اشتباهات رایج در ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته

دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

پیشروی در درس ریاضیات گسسته مستلزم نوآوری و ایده‌پردازی زیاد است که راهکارهایی از جمله ساختاردهی به تفکر در حل مسئله برای ایجاد این نوآوری در ذهن وجود دارد. همچنین لازم به یادآوری است که نوآوری تمام آن چیزی نیست که در این مسیر نیاز می‌شود. یکی دیگر از ملزمات انکار ناپذیر در ریاضیات گسسته، قدرت بیان درست تفکرات و اثبات درست نتایج است. بسیار دیده می‌شود که کسانی راهکار مسائلی را می‌دانند، ولی توانایی انتقال آن به دیگران را ندارند و با توجه به زندگی اجتماعی، مفاهیم انتزاعی که برای همیشه در ذهن یک نفر بمانند، تفاوتی با عدم وجود ندارند. همچنین دیده شده است کسانی می‌پندارند که راهکار مسائلی را می‌دانند و هیچگاه از نقص‌های دیدگاه خود آگاه نمی‌شوند؛ چرا که از الزامات اثبات درستی افکار آگاه نیستند.

در این جزوه سعی بر آن می‌شود که با استفاده از مرور اشتباهات رایج در حل مسائل و گوشزد کردن نکات کلیدی، همچنین ارائه‌ی پاسخ‌های ساخت‌یافته و منظم، نحوه‌ی تفکر ساخت‌یافته درباره مسائل آموزش داده شود. در کنار آن، نحوه‌ی بیان و مکتوب کردن قابل اطمینان مطالب نیز جزو اهداف قرار می‌گیرد. همچنین تلاش خواهد شد تا جلوه‌ای روشن از اثبات کامل و بی‌عیب و نقص ارائه شود تا خود بتوانید از کامل بودن یا نبودن اثبات‌ها و دیدگاه‌های خود آگاه شوید.

در این جزوه با سه دسته نکته مواجه هستیم:

۱. دسته E [۱]: نکات درست نویسی که رعایت نکردن آن باعث ناقص شدن اثبات و در نتیجه کسر نمره می شود.

۲. دسته N [۲]: نکات درست نویسی که رعایت کردن آن‌ها واجب نیست، امابه خوانایی راه حل، ابهام زدایی، پرهیز از تکرار و جلوگیری از خطا کمک می کنند.

۳. دسته T [۳]: دام های آموزشی و خطاهای رایج در حل سوالات.

به امید سلامتی.

---

[۱] به معنای $Essential$

[۲] به معنای $Non-Essential$

[۳] به معنای $Trap$

فصل ۱ : شمارش

سؤال ۱.۱.

سه مهره رخ متمایز و صفحه شطرنجی 8×8 داریم. به چند روش می‌توان این سه مهره را در سه خانه از این صفحه قرار داد به طوری که حداقل یک مهره وجود داشته باشد که توسط هیچ مهره‌ای تهدید نمی‌شود؟

پاسخ .

سوال را با اصل متمم حل می‌کنیم:

- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ‌ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون‌های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$64 \times 14 \times 20$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - 64 \times 14 \times 20$$

نکات:

T.I : نشمردن همه حالت‌ها: در اینجا تمام حالات نامطلوب محاسبه نشده است، زیرا این امکان وجود دارد که رخ اول توسط رخ دوم تهدید نشود و این حالت در نظر گرفته نشده است.

N.II : بهتر بود اشاره شود که به دلیل تمایز رخ‌ها چنین نتیجه‌ای گرفته شده است.

پاسخ .

- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

$$۶۴ \times ۷ \times ۲۰ \times ۲$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - ۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

نکات:

N.III : نبود توضیحات کافی برای عبارت: به دلیل نبود توضیحات کافی، تشخیص چرایی غلط بودن جواب نهایی ممکن نیست.

پاسخ صحیح .

- کل حالات: به دلیل تمایز رخ‌ها برابر است با:

$$P(۶۴, ۳) = ۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

دو حالت داریم:

۱. رخ اول رخ دوم را تهدید کند:

رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون‌های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

۲. رخ اول رخ دوم را تهدید نکند:

رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول نباید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را در خانه‌ای به جز سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۴۹ حالت دارد. حال رخ سوم باید هر دو رخ را تهدید کند پس باید در یکی از محل‌های تقاطع سطر و ستون رخ اول و رخ دوم قرار بگیرد که دو حالت دارد، پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۴۹ \times ۲$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - (۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰ + ۶۴ \times ۴۹ \times ۲)$$

سؤال ۲.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$۱^۲\binom{n}{۱} + ۲^۲\binom{n}{۲} + ۳^۲\binom{n}{۳} + ... + n^۲\binom{n}{n} = n(n+۱)۲^{n-۲}$$

پاسخ .

فرض کنید $P = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ بیانگر تعداد راه‌های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد یا دو فرد متمایز، رئیس کمیته باشند. حال این شمارش را به روش دیگری انجام می‌دهیم.

۱. با فرض داشتن یک رئیس، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که ۲ رئیس را انتخاب کردیم در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

از تساوی این ۲ حالت حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

نکات:

E.IV : عدم تطابق توضیحات با فرمول نوشته شده، انتخاب دو رئیس از میان n نفر $\binom{n}{2}$ حالت دارد نه $n \times (n-1)$.

N.V : بهتر است روش اثبات (دوگانه شماری)ذکر شود.

E.VI : یک طرف دوگانه شماری که نیازمند اثبات است، بدیهی در نظر گرفته شده است.

پاسخ صحیح .

سوال را با دوگانه شماری حل می‌کنیم:

فرض کنید P بیانگر تعداد راه‌های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد رئیس کمیته و یک نفر معاون باشند و رئیس و معاون می‌توانند یک نفر باشند. شمارش این راه‌ها به ۲ روش امکان پذیر است.

۱. با فرض یکسان بودن رئیس و معاون، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که رئیس و معاون متمایز را انتخاب کردیم و در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

۲. ابتدا این که چه اعضایی کمیته و رئیس و معاون را تشکیل دهند را انتخاب می‌کنیم که این تعداد می‌تواند هر عددی باشد، سپس رئیس و معاون یکسان یا متمایز را از بین آن ها انتخاب می‌کنیم:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k(k-1) + k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

از تساوی ۲ حالت فوق حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

سؤال ۳.۱.

۶۰ دانشجو در کلاس ریاضیات گسسته حضور دارند.در میان هر ۱۰ نفر از این کلاس ، حداقل ۳ نفر نمره مبانی یکسانی دارند. ثابت کنید در این کلاس ۱۵ نفر وجود دارند که نمره مبانی آن‌ها یکسان است.

پاسخ .

در نظر می‌گیریم حداکثر تعداد تکرار از یک نمره ۱۴ عدد است که در این صورت حداقل به ۵ نمره متفاوت نیاز است . در این صورت باز می‌توان گروه ۱۰ تایی را از دانش آموزان انتخاب کرد که حداکثر دو نفر نمره یکسان داشته باشند. پس فرض اولیه غلط بوده و مشخص می‌شود که لااقل از یکی از نمرات وجود دارد که ۱۵ دانش آموز یا بیشتر آن نمره را دارند.

نکات:

- N.VII : در پاسخ از برهان خلف استفاده شده ولی از آن نام برده نشده است و باید توجه کنیم فرض خلف را حتما بیان کنیم.
- N.VIII : باید اصل لانه کبوتری که از آن استفاده کرده است را نام می‌برد و نحوه استفاده از آن مشخص شود.
- T.IX : پاسخ کامل نیست. پاسخ درست و کامل در پایین آمده‌است.

پاسخ صحیح .

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض خلف : فرض کنید در این کلاس هیچ ۱۵ نفری وجود نداشته باشند که نمره‌ی مبانی آن‌ها یکسان باشد. در این صورت حداکثر ۱۴ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسان داشته باشند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل به اندازه‌ی سقف $\frac{۶۰}{۱۴}$ یعنی ۵ نمره‌ی متفاوت در کلاس وجود دارد. مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم ؛

۱. اگر پنج نمره‌ی متمایز وجود داشته باشند که از هر کدام ۲ عضو (دو نفر در کلاس که آن نمره را دارند) وجود داشته باشد؛ در این صورت از هر کدام از این نمرات دو عضو را درنظر گرفته و به مجموعه‌ای ۱۰ عضوی می‌رسیم که هیچ سه نفری در آن نمره‌ی یکسان ندارند که این خلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

۲. اگر پنج نمره‌ی متمایز، هرکدام دارای حداقل دو عضو وجود نداشته باشند؛ در این صورت $k \leq ۴$ نمره‌ی متمایز با بیش از یک عضو داریم (مجموعه‌ی این نمرات را A بنامیم) که با توجه به فرض خلف، حداکثر تعداد $k \times ۱۴$ عضو را پوشش می‌دهند. بنابراین حداقل $۱۴k - ۶۰$ نفر باقی مانده که هیچ دو تایی نمی‌توانند دارای نمره‌ی یکسان باشند (در غیر این صورت تعداد نمره‌های متمایز دارای بیشتر مساوی ۲ عضو به حداقل k+1 می‌رسد). بنابراین هر یک از این اعضا دارای نمره‌ای متمایز است (مجموعه‌ی این اعضا را B بنامیم). می‌توان با انتخاب دو عضو از هر نمره‌ی مجموعه‌ی A و تمام اعضای مجموعه‌ی B به مجموعه‌ای متشکل از $N = ۲k + ۶۰ - ۱۴k = ۶۰ - ۱۲k$ عضو رسید که $k \leq ۴ \Rightarrow N \geq ۱۲$ و هیچ سه عضوی در آن دارای نمره‌ی یکسان نیستند. هر ده عضوی از این مجموعه انتخاب شود، نقض فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

سؤال ۴.۱.

ضریب عبارت $x^{۱۲}$ در بسط عبارت $(۱ - ۴x)^{-۵}$ را بیابید.

پاسخ .

طبق بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\frac{۱}{(۱-۴x)^۵}=\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۴}{k}۴^k x^k$$

جمله ۱۲ ام دنباله a_n ضریب $x^{۱۲}$ است. XI.

$$\longrightarrow a_{۱۲}=\binom{۱۶}{۱۲}۴^{۱۲}$$

نکات:

N.X : بهتر است اصل بسط دوجمله‌ای هم نوشته شود.

E.XI : قبل از استفاده از متغیر باید آن را تعریف کرد. تعریف دنباله a_n ضروری است.

پاسخ صحیح .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(۱-x)^{-n}=\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{n+k-۱}{k}x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(۱-۴x)^{-۵}=\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{۵+k-۱}{k}(۴x)^k$$

جمله $x^{۱۲}$ به ازای مقدار $k=۱۲$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر خواهد بود با:

$$\binom{۱۶}{۱۲}(۴)^{۱۲}$$

سؤال ۵.۱.

چند عدد طبیعی حداکثر ۹ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر با ۳۲ باشد؟

پاسخ .

سوال را با اصل شمول و عدم شمول حل می‌کنیم:

$$|A_۱\cup A_۲\cup \ldots \cup A_۹|=\binom{۹}{۱}|A_۱|+\binom{۹}{۲}|A_۱\cap A_۲|+\ldots+\binom{۹}{۹}|A_۱\cap A_۲\cap\ldots\cap A_۹|$$

حال مقدار عبارت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|A_1| = \binom{30}{8}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{20}{8}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{10}{8}$$

برای بقیه جمله‌ها جواب برابر ۰ است.

حال از اصل متمم برای به دست آوردن جواب نهایی استفاده می‌کنیم:

-کل حالات:

$$\binom{40}{8}$$

- حالات مطلوب:

$$\binom{40}{8} - \binom{9}{1}\binom{30}{8} + \binom{9}{2}\binom{20}{8} - \binom{9}{3}\binom{10}{8}$$

نکات:

E.XII : تعریف متغیرهای A_i ضروری است، چون در غیر این صورت منظور از بقیه استدلال‌ها به هیچ وجه مشخص نیست.

E.XIII : اثبات و یا در صورت وضوح، اشاره به تقارن میان مجموعه‌ها برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول به این شکل ضروری است.

پاسخ صحیح .

رقم i ام این عدد را با x_i نشان می‌دهیم، بنابراین به دنبال یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر هستیم:

$$\sum_{1}^{9} x_i = 32$$

$$\forall i \in [1, 9] : x_i \leq 9$$

تعداد جواب‌های صحیح این معادله را به کمک اصل متمم پیدا می‌کنیم:

-کل حالات: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $\sum_{1}^{9} x_i = 32$. این یک معادله سیاله است و تعداد جواب‌های صحیح آن برابر است با:

$$\binom{40}{8}$$

-حالات نامطلوب: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $\sum_{1}^{9} x_i = 32$ به طوری که: $\exists i \in [1, 9] : x_i \geq 10$

حال اگر مجموعه حالت‌هایی که در آن $x_i \geq 10$ است را با A_i نشان دهیم، کافی است تعداد اعضای اجتماع این مجموعه‌ها را بیابیم.

