STT-1500

Jérôme Soucy

2023-04-05

Table des matières

Présentation

Les documents présentés sur ce site concernent le cours *STT-1500 : Probabilités,* enseigné à l'Université Laval. Pour formuler des commentaires, écrivez-moi: jerome.soucy@mat.ulaval.ca.

Examen 2 — Solutions

Question 1

Convenons de représenter le montant (en dollars) de l'avoir d'une personne choisie au hasard dans un groupe par la variable aléatoire X. Une valeur de X négative devra être interprétée comme une dette. On estime que la densité de probabilité de X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{50^2} \exp\left(-\frac{x^2}{50^2}\right) & \text{si } x \geq 0, \\ -\frac{x}{50^2} \exp\left(-\frac{x^2}{50^2}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que la personne ait un avoir dans l'intervalle $]-50, 100[$?

Solution. En posant $u = -\frac{x^2}{50^2}$, nous avons que $-\frac{1}{2}du = \frac{x\,dx}{50^2}$. On trouve ainsi que $-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{50^2}\right)$ est une primitive de $\frac{x}{50^2}\exp\left(-\frac{x^2}{50^2}\right)$. Notons cette primitive $H(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-50 < X < 100) &= \int_{-50}^{100} f(x)dx \\
&= -\int_{-50}^{0} \frac{x}{50^2} e^{-\frac{x^2}{50^2}}\,dx + \int_{0}^{100} \frac{x}{50^2} e^{-\frac{x^2}{50^2}}\,dx \\
&= -\left(H(0) - H(-50)\right) + H(100) - H(0) \\
&= H(100) + H(-50) - 2H(0) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-4} - \frac{1}{2}e^{-1} + 1 \\
&\approx 0,8069.
\end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi trouver $F(x)$, la fonction de répartition de X. En intégrant de la même manière, on obtient que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{50^2}\right) & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{50^2}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On trouve alors que $\mathbb{P}(-50 < X < 100) = F(100) - F(-50) \approx 0,8069$.

Question 2

Partie (a)

On lance une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne face. On note X le nombre de fois où pile a été obtenu. Quelle est l'espérance de X?

Solution 1. L'espérance du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir face une première fois suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Son espérance est donc de 2. Par conséquent, le nombre de piles espéré est un de moins, soit 1.

Solution 2. D'abord, on constate que pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, \}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1/2}{(1 - 1/2)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Au passage, nous avons utilisé la formule $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$, qui est valable pour $|x| < 1$.

Partie (b)

On lance une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne face pour la dixième fois. On note X le nombre de fois où pile a été obtenu. Que vaut $\mathbb{P}(X = 11)$?

Solution. La probabilité que X prenne la valeur de 11 correspond à la probabilité que la dixième occurence de face (qu'on considère comme un succès) survienne lors de la 21^{e} épreuve. Cela correspond à la probabilité qu'une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$ prenne la valeur 21. En utilisant la fonction de masse de cette loi, on obtient que

$$\mathbb{P}(X = 21) = \binom{20}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{\binom{20}{11}}{2^{21}} \approx 0,0801.$$

Question 3

Partie (a)

Vous lancez un dé à 6 faces jusqu'à ce que vous obteniez un 5. On note X le nombre de lancers nécessaires. Quelle est l'espérance de X?

Solution. X suit une loi géométrique de paramètre $1/6$. Par conséquent, son espérance est 6.

Partie (b)

Le 21 février 2021, on a enregistré un nombre record[1] de transactions à la bourse de Montréal. Cette journée-là, 1 498 529 ont été effectuées[2]. Supposons que du nombre, 2000 transactions impliquaient la compagnie pharmaceutique Pilulorama[3]. On a identifié au hasard 1000 transactions effectuées au cours de cette journée pour les analyser, afin de s'assurer qu'il n'y ait pas eu de délit de marché. **Estimez, avec une loi de Poisson de paramètre approprié**, la probabilité que parmi les 1000 transactions analysées, il y en ait au moins une impliquant la compagnie Pilulorama.

