non nulle passant par l'origine. Comme la droite $y(x) = 0$ est une solution (on l'a remarqué plus tôt), l'ensemble des solutions consiste à être l'ensemble des droites passant par l'origine, c'est-à-dire aux courbes d'équation $y(x) = Dx, D \in \mathbb{R}$.

6.4 Question 4

Résoudre l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = y^2$

Solution. On constate que $y(x) = 0$ est une solution. Maintenant, pour trouver les solutions non nulles, divisons par y^2 pour séparer les variables. On obtient ainsi que

$$\frac{dy}{y^2} = dx.$$

En intégrant chacun des membres de l'équation, nous obtenons que

$$-\frac{1}{y} = x + C,$$

où C est une constante réelle arbitraire. On isole par la suite y, pour obtenir une solution de la forme

$$y = -\frac{1}{x+K},$$

où K est une constante réelle arbitraire.

6.5 Question 5

Résoudre l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

Solution. Pour résoudre cette équation, commençons par réorganiser les termes afin de séparer les variables. En multipliant chaque membre par e^y, nous obtenons

$$e^y dy = e^x dx.$$

En intégrant chacun des membres de l'équation, nous obtenons que

$$e^y = e^x + C,$$

où C est une constante réelle arbitraire. On isole par la suite y en appliquant le logarithme naturel de chaque côté, pour obtenir une solution de la forme

$$y(x) = \ln(e^x + C).$$

6.6 Question 6

Lorsqu'une personne avale une substance toxique, son foie tente de l'éliminer. Généralement, le taux d'élimination de la quantité de substance encore présente dans l'organisme au temps t — que nous noterons $Q(t)$ — est proportionnel à la quantité de substance encore présente dans l'organisme au temps t. Au temps $t = 0$, Jocelyn a avalé une quantité Q_0 d'un liquide toxique. Après 3 heures, on a estimé que son foie avait éliminé 50% du liquide. D'après ce modèle, combien d'heures se seront écoulées entre le moment où Jocelyn a avalé le produit et celui où il en aura éliminé 90%?

6.7 Question 7

Un vêtement pesant 50 grammes est plongée dans un bassin d'eau. En le sortant du bassin, au temps $t = 0$, sa masse est de 200 grammes. On l'étend immédiatement sur une corde à linge pour qu'il sèche. On observe qu'après 180 minutes, sa masse est de 100 grammes. Combien de minutes se seront écoulées entre le moment où le vêtement est sorti du bassin et celui où il aura évacué 99% de l'eau qu'il contenait initialement? Arrondissez à la minute. Pour répondre à cette question, on fera l'hypothèse que le taux d'évaporation d'eau dans le vêtement est proportionnel à la quantité d'eau présente dans celui-ci.

6.8 Question 8

Un réservoir contient initialement 100 kg de lait écrémé (le pourcentage de matière grasse du lait écrémé est de 0 %). Au temps $t = 0$, on commence à y verser, à un taux constant de 10 kg/minute, du lait dont le pourcentage de matière grasse est de 4 %. Au même moment, un drain évacue le lait du réservoir vers le camion réfrigérée, à un taux constant de 10 kg/minute. Pour répondre à cette question, on fera l'hypothèse que le mélangeur du réservoir permet de garder son contenu homogène.

1. Soit M la masse (en kg) de matière grasse dans le réservoir en fonction du temps t (en minutes). Trouvez la fonction $M(t)$.
2. Évaluez $\lim_{t\to\infty} M(t)$.

