



افکار سازگار ، نوشتار نابکار

ریاضیات گسسته

سودابه محمدهاشمی - کیمیا محمدطاهری

هرگاه نویسنده‌ای توانایی درست نوشتن را نداشته باشد در انتقال صحیح تراوشات فکری خود به خواننده ناکام می‌ماند. نوشتار در خصوص مباحث علم ریاضیات گسسته نیز علاوه بر درک درست از مفاهیم، نیاز به دانش «صحیح نوشتن» و روش به تحریر درآوردن مسائل و اثبات‌ها دارد تا بتواند هدف انتقال بی‌کم و کاست به خواننده را کسب نماید.

چیزی که واقعا اهمیت دارد این است که با درست نوشتن، خواننده درک صحیحی از راه و روش حل مسائل و اثبات‌ها کسب کند و توانایی درک و خلاقیت در کشف روش‌های حل مسائل را در خود ارتقاء بخشد. در بیشتر مواقع اثبات مسائل آسان و منطق حل مسائل بسیار دست یافتنی به نظر می‌آید ولی در واقع در زمان نوشتن حل مسائل و اثبات‌ها رویکرد اشتباهی را پیش می‌گیریم. به همین خاطر است که ما نیاز داریم یاد بگیریم که چگونه اثبات‌ها را دنبال کنیم.

هر چند که رعایت حداقل معیارهای درست نویسی و پیشبرد مرحله به مرحله حل مسائل و اثبات‌ها با استدلال‌های منطقی، خیال ما را نسبت به درست و معتبر بودن نوشته‌ی خود راحت می‌نماید ولی مطالعه‌ی متون فنی و تعمق در نوشتارهای غنی ما را به مرحله‌ای از بلوغ در نویسندگی می‌رساند که علاوه بر رسیدن به بهترین نتیجه‌ی ممکن، ما را در انتقال صحیح معنا و مفهوم و درک صحیح نوشته بسیار موفق می‌سازد و در نهایت زمانی که فرا بگیریم، چگونه با اتکا به استدلال‌های درست اثباتمان را کامل کنیم، به فهم عمیق‌تری از مسائل می‌رسیم.

پایه و بنیاد درست نویسی بسیار آسان است. تنها کافی است که دقت نماییم تا جملات استفاده شده به یکی از اشکال زیر باشد:

۱. خود فرض مسئله باشد.

۲. به صورت کاملاً شفاف و واضح از جملات قبلی نتیجه شده باشد.

۳. درستی آن قبلاً اثبات شده باشد.

در این جزوه تمام سعی و کوشش ما بر این بوده است تا شما را بیشتر با «درست نویسی» و نکاتی که خواننده را به این جهت سوق دهد آشنا کنیم. امید است که فراگیری نکات «درست نویسی» در تمامی مراحل زندگی راهبر و راهنمای شما باشد.

انواع نکات

در این جزوه با سه دسته نکته مواجه هستیم:

۱. دسته E : نکات درست نویسی که رعایت نکردن آن باعث ناقص شدن اثبات و در نتیجه کسر نمره می‌شود.

۲. دسته N : نکات درست نویسی که رعایت کردن آن‌ها واجب نیست، اما به خوانایی راه حل، ابهام زدایی، پرهیز از تکرار و جلوگیری از خطا کمک می‌کنند.

۳. دسته T : دام‌های آموزشی و خطاهای رایج در حل سوالات.

فصل ۱ : شمارش

سؤال ۱.۱.

سه مهره رخ متمایز و صفحه شطرنجی 8×8 داریم. به چند روش می‌توان این سه مهره را در سه خانه از این صفحه قرار داد به طوری که حداقل یک مهره وجود داشته باشد که توسط هیچ مهره‌ای تهدید نمی‌شود؟

پاسخ .

