



UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des sciences et de génie
Département de mathématiques et de statistique

Prénom et nom

Numéro d'identification (NI)

Examen intra

Analyse complexe — MAT-3421

15 mars 2026 (13 h 30 à 15 h 20)
Enseignant : Mr. X

Directives de l'évaluation

1. Assurez-vous d'être assis à la table portant le numéro indiqué au bas de cette page. Vérifiez également que votre prénom et votre nom sont correctement inscrits dans l'encadré au haut de la page.
2. Vérifiez que votre questionnaire comporte 6 questions réparties sur 7 pages, incluant la page couverture. Cette évaluation sera notée sur 57 points et vaut pour 30 % de votre note de session.
3. Déposez une carte d'identité avec photo sur le coin du bureau où vous rédigez l'examen.
4. Ne surlignez pas vos réponses ou d'autres éléments pertinents de votre démarche.
5. Si vous manquez d'espace pour rédiger la réponse d'une question, vous devez utiliser le verso de la feuille où se trouve la question concernée. Le cas échéant, assurez-vous d'indiquer au recto que la suite de la réponse se trouve au verso. Dans le cas contraire, nous ne corrigerons pas le verso.
6. Aucune page de cet examen ne doit être dégrafée.
7. N'insérez aucune feuille dans l'examen.
8. Sauf indication contraire, vous devez justifier chacune des étapes du raisonnement qui mène à la réponse que vous avez obtenue.
9. Sauf indication contraire, vous devez écrire la valeur exacte et non une valeur numérique approchée (par exemple, vous devez écrire $\frac{4}{3}$ plutôt que 1,33 et $\sqrt{2}$ plutôt que 1,414).
10. Une calculatrice autorisée par la FSG est permise. Elle doit figurer parmi les modèles suivants : HP 20S, HP 30S, HP 32S2, HP 33S, HP 35S, TI-30Xa, TI-30XIIB, TI-30XIIS, TI-36X*, TI-30X MultiView (XS ou XB), BA35, EL-510*, EL-520*, EL-516, EL-W516*, EL-531*, EL-535, W535, EL-W535*, EL-546*, FX-260, FX-300*, FX-350 MS, FX-92*, FX-991 MS, FX-991ES*, FX-991ES PLUS, FX-991ES PLUS C, FX-991ES PLUS 2, FX-991EX. N'importe quelles lettres peut remplacer l'astérisque.

Pour toutes les sous-questions de la question 1 :

- Inscrivez uniquement votre réponse finale dans l'encadré prévu.
- Donnez la forme exacte ou arrondissez la réponse finale à **trois chiffres après le séparateur décimal**.
- Toute réponse correcte mal arrondie sera pénalisée de 0,25 point.
- Seul le contenu de l'encadré sera considéré pour la correction.

Question 1 (18 points)

(3) (a) Calculez $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cos^2(x) dx$.

(3) (b) Soit $f(z) = z^3 + 2iz^2 - 3z + 4i$. Trouvez $f(1 + i)$.

(3) (c) Déterminez le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$.

(3) (d) Calculez $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$.

(3) (e) Trouvez tous les zéros du polynôme $p(z) = z^4 - 16$ dans \mathbb{C} .

(3) (f) Soit $w = e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi)$. Pour quelle(s) valeur(s) de θ a-t-on $w^6 = -1$?

Pour le reste de l'examen :

- Toutes vos réponses doivent être justifiées.
- Définissez clairement tous les objets mathématiques utilisés dans vos raisonnements. Une réponse correcte sans définition explicite entraînera une pénalité pouvant aller jusqu'à 10 % de la note attribuée à la question.
- Inscrivez vos réponses finales dans les encadrés prévus à cet effet.
- Si vous donnez une approximation plutôt que la valeur exacte, assurez-vous d'arrondir uniquement la réponse finale à **trois chiffres après la virgule**. Les erreurs d'arrondissement seront pénalisées jusqu'à la hauteur de 10 % de la note attribuée à la question.

Question 2 (5 points)

Soit $f(z) = \frac{z+2}{z^2-1}$. Déterminez tous les points singuliers de f et classifiez-les (pôles simples, pôles d'ordre supérieur, singularités essentielles, etc.).



Question 3 (12 points)

Considérons la transformation linéaire $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc \neq 0$.

- (3) (a) Montrez que T envoie les cercles et droites du plan complexe sur des cercles ou des droites.
- (3) (b) Trouvez les valeurs de a, b, c, d telles que T envoie le demi-plan supérieur $\{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ sur le disque unité $\{w : |w| < 1\}$.

Réponse partie (b) :

Question 4 (9 points)

Une fonction analytique $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfait les propriétés suivantes sur le cercle $|z| = 2$:

- $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ pour certains $a, b, c \in \mathbb{C}$
- $f(2i) = -8i + 4a - 2bi + c = 10i$
- $f(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 6$

- (4) (a) Déterminez les valeurs de a et b en fonction de c .

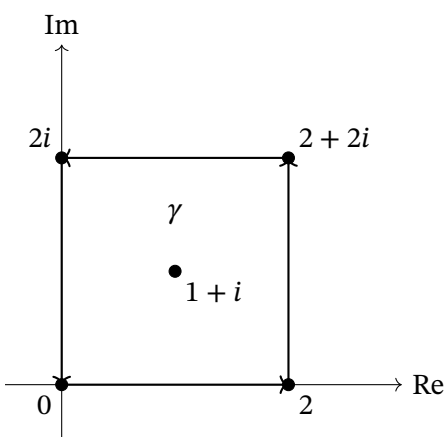
Réponse :

- (5) (b) Si de plus $f(2) = 26$, trouvez les valeurs de a, b et c .

Réponse :

Question 5 (7 points)

Soit le contour γ dans le plan complexe défini par le carré de sommets $0, 2, 2 + 2i, 2i$ parcouru dans le sens antihoraire.



Calculez l'intégrale $\oint_{\gamma} \frac{z^2 + 3}{z - (1 + i)} dz$.

Réponse :

Question 6 (6 points)

Soit $f(z) = e^z$. Développez f en série de Taylor autour du point $z_0 = i\pi$ et déterminez le rayon de convergence de cette série.

Réponse :