Solution. 1. Pendant un petit intervalle de temps Δt minutes, il entre $10\Delta t$ kilogrammes de lait, qui contient une proportion $4/100$ de matières grasses. Donc la masse de matières grasses entrant est

$$M_{\text{entrant}} = \frac{4}{100} \times 10\Delta t = 0{,}4\Delta t$$

Pendant le même intervalle, il sort une masse $10\Delta t$ de lait. La proportion de matières grasses dans ce lait est $M(t)/100$. Ainsi, on a

$$M_{\text{entrant}} = \frac{M(t)}{100} \times 10\Delta t = \frac{M(t)}{10}\Delta t.$$

Le changement dans $M(t)$ est donc

$$\Delta M = M_{\text{entrant}} - M_{\text{sortant}} = 0{,}4\Delta t - \frac{M(t)}{10}\Delta t.$$

Ainsi

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = 0{,}4 - \frac{M(t)}{10}.$$

Quand Δt tend vers 0, le membre de gauche tend vers $M'(t)$, et on obtient

$$M'(t) = 0{,}4 - \frac{M(t)}{10}.$$

Cette équation est séparable. On a

$$\frac{dM}{0{,}4 - \frac{M}{10}} = dt,$$

qui est équivalente à

$$\int \frac{10dM}{4 - M} = \int dt.$$

On intègre et on obtient que

$$-10 \ln |4 - M| = t + C,$$

équation qui est équivalente à

$$|4 - M| = ke^{-t/10}.$$

Puisque $M(0) = 0$, on en déduit que $k = 4$ et finalement

$$M(t) = 4 - 4e^{-t/10}.$$

2. Puisque $e^{-t/10} \to 0$ quand $t \to \infty$, on a $\lim_{t\to\infty} M(t) = 4$. Intuitivement, ce résultat est évident car à la longue, on s'attend à ce que l'état initial devienne négligeable et que la proportion de gras dans le lait du réservoir soit la même que celle du lait qu'on y ajoute.

partie II

Problèmes résolus

Chapitre 7

Le ballon météorologique

Un ballon est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de 10 m/s. En tenant compte de la résistance de l'air, sa hauteur (en mètres) après t secondes est donnée par la fonction :

$$h(t) = 50\ln(\cosh(0.2t)) + 10t - 4.9t^2$$

À quel moment le ballon atteint-il son altitude maximale ?

7.0.1 1. Visualisation du problème

Commençons par visualiser la hauteur du ballon en fonction du temps :

```
library(ggplot2)
library(dplyr)
```

```

Attaching package: 'dplyr'

The following objects are masked from 'package:stats':

    filter, lag

The following objects are masked from 'package:base':

    intersect, setdiff, setequal, union
```

```
# Fonction hauteur
h <- function(t) {
  50 * log(cosh(0.2 * t)) + 10 * t - 4.9 * t^2
```

```r
}

# Création des données
t_vals <- seq(0, 3, by = 0.01)
height_data <- data.frame(
  t = t_vals,
  height = sapply(t_vals, h)
)

# Graphique
ggplot(height_data, aes(x = t, y = height)) +
  geom_line(color = "blue", size = 1) +
  labs(x = "Temps (s)", y = "Hauteur (m)") +
  theme_minimal() +
  ggtitle("Trajectoire du ballon")
```

```
Warning: Using `size` aesthetic for lines was deprecated in ggplot2 3.4.0.
i Please use `linewidth` instead.
```