طبق اصل شمول و عدم شمول و با توجه به تقارن میان A_i ها داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_9| = \binom{9}{1}|A_1| + \binom{9}{2}|A_1 \cap A_2| + \ldots + \binom{9}{9}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_9|$$

برای محاسبه مقدار عبارت‌ها، در معادله سیاله متناظر، در صورتی که $x_i \geq ۱۰$ بود قرار می‌دهیم $x_i = y_i + ۱۰$ و در غیر این صورت قرار میدهیم $x_i = y_i$. حال اگر تعداد i هایی را که به ازای آن‌ها $x_i \geq ۱۰$ است را با k نشان بدهیم، حال به دنبال تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله سیاله $\sum_{۱}^{۹} y_i = ۳۲ - ۱۰k$ هستیم، که برابر است با:

$$\binom{۴۰ - ۱۰k}{۸}$$

حال مقدار عبارت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|A_۱| = \binom{۳۰}{۸} \qquad (k = ۱)$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = \binom{۲۰}{۸} \qquad (k = ۲)$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \binom{۱۰}{۸} \qquad (k = ۳)$$

برای بقیه جمله‌ها جواب برابر ۰ است.

پس کل حالات نامطلوب برابر است با:

$$\binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} - \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} + \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$\binom{۴۰}{۸} - \binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} + \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} - \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

سؤال ۶.۱.

با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش‌های انتخاب ۴ عضو دو به دو ناموالی از مجموعه اعداد n ،...،۱،۲،۳ برابر با انتخاب ۴ از n-۳ است.

پاسخ .

یک زیرمجموعه از این نوع مثلا ۱و۳و۷و۱۰ را انتخاب و نابرابری‌های اکید

$۰ < ۱ < ۳ < ۷ < ۱۰ < n + ۱$

را در نظر می‌گیریم. و بررسی می‌کنیم چند عدد صحیح بین هر دو عدد متوالی از این اعداد وجود دارند. در اینجا ۰ و ۱ و۳ و 2 و n-۱۰ را به دست می‌آوریم: ۰ زیرا عددی صحیح بین 0 و ۱ وجود ندارد و ۱ زیرا تنها عدد ۲ بین ۱ و۳ وجود دارد و 3 زیرا اعداد صحیح ۴ و۵ و۶ بین ۳ و۷ وجود دارند و ... . مجموع این ۵ عدد صحیح برابر $0 + 1 + 3 + 2 + n - 10 = n - 4$ است. XIV

پس تابع مولد زیر را داریم.

$$G(x) = (۱ + x^۲ + x^۳ + ...)^۲(x + x^۲ + x^۳ + ...)^۳ = (\sum_{k=۰}^{\infty} x^k)^۲(\sum_{k=۰}^{\infty} x^{k+۱})^۳ =$$

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲}.(\frac{x}{۱-x})^۳ = \frac{x^۳}{(۱-x)^۵} = x^۲(۱-x)^{-۵} = x^۳\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۴}{k}x^k =$$

$$\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۴}{k}x^{k+۳} = (E.XV) \quad \sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۱}{k-۳}x^k$$

به دنبال ضریب $x^{n-۴}$ می‌گشتیم پس $k = n - ۴$ و جواب نهایی برابر است با $\binom{n-3}{4} = \binom{n-3}{n-7}$

نکات:

E.XIV : مثال زدن باید به صورتی باشد که حذف آن اختلالی در فهم جواب ایجاد نکند . در اینجا اگر مثال پاراگراف اول را حذف کنیم مشخص نیست تابع مولد برچه اساسی نوشته شده است. پس باید توضیحی درمورد تابع مولد و جمله‌ای که به دنبال ضریب آن هستیم بدهیم .

E.XV : نیاز هست که کاملا گفته شود چه تغییر متغیری انجام می‌شود . در اینجا تغییر متغیر $k \to k + ۳$ را داریم. همیشه به هنگام تغییر متغیر توجه کنیم ممکن است کران‌ها تغییر کنند. در اینجا کران پایین از صفر به سه می‌رود. صورت اصلاح شده: $\sum_{k=۳}^{\infty} \binom{k+۱}{k-۳} x^k$

N.XVI : در طی پاسخ به سوال خوب است دقت کنیم همه‌ی اعداد را یا فارسی یا انگلیسی بنویسیم.

پاسخ .

تابع مولد فاصله از مبدا:

$$G(x) = (۱ + x + x^۲ + ...)(x + x^۲ + x^۳ + ...)^۳$$

در مجموع n-۴ عدد داریم . توان‌های x باید بین مبدا و مقصد باشند پس باید توانی از x را که کوچک تر یا مساوی n-۴ هستند را بیابیم:

$$G(x) = \frac{x^۳}{(۱-x)^۴} = x^۳(۱-x)^{-۴} = x^۳ \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۳}{۳} x^k$$

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{x+k}{k} = \frac{۱}{(۱+x)^{k+۱}} \longrightarrow k + ۳ \le n - ۴ \to k \le n - ۷$$

$$\binom{n+۱}{r+۱} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} \qquad (۱)$$

مجموع حالات:

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{n-۷} \binom{k+۳}{۳} \xrightarrow{(۱)} \binom{n-۷+۴}{۴} = \binom{n-۳}{۴}$$

نکات:

E.XVII : به هنگام جایگذاری در فرمول باید جایگذاری‌ها واضح باشد. در این مثال در فرمول (۱) کران پایین از r هست ولی در قسمتی که از آن استفاده شده کران پایین از ۰ است. همین مطلب گویای آن است که به توضیحات بیشتری نیاز هست.

عبارت زیر صورت کامل شده این نکته است:

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{n-۷} \binom{k+۳}{k} = \sum_{k=۳}^{k-۴} \binom{k}{k-۳} = \sum_{k=۳}^{n-۴} \binom{k}{۳} \xrightarrow[r\to۳, n\to n-۴]{(۱)} \binom{n-۳}{۴}$$

پاسخ صحیح .

تعداد عضوهای انتخاب نشده کوچکتر از عضو اول انتخاب شده را x_1، عضوهای انتخاب نشده بین عضو اول و دوم انتخاب شده را x_2، عضوهای انتخاب نشده بین عضو دوم و سوم انتخاب شده را x_3، عضوهای انتخاب نشده بین عضو سوم و چهارم انتخاب شده را x_4 و عضوهای انتخاب نشده بزرگ‌تر از چهارمین عضو انتخاب شده را x_5 می‌گیریم. کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر را با شرایط $x_2x_3, x_4 \geq 1$ $x_1, x_5 \geq 0$ بشماریم

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n - 4$$

که برابر است با ضریب x^{n-4} در عبارت:

$$(1+x+x^2+\ldots)(x+x^2+x^3+\ldots)(x+x^2+x^3+\ldots)(x+x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) = \frac{x^3}{(1-x)^5}$$

بنابراین کافی است ضریب x^{n-7} را در بسط $(1-x)^{-5}$ بشماریم .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1-x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

x^{n-7} به ازای $k = n - 7$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر است با:

$$\binom{n-3}{4}$$

سؤال ۷.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

پاسخ .

$$A = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1}$$
$$= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \left(0 + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i}{k+1}\right) = \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

نکات:

N.XVIII : باید فرمول و اتحادهای مورد استفاده و رفرنس معتبر آن ذکر شود. به عنوان رفرنس اسم اتحاد هم کافی است.

پاسخ صحیح .

طبق اتحاد پاسکال داریم:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+۱} = \binom{n+۱}{k+۱}$$

پس طبق این اتحاد می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n}\binom{i+۱}{k+۱} - \binom{i}{k+۱} = \sum_{i=k}^{n}\binom{i+۱}{k+۱} - \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k+۱}$$

$$= \binom{n+۱}{k+۱} + \sum_{i=k}^{n-۱}\binom{i+۱}{k+۱} - (۰ + \sum_{i=k+۱}^{n}\binom{i}{k+۱}) = \binom{n+۱}{k+۱} + \sum_{i=k}^{n-۱}\binom{i+۱}{k+۱} - \sum_{i=k}^{n-۱}\binom{i+۱}{k+۱} = \binom{n+۱}{k+۱}$$

فصل ۲ : منطق

سؤال ۲.۱.

گزاره‌های زیر همگی درست هستند، با در نظر گرفتن آن‌ها، درستی یا نادرستی گزاره های ۱ و ۲ را بررسی کنید.

- اگر کار نداشته باشم یا پولدار باشم، تفریح می کنم.
- اگر تفریح بکنم، فیلم می‌بینم یا بستنی می‌خورم.
- بستنی نمی‌خورم و می‌خوابم.
- اگر بخوابم، فیلم نمی‌بینم.

گزاره‌ها:

۱. من کار دارم.

۲. من پولدار هستم.

پاسخ .

چون خوابیدم، فیلم هم ندیدم، پس چون فیلم ندیدم، تفریح هم نکردم، پس طبق شرط اول، من پولدار نیستم و کار دارم.

نکات:

N.XIX : بهتر است برای جلوگیری از اشتباه، از نوشتار منطقی استفاده کرده و فارسی ننویسیم.

E.XX : باید فقط از تبدیلات تعریف شده استفاده کرد و استفاده از تبدیلات دیگر بدون اثبات صحیح نیست، مثلا در اینجا فیلم ندیدن مستقیما تفریح نکردن را نتیجه نمی دهد.

پاسخ صحیح .

هر گزاره را با یک حرف نشان می دهیم:

- من کار دارم $= p$
- من پولدار هستم $= q$
- من تفریح می‌کنم $= r$

- من فیلم می‌بینم $= s$
- من بستنی می‌خورم $= t$
- من می‌خوابم $= u$

فرض ها:

- $q \vee \neg p \implies r$
- $r \implies s \vee t$
- $\neg t \wedge u$
- $u \implies \neg s$

حال داریم:

۱. $\neg t \wedge u$(فرض)
۲. u(طبق ۱: ساده سازی عطفی)
۳. $u \implies \neg s$ (فرض)
۴. $\neg s$ (طبق ۳و۴)
۵. $\neg t$ (طبق ۱: ساده سازی عطفی)
۶. $\neg t \wedge \neg s$ (طبق ۳و۴: ترکیب عطفی)
۷. $r \implies s \vee t$(فرض)
۸. $\neg(s \vee t) \implies \neg r$(طبق ۷: عکس نقیض)
۹. $\neg s \wedge \neg t \implies \neg r$(طبق ۸: دمورگان)
۱۰. $\neg r$(طبق ۶و۹)
۱۱. $q \wedge \neg p \implies r$(فرض)
۱۲. $\neg r \implies \neg(q \vee \neg p)$(طبق ۱۱: عکس نقیض)
۱۳. $\neg(q \vee \neg p)$(طبق ۱۰و۱۲)
۱۴. $\neg q \wedge p$(طبق ۱۳: دمورگان)
۱۵. $\neg q$(طبق ۱۴: ساده سازی عطفی)
۱۶. p(طبق ۱۴: ساده سازی عطفی)

پس ۱ صحیح و ۲ غلط است.

سؤال ۲.۲.

صفحه‌ای دو بعدی را در نظر بگیرید که از هر دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و با دو رنگ آن را رنگ کرده‌ایم (حتما از هر دو رنگ استفاده شده است). آیا دو نقطه به فاصله d (عدد حقیقی) وجود دارد که هم‌رنگ باشند؟

پاسخ .

درستی نقیض خواسته سوال را اثبات می‌کنیم.

حکم سوال : دو نقطه به فاصله d (عدد حقیقی) وجود دارد که هم‌رنگ باشند.

نقیض حکم سوال : وجود دارد دو نقطه به فاصله d که دو رنگ مختلف باشند.

دو نقطه با دو رنگ متفاوت را در نظر می‌گیرم. فاصله این دو نقطه $kd + r$ است به طوری که k عدد صحیح نامنفی و $r < k$ است. اگر k بیشتر مساوی یک باشد از نقطه چپ ، به اندازه d سمت راست می‌آییم. این نقطه باید هم‌رنگ باشد و این انتقال را آنقدر ادامه می‌دهیم تا $k = ۰$ شود. حالا به دو نقطه‌ای رسیده‌ایم که فاصله‌ای کمتر از d دارند و از دو رنگ متفاوت هستند. سپس نقطه سوم به فاصله d از این دو نقطه در نظر می‌گیریم. یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می‌شود. بنابراین راس سوم حتما با یکی از دو راس دیگر رنگ متفاوت خواهد داشت. در اینجا ثابت کردیم نقیض حکم سوال درست است پس حکم سوال نادرست می‌باشد.

نکات:

T.XXI : نقیض حکم سوال به نادرستی بیان شده است. فرض کنید P(x،y) هم‌رنگ بودن دو نقطه x و y باشد. D(x،y) به فاصله d بودن دو نقطه x و y باشد.

حکم سوال بیان می‌کند که : $\exists x, y(D(x, y) \wedge P(x, y))$

برای نقیض کردن آن داریم:

$$\neg\exists x, y, (D(x, y) \wedge P(x, y)) = \forall x, y, (\neg(D(x, y) \wedge P(x, y)) = \forall x, y, (\neg D(x, y) \vee \neg P(x, y))$$

به صورت فارسی می‌توان گفت: هیچ دو نقطه به فاصله‌ی d هم‌رنگ نیستند.