Solution. Le nombre de transactions choisies étant négligeable par rapport au nombre total de transaction, on peut estimer qu'il y aura en moyenne

$$1000 \cdot \frac{2000}{1\,498\,529} \approx 1,3346$$

transactions analysées impliquant la compagnie Pilulorama. Ici, $n = 1000$ et $p = \frac{2000}{1\,498\,529}$. Ces conditions justifient l'emploi d'une Poisson de paramètre $1,3346$ pour modéliser la situation décrite. Si X correspond au nombre de transactions impliquant la compagnie Pilulorama qui seront analysées, la réponse cherchée est

$$\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \approx 1 - \frac{e^{-1,3346} \cdot 1,3346^0}{0!} \approx 0,7367.$$

[1]En date du 17 mars 2023.
[2]C'est vrai, voir https://m-x.ca/fr/trading/data/market-records.
[3]Cette compagnie est fictive.

Partie (c)

Au party de Noël de la compagnie Pilulorama, les employés pigent deux cartes cadeaux dans une urne. Lorsque c'est à votre tour de piger, il reste 8 cartes cadeaux des Galeries de la Capitale et 12 cartes cadeaux de la Librairie Pantoute. Quelle est la probabilité que vous pigiez au moins une carte cadeau de la Librairie Pantoute?

Solution. Le nombre de cartes cadeaux de la Librairie Pantoute pigées suit une loi hypergéométrique de paramètres $2, 12$ et 8. Ainsi, la probabilité d'en piger au moins une correspond à

$$1 - \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{0}}{\binom{12+8}{2}} = \frac{81}{95} \approx 0,8526.$$

Partie (d)

Trouvez une valeur de a telle que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{9}x(x-a) & \text{si } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit une fonction de densité de probabilité.

Solution. Il faut trouver a tel que

$$\int_0^a -\frac{2}{9}x(x-a)\,dx = 1.$$

Après intégration, cette équation devient $\frac{a^3}{27} = 1$. Comme $a = 3$ est le seul nombre réel satisfaisant cette équation, la réponse est 3.

Question 4

Partie (a)

Vrai ou faux : La seule loi de probabilité discrète sans mémoire est la loi de Poisson.

Réponse : Faux, la seule loi de probabilité discrète sans mémoire est la loi géométrique.

Partie (b)

Vrai ou faux : La seule loi de probabilité absolument continue sans mémoire est la loi exponentielle.

Réponse : Vrai.

Partie (c)

Vrai ou faux : Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la fonction de répartition est F et la fonction de densité f. Soit a et b des nombres réels tels que $a < b$. Alors

$$f(a) \leq f(b).$$

Réponse : Faux, à titre d'exemple, la fonction de densité d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 prend la valeur e^{-1} en 1 et la valeur e^{-2} en 2. On a bien que $1 < 2$ mais $e^{-1} \nleq e^{-2}$. Notons que si on avait remplacé la fonction de densité par la fonction de répartition, alors l'énoncé aurait été vrai.

Question 5

Un machiniste doit usiner une pièce de tôle en forme de demi-disque. Le *diamètre* du demi-disque est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $\left]\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right[$. Ici, les bornes de l'intervalle sont exprimées en mètres. On définit X, la variable aléatoire qui correspond à la superficie (en mètres carrés) que peut recouvrir le demi-disque de tôle. Déterminez $F_X(x)$, la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Solution. Notons U la v.a. uniforme dont il est question ici. Il nous faudra connaître sa fonction de répartition. La fonction de densité d'une uniforme sur l'intervalle $\left]\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right[$ vaut $10/2 = 5$ sur $\left]\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right[$ et 0 ailleurs. On intègre facilement cette fonction, et on trouve que