سوال را با اصل متمم حل می‌کنیم:

- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ‌ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون‌های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$64 \times 14 \times 20$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - 64 \times 14 \times 20$$

نکات:

T.I : نشمردن همه حالت‌ها: در اینجا تمام حالات نامطلوب محاسبه نشده است، زیرا این امکان وجود دارد که رخ اول توسط رخ دوم تهدید نشود و این حالت در نظر گرفته نشده است.

N.II : بهتر بود اشاره شود که به دلیل تمایز رخ‌ها چنین نتیجه‌ای گرفته شده است.

پاسخ .

- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

$$64 \times 7 \times 20 \times 2$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - 64 \times 14 \times 20$$

نکات:

N.III : نبود توضیحات کافی برای عبارت: به دلیل نبود توضیحات کافی، تشخیص چرایی غلط بودن جواب نهایی ممکن نیست.

پاسخ صحیح .

- کل حالات: به دلیل تمایز رخ‌ها برابر است با:

$$P(64, 3) = 64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

دو حالت داریم:

۱. رخ اول رخ دوم را تهدید نکند:

رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ‌ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون‌های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$64 \times 14 \times 20$$

۲. رخ اول رخ دوم را تهدید نکند:

رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول نباید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را در خانه‌ای به جز سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۴۹ حالت دارد. حال رخ سوم باید هر دو رخ را تهدید کند پس باید در یکی از محل‌های تقاطع سطر و ستون رخ اول و رخ دوم قرار بگیرد که دو حالت دارد، پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$64 \times 49 \times 2$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - (64 \times 14 \times 20 + 64 \times 49 \times 2)$$

سؤال ۲.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + 3^2 \binom{n}{3} + \dots + n^2 \binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2}$$

پاسخ .

فرض کنید $P = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ بیانگر تعداد راه‌های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد یا دو فرد متمایز، رئیس کمیته باشند. حال این شمارش را به روش دیگری انجام می‌دهیم.

۱. با فرض داشتن یک رئیس، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که ۲ رئیس را انتخاب کردیم در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

از تساوی این ۲ حالت حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

نکات:

E.IV : عدم تطابق توضیحات با فرمول نوشته شده، انتخاب دو رئیس از میان n نفر $\binom{n}{2}$ حالت دارد نه $n \times (n-1)$.

N.V : بهتر است روش اثبات (دوگانه شماری) ذکر شود.

E.VI : یک طرف دوگانه شماری که نیازمند اثبات است، بدیهی در نظر گرفته شده است.

پاسخ صحیح .

سوال را با دوگانه شماری حل می‌کنیم:

فرض کنید P بیانگر تعداد راه‌های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد رئیس کمیته و یک نفر معاون باشند و رئیس و معاون می‌توانند یک نفر باشند. شمارش این راه‌ها به ۲ روش امکان پذیر است.

۱. با فرض یکسان بودن رئیس و معاون، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که رئیس و معاون متمایز را انتخاب کردیم و در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

۲. ابتدا این که چه اعضای کمیته و رئیس و معاون را تشکیل دهند را انتخاب می‌کنیم که این تعداد می‌تواند هر عددی باشد، سپس رئیس و معاون یکسان یا متمایز را از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم:

$$P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k(k-1) + k) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

از تساوی ۲ حالت فوق حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

سؤال ۳.۱.

۶۰ دانشجو در کلاس ریاضیات گسسته حضور دارند. در میان هر ۱۰ نفر از این کلاس ، حداقل ۳ نفر نمره مبانی یکسانی دارند. ثابت کنید در این کلاس ۱۵ نفر وجود دارند که نمره مبانی آنها یکسان است.

پاسخ .

در نظر می گیریم حداکثر تعداد تکرار از یک نمره ۱۴ عدد است که در این صورت حداقل به ۵ نمره متفاوت نیاز است . در این صورت باز می توان گروه ۱۰ تایی را از دانش آموزان انتخاب کرد که حداکثر دو نفر نمره یکسان داشته باشند. پس فرض اولیه غلط بوده و مشخص می شود که لااقل از یکی از نمرات وجود دارد که ۱۵ دانش آموز یا بیشتر آن نمره را دارند.