در صورتی که جمله‌ی 'وجود دارد دو نقطه به فاصله d که دو رنگ مختلف باشند.' به شکل منطقی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x, y, (D(x, y) \wedge \neg P(x, y))$$

در گزاره‌های منطقی واضح است نقیض کردن اشتباه انجام شده است.

E.XXII : به طور کلی در نظر داشته باشد، توجه به نگرش پایه‌ای و گام به گام منطق در تمامی حل سوالات (حتی مباحث غیرمنطق) به تمیزتر نوشتن و پرهیز از اشتباه کمک می‌کند. یه همین علت مهم و مورد انتظار است.

پاسخ صحیح .

اصل لانه‌ی کبوتری: به ازای n لانه و $n + ۱$ کبوتر با فرض اینکه هر کبوتر در یکی از لانه‌ها قرار دارد؛ دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار دارند.

قبل از شروع اثبات اسم رنگ اول را قرمز و رنگ دوم را آبی می گذاریم.

حال مثلثی متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید که اندازه‌ی هر ضلع آن d است. بدیهی است که این مثلث را می‌توان در صفحه(طبق فرض مسئله صفحه بی‌نهایت است) در نظر گرفت که طبق اصل لانه‌ی کبوتری روی سه نقطه و دو رنگ، دو نقطه از این سه نقطه هم‌رنگند. این دو نقطه، دو نقطه به فاصله d و هم‌رنگند.

نکات:

N.VIII

سؤال ۳.۲.

چگونگی اثبات درستی یا نادرستی جمله زیر را توضیح دهید.

تابع q(x،y) را تعریف می‌کنیم اگر p(x) درست باشد p(x+y) و در غیر این صورت نقیض p(x-y) را نتیجه می‌دهد.

پاسخ .

جمله بالا را به صورت یک گزاره منطقی می‌نویسیم.

$$(\forall x, p(x)) \to (\exists y, q(x, y))$$

حال با یک مثال ، نادرستی گزاره فوق را نشان می‌دهیم.

سمت چپ گزاره $(\forall x, p(x))$ را P و سمت راست $(\exists y, q(x, y))$ را Q می‌نامیم. پس داریم: $P \to Q$

x_1 را در نظر می‌گیریم طوری که P درست باشد. سپس y_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که Q نادرست باشد.

$$P = True \to Q = False$$

بنابراین طبق جدول truth-table گزاره فوق نادرست خواهد بود.

نکات:

E.XXII

T.XXIII : از سورها به نادرستی تعبیر شده است. در عبارت Q سور وجودی داریم. بنابراین نمی‌توان y_1 را طوری انتخاب کرد که Q نادرست باشد.

پاسخ صحیح .

جمله بالا را به صورت یک گزاره منطقی می‌نویسیم.

$$(\forall x, p(x)) \to (\exists y, q(x, y))$$

چون در قسمت سمت چپ از سور عمومی استفاده شده است x_1 را طوری می‌یابیم که ناقض P باشد. بنابراین طبق truth-table درستی یا نادرستی Q اهمیتی ندارد.

$$P = False \to Q = -$$

پس در کل گزاره فوق درست است.

فصل ۳ : نکات نوشتار

نکات:

N.XXIV : در حل سوالات توجه کنید هر گزاره، فرمول، اتحاد و... که درستی آن‌ها اثبات شده است باید منبع معتبر آن ذکر شود. این منابع می‌توان اسم عام آن، آدرس سوال و تمرینی که قبلا داده شده، مطالب داخل کلاس، جزوه و... باشد.

E.XXV : در طول اثبات توصیه اکید می‌شود از کلمه «بدیهی است» استفاده نکنید. حتی در مسیر یافتن جواب هم در ذهن خود بسپارید هیچ چیز بدیهی نیست، یا نیاز به اثبات دارد یا قبلا اثبات شده است یا از اصول و تعاریف پایه است N.XXIV. به عبارتی برای هر جمله به سوال «چرا؟» پاسخ دهید. چرا؟ :) چون استفاده از بعضی از جملات اعم از «بدیهی است» و مواردی که اشاره خواهیم کرد در طول اثبات باعث کژفهمی کلیت اثبات یا کامل به نظر رسیدن اثباتی ناقص و یا حتی غلط می‌شود. به عبارت دیگر مانند فرایند های منطقی E.XX هر جمله باید از جملات قبلی و یا اصول پایه نتیجه گرفته شود.

N.XXVI : یکی از چراغ خطرهای در طول اثبات استفاده از «و .../و غیره/...» است. این کلمات به خودی خود بد نیستند، اما زمانی که ما می‌توانیم از علایم اختصاری استفاده کنیم اثبات ما تمیزتر و خواناتر و به طور حتم به دور از ابهام می‌شود. برای شفاف شدن موضوع به دو مثال زیر توجه کنید:

۱. دنباله «۲و ۴و ۶و ...» را داریم.
«و ...» نشان دهنده چه جملاتی در دنباله است؟
آیا منظور دنباله $a_n = 2n$ است؟
یا دنباله $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = 4$؟
یا دنباله $a_n = 2n + (1-n)^3(2-n)^2(3-n)$؟

۲. s را در نظر می‌گیریم $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
زیباتر است بنویسیم : $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$

N.XXVII : تا آن‌جا که می‌توانید جملات، عبارات ریاضی و گزاره‌ها را فارسی ننویسید. از گزاره‌های منطقی استفاده کنید یا به شکل عبارات و معادلات ریاضی بنویسید.

E.XXVIII : در مباحثی که مدل نوشتاری خاص وجود دارد مثل استقرا، ناوردایی و نظریه اعداد حتما اصول را رعایت کنید.

E.XXIX : از نوشتن عبارت هایی مثل "بهترین حالت این است که" یا "در بدترین حالت داریم که..." پرهیز کنید. توجه کنید که بهترین و بدترین و مفاهیمی از این دست، در ریاضیات معنایی ندارند مگر آن که آن‌ها را تعریف کنید و توضیح بدهید که چرا در نظر گرفتن این حالت به حل مسئله کمک می‌کند.

N.XXX : بهتر است در صورتی که در اثبات خود از روش یا ایده مشخص و شناخته شده‌ای استفاده می‌کنید، (مثل ناوردایی - استقرا - برهان خلف - دوگانه شماری و...)آن را ذکر کنید تا دنبال کردن اثبات شما برای خواننده راحت تر بشود و اثبات شما را بهتر متوجه بشود.

E.XXXI : اگر در نوشتن اثبات از رسم شکل استفاده می‌کنید، حذف کردن شکل نباید باعث ناقص شدن اثبات شما بشود، به عبارت دیگر شکل تنها باید به فهم بهتر اثبات کمک کند و نباید مستقیما برای اثبات استفاده شود.

E.XXXII : استفاده از مثال برای فهم بهتر اثبات یک حکم کلی اقدام خیلی خوبی است، اما نباید جایگزین اثبات اصلی بشود.

E.XXXIII : در طول اثبات به هیچ عنوان به شهود اکتفا نکنید. شهود به هیچ عنوان ارزش ریاضی ندارد.

E.XXXIV : همواره دقت نمایید تا جملات استفاده شده به یکی از اشکال زیر باشد:

۱. خود فرض مسئله باشد.

۲. به صورت کاملا شفاف و واضح از جملات قبلی نتیجه شده باشد.

۳. درستی آن قبلا اثبات شده باشد.

این مهم‌ترین قانون درست‌نویسی بوده و شرط لازم و کافی برای کامل بودن هر اثبات است. تمام نکات درست‌نویسی دیگری که در جای‌جای این جزوه گوشزد شده، به نوعی ترجمه‌ی این قانون در محیط مسائل مختلف است.

فصل ۴ : ناوردایی

سؤال ۱.۴.

اعداد ۱ تا ۲۰ را روی تخته نوشته‌ایم. هر بار می‌توانیم دو عدد a, b را از روی تخته پاک کرده و عدد b + a + ab را روی تخته بنویسیم. عدد نهایی روی تخته را بیابید.

پاسخ .

در هربار حاصل ضرب اعداد روی تخته + ۱ ثابت است. این عدد برابر ۲۱! است. پس عدد نهایی $۲۱! - ۱$ خواهد بود.

نکات:

N.XXXV : از نوشتن جملات فارسی که ایجاد ابهام می‌کنند بپرهیزید و حتی‌الامکان عبارات را به صورت ریاضی بنویسید. از جمله بالا می‌توان $a_۱ * a_۲ * a_۳ * \ldots * a_n + ۱$ را تعبیر کرد در صورتی که مقصود $(a_۱ + ۱) * (a_۲ + ۱) * (a_۳ + ۱) * \ldots * (a_n + ۱)$ بوده است.

E.XXXVI : اثبات ناوردا بودن یک مقدار از مهم‌ترین موارد مساله‌های ناوردایی می‌باشد. در این پاسخ، این مورد اثبات نشده است.

پاسخ صحیح .

مساله را با ناوردائی حل می‌کنیم. سوال را برای اعداد دلخواه حل کرده سپس اعداد یک تا بیست را در نتیجه‌ی نهایی لحاظ می‌کنیم. فرض می‌کنیم در ابتدای مساله اعداد $\mathrm{x}_{۲۰}$ ، $\mathrm{x}_{۱۹}$ ، ... ، $\mathrm{x}_۲$ ، $\mathrm{x}_۱$ را داریم. به ازای هر عدد x_i ، y_i را به این صورت در نظر می‌گیریم: $\mathrm{y}_i = \mathrm{x}_i + ۱$

مقدار ناوردا را S در نظر می‌گیریم و آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{S} = \mathrm{y}_۱ \times \mathrm{y}_۲ \times \ldots \times \mathrm{y}_{۱۹} \times \mathrm{y}_{۲۰}$$

ادعا می‌کنیم در هر مرحله با برداشتن دو عدد دلخواه a و b و گذاشتن عدد $\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{ab}$ به جای آن، مقدار S ثابت می‌ماند. حال به اثبات آن می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم در مرحله‌ی اول دو عدد دلخواه x_iو x_j را انتخاب می‌کنیم و به جای آن $\mathrm{x_i} + \mathrm{x_j} + \mathrm{x_i x_j}$ قرار می‌دهیم. این مقدار درواقع معادل $(\mathrm{x_i} + ۱)(\mathrm{x_j} + ۱) - ۱$ می‌باشد.بدین ترتیب مقدار S که تاکنون برابر $(\mathrm{x}_۱ + ۱)(\mathrm{x}_۲ + ۱) \ldots (\mathrm{x}_{۲۰} + ۱)$ بوده است؛ به صورت زیر به‌روزرسانی خواهد شد:

$$\begin{aligned} S &= (\prod_{k=۱,k\neq i,j}^{۲۰}(x_k+۱))(((x_i+۱)(x_j+۱)-۱)+۱) \\ &= (\prod_{k=۱,k\neq i,j}^{۲۰}(x_k+۱))(x_i+۱)(x_j+۱) \\ &= (x_۱+۱)(x_۲+۱)\dots(x_{۲۰}+۱) \end{aligned}$$

بنابراین در هرگام و با انتخاب هر دو عدد دلخواه، مقدار تعریف شده برای S ثابت خواهد ماند. بدین ترتیب عدد باقیمانده روی تخته برای اعداد یک تا بیست برابر است با:

$$(۱+۱)(۲+۱)\dots(۲۰+۱)-۱ = ۲۱!-۱$$

(از آن‌جایی که مقدار ناوردا بر اساس y_i تعریف شده است. در نهایت مقدار نهایی که براساس x_i است، یک واحد از مقدار ناوردا کمتر خواهد بود.)

سؤال ۲.۴.

در یک ردیف ۲۰۰۰ عدد نوشته شده است. فرض کنید به ازای هر عدد a در این دنباله، $f(a)$ برابر با تعداد دفعاتی باشد که a در دنباله آمده است. در هر مرحله به ازای هر عضوی از دنباله مثل x مقدار $f(x)$ را زیر آن می‌نویسیم تا یک دنباله ۲۰۰۰ تایی جدید حاصل شود. آیا می‌توان این دنباله را تا ابد ادامه داد به طوری که هیچ دو دنباله متوالی باهم برابر نباشند؟

پاسخ .

خیر این حالت امکان‌پذیر نیست. چون لازم است تعداد اعداد تکرار شده در هر مرحله باهم متفاوت باشد و پس از گذر از چند مرحله این امکان از بین می‌رود.

نکات:

E.XXXVII : استدلال فوق شهودی است و شهود به هیچ عنوان ارزش ریاضی ندارد.

پاسخ .

عددها در هر ستون را ناوردا در نظر می‌گیریم. واضح است این اعداد کران‌دار هستند پس یک جایی همه این ثابت می‌مانند و دو دنباله متوالی وجود خواهد داشت که باهم برابر باشند.

نکات:

E.XXXVI

T.XXXVIII : اشاره و اثبات نوع ناوردا ضروری است. نوع ناوردا می‌تواند ثابت یا افزایشی یا کاهشی باشد.
در این پاسخ نوع ناوردا غیر نزولی است زیرا اعداد در یک ستون از عدد دوم به بعد یا افزایش می‌یابند یا ثابت می‌مانند.
توجه کنید ممکن است در سوالاتی که ناوردای کاهشی یا افزایشی دارند تغییرات یک متغیر ناوردا باشد و نه مقدار آن. این موضوع را در پاسخ صحیح همین سوال مورد توجه قرار دهید.