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq \frac{9}{10}, \\ 5u - \frac{9}{2} & \text{si } \frac{9}{10} < u < \frac{11}{10}, \\ 1 & \text{si } u \geq \frac{11}{10}. \end{cases}$$

L'aire d'un cercle de rayon r étant πr^2, l'aire d'un demi-cercle de *diamètre* U sera $\frac{\pi U^2}{8}$. La valeur minimale que peut prendre X est l'aire d'un demi-disque de rayon $\frac{9}{10}$, soit $\frac{81\pi}{800}$, et sa valeur maximale est l'aire d'un demi-disque de rayon $\frac{11}{10}$, soit $\frac{121\pi}{800}$. Ainsi, pour $X \leq \frac{81\pi}{800}$ on a que $F_X(x) = 0$ alors que pour $X \geq \frac{121\pi}{800}$ on a que $F_X(x) = 1$. Pour $\frac{81\pi}{800} < x < \frac{121\pi}{800}$, nous avons que

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\pi U^2}{8} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(U^2 \leq \frac{8x}{\pi}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|U| \leq \sqrt{\frac{8x}{\pi}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\sqrt{\frac{8x}{\pi}} \leq U \leq \sqrt{\frac{8x}{\pi}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(U \leq \sqrt{\frac{8x}{\pi}}\right) \qquad \text{(car } U \text{ ne prend pas de valeurs négatives)} \\
&= F_U\left(\sqrt{\frac{8x}{\pi}}\right) \\
&= 5\sqrt{\frac{8x}{\pi}} - \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Si on résume :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{81\pi}{800}, \\ 5\sqrt{\frac{8x}{\pi}} - \frac{9}{2} & \text{si } \frac{81\pi}{800} < x < \frac{121\pi}{800}, \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{121\pi}{800}. \end{cases}$$

Question 6

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour les $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on définit des variables aléatoires (indépendantes) X_j telles que

$$X_j \sim \text{exponentielle}\,(j) \qquad \forall\ j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On définit ensuite la variable aléatoire Y_n de la manière suivante:

$$Y_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Partie (a)

Trouvez la fonction de répartition de Y_n et déduisez-en l'espérance.

Comme les X_j prennent toutes des valeurs non négatives, on en déduit que $F_{Y_n}(y) = 0$ pour $y < 0$. Désignons par $F_{X_j}(x)$ la fonction de répartition de X_j. Pour $x \geq 0$, nous avons que

$$F_{X_j}(x) = 1 - e^{jx}.$$

Si on ne se souvient plus de cette fonction, on peut la retrouver en intégrant la fonction de densité de l'exponentielle de paramètre j. Nous avons que

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= \mathbb{P}(Y_n \leq y) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y_n > y) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 > y\} \cap \{X_2 > y\} \cap ... \cap \{X_n > y\}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 > y\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 > y\}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(\{X_n > y\}) \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}(\{X_1 \leq y\})) \cdot (1 - \mathbb{P}(\{X_2 \leq y\})) \cdot ... \cdot (1 - \mathbb{P}(\{X_n \leq y\})) \\
&= 1 - (1 - F_{X_1}(y)) \cdot (1 - F_{X_2}(y)) \cdot ... \cdot (1 - F_{X_n}(y)) \\
&= 1 - e^{-y} \cdot e^{-2y} \cdot ... \cdot e^{-ny} \\
&= 1 - e^{-y(1+2+...+n)} \\
&= 1 - e^{-y\frac{n(n+1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Si on résume,

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 - e^{-y\frac{n(n+1)}{2}} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Comme il s'agit de la fonction de répartition d'une exponentielle de paramètre $\frac{n(n+1)}{2}$, on en déduit que l'espérance de Y_n est $\frac{2}{n(n+1)}$.

Partie (b)

Soit $F_n(x)$ la fonction de répartition de Y_n. Dessinez le graphique de la fonction $F(x)$ où

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

Remarque : vous pouvez déduire ce graphique même si vous n'avez pas fait la sous-question (a). Dans tous les cas, justifiez votre raisonnement.