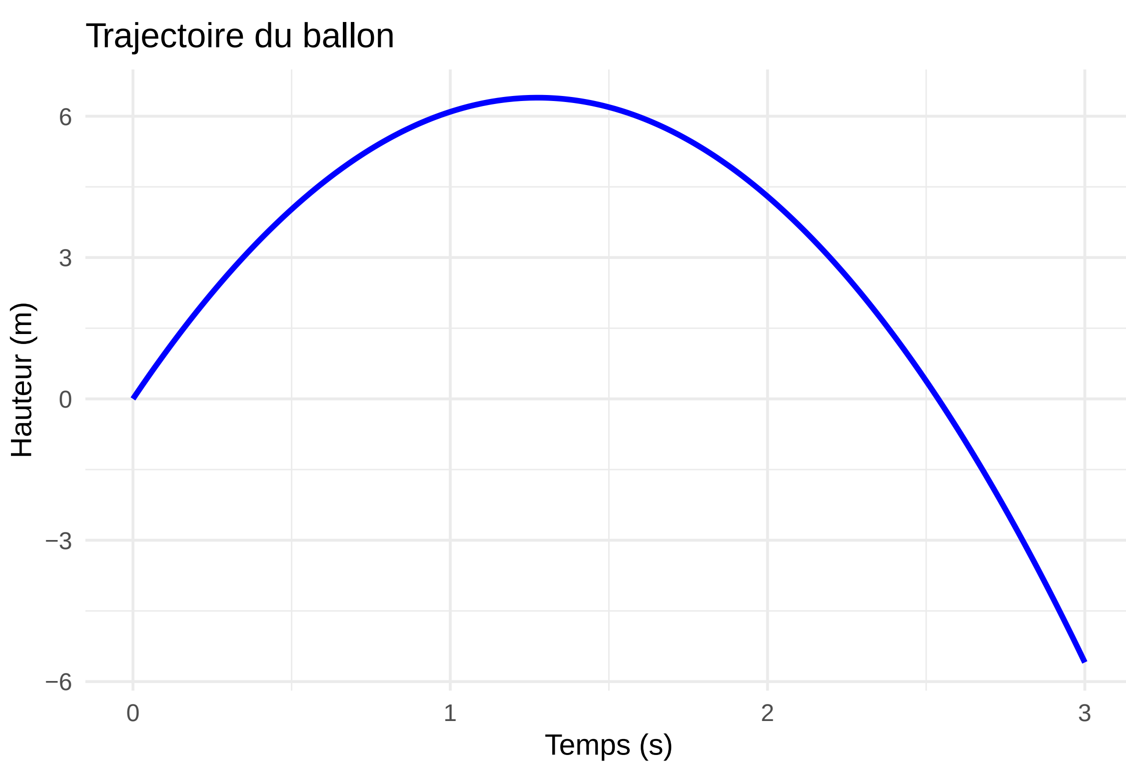


Figure 7.1: Hauteur du ballon en fonction du temps

7.0.2 2. La vitesse du ballon

La vitesse est la dérivée de la hauteur. Pour trouver le point culminant, nous devons trouver quand la vitesse est nulle.

$$v(t) = h'(t) = 10\tanh(0.2t) + 10 - 9.8t$$

Visualisons la vitesse :

```
# Fonction vitesse
v <- function(t) {
  10 * tanh(0.2 * t) + 10 - 9.8 * t
}

# Création des données
velocity_data <- data.frame(
  t = t_vals,
  velocity = sapply(t_vals, v)
)

# Graphique
ggplot(velocity_data, aes(x = t, y = velocity)) +
  geom_line(color = "red", size = 1) +
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed") +
  labs(x = "Temps (s)", y = "Vitesse (m/s)") +
  theme_minimal() +
  ggtitle("Vitesse du ballon")
```