پاسخ صحیح .

با ناوردایی مساله را حل می‌کنیم. مقدار ناوردا در این مساله، تعداد جملات متمایز و متفاوت است. اولین دنباله‌ی جدید ایجاد شده را در نظر بگیرید. در این دنباله به تعداد عددهایی که در دنباله‌ی قبلی i بار آمده‌بودند، جمله با مقدار i داریم. یعنی اگر در دنباله‌ی قبلی x عدد داشتیم، که هر یک i بار تکرار شده باشند، در دنباله‌ی جدید، $x \times i$ جمله با مقدار i خواهیم داشت. بدین ترتیب در هرگام تعداد جملات متمایز موجود در دنباله (ناوردا) همواره کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند چرا که $x >= ۱$ است. اگر زمانی باشد که این تعداد ثابت بماند، دنباله در مرحله‌ی بعد و دومرحله بعد آن یکسان خواهند بود و مساله حل است. در غیر این صورت یک تابع ناوردای کاهشی داریم. از طرفی کران گام نیز داریم. چون تعداد عدد صحیح می‌باشد، این کران یک خواهد بود. هم‌چنین چون مقدار ناوردای کاهشی داریم و همواره در طی گام‌ها مقدار ناوردای انتخابی کم می‌شود و کران پایین هم داریم (تعداد جملات در کمترین حالت ممکن می‌توانند صفر باشند)، بالاخره به نقطه‌ای خواهیم رسید که تعداد جملات متمایز یک خواهد بود و تمام جملات دنباله یکسان می‌شوند و از آن پس دیگر دنباله‌ی متمایز نخواهیم داشت.

سؤال ۳.۴.

ثابت کنید ۱۰۰۰۰۰ عدد طبیعی متوالی می‌توان یافت که در بین آن‌ها دقیقا ۵ عدد اول وجود دارد.

پاسخ .

اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ را در نظر بگیرید، بین این اعداد بیشتر از ۵ عدد اول وجود دارد. XL.

حال دنباله اعداد

$$۱۰۰۰۰۰!, ۱۰۰۰۰۰! + ۱, ۱۰۰۰۰۰! + ۲, ..., ۱۰۰۰۰۰! + ۹۹۹۹۹$$

را در نظر بگیرید، این دنباله حداکثر ۱ عدد اول دارد XL. بنابراین قطعا بین این دنباله و دنباله اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ دنباله‌ای وجود دارد که دقیقا ۵ عدد اول دارد.

نکات:

E.XXXIX : لازم است که گام ناوردا ذکر و اثبات شود.

E.XL : اثبات حکم‌های اشاره شده ضروری است .

E.XLI : لازم است به استفاده از پیوستگی گسسته در این اثبات اشاره شود.

پاسخ صحیح .

اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ را در نظر بگیرید، بین این اعداد حداقل ۶ عدد اول وجود دارد.(۲،۳،۵،۷،۱۱،۱۳)
حال دنباله اعداد

$$۱۰۰۰۰۰!, ۱۰۰۰۰۰! + ۱, ۱۰۰۰۰۰! + ۲, ..., ۱۰۰۰۰۰! + ۹۹۹۹۹$$

را در نظر بگیرید، این دنباله حداکثر ۱ عدد اول دارد. چون به ازای تمام i های بین ۲ و ۹۹۹۹۹ داریم:

$$۱۰۰۰۰۰! + i = i(\frac{(۱۰۰۰۰۰!)}{i} + ۱)$$

پس این اعداد اول نیستند و تنها عددی که ممکن است اول باشد عدد $۱ + !۱۰۰۰۰۰$ است.

حال از دنباله اولیه شروع می‌کنیم و در هر گام، کوچک‌ترین عدد دنباله را حذف کرده و عدد بعد از بزرگ‌ترین عدد را به آن اضافه می‌کنیم. در هر گام تعداد اعداد اول دنباله حداکثر یک واحد تغییر می‌کند. بنابراین چون در ابتدا دنباله بیش از ۵ عدد اول و در زمان رسیدن به دنباله دوم، حداکثر ۱ عدد اول دارد،طبق پیوستگی گسسته، دنباله‌ای در این گام‌ها وجود دارد که دقیقا ۵ عدد اول دارد.

سؤال ۴.۴.

سه دسته سنگریزه داریم که به ترتیب شامل ۱۱، ۱۸۵ و ۱۸۹ سنگریزه هستند. در هر حرکت می‌توانیم دو دسته از سنگریزه‌ها را با هم ترکیب کرده و یا یک دسته که تعداد زوجی سنگریزه دارد را به دو دسته با تعداد سنگریزه‌های یکسان تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم در نهایت به ۳۸۵ دسته برسیم که هر کدام ۱ سنگریزه دارند؟

پاسخ .

مشاهده می‌شود که برای این که به دسته‌های با یک سنگریزه برسیم، باید تعداد سنگریزه دسته‌ها مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ نداشته باشند زیرا مقسوم علیه مشترک در اینجا یک ناوردا است. در مورد این دسته‌ها هم این موضوع صدق می کند، پس می‌توان این تقسیم را انجام داد.

نکات:

E.XXXVI

T.XLII : نمی‌توان از برقرار بودن شرط لازم برای برقراری یک حکم، به درست بودن آن رسید. مثلا در این جواب، مقسوم علیه مشترک بیشتر از یک نداشتن دسته‌ها، شرط لازم برای برقراری حکم است اما کافی نیست، بنابرین نمی‌توان از آن برای اثبات درست بودن حکم استفاده کرد.

پاسخ .

برای شروع، از آن‌جایی که تعداد سنگ‌ها در تمامی دسته‌ها فرد است، فقط اجازه داریم که دو دسته را انتخاب کرده آن‌ها را با هم ترکیب کنیم. بر این اساس، سه حالت پیش می‌آید.

۱. دسته‌ی ۱۸۵ و ۱۸۹تایی را جهت ترکیب شدن انتخاب کنیم. در این صورت با اجرای مرحله‌ی اول دو دسته‌ی ۳۷۴تایی و ۱۱تایی خواهیم داشت.

۲. دسته‌ی ۱۱ و ۱۸۵تایی را انتخاب کنیم. دو دسته‌ی نهایی باقی‌مانده ۱۹۶تایی و ۱۸۹تایی خواهند بود.

۳. دسته‌ی ۱۸۹تایی و ۱۱تایی را برگزینیم. در نهایت دو دسته‌ی ۲۰۰تایی و ۱۸۵تایی خواهیم داشت.

مساله را با ناوردایی حل می‌کنیم. عددی مانند c را در نظر می‌گیریم. مقدار ناوردا را در هر حالت باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته بر c را در نظر می‌گیریم. اثبات می‌کنیم اگر عددی وجود داشته باشد که باقی‌مانده‌ی تعداد دسته‌های اولیه بر آن برابر صفر باشد، این باقی‌مانده در تمامی مراحل همچنان صفر خواهد ماند. فرض کنید c یک عدد اول باشد ادعا می‌کنیم که اگر عدد اولی با چنین شرایطی یافت شود، با هر مرحله تقسیم و ترکیب دسته‌ها باز هم می‌تواند تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته بشمارد. (این بدان معنی است که تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته بر عدد اول پیدا شده بخش‌پذیر باشد.) حال به اثبات ادعای خود می‌پردازیم:

طبق نظریه‌ی اعداد، دو حالت زیر را به ازای عدد اول $\mathrm{P}|\mathrm{P} > ۲$ برقرار است.

۱. در صورتیکه P بتواند هر دو دسته‌ي a و b را بشمارد، ترکیب آن دو را نیز می‌تواند بشمارد.

$$if\ P|a\ \&P|b \to P|a+b \tag{۱}$$

۲. در صورتیکه P بتواند دسته‌اي با تعداد عضو زوج مثل ۲c را بشمارد، نصف آن را نیز می‌تواند بشمارد.

$$if\ P|۲c \to P|c \tag{۲}$$

مجددا تاکید شود که رابطه‌ی ۵ و ۶ به ازای عدد اول بزرگ‌تر از ۲ برقرار است.

بنابراین باقی‌مانده‌ی تعداد سنگ‌ریزه‌های هر دسته بر عددی مانند c با شرایط فوق، همواره صفر خواهد ماند و ثابت است. حال با توجه به این اثبات کافیست برای هر یکی از سه حالت بالا، عدد اولی بیابیم که هر دو دسته را بتواند بشمارد. در صورتی‌که چنین چیزی ممکن باشد،

تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هردسته در هریکی از حالات کران پایین خواهد داشت و به ازای هر گام، تعداد سنگ‌ریزه‌هایش همواره بزرگ‌تر مساوی آن کران خواهد بود؛ که این کران همان عدد اول پیدا شده است.

برای حالت اول، عدد ۱۱، در حالت دوم، عدد ۷ و در حالت سوم، عدد ۵، سه عدد اول بزرگ‌تر از ۲ هستند که می‌توانند تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هردودسته را بشمارند. بدین ترتیب تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته‌ی ایجاد شده هیچ‌گاه از عدد اول شمارنده‌ی آن کمتر نخواهد شد. پس هیچ‌گاه نمی‌توانیم ۱۸۱ دسته سنگ‌ریزه داشته باشیم که هریک فقط یک سنگ‌ریزه داشته باشد.

نکات:

T.XLIII : بالاتر ذکر شده بود که می‌خواهیم حکم را برای هر عدد دلخواه c ثابت کنیم، اما جلوتر c اول فرض شده و در نهایت هم برای ۲ $c >$ اثبات شده است. تغییر فرض اثبات در مراحل بعد صحیح نیست و باید از ابتدا درست ذکر شود، چون در این حالت حکم متفاوتی با آنچه در ابتدا بیان کردیم، اثبات شده است.

پاسخ صحیح .

برای شروع، از آن‌جایی که تعداد سنگ‌ها در تمامی دسته‌ها فرد است، فقط اجازه داریم که دو دسته را انتخاب کرده آن‌ها را با هم ترکیب کنیم. بر این اساس، سه حالت پیش می‌آید.

۱. دسته‌ی ۱۸۵ و ۱۸۹تایی را جهت ترکیب شدن انتخاب کنیم. در این صورت با اجرای مرحله‌ی اول دو دسته‌ی ۳۷۴تایی و ۱۱تایی خواهیم داشت.

۲. دسته‌ی ۱۱ و ۱۸۵تایی را انتخاب کنیم. دو دسته‌ی نهایی باقی‌مانده ۱۹۶تایی و ۱۸۹تایی خواهند بود.

۳. دسته‌ی ۱۸۹تایی و ۱۱تایی را برگزینیم. در نهایت دو دسته‌ی ۲۰۰تایی و ۱۸۵تایی خواهیم داشت.

مساله را با ناوردایی حل می‌کنیم. اثبات می‌کنیم اگر عدد اول و فردی وجود داشته باشد که باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد سنگ‌ریزه‌ها در دسته‌های اولیه بر آن برابر صفر باشد، این باقی‌مانده در تمامی مراحل همچنان صفر خواهد ماند.

اثبات:

این عدد را p می نامیم، دو حالت زیر را به ازای عدد اول فرد P برقرار است.

۱. در صورتیکه P بتواند هر دو دسته‌ي a و b را بشمارد، ترکیب آن دو را نیز می‌تواند بشمارد.

$$if\ P|a\ \&P|b \rightarrow P|a+b \qquad (۳)$$

۲. در صورتیکه P بتواند دسته‌اي با تعداد عضو زوج مثل ۲c را بشمارد، نصف آن را نیز می‌تواند بشمارد.

$$if\ P|2c \rightarrow P|c \qquad (۴)$$

مجددا تاکید شود که رابطه‌ی ۵ و ۶ به ازای عدد اول بزرگ‌تر از ۲ برقرار است.

بنابراین باقی‌مانده‌ی تعداد سنگ‌ریزه‌های هر دسته بر عددی مانند p با شرایط فوق، همواره صفر خواهد ماند و ثابت است. حال با توجه به این اثبات کافیست برای هر یکی از سه حالت بالا، عدد اولی بیابیم که هر دو دسته را بتواند بشمارد. در صورتی‌که چنین چیزی ممکن باشد، تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هردسته در هریکی از حالات کران پایین خواهد داشت و به ازای هر گام، تعداد سنگ‌ریزه‌هایش همواره بزرگ‌تر مساوی آن کران خواهد بود؛ که این کران همان عدد اول پیدا شده است.

برای حالت اول، عدد ۱۱، در حالت دوم، عدد ۷ و در حالت سوم، عدد ۵، سه عدد اول بزرگ‌تر از ۲ هستند که می‌توانند تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هردودسته را بشمارند. بدین ترتیب تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته‌ی ایجاد شده هیچ‌گاه از عدد اول شمارنده‌ی آن کمتر نخواهد شد. پس هیچ‌گاه نمی‌توانیم ۱۸۱ دسته سنگ‌ریزه داشته باشیم که هریک فقط یک سنگ‌ریزه داشته باشد.

فصل ۵ : استقرا

سؤال ۱.۵.