Solution 1. Si vous avez obtenu la fonction de répartition à la sous question précédente, il est facile de constater que $F(x) = 0$ pour $x < 0$. Maintenant, si on fixe un $x \geq 0$ et qu'on fait tendre n vers l'infini dans l'expression $1 - e^{-x\frac{n(n+1)}{2}}$, on obtient facilement 1 comme résultat. Ainsi,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Solution 2. Puisque $Y_n \leq X_n$, on en conclut que l'espérance de $\mathbb{E}(Y_n) \leq \mathbb{E}(X_n)$. L'espérance de X_n est $1/n$. C'est donc dire que lorsque n tend vers l'infini, son espérance tend vers 0. On peut voir la fonction $F(x)$ comme étant la fonction de répartition de la variable aléatoire obtenue en prenant la limite des Y_n. La seule façon de construire une fonction de répartition qui vaut 0 pour des valeurs négatives et qui a une espérance nulle est de concentrer sa masse à l'origine, ce qui mène à la fonction F décrite dans la solution 1.

Dans le jargon de la théorie des probabilités, on dit que la suite de variables aléatoires Y_n *converge en loi* vers la variable aléatoire Y qui prend la valeur 0 avec probabilité 1. C'est donc un exemple d'une suite de variables aléatoires continues qui converge en loi vers une variable aléatoire discrète.

Préparation à l'examen 3

Question 1

Soit X et Y, deux variables aléatoires indépendantes. On supposera que $X \sim \text{uniforme}\,(0,1)$ et que $Y \sim \text{uniforme}\,(0,2)$. On pose $Z = X + Y$. La fonction de densité de Z est de la forme

$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } 0 < z < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq z < 2, \\ \frac{3}{2} - \alpha z & \text{si } 2 \leq z < 3. \end{cases}$$

Partie (a)

Trouvez la valeur de α dans l'expression de f_Z.

Partie (b)

Trouvez l'espérance et la variance de Z.

Partie (c)

Calculez $\mathbb{P}(Y \leq X)$.

Question 2

Soit Z_1 et Z_2, deux variables aléatoires indépendantes dont la distribution de probabilités est la loi normale standard. On définit les deux variables aléatoires suivantes : $X = \sqrt{|Z_1|}$ et $Y = \sqrt{|Z_2|}$.

Partie (a)

Montrez que la fonction densité conjointe des variables aléatoires X et Y est donnée par

$$f(x,y) = 16\,xy\,\varphi(x^2)\,\varphi(y^2),$$

où φ est la fonction de densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale standard.

Partie (b)

Trouvez la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires X et Y.

Partie (c)

Calculez $\mathbb{P}\left(\{X \geq 0\} \cap \{Y \geq 0\}\right)$.

Partie (d)

Calculez $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2} \,|\, Y \leq 1\right)$.

Question 3

Vous lancez une pièce de monnaie 100 fois. On définit les deux variables aléatoires ci-dessous:

$$\begin{aligned} X &= \text{Le nombre de fois où la pièce tombe sur pile lors de ces 100 lancers,} \\ Y &= \text{Le nombre de fois où la pièce tombe sur face lors de ces 100 lancers.} \end{aligned}$$

Partie (a)

Trouvez la fonction de masse conjointe des variables aléatoires X et Y.

Partie (b)

Sans l'évaluer, donnez l'expression menant au calcul de la valeur exacte de $\mathbb{P}\left(45 \leq X < 60\right)$.

Partie (c)

Calculez chacune des trois probabilités suivantes : $\mathbb{P}\left(X < Y\right), \mathbb{P}\left(Y < X\right)$ et $\mathbb{P}\left(X = Y\right)$.

Partie (d)

Calculez le coefficient de corrélation des variables aléatoires X et Y et déterminez si ces deux variables aléatoires sont indépendantes.

Question 4

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $(0, 10)$. Trouvez l'espérance de Y, où $Y = \min\{X_1, X_2\}$.