نکات:

N.VII : در پاسخ از برهان خلف استفاده شده ولی از آن نام برده نشده است و باید توجه کنیم فرض خلف را حتما بیان کنیم.

N.VIII : باید اصل لانه کبوتری که از آن استفاده کرده است را نام می برد و نحوه استفاده از آن مشخص شود.

T.IX : پاسخ کامل نیست. پاسخ درست و کامل در پایین آمده است.

پاسخ صحیح .

از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض خلف : فرض کنید در این کلاس هیچ ۱۵ نفری وجود نداشته باشند که نمره ی مبانی آنها یکسان باشد. در این صورت حداکثر ۱۴ نفر وجود دارند که نمره ی یکسان داشته باشند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل به اندازه ی سقف $\frac{60}{14}$ یعنی ۵ نمره ی متفاوت در کلاس وجود دارد. مسئله را به دو حالت تقسیم می کنیم ؛

۱. اگر پنج نمره ی متمایز وجود داشته باشند که از هر کدام ۲ عضو (دو نفر در کلاس که آن نمره را دارند) وجود داشته باشد؛ در این صورت از هر کدام از این نمرات دو عضو را در نظر گرفته و به مجموعه ای ۱۰ عضوی می رسیم که هیچ سه نفری در آن نمره ی یکسان ندارند که این خلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره ی یکسانی داشته باشند.

۲. اگر پنج نمره ی متمایز، هر کدام دارای حداقل دو عضو وجود نداشته باشند؛ در این صورت $k \leq 4$ نمره ی متمایز با بیش از یک عضو داریم (مجموعه ی این نمرات را A بنامیم) که با توجه به فرض خلف، حداکثر تعداد $k \times 14$ عضو را پوشش می دهند. بنابراین حداقل $60 - 14k$ نفر باقی مانده که هیچ دو تایی نمی توانند دارای نمره ی یکسان باشند (در غیر این صورت تعداد نمره های متمایز دارای بیشتر مساوی ۲ عضو به حداقل $k+1$ می رسد). بنابراین هر یک از این اعضا دارای نمره ای متمایز است (مجموعه ی این اعضا را B بنامیم). می توان با انتخاب دو عضو از هر نمره ی مجموعه ی A و تمام اعضای مجموعه ی B به مجموعه ای متشکل از $N = 12k - 14k + 60 = 60 - 2k$ عضو رسید که $k \leq 4 \Rightarrow N \geq 12$ و هیچ سه عضوی در آن دارای نمره ی یکسان نیستند. هر ده عضوی از این مجموعه انتخاب شود، نقض فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره ی یکسانی داشته باشند.

سؤال ۴.۱.

ضریب عبارت x^{12} در بسط عبارت $(1 - 4x)^{-5}$ را بیابید.

پاسخ .

طبق بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\frac{1}{(1-4x)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} 4^k x^k$$

جمله ۱۲ام دنباله a_n ضریب x^{12} است. XI.

$$\rightarrow a_{12} = \binom{16}{12} 4^{12}$$

نکات:

N.X : بهتر است اصل بسط دوجمله‌ای هم نوشته شود.

E.XI : قبل از استفاده از متغیر باید آن را تعریف کرد. تعریف دنباله a_n ضروری است.

پاسخ صحیح .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1-4x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} (4x)^k$$

جمله x^{12} به ازای مقدار $k=12$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر خواهد بود با:

$$\binom{16}{12} (4)^{12}$$

سؤال ۵.۱.

چند عدد طبیعی حداکثر ۹ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر با ۳۲ باشد؟

پاسخ .