تساوی های زیر برقرار است:

$$F(۱,۱) = ۲$$
$$F(m+۱,n) = F(m,n) + ۲(m+n)$$
$$F(m,n+۱) = F(m,n) + ۲(m+n-۱)$$

ثابت کنید:

$$F(m,n) = (m+n)^۲ - (m+n) - ۲n + ۲$$

پاسخ .

حکم را با استقرا روی m و n نشان می دهیم:

پایه استقرا:

$$F(۱,۱) = ۲$$

فرض استقرا:

$$F(m,n) = (m+n)^۲ - (m+n) - ۲n + ۲$$

حکم استقرا:

$$F(m+۱,n+۱) = (m+۱+n+۱)^۲ - (m+۱+n+۱) - ۲n$$

اثبات:

$$F(m+۱,n+۱) = F(m,n+۱) + ۲(m+n+۱)$$
$$\rightarrow F(m+۱,n+۱) = F(m,n) + ۲(m+n-۱) + ۲(m+n+۱)$$
$$\rightarrow F(m+۱,n+۱) = (m+n)^۲ - (m+n) - ۲n + ۲ + ۴(m+n)$$
$$\rightarrow F(m+۱,n+۱) = m^۲ + ۲mn + n^۲ - m - n - ۲n + ۲ + ۴m + ۴n + ۴ - ۴$$
$$\rightarrow F(m+۱,n+۱) = (m^۲ + ۲ + n^۲ + ۲mn + ۴m + ۴n) + (-m - n - ۲) - ۲n$$
$$\rightarrow F(m+۱,n+۱) = (m+۱+n+۱)^۲ - (m+۱+n+۱) - ۲n$$

حکم اثبات شد.

نکات:

E.XLIV : استقرا باید تمام حالت ها را در بر بگیرد، اما در اینجا فقط حالت هایی اثبات شده که $m = n$

پاسخ .

فرض کنید n دلخواه باشد، حکم را با استقرا روی m نشان می دهیم:

پایه استقرا:

$$F(1,1) = 2$$

فرض استقرا:

$$F(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$$

حکم استقرا:

$$F(m+1,n) = (m+1+n)^2 - (m+1+n) - 2n + 2$$

اثبات:

$$F(m+1,n) = F(m,n) + 2(m+n)$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2 + 2(m+n)$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = m^2 + 2mn + n^2 - m - n - 2n + 2 + 2m + 2n + 1 - 1$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m^2 + 1 + n^2 + 2mn + 2m + 2n) + (-m - n - 1) - 2n + 2$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m+1+n)^2 - (m+1+n) - 2n + 2$$

چون n را دلخواه در نظر گرفته بودیم، به ازای تمام m و n ها، حکم اثبات شد.

نکات:

E.XLV : پایه استقرا باید با توضیح داده شده مطابقت داشته باشد، در این مثال، برای درست بودن اثبات، باید پایه

$$F(1,n) = (1+n)^2 - (1+n) - 2n + 2$$

در نظر گرفته می شد که خود نیازمند اثبات است.

E.XLIV

پاسخ صحیح .

حکم را با استقرا روی m و n نشان می دهیم:

پایه استقرا:

$$F(1,1) = 2$$

فرض استقرا:

$$F(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$$

حکم استقرا:

$$F(m+1,n) = (m+1+n)^2 - (m+1+n) - 2n + 2$$
$$F(m,n+1) = (m+n+1)^2 - (m+n+1) - 2n$$

اثبات:

۱.

$$F(m+1,n) = F(m,n) + 2(m+n)$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2 + 2(m+n)$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = m^2 + 2mn + n^2 - m - n - 2n + 2 + 2m + 2n + 1 - 1$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m^2 + 1 + n^2 + 2mn + 2m + 2n) + (-m - n - 1) - 2n + 2$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m+1+n)^2 - (m+1+n) - 2n + 2$$

۲.

$$F(m,n+1) = F(m,n) + 2(m+n-1)$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2 + 2(m+n-1)$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = m^2 + 2mn + n^2 - m - n - 2n + 2m + 2n + 1 - 1$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m^2 + 1 + n^2 + 2mn + 2m + 2n) + (-m - n - 1) - 2n$$
$$\rightarrow F(m+1,n) = (m+1+n)^2 - (m+1+n) - 2n$$

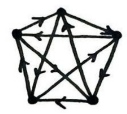
حکم اثبات شد.

سؤال ۲.۵.

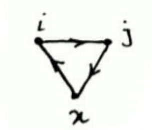
به یک گراف کامل جهت‌دار تورنمنت می گوییم، یک راس را شاه می‌نامیم اگر بتوان آن راس با مسیرهایی حداکثر به طول ۲ به بقیه رئوس گراف رسید. نشان دهید به ازای همه n ها به جز ۲ و ۴ تورنمنتی $n-$ راسی داریم که همه رئوس در آن شاه هستند.

پاسخ .

پایه ها:



G_n را از روی G_{n-1} می‌سازیم به این صورت که G_{n-1} را جفت جفت افراز کرده و اتصال هر جفت با راس جدید را جداگانه بررسی می‌کنیم. جفت راس i, j را در نظر بگیرید که در آن یال از سمت i, j به سمت یال i به سمت j باشد، حال (بدون کم شدن از کلیت مسئله) راس جدید x را به این صورت به مجموعه اضافه می‌کنیم:



تمام مسیرهای ij, ix, jx, xi, xj به طول حداکثر ۲ موجودند، این کار را برای تمام جفت راس‌ها انجام می‌دهیم. بنابراین تمام مسیرها به طول حداکثر ۲ موجودند، راس x به تمام راس‌ها یال دارد، پس به گراف دلخواه G_n رسیدیم.

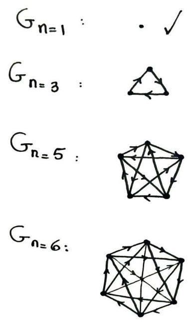
نکات:

E.XLVI : ناقص بودن گام استقرا: این گام در صورتی صحیح است که n فرد باشد. و با توجه به وابستگی اثبات n های فرد به صحیح بودن حکم برای n های زوج، حکم اثبات نمی شود.

T.XLVII : حکم برای حالت ۱ و ۳ اثبات نشده است.

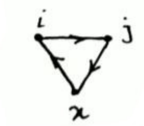
پاسخ صحیح .

پایه استقرا:



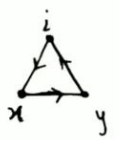
برای $n > ۶$ ما دو حالت داریم: حالت اول n زوج . حالت دوم n فرد.

الف) n فرد می‌باشد. پس $G_{n-۱}$ تعداد زوجی راس دارد. G_n را از روی $G_{n-۱}$ می‌سازیم به این صورت که $G_{n-۱}$ را جفت جفت افراز کرده و اتصال هر جفت با راس جدید را جداگانه بررسی می‌کنیم. جفت راس i, j را در نظر بگیرید که در آن یال از i, j از سمت یال i به سمت j باشد، حال (بدون کم شدن از کلیت مسئله) راس جدید x را به این صورت به مجموعه اضافه می‌کنیم:



تمام مسیرهای xj, xi, jx, ix, ij به طول حداکثر ۲ موجودند، این کار را برای تمام جفت راس‌ها انجام می‌دهیم. بنابراین تمام مسیرها به طول حداکثر ۲ موجودند، راس x به تمام راس‌ها یال دارد، پس به گراف دلخواه G_n رسیدیم.

ب) n زوج باشد. در این حالت G_n را از $G_{n-۲}$ می‌سازیم. دو راس جدید x, y را بهم متصل می‌کنیم(از x به سمت y) حال به ازای هر راس i در $G_{n-۲}$ آن را به این صورت به x به y متصل می‌کنیم.



تمامی مسیرهای iy, ix, yx, yi, xi, xy به طول حداکثر ۲ موجود هستند چون این کار را برای تمام راس‌های $G_{n-۲}$ انجام دادیم پس تمام مسیرها به طول حداکثر ۲ موجودند و راس‌ها جدید y, x به تمام راس‌ها یال دارند، پس گراف دلخواه G_n را ساختیم.

چون هم برای nهای زوج ثابت کردیم و هم برای n های فرد، پس می‌توان G_n را به ازای تمام $n > ۶$ ساخت.

سؤال ۳.۵.

نشان بدهید که میتوان اعداد $۱, ۲, ۳, \ldots, n$ را طوری کنار هم چید، که میانگین هیچ دو عددی بین آن دو عدد دیده نشود.

پاسخ .

برای $n = ۱, ۲$ به طور بدیهی می‌توان جایگشتی ساخت که میانگین هیچ دو عددی بین آن دو عدد دیده نشود.

$$n = ۲ \rightarrow \{۱, ۲\}$$

برای n های بزرگ‌تر از ۲، عددها را به دو دسته زوج و فرد تقسیم می‌کنیم و اعداد را مانند الگوریتم زیر می‌چینیم.

برای $n = ۳$ ابتدا اعداد فرد را در سمت چپ و سپس عدد زوج را می‌نویسیم.

$$n = ۳ \rightarrow \{۱, ۳, ۲\}$$

برای $n = ۴$ نیز، دو دسته زوج و فرد را تشکیل می‌دهیم و مانند $n = ۲$ ، سمت چپ اعداد فرد و سمت راست اعداد زوج را می‌نویسیم.

برای $n = ۵$ نیز، دو دسته زوج و فرد را به ترتیب با ۲ و ۳ عضو تشکیل می‌دهیم و دسته فرد را سمت چپ و دسته زوج را سمت راست قرار می‌دهیم.

اگر به همین ترتیب پیش برویم جایگشت مناسب برای هر عدد را می‌توان با استفاده از اعداد قبل نوشت. پس حکم اثبات شد.

نکات:

E.XIV

مثال زدن و تعمیم دادن آن اثبات محسوب نمی‌شود.

E.XLVIII : همین تفکر گام به گام را می‌توان با استفاده از استقرا بیان کرد. در این صورت باید همه الزامات استقرا اعم از پایه و فرض و حکم استقرا را نوشت و به طور کامل اثبات را پیش برد. در این پاسخ فقط پایه استقرا رعایت شده است.

پاسخ صحیح .

پایه استقرا: $n = ۲$ برقرار است.

چینش: ۱ ۲

سوال را با دو گام حل می‌کنیم:

آ) گام اول: $n \rightarrow ۲n$

ب) گام دوم: $n \rightarrow n - ۱$

فرض استقرا: $n = ۲^k$

حکم استقرا: $n = ۲^{k+۱}$

اثبات: مجموعه‌ی حکم را به دو قسمت زوج‌ها و فردها تقسیم می‌کنیم.

۱. برای زوج‌ها هر عدد را بر دو تقسیم می‌کنیم. به مجموعه‌ی فرض می‌رسیم که شرایط مسئله در آن برقرار است و جایگشتی از اعضا را دارد که در آن چینش میانگین هیچ دو عضوی بینشان نیست. حال این جایگشت را در نظر گرفته و هر عضو را در دو ضرب می‌کنیم.

۲. برای فردها هر عدد را به علاوه یک و سپس بر دو تقسیم می‌کنیم. به مجموعه‌ی فرض می‌رسیم که شرایط مسئله در آن برقرار است و جایگشتی از اعضا را دارد که در آن چینش میانگین هیچ دو عضوی بینشان نیست. حال این جایگشت را در نظر گرفته و هر عضو را در دو ضرب و منهای یک می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم مجموعه‌ی حاصل مجموعه‌ی جواب است، هر دو عددی که از مجموعه‌ی زوج‌ها انتخاب کنیم ،میانگینشان هم فقط در دو ضرب شده است و در نتیجه بین آن دو نخواهد بود. هر دو عددی که از مجموعه فردها انتخاب کنیم، میانگنشان در دو ضرب و منهای یک شده است و بنا به فرض بین آن دو نخواهد بود. اگر عددی از فردها و عددی از زوج‌ها را انتخاب کنیم، میانگینشان طبیعی نخواهد بود و جزو شرایط مسئله نیست. همه‌ی حالت‌ها را بررسی کردیم، پس ادعا صحیح و حکم ثابت می‌شود.

با حذف بزرگ‌ترین عدد از مجموعه فرض استقرا می‌توان به جایگشتی از $n - ۱$ عضو رسید به طوری که میانگین هیچ دو عضوی بینشان نیست. پس در این صورت شرایط سوال برای $n - ۱$ برقرار است و حکم استقرا ثابت است.

با شروع از پایه ۲ و با استفاده از گام اول می‌توان حکم را برای همه اعداد توان ۲ ثابت کرد و با استفاده از گام -۱ همه اعداد بین توان های ۲ متوالی را پوشش داد. بنابراین حکم سوال برای تمام اعداد طبیعی برقرار است.

نکات:

E.XLIX : به این گونه سوالات که یک گام بزرگ (گام آ) دارد و یک گام معکوسی (گام ب) که کم می‌کند استقرای قهقرایی می‌گویند. در این سوالات حکم را با گام بزرگ اثبات می‌کنیم و با استفاده از گام کوچک از آن کم می‌کنیم تا همه اعداد را پوشش دهیم.

E.L : توجه کنید در اثبات‌ها باید با استفاده از گام(ها) و فرض ، حکم را برای همه اعداد طبیعی ثابت کنید.

فصل ۶ : گراف

سؤال ۱.۶.