Préparation à l'examen 3 — Solutions

Question 1

Soit X et Y, deux variables aléatoires indépendantes. On supposera que $X \sim \text{uniforme}\,(0,1)$ et que $Y \sim \text{uniforme}\,(0,2)$. On pose $Z = X + Y$. La fonction de densité de Z est de la forme

$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } 0 < z < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq z < 2, \\ \frac{3}{2} - \alpha z & \text{si } 2 \leq z < 3. \end{cases}$$

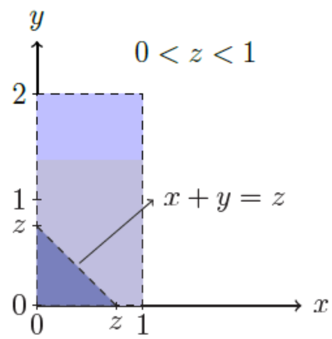
Partie (a)

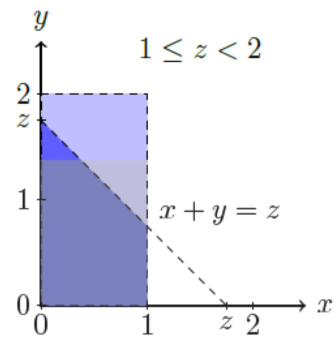
Trouvez la valeur de α dans l'expression de f_Z.

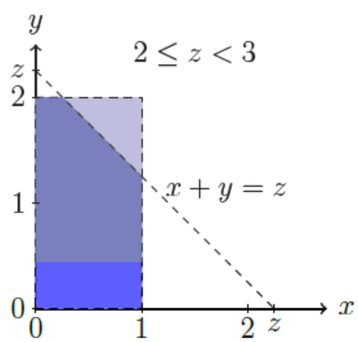
Solution: Nous devons avoir que $\int_{\mathbb{R}} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = 1$. Calculons donc $\int_{\mathbb{R}} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$. Nous avons que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_Z(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \alpha z\,\mathrm{d}z + \int_1^2 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}z \int_2^3 \left(\frac{3}{2} - \alpha z\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \alpha\left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) \\ &= -2\alpha + 2.\end{aligned}$$

Puisque $1 = -2\alpha + 2$, il suit que $\alpha = 1/2$.







On peut aussi calculer que pour $z \in]0,\,1[$,

$$F_Z(z) = \mathbb{P}[Z \leq z] = \frac{z^2}{4}.$$

Pour y arriver, il suffit de remarquer que la fonction densité conjointe de X et Y est constante sur le rectangle $]0,\,1[\, \times\,]0,\,2[$, dont l'aire est 2. La région satisfaisant $\mathbb{P}[Z \leq z]$ est le triangle de sommets $(0,0), (z,0)$ et $(0,z)$, qui a une aire de $\frac{z^2}{2}$. En prenant le rapport des aires, on trouve que $F_Z(z) = \frac{z^2}{4}$, d'où $f_Z(z) = \frac{z}{2}$ pour $z \in]0,\,1[$. De cela on conclut que $\alpha = 1/2$. On peut aussi utiliser les autres figures pour démontrer le résultat présenté dans cet exercice.

Partie (b)

Trouvez l'espérance et la variance de Z.

Solution: Nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[X+Y] && \text{(définition de } Z\text{)}\\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] && \text{(propriété de l'espérance)}\\
&= {}^1\!/\!_2 + 1 && \text{(résultat sur l'espérance d'une uniforme)}\\
&= {}^3\!/\!_2.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X+Y] && \text{(définition de } Z\text{)}\\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)}\\
&= {}^1\!/\!_{12} + {}^4\!/\!_{12} && \text{(résultat sur la variance d'une uniforme)}\\
&= {}^5\!/\!_{12}.
\end{aligned}$$

Partie (c)

Calculez $\mathbb{P}(Y \leq X)$.