سوال را با اصل شمول و عدم شمول حل می‌کنیم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_9| = \binom{9}{1} |A_1| + \binom{9}{2} |A_1 \cap A_2| + \dots + \binom{9}{9} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_9|$$

حال مقدار عبارت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|A_1| = \binom{30}{8}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{20}{8}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{10}{8}$$

برای بقیه جمله‌ها جواب برابر ۰ است.

حال از اصل متمم برای به دست آوردن جواب نهایی استفاده می‌کنیم:

- کل حالات:

$$\binom{40}{8}$$

- حالات مطلوب:

$$\binom{40}{8} - \binom{9}{1} \binom{30}{8} + \binom{9}{2} \binom{20}{8} - \binom{9}{3} \binom{10}{8}$$

نکات:

E.XII : تعریف متغیرهای A_i ضروری است، چون در غیر این صورت منظور از بقیه استدلال‌ها به هیچ وجه مشخص نیست.

E.XIII : اثبات و یا در صورت وضوح، اشاره به تقارن میان مجموعه‌ها برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول به این شکل ضروری است.

پاسخ صحیح .

رقم i ام این عدد را با x_i نشان می‌دهیم، بنابراین به دنبال یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر هستیم:

$$\sum_{i=1}^9 x_i = 32$$

$$\forall i \in [1, 9] : x_i \leq 9$$

تعداد جواب‌های صحیح این معادله را به کمک اصل متمم پیدا می‌کنیم:

- کل حالات: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $\sum_{i=1}^9 x_i = 32$. این یک معادله سیاله است و تعداد جواب‌های صحیح آن برابر است

با:

$$\binom{40}{8}$$

- حالات نامطلوب: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $\sum_{i=1}^9 x_i = 32$ به طوری که: $\exists i \in [1, 9] : x_i \geq 10$

حال اگر مجموعه حالت‌هایی که در آن $x_i \geq 10$ است را با A_i نشان دهیم، کافی است تعداد اعضای اجتماع این مجموعه‌ها را بیابیم.

طبق اصل شمول و عدم شمول و با توجه به تقارن میان A_i ها داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_9| = \binom{9}{1} |A_1| + \binom{9}{2} |A_1 \cap A_2| + \dots + \binom{9}{9} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_9|$$

برای محاسبه مقدار عبارت‌ها، در معادله سیاله متناظر، در صورتی که $x_i \geq 10$ بود قرار می‌دهیم $x_i = y_i + 10$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $x_i = y_i$. حال اگر تعداد i هایی را که به ازای آن‌ها $x_i \geq 10$ است را با k نشان بدهیم، حال به دنبال تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله سیاله $\sum_{i=1}^9 y_i = 32 - 10k$ هستیم، که برابر است با:

$$\binom{40-10k}{8}$$

حال مقدار عبارت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|A_1| = \binom{30}{8} \quad (k=1)$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{20}{8} \quad (k=2)$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{10}{8} \quad (k=3)$$

برای بقیه جمله‌ها جواب برابر ۰ است.

پس کل حالات نامطلوب برابر است با:

$$\binom{9}{1} \binom{30}{8} - \binom{9}{2} \binom{20}{8} + \binom{9}{3} \binom{10}{8}$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$\binom{40}{8} - \binom{9}{1} \binom{30}{8} + \binom{9}{2} \binom{20}{8} - \binom{9}{3} \binom{10}{8}$$

سؤال ۶.۱.

با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش‌های انتخاب ۴ عضو دو به دو نامتوالی از مجموعه اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ برابر با انتخاب ۴ از $n-3$ است.

پاسخ .