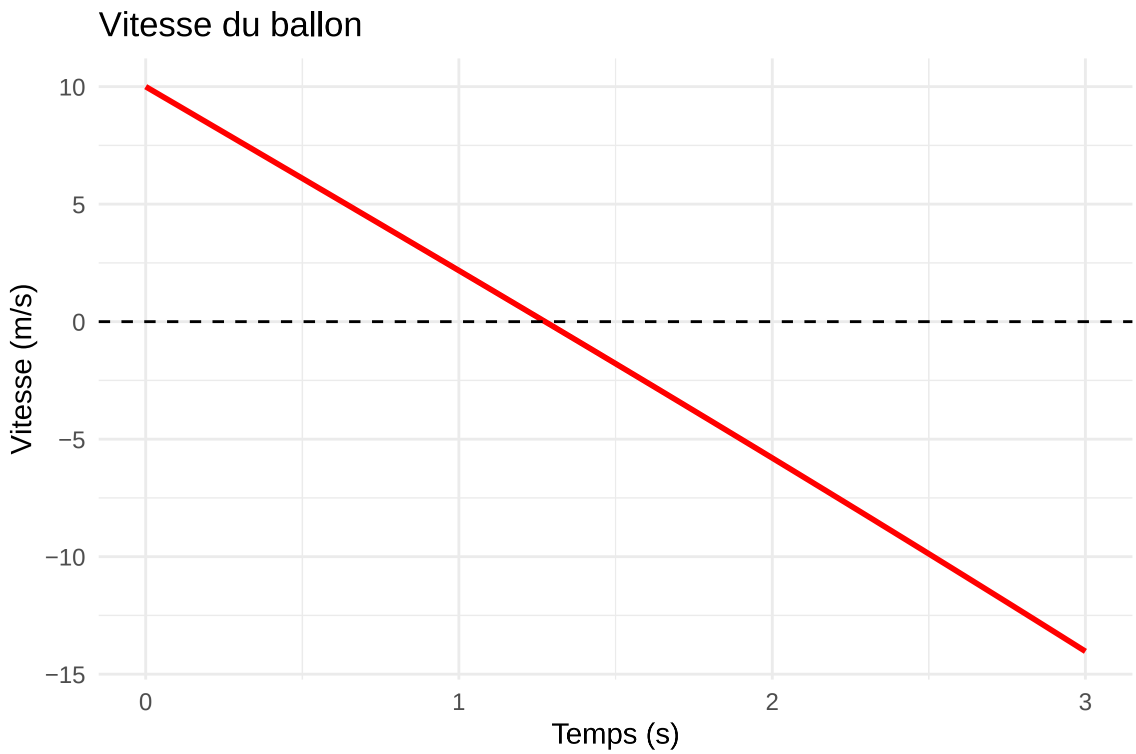


Figure 7.2: Vitesse du ballon en fonction du temps

7.0.3 3. Méthode de Newton-Raphson

Pour trouver quand la vitesse est nulle, nous devons résoudre :

$$f(t) = 10\tanh(0.2t) + 10 - 9.8t = 0$$

La dérivée de cette fonction est :

$$f'(t) = 2\,\mathrm{sech}^2(0.2t) - 9.8$$

Implémentons la méthode de Newton-Raphson :

```
# Fonction f(t) et sa dérivée
f <- function(t) {
  10 * tanh(0.2 * t) + 10 - 9.8 * t
}

f_prime <- function(t) {
  2 * (1 / cosh(0.2 * t))^2 - 9.8
}

# Fonction Newton-Raphson
```

```r
newton_raphson <- function(x0, tolerance = 1e-6, max_iter = 100) {
  x <- x0
  iterations <- data.frame(
    iteration = 0,
    x = x0,
    f_x = f(x0)
  )

  for (i in 1:max_iter) {
    x_new <- x - f(x) / f_prime(x)

    iterations <- rbind(iterations,
                       data.frame(iteration = i,
                                  x = x_new,
                                  f_x = f(x_new)))

    if (abs(x_new - x) < tolerance) {
      break
    }
    x <- x_new
  }

  return(iterations)
}

# Application avec x0 = 1
resultats <- newton_raphson(1)

# Affichage des résultats
knitr::kable(resultats,
             col.names = c("Itération", "t (secondes)", "f(t)"),
             digits = 6,
             caption = "Résultats de la méthode de Newton-Raphson")
```

Table 7.1: Résultats de la méthode de Newton-Raphson

Itération	t (secondes)	f(t)
0	1.000000	2.173753
1	1.275930	-0.006241
2	1.275143	0.000000
3	1.275143	0.000000