ثابت کنید یک گراف ۳-منتظم رأس برشی دارد اگر و تنها اگر یال برشی داشته باشد.

پاسخ .

فرض کنید v یک راس برشی از گراف G است. چون گراف ۳-منتظم است پس با حذف v گراف به ۳ مولفه تقسیم می‌شود. همسایه‌های v را x, y, z می‌نامیم. نشان می‌دهم هرکدام از یال‌ها برشی هستند.

بدون تغییر کلیت سوال یال vx را در نظر بگیرید. مثلا v را در مولفه‌ای در نظر بگیرید که y در آن قرار دارد. می‌دانیم که x با تنها گذر از v می‌تواند به y برسد یعنی در واقع وارد مولفه مزبور شود. پس vx یال برشی است.

برای طرف دوم می‌خواهیم ثابت کنیم؛ اگر گراف ۳-منتظم یال برشی داشته باشد، آنگاه راس برشی دارد. عکس نقیض گزاره فوق را در نظر می‌گیریم.

عکس نقیض: اگر گراف ۳-منتظم راس برشی نداشته باشد، آنگاه یال برشی ندارد.

در قسمت اول دیدیم اگر راس برشی داشته باشیم پس یال برشی داریم. بنابراین اگر راس برشی نداشته باشیم، یال برشی هم نداریم.

عکس نقیض گزاره درست است. چون هر گزاره با عکس نقیض خود هم‌ارز است، پس گزاره اصلی هم درست است.

نکات:

E.LI : در حل سوالات باید تمامی حالت‌هایی که ممکن است پیش بیاید را در نظر بگیریم. در اینجا با حذف v ممکن است گراف به ۲ مولفه همبندی تقسیم شود.

E.XXII گزاره «اگر گراف ۳-منتظم راس برشی داشته باشد، آنگاه یال برشی دارد.» را معادل $p \to q$ در نظر بگیرید.

گزاره «اگر گراف ۳-منتظم راس برشی نداشته باشد، آنگاه یال برشی ندارد.» معادل می‌شود با $\neg p \to \neg q$ که این وارون گزاره فوق است و با هم هم‌ارز نیستند. بنابراین نمی‌توان از گر راس برشی داشته باشیم پس یال برشی داریم نتیجه بگیریم گر راس برشی نداشته باشیم، یال برشی هم نداریم.

پاسخ صحیح .

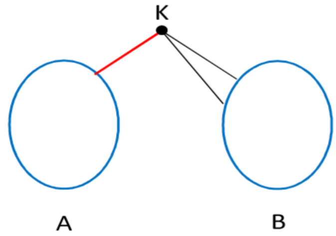
ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر در این گراف رأس برشی داشته باشیم، یال برشی داریم.

اگر k رأس برشی باشد، چون درجه آن ۳ است، دو حالت داریم :

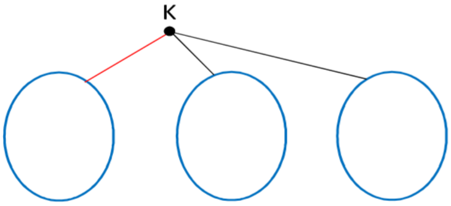
۱) به دو مؤلفه یال داشته باشد. در این صورت به یکی از مؤلفه‌ها ۲ یال و به دیگری یک یال دارد و می‌توانیم گراف را به صورت شکل ۱ رسم کنیم. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، مولفه‌ای که k به آن یک یال دارد را A و مولفه دیگر را B می‌نامیم. چون k برشی است پس از A به B فقط یک مسیر گذرا از k وجود دارد و چون از A به k نیز فقط یک یال وجود دارد، این یال برشی است.

۲) در غیر این صورت اگر به سه مؤلفه یال داشته باشد، به هریک از ۳ مؤلفه، یک یال دارد و میتوانیم گراف را به صورت شکل ۲ رسم کنیم. چون k برشی است و به هر مؤلفه فقط یک یال دارد، پس هرکدام از این یال‌ها نیز برشی هستند.

(۱)

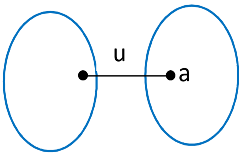


(۲)



سپس اثبات میکنیم که اگر یال برشی داشته باشیم، رأس برشی داریم.

اگر u یال برشی باشد، می‌توانیم گراف را مانند شکل زیر رسم کنیم و چون یال u برشی است، بنابراین به جز u یال دیگری از رأس a (یک سر یال u در یک مؤلفه) به مؤلفه دیگر وجود ندارد. بنابراین رأس a نیز برشی است.



سؤال ۲.۶.

ثابت کنید در یک تورنمنت(گراف کامل سادهٔ جهت دار) قویا همبند، به ازای هر k به‌طوری که $3 \leq k \leq n$، دوری جهت‌دار وجود دارد.

پاسخ .

در یک گراف ساده‌ی جهت دار همبند بین هر دو راس آن یک مسیر وجود دارد. برای یافتن دور جهت دار به طول k به‌طوری که $3 \leq k \leq n$ باشد، کافی است مسیری به طول $k - 1$ از راس دلخواه a به راس دلخواه b پیدا کنیم. از آنجایی که بین هر دو راس مسیر جهت دار وجود دارد، از b به a نیز مسیر جهت دار وجود دارد. پس می‌توان دوری جهت دار به طول k پیدا کرد.

نکات:

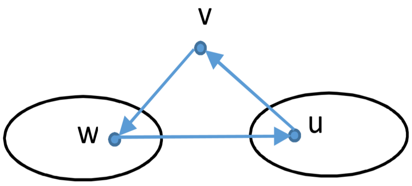
E.XXV هیچ جمله‌ای را بدیهی فرض نکنید! در اینجا باید ذکر شود چگونه مسیر به طول $k - 1$ پیدا می‌شود.

E.XXXIV همان طور که قبلا گفتیم هر عبارت باید نتیجه شده از عبارت قبلی باشد. عبارت آخر «پس می‌توان دوری جهت دار به طول k پیدا کرد.» از جملات قبلی نتیجه نمی‌شود. در اینجا مسیری به طول $k - 1$ از راس دلخواه a به راس دلخواه b پیدا شده است، از b به a نیز مسیر جهت دار وجود دارد، ولی تضمینی نیست که طول آن یک باشد تا دور به طول k تشکیل شود.

پاسخ صحیح .

روی k استقرا می‌زنیم و داریم:

پایه: k = ۳ . رأس v را در نظر بگیرید. اگر رئوسی که به v یال دارند را در مجموعه A و رئوسی که v به آن‌ها یال دارد را در مجموعه B قرار دهیم، با توجه به این که گراف قویاً همبند است، مجموعه‌های A و B تهی نیستند و رأس w در B وجود دارد که به رأس u در A یال دارد. بنابراین رئوس w و u و v دور به طول ۳ تشکیل می‌دهند.

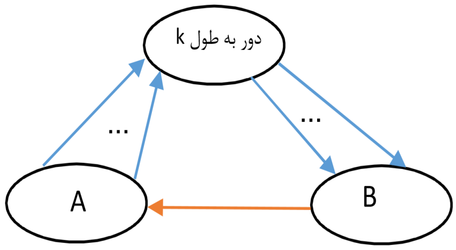


فرض: دور به طول k داریم.

حکم: دور به طول k+1 داریم.

دور به طول k را (با توجه به فرض استقرا) در نظر بگیرید. حال اگر رأس u خارج از این دور وجود داشته باشد که به رئوس داخل دور، هم یال ورودی و هم یال خروجی داشته باشد (حداقل یک یال ورودی و یک یال خروجی)، با توجه به این که گراف تورنومنت قویاً همبند است و u به تمام رئوس داخل دور یال ورودی یا خروجی دارد، رئوس x و y در این دور وجود دارند به طوری که x و y همسایه باشند و از x با یال خروجی به u برویم و با یال ورودی به y برگردیم. پس دور به طول k+1 هم داریم.

در غیر این صورت، اگر رئوسی داشته باشیم که همه به رئوس داخل دور وارد می‌شوند (مجموعه A) و رئوسی داشته باشیم که همه از آن‌ها خارج می‌شوند (مجموعه B)، چون گراف قویاً همبند است، پس حتماً از B به A مسیر داریم. این راس از B را b می‌نامیم که به راس a از A یال دارد. راس v_2 از دور به طول k را در نظر بگیرید. چون همه همسایه‌های v_2 به b یال دارند و از a هم یال ورودی دارند، پس می‌توان دور به طول $k+1$ را به صورت $v_1 \to b \to a \to v_3 \to \ldots \to v_k \to v_1$ تشکیل داد.



سؤال ۳.۶.

ثابت کنید تعداد گراف‌های ساده با مجموعهٔ رأس‌های $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ که درجهٔ هریک از رأس‌های آن‌ها زوج است، برابر است با $2^{\binom{n-1}{2}}$.

پاسخ .

نشان می‌دهیم تعداد این گراف‌ها برابر تعداد گراف‌های $n-1$ راسی است.

اثبات: گراف‌های $n-1$ راسی را در نظر بگیرید. حال راس n ام را اضافه کرده و به تمام رئوس با درجه فرد وصل می‌کنیم. درجه این راس زوج است چون تعداد رئوس درجه فرد در گراف $n-1$ راسی زوج بود. پس از هر گراف $n-1$ راسی می توان یک گراف n راسی ساخت که درجه تمام رئوس آن زوج باشد.

حال کافی است این تعداد را بشماریم که برابر $2^{\binom{n-1}{2}}$ است.

E.LII : لازم است برای اثبات برابر بودن تعداد این دو دسته، ثابت کنیم که تناظر بین آن‌ها یک به یک است، به این معنی که گراف به دست آمده در این فرایند یکتا است.

پاسخ صحیح .

اگر A مجموعه همه گراف های ساده با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ باشد و B مجموعه گراف های ساده با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ باشد به گونه ای که درجه تمام رئوس زوج باشد، می دانیم $|A| = 2^{\binom{n-1}{2}}$ بنابراین می‌خواهیم تناظر یک به یک بین اعضای مجموعه های A و B برقرار کنیم تا نشان دهیم $|B| = 2^{\binom{n-1}{2}}$

اگر G گرافی ساده با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ باشد، رأس v_n را به آن اضافه می کنیم و آن را به تمام رئوس با درجه فرد وصل می‌کنیم و گراف حاصل را G' می‌نامیم. بنابراین تمام رئوس با درجه فرد در G، در G' درجه زوج دارند. همچنین چون تعداد رئوس با درجه فرد در هر گراف زوج است، پس درجه v_n نیز زوج می‌باشد. از طرف دیگر اگر برعکس این عمل را روی هر گراف با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ که درجه تمام رئوس آن زوج هستند انجام دهیم و رأس v_n را از آن ها حذف کنیم، گرافی ساده با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ ایجاد می‌شود.

برای رسیدن از گراف n - ۱ رأسی a در A به گراف n رأسی b در B، به رأس a رأس v_n و یال هایش را اضافه می‌کنیم و برعکس آن، برای رسیدن از b به a، رأس v_n و یال هایش را حذف می‌کنیم. بنابراین با رفتن از گرافی در A به گرافی در B و برگشتن از B به A، به همان گراف

اول می رسیم. پس تناظر ما یک به یک است.

پس چون بین اعضای این دو مجموعه تناظر یک به یک وجود دارد، $|B| = ۲^{\binom{n-۱}{۲}}$

سؤال ۴.۶.

گراف همبند و بی‌جهت G را در نظر بگیرید. ثابت کنید می‌توانیم یال‌های این گراف را به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک شود.

پاسخ .

از استقرا استفاده می‌کنیم.

پایه: برای گراف‌های با $n = ۱, n = ۲$ راس، واضح است که می‌توانیم یال‌های این گراف را به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک شود.

فرض: گراف $n - ۱$ راسی را در نظر بگیرید که حکم برای آن درست است.

حکم: می‌خواهیم ثابت کنیم گراف n راسی را می‌توانیم به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس آن، حداکثر یک شود.

اثبات: گراف $n - ۱$ راسی را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا یال‌های این گراف را به صورتی جهت دهی کرده‌ایم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک است. به این گراف راس nام را اضافه می‌کنیم. از راس n فقط به یکی از راس‌های قبلی یال وصل می‌کنیم. اگر درجه خروجی این راس یکی بیشتر بود، یال را ورودی رسم می‌کنیم. اگر درجه ورودی این راس یکی بیشتر بود، یال را خروجی رسم می‌کنیم و در غیر این صورت به طور دلخواه جهت می‌دهیم. بنابراین برای گراف n راسی هم حکم ثابت شد.

نکات:

E.XLIV

پاسخ .

از استقرا استفاده می‌کنیم.

پایه: برای گراف‌های با $n = ۱, n = ۲$ راس، واضح است که می‌توانیم یال‌های این گراف را به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک شود.

فرض: گراف $n - ۱$ راسی را در نظر بگیرید که حکم برای آن درست است.

حکم: می‌خواهیم ثابت کنیم گراف n راسی را می‌توانیم به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس آن، حداکثر یک شود.