یک زیرمجموعه از این نوع مثلاً ۱ و ۳ و ۷ و ۱۰ را انتخاب و نابرابری‌های اکید

$$0 < 1 < 3 < 7 < 10 < n+1$$

را در نظر می‌گیریم. و بررسی می‌کنیم چند عدد صحیح بین هر دو عدد متوالی از این اعداد وجود دارند. در اینجا ۰ و ۱ و ۳ و ۲ و $n-10$ را به دست می‌آوریم: ۰ زیرا عددی صحیح بین ۰ و ۱ وجود ندارد و ۱ زیرا تنها عدد ۲ بین ۱ و ۳ وجود دارد و ۳ زیرا اعداد صحیح ۴ و ۵ و ۶ بین ۳ و ۷ وجود دارند و مجموع این ۵ عدد صحیح برابر $n-4 = n-10+1+3+2+0$ است. **XIV**

پس تابع مولد زیر را داریم.

$$\begin{aligned} G(x) &= (1+x^2+x^3+\dots)^2(x+x^2+x^3+\dots)^3 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}\right)^3 = \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = \frac{x^3}{(1-x)^5} = x^3(1-x)^{-5} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^{k+3} = \text{(E.XV)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k-3} x^k \end{aligned}$$

به دنبال ضرب x^{n-4} می‌گشتیم پس $k = n - 4$ و جواب نهایی برابر است با $\binom{n-3}{n-7} = \binom{n-3}{4}$

نکات:

E.XIV : مثال زدن باید به صورتی باشد که حذف آن اختلالی در فهم جواب ایجاد نکند . در اینجا اگر مثال پاراگراف اول را حذف کنیم مشخص نیست تابع مولد برچه اساسی نوشته شده است . پس باید توضیحی درمورد تابع مولد و جمله‌ای که به دنبال ضرب آن هستیم بدهیم .

E.XV : نیاز هست که کاملاً گفته شود چه تغییر متغیری انجام می‌شود . در اینجا تغییر متغیر $k \rightarrow k + 3$ را داریم . همیشه به هنگام تغییر متغیر توجه کنیم ممکن است کران‌ها تغییر کنند . در اینجا کران پایین از صفر به سه می‌رود . صورت اصلاح شده: $\sum_{k=3}^{\infty} \binom{k+1}{k-3} x^k$

N.XVI : در طی پاسخ به سوال خوب است دقت کنیم همه‌ی اعداد را یا فارسی یا انگلیسی بنویسیم .

پاسخ .

تابع مولد فاصله از مبدا:

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)^3$$

در مجموع $n-4$ عدد داریم . توان‌های x باید بین مبدا و مقصد باشند پس باید توانی از x را که کوچک تر یا مساوی $n-4$ هستند را بیابیم:

$$G(x) = \frac{x^3}{(1-x)^4} = x^3(1-x)^{-4} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x+k}{k} = \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \rightarrow k+3 \leq n-4 \rightarrow k \leq n-7$$

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} \quad (1)$$

مجموع حالات:

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-7} \binom{k+3}{3} \xrightarrow{(1)} \binom{n-7+4}{4} = \binom{n-3}{4}$$

نکات:

E.XVII : به هنگام جایگذاری در فرمول باید جایگذاری‌ها واضح باشد . در این مثال در فرمول (1) کران پایین از r هست ولی در قسمتی که از آن استفاده شده کران پایین از 0 است . همین مطلب گویای آن است که به توضیحات بیشتری نیاز هست .

عبارت زیر صورت کامل شده این نکته است:

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-7} \binom{k+3}{k} = \sum_{k=3}^{n-4} \binom{k}{k-3} = \sum_{k=3}^{n-4} \binom{k}{3} \xrightarrow[r \rightarrow 3, n \rightarrow n-4]{(1)} \binom{n-3}{4}$$

پاسخ صحیح.

تعداد عضوهای انتخاب نشده کوچکتر از عضو اول انتخاب شده را x_1 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو اول و دوم انتخاب شده را x_2 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو دوم و سوم انتخاب شده را x_3 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو سوم و چهارم انتخاب شده را x_4 و عضوهای انتخاب نشده بزرگتر از چهارمین عضو انتخاب شده را x_5 می گیریم. کافی است تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله زیر را با شرایط $x_1, x_5 \geq 0, x_2, x_3, x_4 \geq 1$ بشماریم

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n - 4$$

که برابر است با ضرب x^{n-4} در عبارت:

$$(1 + x + x^2 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^3}{(1-x)^5}$$

بنابراین کافی است ضرب x^{n-7} را در بسط $(1-x)^{-5}$ بشماریم.