Solution: Soit $f(x, y)$ la densité conjointe des variables X et Y. Puisque X et Y sont indépendantes, $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, où f_X et f_Y sont respectivement les fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires X et Y. Connaissant la fonction de densité d'une uniforme sur un intervalle $]a,\, b[$, nous avons que $f_X(x) = 1$ pour $0 < x < 1$ et $f_Y(y) = {}^1\!/\!_2$ pour $0 < y < 2$. Ainsi,

$$f(x, y) = \begin{cases} {}^1\!/\!_2 & \text{si } x \in]0,\, 1[\text{ et } y \in]0,\, 2[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y \leq X] &= \int\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \leq x\}} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\, \mathrm{d}x \\
&= {}^1\!/\!_4.
\end{aligned}$$

Note : On peut aussi observer que puisque la fonction de densité conjointe est uniforme sur le rectangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ et $(1, 2)$, il suffit de calculer le rapport de l'aire du triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$ sur l'aire du rectangle.

Question 2

Soit Z_1 et Z_2, deux variables aléatoires indépendantes dont la distribution de probabilités est la loi normale standard. On définit les deux variables aléatoires suivantes : $X = \sqrt{|Z_1|}$ et $Y = \sqrt{|Z_2|}$.

Partie (a)

Montrez que la fonction densité conjointe des variables aléatoires X et Y est donnée par

$$f(x, y) = 16\, xy\, \varphi(x^2)\, \varphi(y^2),$$

où φ est la fonction de densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale standard.

Solution: Remarquons d'abord que $X = g(Z_1)$ et $Y = g(Z_2)$, où g est la fonction $g(x) = \sqrt{|x|}$. Puisque les variables Z_1 et Z_2 sont indépendantes et identiquement distribuées, il en sera de même des variables aléatoires X et Y. Elles auront donc la même fonction de répartition, et la même fonction de densité. Pour connaître la fonction de répartition conjointe de ces variables, un résultat nous permet d'affirmer qu'il suffit de prendre le produit des fonctions de répartition marginales des variables X et Y. Il en est de même pour déterminer la fonction de densité conjointe des variables X et Y. Trouvons la fonction de répartition de X. Pour $x \geq 0$ nous avons que

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}[X \leq x] \\
&= \mathbb{P}\left[\sqrt{|Z_1|} \leq x\right] \\
&= \mathbb{P}\left[|Z_1| \leq x^2\right] \\
&= \mathbb{P}\left[-x^2 \leq Z_1 \leq x^2\right] \\
&= \Phi(x^2) - \Phi(-x^2) \\
&= \Phi(x^2) - \left(1 - \Phi(x^2)\right) \\
&= 2\Phi(x^2) - 1.
\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à x, nous avons

$$f_X(x) = \left(2\Phi(x^2) - 1\right)' = 2\left(\Phi(x^2)\right)' = 2\phi(x^2)(x^2)' = 4\,x\,\phi(x^2).$$

Puisque X et Y ont la même distribution, il suit que $F_Y(y) = 2\Phi(y^2) - 1$ et $f_Y(y) = 4\,y\,\phi(y^2)$. Nous avons donc que, pour $x, y \in [0,\, \infty[$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= F_X(x)F_Y(y) = \left(2\Phi(x^2) - 1\right)\left(2\Phi(y^2) - 1\right), \\
f(x,y) &= f_X(x)f_Y(y) = \left(4\,x\,\phi(x^2)\right)\left(4\,y\,\phi(y^2)\right) = 16\,xy\,\phi(x^2)\,\phi(y^2).
\end{aligned}$$

Note : On pouvait réussir la question sous-question (b) même si on n'avait pas réussi la sous-question (a). Il suffisait alors de remarquer que pour $x, y \in [0,\, \infty[$,

$$F(x,y) = \int_0^y \int_0^x 16\,rs\,\phi(r^2)\,\phi(s^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s.$$

Partie (b)

Trouvez la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires X et Y.