اثبات: گراف $n - ۱$ راسی را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا یال‌های این گراف را به صورتی جهت دهی کرده‌ایم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک است. به این گراف راس nام را اضافه می‌کنیم. این راس به هر یک از راس‌ها حداکثر یک یال دارد. هر یال راس n را در نظر بگیرید. آن را $v_i n$ می‌نامیم. اگر تا پیش از این تعداد یال‌های ورودی و خروجی راس v_i برابر بود، یال را دلخواه جهت گذاری می‌کنیم. در غیر این صورت چون اختلاف درجه‌ی ورودی و خروجی راس v_i یک است جهت یال $v_i n$ را طوری انتخاب می‌کنیم که این اختلاف صفر شود. بنابراین برای گراف n راسی هم حکم ثابت شد.

نکات:

E.LIII : اثبات ناقص است. باید توجه کنیم که شرایط سوال برای راس nام برقرار نمی‌شود. به طور کلی در اثبات از روش استقرا، درستی شرایط برای راس یا یالی که اضافه می‌شود را در نظر بگیرید.

پاسخ .

گراف با راس‌های $\{v_1, v_2, \ldots, n_n\}$ را داریم. تمام یال‌های v_1 را به طور دلخواه جهت دهی می‌کنیم طوری که شرایط سوال برقرار باشد. به سراغ راس v_2 می‌رویم و یال‌های آن را جهت دهی می‌کنیم. همین کار را برای سایر راس‌ها انجام می‌دهیم. در صورتی که به راس v_iای رسیدیم که نمی‌توانستیم یال‌های آن را متناسب با این شرایط جهت دهی کنیم، به یکی از همسایه‌های v_i می‌رویم که اختلاف درجه ورودی و خروجی آن صفر است. سپس جهت یال مشترکشان را عوض می‌کنیم. اختلاف درجه ورودی و خروجی راس همسایه برابر یک می‌شود و حال امکان برقراری شرایط برای v_i وجود دارد. به همین ترتیب تا راس v_n پیش می‌رویم و در نهایت یال‌های گراف را طوری جهت داده‌ایم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک است.

نکات:

E.XXXIII

پاسخ صحیح .

اگر درجه تمامی رئوس گراف زوج باشد که می‌توان گذر اویلری در آن ایجاد کرد که پس از آن اگر یال‌ها را طبق جهت پیموده شده جهت‌دهی کنیم، حکم ثابت است وگرنه $2k$ تا راس درجه فرد وجود دارند. راس v را به گراف اضافه می‌کنیم و سپس آن را به راس‌های درجه فرد گراف وصل می‌کنیم. پس از آن درجه تمامی رئوس زوج خواهد بود و مانند قبل یال‌ها را جهت می‌دهیم. در پیمایش دور اویلری درجه ورودی و خروجی هر راس برابر می‌شود. سپس راس v و یال‌هایش را حذف می‌کنیم. چون هر راس گراف حداکثر یک یال به v داشت بنابراین تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک می‌شود.

سؤال ۶.۵.

ثابت کنید برای هر گراف G، زیرگراف دو بخشی Hای وجود دارد که $e_{(H)} > \frac{e_{(G)}}{2}$ باشد.

پاسخ .

گراف G با n را در نظر می‌گیریم. راس دلخواه v را از این گراف برمی‌داریم. فرض می‌کنیم برای $n-1$ راس زیر گراف دوبخشی وجود دارد که شامل بیش از نیمی از یال‌های گراف اصلی است. حال باید راس v را به یکی از این دو بخش طوری اضافه کنیم که تعداد یال‌هایی که بین v و راس‌ها در بخش اضافه شده است کمتر از تعداد یال‌هایی که بین v و بخش دیگر گراف وجود دارند باشد.

برای این کار می‌توان، تعداد یال‌هایی که راس v با بخش اول می‌تواند بسازد را با تعداد یال‌هایی که v با بخش دوم می‌سازد مقایسه کنید. اگر تعداد یال‌های v با بخش اول بیشتر v را به بخش دوم و اگر برعکس بود v را به بخش اول اضافه می‌کنیم و اگر مساوی بودند فرقی نمی‌کند به کدام اضافه کنیم.

v را به بخش مورد نظر اضافه می‌کنیم و یال‌های متصل از v به بخش دیگر را رسم می‌نماییم. به این ترتیب مطمئن هستیم حکم سوال برقرار است.

نکات:

E.XXVIII زمانی که در حل سوال از یک حالت (مثلا گراف n راسی) به حالتی کوچکتر (گراف $n-1$ راسی) می‌رسیم و فرض می‌کنیم حکم برای حالت کوچکتر درست است؛ به معنی این است که از استقرا استفاده می‌کنیم. بنابراین رعایت مدل نوشتار استقرا شامل پایه، فرض استقرا و حکم استقرا الزامی است.

T.LIV : سوال برای حالت بزرگتر مساوی اثبات شده است.

پاسخ صحیح .

به صورت دلخواه راس های گراف G را به دو دسته تقسیم می‌کنیم، سپس در هر مرحله یک راس که تعداد یال‌هایی که با راس‌های هم گروه خود دارد از تعداد یال‌هایی که با راس‌های گروه دیگر دارد بیشتر است را انتخاب می‌کنیم و آن را به گروه دیگر منتقل می‌کنیم. با استفاده از ناوردایی نشان می‌دهیم بعد از تعداد متناهی مرحله، به حالتی از دسته‌بندی راس‌ها می‌رسیم که دیگر راسی برای جابجایی وجود ندارد.

مقدار ناوردا: تعداد یال‌های بین دو گروه.

گام ناوردا: با هر بار تکرار مرحله بالا تعداد یال‌های بین دو گروه در هر مرحله حداقل یک واحد افزایش می‌یابد. پس ناوردای افزایشی داریم.

حال چون تعداد کل یال‌های گراف ثابت است و ناوردا نمی‌تواند از این تعداد بیشتر شود؛ پس، بعد از تعداد متناهی مرحله، به حالتی از دسته‌بندی راس‌ها می‌رسیم که دیگر راسی برای جابجایی وجود ندارد.

در اینجا اگر تعداد یال‌هایی که دو سر آنها در یک گروه است، از تعداد بقیه یال‌ها کمتر باشد، با حذف این یال‌ها، گراف خواسته شده H به دست آمده است. در غیر این صورت، برای تمام راس‌های گراف، تعداد یال‌هایی که سر دیگر آنها در گروه دیگر است با تعداد یال‌هایی که سر دیگر آنها در همان گروه است برابر است و به این ترتیب تعداد یال‌های بین دو گروه دقیقا برابر تعداد یال‌هایی است که دو سر آن هم گروه هستند. در اینجا یک یال دلخواه AB که گروه راس‌های Aو B متفاوت است را انتخاب می‌کنیم، حال گروه راس A را عوض می‌کنیم و به این ترتیب تعداد یال‌های بین دو گروه ثابت می‌ماند و دو سر یال AB در یک گروه است در حالی که وضعیت بقیه یال‌های متصل به راس B ثابت مانده است، حال تعداد یال‌هایی که راس B با رئوس هم گروه خود دارد یک واحد بیشتر از تعداد یال‌هایی است که با راس‌های گروه دیگر دارد و به این ترتیب با انتقال این راس به گروه دیگر، تعداد یال‌های بین دو گروه یک واحد بیشتر می‌شود و همچنین تعداد آن از بقیه یال‌ها هم بیشتر می‌شود پس با حذف یال‌هایی که دو سر آنها در یک گروه هستند که تعداد آنها کمتر از نصف تعداد کل یال‌ها در گراف G است، به گراف خواسته شده H می‌رسیم.

سؤال ۶.۶.

ثابت کنید گراف n راسی با $\binom{n-۱}{۲} + ۲$ یال، دارای دور همیلتونی است.

پاسخ .

راس n را از گراف حذف می‌کنیم و گراف به دست آمده را کامل می‌کنیم. چون این گراف $\binom{n-۱}{۲}$ راس دارد و دور همیلتونی دارد، اگر دو راس متوالی در این دور را به راس n ام وصل کنیم، گراف حاصل با $\binom{n-۱}{۲} + ۲$ راس دارای دور همیلتونی است.

نکات:

E.LV : در اینجا سوال برای تعدادی حالت خاص اثبات شده است، برای صحیح بودن این روش اثبات، باید نشان داد که این حالت‌ها همه حالات را در بر می‌گیرد(البته در این مثال اینطور نیست).

پاسخ صحیح .

طبق قضیه اوره می‌دانیم، اگر مجموع درجات هر دو راس غیرمجاور در گراف n راسی بزرگتر مساوی n باشد، گراف دارای دور همیلتونی است. پس با اثبات این که در گراف مسئله ما جمع درجات هر دو راس غیرمجاور بزرگتر مساوی n است، حکم مسئله به دست می‌آید. برای اثبات این موضوع از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض کنید راس‌های غیرمجاور Aو B در گراف G وجود دارند به طوری که مجموع درجات آنها کمتر یا مساوی تعداد راس‌های گراف است، حال این دو راس را از گراف حذف کرده و به گراف G' می‌رسیم که دارای $n - ۲$ راس است و برای تعداد یال‌های آن داریم:

$$|E'| > \binom{n-۱}{۲} + ۲ - n$$

$$\rightarrow |E'| > \frac{(n-۱)(n-۲) - ۲(n-۲)}{۲} = \frac{(n-۳)(n-۲)}{۲} = \binom{n-۲}{۲}$$

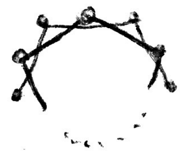
اما گراف G' نمی‌تواند بیش از $\binom{n-۲}{۲}$ یال داشته باشد و این تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

سؤال ۶.۷.

n راس دور دایره قرار دارند. هر راس به دو راس قبلی و دو راس بعدی خود یال دارد، ثابت کنید این گراف از حاصل اجتماع دو دور همیلتونی به دست آمده‌است. $(n \geq ۵)$

پاسخ .

دو دور همیلتونی به شکل زیر است:



نکات:

E.XXXI

E.LV

پاسخ صحیح .

راس‌ها را به ترتیب روی دایره از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. اگر n فرد باشد، یک دور ما حاصل وصل شدن تمامی رئوس متوالی روی دایره به هم و دیگری حاصل وصل شدن رئوس با فاصله ۲ روی دایره به شکل $\{۱, ۳, ..., n, ۲, ..., n-۱, ۱\}$ خواهد بود و به این ترتیب دو دور همیلتونی معرفی شد که یال‌های آن‌ها حاصل افراز یال‌های گراف اولیه ما است. اما اگر n زوج بود، در دور اول به شکل

$$\{۱, ۳, ۲, ۴, ۵, ..., n, ۱\}$$

(اتصال دو جفت راس ۱-۳ و۲-۴ و تمام رئوس به فاصله ۱ به جز ۱-۲ و ۳-۴)

و دور دوم به شکل

$$\{۱, ۲, n, n-۲, n-۴, ..., ۴, ۳, ۵, ..., n-۱, ۱\}$$

(اتصال دو جفت راس ۲-۱ و ۳-۴ و تمام رئوس به فاصله ۲ به جز ۴-۲ و ۳-۱)

که در این حالت نیز این دو دور همیلتونی شرایط مسئله را دارند پس حکم ثابت است.

سؤال ۸.۶.

گراف G گرافی است که در آن دورهای فرد، دو به دو حداقل در یک رأس مشترکند. کوچک‌ترین کران بالا عدد رنگی این گراف را بدست آورید.

پاسخ .

یک دور C را در نظر بگیرید. چونکه تمام دورهای فرد این گراف در حداقل یک رأس مشترکند گراف $G-C$ هیچ دور فردی ندارد و در نتیجه دو بخشی است، پس با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. دور فرد C را به گراف برمی‌گردانیم. دورهای فرد نیز با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی است پس در اشتراک این‌ها عدد رنگی گراف $\chi(G) = ۳$ است .

نکات:

E.LVI : در حل سوالات باید توجه کرد تمامی حالات را دربربگیریم.

E.XXXIV

پاسخ .

اگر گراف دور فرد نداشته باشد در این صورت گراف دوبخشی بوده و ۲ $\leq \chi(G)$ است. در غیر این صورت اگر گراف دور فرد داشته باشد دور فرد دلخواه C را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه تمام دورهای فرد این گراف در حداقل یک رأس مشترکند پس از هر دور حداقل یک راس حذف می‌شود. گراف $G - C$ هیچ دور فردی ندارد پس دو بخشی است. پس با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. هر دور فرد با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی است پس دور فرد C را با ۳ رنگ متفاوت از رنگ‌های استفاده شده برای رنگ‌آمیزی $G - C$ رنگ می‌کنیم. ممکن است بتوان یکی از دو رنگ استفاده شده برای گراف دو بخشی را برای رنگ‌آمیزی دور فرد دوباره استفاده کرد. سپس دور C به همراه رنگ‌هایش را به گراف برمی‌گردانیم. پس یک رنگ‌آمیزی صحیح با پنج رنگ یا کمتر داریم. بنابراین ۵ $\leq \chi(G)$ است.

نکات:

E.LVII : توجه کنید سوال کوچک‌ترین کران بالا را خواسته است. در اینجا کوچک‌ترین بودن این مقدار ثابت نشده است.

پاسخ صحیح .