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1-x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

 x^{n-7} به ازای $k = n - 7$ ساخته می شود. بنابراین جواب برابر است با:

$$\binom{n-3}{4}$$

سؤال ۷.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

پاسخ.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} = \sum_{i=k}^n \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^n \binom{i}{k+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \left(\binom{k}{k+1} + \sum_{i=k+1}^n \binom{i}{k+1} \right) = \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

نکات:

N.XVIII : باید فرمول و اتحادهای مورد استفاده و رفرنس معتبر آن ذکر شود. به عنوان رفرنس اسم اتحاد هم کافی است.

پاسخ صحیح .

طبق اتحاد پاسکال داریم:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

پس طبق این اتحاد می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^n \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} = \sum_{i=k}^n \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^n \binom{i}{k+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \left(\binom{n}{k+1} + \sum_{i=k+1}^n \binom{i}{k+1} \right) = \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

فصل ۲ : منطق

سؤال ۱.۲.

گزاره‌های زیر همگی درست هستند، با در نظر گرفتن آن‌ها، درستی یا نادرستی گزاره‌های ۱ و ۲ را بررسی کنید.

- اگر کار نداشته باشم یا پولدار باشم، تفریح می‌کنم.
- اگر تفریح نکنم، فیلم می‌بینم یا بستنی می‌خورم.
- بستنی نمی‌خورم و می‌خواهم.
- اگر بخوابم، فیلم نمی‌بینم.

گزاره‌ها:

۱. من کار دارم.
۲. من پولدار هستم.

پاسخ .

چون خوابیدم، فیلم هم ندیدم، پس چون فیلم ندیدم، تفریح هم نکردم، پس طبق شرط اول، من پولدار نیستم و کار دارم.

نکات:

N.XIX : بهتر است برای جلوگیری از اشتباه، از نوشتار منطقی استفاده کرده و فارسی ننویسیم.

E.XX : باید فقط از تبدیلات تعریف شده استفاده کرد و استفاده از تبدیلات دیگر بدون اثبات صحیح نیست، مثلاً در اینجا فیلم ندیدن مستقیماً تفریح نکردن را نتیجه نمی‌دهد.

پاسخ صحیح .

هر گزاره را با یک حرف نشان می‌دهیم:

- من کار دارم p
- من پولدار هستم q
- من تفریح می‌کنم r

$$\bullet \text{ من فیلم می بینم } s =$$

$$\bullet \text{ من بستنی می خورم } t =$$

$$\bullet \text{ من می خوابم } u =$$

فرض ها:

$$\bullet q \vee \neg p \implies r$$

$$\bullet r \implies s \vee t$$

$$\bullet \neg t \wedge u$$

$$\bullet u \implies \neg s$$

حال داریم:

$$۱. \neg t \wedge u \text{ (فرض)}$$

$$۲. u \text{ (طبق ۱: ساده سازی عطفی)}$$

$$۳. \neg s \text{ (فرض)}$$

$$۴. \neg s \text{ (طبق ۳ و ۴)}$$

$$۵. \neg t \text{ (طبق ۱: ساده سازی عطفی)}$$

$$۶. \neg t \wedge \neg s \text{ (طبق ۳ و ۴: ترکیب عطفی)}$$

$$۷. s \vee t \text{ (فرض)}$$

$$۸. \neg r \text{ (طبق ۷: عکس نقیض)}$$

$$۹. \neg r \text{ (طبق ۸: دموگان)}$$

$$۱۰. \neg r \text{ (طبق ۹ و ۹)}$$

$$۱۱. r \text{ (فرض)}$$

$$۱۲. \neg (q \vee \neg p) \text{ (طبق ۱۱: عکس نقیض)}$$

$$۱۳. \neg (q \vee \neg p) \text{ (طبق ۱۰ و ۱۲)}$$

$$۱۴. \neg q \wedge p \text{ (طبق ۱۳: دموگان)}$$

$$۱۵. \neg q \text{ (طبق ۱۴: ساده سازی عطفی)}$$

$$۱۶. p \text{ (طبق ۱۴: ساده سازی عطفی)}$$

پس ۱ صحیح و ۲ غلط است.