Voir Partie (a).

Partie (c)

Calculez $\mathbb{P}\left(\{X \geq 0\} \cap \{Y \geq 0\}\right)$.

Solution: Il suffit d'observer que l'ensemble des valeurs possibles pour X est $[0, \infty[$, et que l'ensemble des valeurs possibles pour Y est $[0, \infty[$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\{X \geq 0\} \cap \{Y \geq 0\}] &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [0, \infty[\,\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in [0, \infty[\,\}] \\
&= \mathbb{P}[\Omega \cap \Omega] \\
&= \mathbb{P}[\Omega] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Partie (d)

Calculez $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2} \,|\, Y \leq 1\right)$.

Solution: Puisque X et Y sont indépendantes, nous avons que $\mathbb{P}[X \geq 1/2 \,|\, Y \leq 1] = \mathbb{P}[X \geq 1/2]$. Par la suite, on observe que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \geq 1/2] &= 1 - F_X(1/2) \\
&= 1 - (2\Phi(1/4) - 1) \\
&\approx 1 - (2 \cdot 0,5987 - 1) \\
&= 0,8026.
\end{aligned}$$

On a donc que $\mathbb{P}[X \geq 1/2 \,|\, Y \leq 1] \approx 0,8026$.

Question 3

Vous lancez une pièce de monnaie 100 fois. On définit les deux variables aléatoires ci-dessous:

$$\begin{aligned}
X &= \text{Le nombre de fois où la pièce tombe sur pile lors de ces 100 lancers,} \\
Y &= \text{Le nombre de fois où la pièce tombe sur face lors de ces 100 lancers.}
\end{aligned}$$

Partie (a)

Trouvez la fonction de masse conjointe des variables aléatoires X et Y.

Solution: D'abord, on remarque que puisque la pièce de monnaie tombe sur pile ou sur face lors d'un lancer, peu importe le résultat ω de l'expérience aléatoire, $X(\omega) + Y(\omega) = 100$. Par conséquent, $p(x, y) = \mathbb{P}[\{X = x\} \cap \{Y = y\}] = 0$ si $x + y \neq 100$. Puisque $X \sim$ binomiale $(100, 1/2)$, cela entraîne que pour $x \in [\![0,\ 100]\!]$,

$$\mathbb{P}[X = x] = \binom{100}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{100-x} = \frac{\binom{100}{x}}{2^{100}}.$$

Ainsi,

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\binom{100}{x}}{2^{100}} & \text{si } x + y = 100 \text{ et } x, y \in [\![0,\ 100]\!], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie (b)

Sans l'évaluer, donnez l'expression menant au calcul de la valeur exacte de $\mathbb{P}(45 \leq X < 60)$.

Solution: Nous avons que

$$\mathbb{P}[45 \leq X < 60] = \mathbb{P}[45 \leq X \leq 59] = \sum_{k=45}^{59} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=45}^{59} \frac{\binom{100}{k}}{2^{100}}.$$

Partie (c)

Calculez chacune des trois probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X < Y), \mathbb{P}(Y < X)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.

Solution: Remarquons que les événements $\{X < Y\}, \{Y < X\}$ et $\{X = Y\}$ forment une partition de Ω. On a donc que $\mathbb{P}[X < Y] + \mathbb{P}[Y < X] + \mathbb{P}[X = Y] = 1$. Le calcul de $\mathbb{P}[X = Y]$ est simple :

$$\mathbb{P}[X = Y] = \mathbb{P}[\{X = 50\} \cap \{Y = 50\}] = p(50, 50) = \frac{\binom{100}{50}}{2^{100}} \approx 0,0796.$$