دو حالت داریم:

۱. حالتی که گراف دور فرد نداشته باشد: در این صورت با استناد به قضیه «گرافی که دور فرد ندارد، دو بخشی است. » نتیجه می‌گیریم گراف دوبخشی بوده و ۲ $\leq \chi(G)$ است.

۲. حالتی که گراف دور فرد داشته باشد: دور فرد دلخواه C را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه تمام دورهای فرد این گراف در حداقل یک رأس مشترکند گراف $G - C$ هیچ دور فردی ندارد و در نتیجه دو بخشی است. پس با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است و همچنین بدیهی است که هر دور فرد با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی است پس دور فرد C را با حداکثر ۳ رنگ متفاوت از رنگ‌های استفاده شده برای رنگ‌آمیزی $G - C$ رنگ می‌کنیم. توجه کنید که ممکن است بتوان یکی از دو رنگ استفاده شده برای گراف دو بخشی را برای رنگ‌آمیزی دور فرد دوباره استفاده کرد. بنابراین می‌توان این دو گراف را ادغام کرد و همچنان یک رنگ‌آمیزی صحیح با پنج رنگ یا کمتر داشت. (توجه کنید در حالت بیشینه باید ۳ رنگ متفاوت از دو رنگ استفاده شده برای $G - C$ به کار برد.) بنابراین ۵ $\leq \chi(G)$ است.

برای اثبات کوچک‌ترین بودن این مقدار گراف $k_۵$ را در نظر بگیرید که در آن همه دورهای فرد، دو به دو حداقل در یک راس مشترک هستند یعنی شرایط سوال برای آن برقرار است. می‌دانیم عدد رنگی گراف $k_۵$ برابر ۵ است. پس کران بالا عدد رنگی گرافی با شرایط سوال بزرگ‌تر مساوی ۵ است.

درنهایت نتیجه می‌گیریم کوچک‌ترین کران بالا برابر ۵ است.

سؤال ۹.۶.

ثابت کنید مقدار ثابت در چندجمله‌ای رنگی صفر است.

پاسخ .

با توجه به این که اگر چندجمله‌ای رنگی را چندین بار تجزیه کنیم در نهایت به گراف مسیر یا گراف کامل می‌رسیم، و چندجمله‌ای رنگی این دو گراف برابر است با:

گراف کامل: $\lambda(\lambda - ۱)...(\lambda - n + ۱)$

گراف مسیر: $\lambda(\lambda - ۱)^{n-۱}$

مقدار ثابت در چندجمله‌ای هر دو گراف صفر است، پس مقدار ثابت در چندجمله‌ای رنگی صفر است.

نکات:

E.XXXIV

پاسخ صحیح .

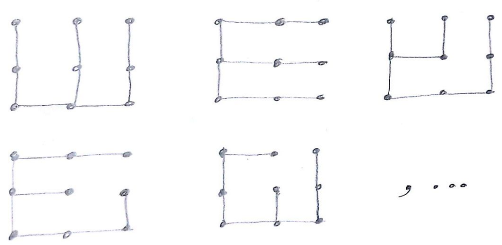
می‌دانیم چند جمله‌ای رنگی گراف G که به صورت $P(G,\lambda)$ نوشته می‌شود تعداد حالاتی است که گراف G را با λ رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد و این چندجمله‌ای باید برای هر λ و هر گرافی پاسخ صحیح و معناداری دهد. با توجه به این تعریف $P(G,۰)$ برابر صفر خواهد بود. اگر این چندجمله‌ای به صورت $P(G,\lambda) = c_۰ + c_۱\lambda + c_۲\lambda^۲ + \dots$ باشد، پس با جایگذاری $\lambda = ۰$ چندجمله‌ای نیز باید صفر شود؛ یعنی $c_۰ = ۰$.

سؤال ۱۰.۶.

$۹n^۲$ رأس به شکل یک جدول $۳n \times ۳n$ قرار گرفته‌اند. می‌خواهیم تعدادی از آن‌ها را با یال‌هایی به رأس‌های مجاورشان(یکی از چهار جهت) وصل کنیم، به طوری که گراف نهایی یک درخت باشد(ریشه این درخت را چپ‌ترین رأس در پایین‌ترین ردیف در نظر بگیرید). به چند روش می‌توان یال‌ها را انتخاب کرد، به طوری که اگر یال‌ها را به سمت بالا و راست جهت‌دهی کنیم؛ از ریشه بتوان به همه رئوس رسید.

پاسخ .

در حالت کلی‌تر برای جدول $n \times n$ سوال را حل می‌کنیم. یک جدول ۲×۲ را در نظر بگیرید. واضح است برای این، ۲ درخت داریم. حال اگر جدول ۳×۳ داشته باشیم، مثل موارد زیر ۱۶ درخت متفاوت می‌توان کشید.



$$۲^{۱\times۱} = ۲$$

$$۲^{۲\times۲} = ۱۶$$

پس می‌توان این گونه برداشت کرد که از رابطه $۲^{(n-۱)(n-۱)}$ پیروی می‌کنند. پس برای جدول $۳n \times ۳n$ داریم : $۲^{(۳n-۱)(۳n-۱)}$

نکات:

E.XXXII

پاسخ صحیح .

چون نمی‌توانیم به چپ و پایین حرکت کنیم پس برای رسیدن به رأس‌های پایین‌ترین ردیف تنها یک حالت وجود دارد(باید تمام یال‌های افقی رئوس پایین‌ترین ردیف به هم متصل باشند) ، همچنین برای رسیدن به رأس‌های چپ‌ترین ستون نیز تنها یک حالت وجود دارد(باید تمام یال‌های عمودی رئوس چپ‌ترین ردیف به هم متصل باشند). تعداد رئوس باقیمانده نیز برابر است با: $(۳n-۱)(۳n-۱)$. دو حالت جهت دسترسی به این رئوس وجود دارد از طریق پایین و یا چپ که دقیقا یکی از این دو مسیر باید باز باشد (اتصال رأس به یکی ازدو رأس چپ یا پایین) پس در کل می‌شود: $۲^{(۳n-۱)(۳n-۱)}$

سؤال ۱۱.۶.

در درخت $T(V,E)$، مجموع فواصل تمام رئوس T از هم را $dis(T)$ تعریف می‌کنیم. در هر مرحله اگر

$$\exists v,u,w \in V | ((v,u) \in E) \wedge ((v,w) \notin E) \wedge (dis(T'(V, E-(v,u)+(v,w))) < dis(T))$$

یال (v,u) را از درخت حذف می‌کنیم و یال (v,w) را اضافه می‌کنیم. واضح است که به دلیل نزولی بودن روند $dis(T)$ و مثبت بودن آن این مراحل پایان‌پذیر است. اثبات کنید درخت T با هر شرایط اولیه‌ای در مرحله آخر به یک ستاره تبدیل می‌شود.(۱۰)

پاسخ .

سوال را با ناوردایی حل می‌کنیم. مقدار ناوردا مجموع فواصل تمام رئوس از هم است که طبق فرض سوال ناوردای کاهشی است. حال کافی است اثبات کنیم که کران پایین این ناوردا گراف ستاره است. اثبات: حکم را به کمک برهان خلف اثبات می‌کنیم، فرض کنید گراف ستاره کران پایین نباشد، در این صورت یال (v,u) و راس w وجود دارد که با انجام این فرایند روی آن ها $dis(T') < dis(T)$ باشد با توجه به تقارن میان یال ها در گراف ستاره تفاوتی ندارد که کدام را در نظر بگیریم. حال با انجام یک گام روی این راس، مسیری به طول ۳ در این گراف پدید می‌آید. برای $dis(T')$ داریم:

$$dis(T') = (n-۲)^{۲} + ۱ + ۲ + ۳(n-۳)$$

اما:

$$dis(T) = (n-۱)^{۲} < (n-۲)(n+۱) = dis(T')$$

که این تناقض است، پس گراف ستاره کران پایین این ناوردا است و اثبات تمام است.

نکات:

E.LVIII : این که گراف ستاره یک کران پایین برای این ناوردا باشد شرط لازم است اما کافی نیست و برای اثبات حکم باید نشان داد که این گراف تنها کران پایین برای این ناوردا است.

E.LIX : حالت $n = ۳$ بررسی نشده است..

N.LX : بهتر بود دلیل رسیدن به عبارت $dis(T')$ ذکر شود.

پاسخ صحیح .

از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض کنید درختی وجود دارد که ستاره نیست و نمی‌توان روی آن عمل جابجایی را انجام داد. این درخت را T می نامیم.

در درخت T حداقل یک مسیر شامل سه یال وجود دارد، یکی از این مسیرها را $abcd$ می‌نامیم. با حذف سه یال این مسیر، درخت به چهار مولفه همبندی تقسیم می شود. مولفه‌ای که شامل راس x است را با G_x نشان می‌دهیم. با توجه به تقارن بین دو راس c و b و بدون تغییر در کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که $n(G_b) \geq n(G_c)$. حال اگر در درخت T یال بین d و c را قطع کنیم و b را به d متصل کنیم اگر گراف جدید را T' بنامیم، داریم:

$$dis(T') = dis(T) - n(G_d)(n(G_b) + n(G_a)) + n(G_d)n(G_c)$$

(فواصل بین رئوس مؤلفه G_d با رئوس مؤلفه‌های G_a و G_b یک واحد کاهش یافته و فواصل بین رئوس دو مؤلفه G_d و G_c یک واحد افزایش یافته است.)

اما داریم:

$$n(G_b) \geq n(G_c) \rightarrow n(G_d)(n(G_b) + n(G_a) - n(G_c)) > ۰$$

$$\rightarrow dis(T) - n(G_d)(n(G_b) + n(G_a) - n(G_c)) < dis(T) \rightarrow dis(T') < dis(T)$$

که این خلاف فرض و تناقض است.

پس در نتیجه فرض خلف باطل و حکم اثبات شده است.

تاریخچه

یکی از بزرگ‌ترین عوامل آموزش درس ریاضیات گسسته، ارتباط زنده با دانشجویان و روبرو شدن با اشتباهات آن‌ها در افکار یا نوشتار حین حل مسئله است. راه‌اندازی این جریان از مشکلات و نگرانی‌های همیشگی آموزش این درس بوده و هست. همواره تلاش گروه آموزشی این درس بر آن است که با تشویق دانشجویان به حضور در این بحث‌ها و ایجاد فضای مناسب برای روبرو شدن با این جنجال‌ها، جای این جریان تاثیرگذار در ارائه درس را پر کنند.

بهار سال ۱۳۹۹ به دلیل شیوع بیماری کرونا، آموزش دانشگاه‌ها به صورت غیرحضوری درآمد. نتیجه آن بود که ارتباط گروه‌های آموزشی با دانشجویان بسیار محدود و انتقال مفاهیم بسیار دشوارتر شد. برخی دروس از طریق رسانه‌ها، ارتباط با دانشجویان را بازسازی کرده و به تدریس ادامه دادند؛ اما چطور می‌شد ریاضیات گسسته را از طریق پیام‌رسان‌ها تدریس کرد؟ حاصل مشاهدات آن زمان این بود که درصد زیادی از اشتباهات دانشجویان در دوره‌ها یکسان است؛ چرا که بحث‌هایی که ترم‌های قبل از آن در کلاس‌های حضوری صورت می‌گرفت، در پاسخ‌های دانشجویان آن ترم، به شکل اشتباهاتی فاحش رصد می‌شد. راهکاری که اندیشیده شد، بازسازی بحث با دانشجویان درباره اشتباهات ذهنی و نوشتاری آن‌ها، به صورت مکتوب برای دوره‌های بعد بود؛ بدین صورت که دانشجویان جدید می‌توانند شاهد بحث و گفتگوی غیر زنده‌ی مدرسین با دانشجویان سابق درس، بر سر پاسخ‌های اشتباهشان باشند و مفاهیم مشترک را از این طریق یاد بگیرند.

تابستان سال ۱۳۹۹، کلید شروع آماده‌سازی محتوایی مکتوب، یادآور بحث‌های جلسات حضوری بر سر اشتباهات رایج دانشجویان، توسط گروه دستیاران آموزشی این درس زده شد. نسخه‌ی اول این محتوا در انتهای پاییز همان سال به پایان رسید. این نسخه که با ساختار «سوال، اشتباهات رایج در پاسخ‌ها، نکات قابل توجه، پاسخ مطلوب» آماده شد، شامل ۲۸ سوال و ۶۰ نکته‌ی آموزشی، با حجم ۴۰ صفحه ارائه شد.

- نسخه ۱ - پاییز ۱۳۹۹
  - نویسندگان: سودابه محمدهاشمی و کیمیا محمدطاهری
  - تحت نظارت بهزاد شایق
  - با تشکر از یارا کامکار
  - استاد درس: دکتر سیامک محمدی

بهبود مستمر همواره در رأس کار گروه دستیاران آموزشی درس ریاضیات گسسته بوده است. توسعه این محتوا، داوطلبانه و بی‌چشم‌داشت است و از هرگونه همکاری استقبال به عمل می‌آید. بسیار خرسند می‌شویم که از نظرات، انتقادات و پیشنهادات شما جهت بهبود این محتوا بهره بگیریم. راه رسمی ارتباط با گروه دستیاران آموزشی، پست الکترونیکی درس [۴] است.

با آرزوی موفقیت سرشار

[۴] ut.discretemathematics@gmail.com