سؤال ۲.۲.

صفحه ای دو بعدی را در نظر بگیرید که از هر دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و با دو رنگ آن را رنگ کرده ایم (حتما از هر دو رنگ استفاده شده است). آیا دو نقطه به فاصله d (عدد حقیقی) وجود دارد که هم رنگ باشند؟

پاسخ .

درستی نقیض خواسته سوال را اثبات می کنیم.

حکم سوال : دو نقطه به فاصله d (عدد حقیقی) وجود دارد که هم رنگ باشند.نقیض حکم سوال : وجود دارد دو نقطه به فاصله d که دو رنگ مختلف باشند.

دو نقطه با دو رنگ متفاوت را در نظر می گیریم. فاصله این دو نقطه $kd + r$ است به طوری که k عدد صحیح نامنفی و $r < k$ است. اگر k بیشتر مساوی یک باشد از نقطه چپ، به اندازه d سمت راست می آیم. این نقطه باید هم رنگ باشد و این انتقال را آنقدر ادامه می دهیم تا $k = 0$ شود. حالا به دو نقطه ای رسیده ایم که فاصله ای کمتر از d دارند و از دو رنگ متفاوت هستند. سپس نقطه سوم به فاصله d از این دو نقطه در نظر می گیریم. یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می شود. بنابراین راس سوم حتما با یکی از دو راس دیگر رنگ متفاوت خواهد داشت. در اینجا ثابت کردیم نقیض حکم سوال درست است پس حکم سوال نادرست می باشد.

نکات:

T.XXI : نقیض حکم سوال به نادرستی بیان شده است. فرض کنید $P(x,y)$ هم رنگ بودن دو نقطه x و y باشد. $D(x,y)$ به فاصله d بودن دو نقطه x و y باشد.

حکم سوال بیان می کند که : $\exists x, y (D(x, y) \wedge P(x, y))$

برای نقیض کردن آن داریم:

$$\neg \exists x, y, (D(x, y) \wedge P(x, y)) = \forall x, y, (\neg (D(x, y) \wedge P(x, y)) = \forall x, y, (\neg D(x, y) \vee \neg P(x, y))$$

به صورت فارسی می توان گفت: هیچ دو نقطه به فاصله d هم رنگ نیستند.در صورتی که جمله ای 'وجود دارد دو نقطه به فاصله d که دو رنگ مختلف باشند.' به شکل منطقی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\exists x, y, (D(x, y) \wedge \neg P(x, y))$$

در گزاره های منطقی واضح است نقیض کردن اشتباه انجام شده است.

E.XXII : به طور کلی در نظر داشته باشد، توجه به نگرش پایه ای و گام به گام منطق در تمامی حل سوالات (حتی مباحث غیرمنطق) به تمیزتر نوشتن و پرهیز از اشتباه کمک می کند. به همین علت مهم و مورد انتظار است.

پاسخ صحیح .

اصل لانه ی کبوتری: به ازای n لانه و $n + 1$ کبوتر با فرض اینکه هر کبوتر در یکی از لانه ها قرار دارد؛ دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار دارند.

قبل از شروع اثبات اسم رنگ اول را قرمز و رنگ دوم را آبی می گذاریم.