De plus, $\mathbb{P}[X < Y] = \mathbb{P}[Y < X]$. En effet, le membre de gauche correspond à la probabilité d'avoir moins de pile que de face, alors que le membre de droite correspond à la probabilité d'avoir moins de face que de pile. Dans les deux cas, la probabilité correspond à

$$\sum_{k=0}^{49} \frac{\binom{n}{k}}{2^{100}}.$$

L'équation $\mathbb{P}[X < Y] + \mathbb{P}[Y < X] + \mathbb{P}[X = Y] = 1$ nous permet d'évaluer cette somme facilement, en isolant la somme qui correspond à $\mathbb{P}[X < Y]$ et $\mathbb{P}[Y < X]$. Nous avons que

$$\sum_{k=0}^{49} \frac{\binom{n}{k}}{2^{100}} + \sum_{k=0}^{49} \frac{\binom{n}{k}}{2^{100}} + \frac{\binom{100}{50}}{2^{100}} = 1,$$

d'où

$$\mathbb{P}[X < Y] = \mathbb{P}[Y < X] = \sum_{k=0}^{49} \frac{\binom{n}{k}}{2^{100}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\binom{100}{50}}{2^{100}}\right) = \frac{2^{100} - \binom{100}{50}}{2^{101}} \approx 0,4602.$$

Partie (d)

Calculez le coefficient de corrélation des variables aléatoires X et Y et déterminez si ces deux variables aléatoires sont indépendantes.

Solution: D'après un résultat du chapitre 6, $\rho_{X,Y} = -1$ si et seulement s'il existe des constantes a et b, avec $a < 0$ telles que

$$\mathbb{P}[Y = aX + b] = 1.$$

Nous avons que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) + Y(\omega) = 100$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y = -1 \cdot X + 100] &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = -1 \cdot X(\omega) + 100\}] \\
&= \mathbb{P}[\Omega] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\rho_{X,Y} = -1$. Puisque $\rho_{X,Y} \neq 0$, il suit que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Note : On peut aussi calculer $\rho_{X,Y}$ à l'aide de la définition, mais c'est plus long. En faisant l'observation que X et Y ont la même distribution, soit la loi binomiale de paramètres $(100, {}^1\!/_2)$, elles ont la même moyenne $\mu = 50$ et la même variance $\sigma^2 = 25$. Le calcul est assez simple :

$$\begin{aligned}
\rho_{X,Y} &= \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \\
&= \frac{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \\
&= \frac{\mathbb{E}[X(100 - X)] - \mu^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{100\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X^2] - \mu^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{100\mu - (\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{E}[X]^2) - \mu^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{100\mu - \sigma^2 - \mu^2 - \mu^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{100 \cdot 50 - 25 - 2 \cdot 50^2}{25} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Question 4

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $(0, 10)$. Trouvez l'espérance de Y, où $Y = \min\{X_1, X_2\}$.

Solution: Trouvons d'abord la fonction de répartition de Y, pour ensuite trouver sa fonction de densité, qui nous permettra finalement de déterminer l'espérance. Si F_Y désigne la fonction de répartition de Y sur l'intervalle $]0,\ 10[$, nous avons que

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] && \text{(par définition)}\\
&= 1 - \mathbb{P}[Y > y] && \text{(par complémentarité)}\\
&= 1 - \mathbb{P}[\{X_1 > y\} \cap \{X_2 > y\}] && \text{(d'après la définition de } Y\text{)}\\
&= 1 - \mathbb{P}[\{X_1 > y\}] \cdot \mathbb{P}[\{X_2 > y\}] && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)}\\
&= 1 - \left(\frac{10-y}{10}\right)\left(\frac{10-y}{10}\right) && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \sim \text{uniforme}(0,10)\text{)}\\
&= 1 - \frac{(10-y)^2}{100}.
\end{aligned}$$

En dérivant, on trouve que $f_Y(y) = \frac{10-y}{50}$ pour $0 < y < 10$. D'après la définition de l'espérance, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \int_0^{10} y \cdot \frac{10-y}{50}\,\mathrm{d}y\\
&= {}^{10}\!/_{3}.
\end{aligned}$$