7.0.4 4. Vérification graphique

Visualisons la convergence sur le graphique de la vitesse :

```
# Filtrer les données pour l'intervalle [1, 1.5]
velocity_data_zoom <- velocity_data %>%
  filter(t >= 1 & t <= 1.5)

# Ajout des points d'itération au graphique de vitesse avec zoom
ggplot(velocity_data_zoom, aes(x = t, y = velocity)) +
  geom_line(color = "red", size = 1) +
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed") +
  geom_point(data = resultats,
             aes(x = x, y = f_x),
             color = "blue",
             size = 3) +
  geom_path(data = resultats,
            aes(x = x, y = f_x),
            color = "blue",
            arrow = arrow(length = unit(0.2, "cm")),
            size = 0.5) +
  labs(x = "Temps (s)", y = "Vitesse (m/s)") +
  scale_x_continuous(limits = c(1, 1.5),
                     breaks = seq(1, 1.5, 0.1)) +
  theme_minimal() +
  ggtitle("Convergence de la méthode de Newton-Raphson (zoom)") +
  theme(axis.text = element_text(size = 10),
        axis.title = element_text(size = 12))
```

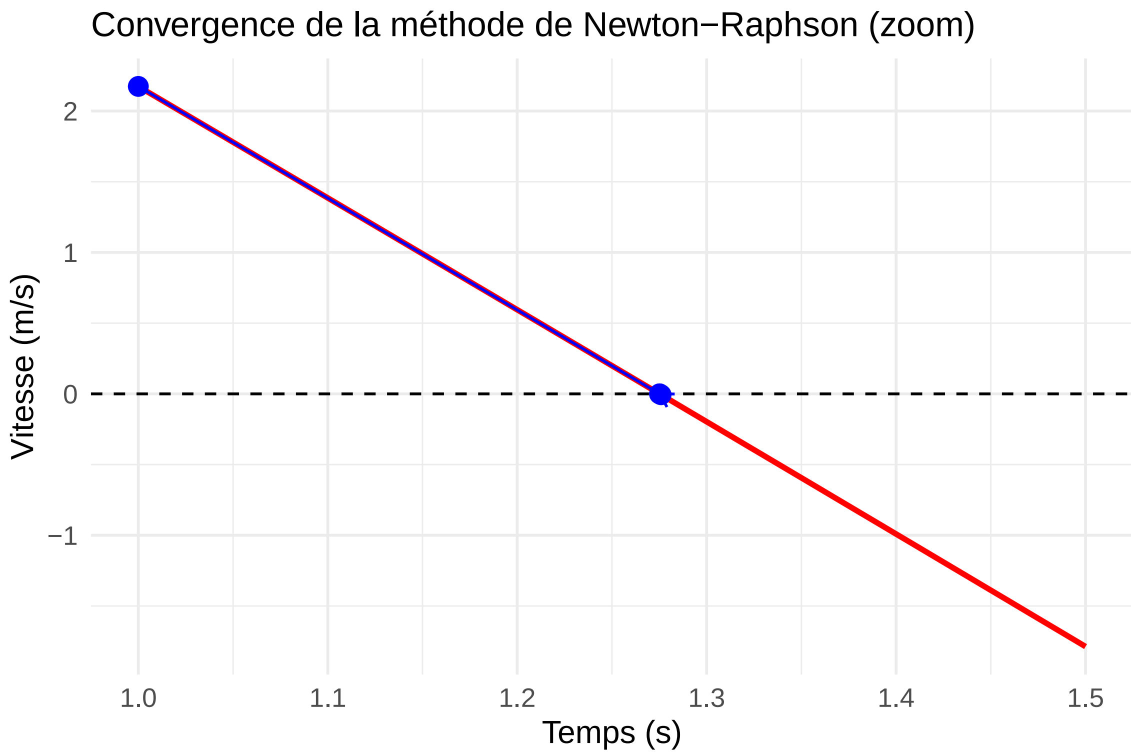


Figure 7.3: Convergence de la méthode de Newton-Raphson

7.0.5 Conclusion

La méthode de Newton-Raphson converge rapidement vers la solution : le ballon atteint son altitude maximale après environ 1.275 secondes.

À cet instant, l'altitude du ballon est de 6.39 mètres.