حال مثلثی متساوی الاضلاع را در نظر بگیرید که اندازه ی هر ضلع آن d است. بدیهی است که این مثلث را می توان در صفحه (طبق فرض مسئله صفحه بی نهایت است) در نظر گرفت که طبق اصل لانه ی کبوتری روی سه نقطه و دو رنگ، دو نقطه از این سه نقطه هم رنگند. این دو نقطه، دو نقطه به فاصله d و هم رنگند.

نکات:

N.VIII

سؤال ۳.۲.

چگونگی اثبات درستی یا نادرستی جمله زیر را توضیح دهید.

تابع $q(x, y)$ را تعریف می کنیم اگر $p(x)$ درست باشد $p(x+y)$ و در غیر این صورت نقیض $p(x-y)$ را نتیجه می دهد.

پاسخ .

جمله بالا را به صورت یک گزاره منطقی می نویسیم.

$$(\forall x, p(x)) \rightarrow (\exists y, q(x, y))$$

حال با یک مثال ، نادرستی گزاره فوق را نشان می دهیم.

سمت چپ گزاره $(\forall x, p(x))$ را P و سمت راست $(\exists y, q(x, y))$ را Q می نامیم. پس داریم: $P \rightarrow Q$
 x_1 را در نظر می گیریم طوری که P درست باشد. سپس y_1 را طوری انتخاب می کنیم که Q نادرست باشد.

$$P = True \rightarrow Q = False$$

بنابراین طبق جدول truth-table گزاره فوق نادرست خواهد بود.

نکات:

E.XXII

T.XXIII : از سورها به نادرستی تعبیر شده است. در عبارت Q سور وجودی داریم. بنابراین نمی توان y_1 را طوری انتخاب کرد که Q نادرست باشد.

پاسخ صحیح .

جمله بالا را به صورت یک گزاره منطقی می نویسیم.

$$(\forall x, p(x)) \rightarrow (\exists y, q(x, y))$$

چون در قسمت سمت چپ از سور عمومی استفاده شده است x_1 را طوری می یابیم که ناقض P باشد. بنابراین طبق truth-table درستی یا نادرستی Q اهمیتی ندارد.

$$P = False \rightarrow Q = -$$

پس در کل گزاره فوق درست است.

فصل ۳ : ناوردایی

سؤال ۱.۳.

اعداد ۱ تا ۲۰ را روی تخته نوشته‌ایم. هر بار می‌توانیم دو عدد a, b را از روی تخته پاک کرده و عدد $b + a + ab$ را روی تخته بنویسیم. عدد نهایی روی تخته را بیابید.

پاسخ .

در هر بار حاصل ضرب اعداد روی تخته + ۱ ثابت است. این عدد برابر $21!$ است. پس عدد نهایی $1 - 21!$ خواهد بود.

نکات:

N.XXIV : از نوشتن جملات فارسی که ایجاد ابهام می‌کنند بپرهیزید و حتی‌الامکان عبارات را به صورت ریاضی بنویسید. از جمله بالا می‌توان $1 + a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_n$ را تعبیر کرد در صورتی که مقصود $(a_1 + 1) * (a_2 + 1) * (a_3 + 1) * \dots * (a_n + 1)$ بوده است.

E.XXV : اثبات ناوردا بودن یک مقدار از مهم‌ترین موارد مساله‌های ناوردایی می‌باشد. در این پاسخ، این مورد اثبات نشده است.

پاسخ صحیح .

مساله را با ناوردائی حل می‌کنیم. سوال را برای اعداد دلخواه حل کرده سپس اعداد یک تا بیست را در نتیجه‌ی نهایی لحاظ می‌کنیم. فرض می‌کنیم در ابتدای مساله اعداد $x_1, x_2, \dots, x_{19}, x_{20}$ را داریم. به ازای هر عدد x_i, y_i را به این صورت در نظر می‌گیریم: $y_i = x_i + 1$

مقدار ناوردا را S در نظر می‌گیریم و آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = y_1 \times y_2 \times \dots \times y_{19} \times y_{20}.$$

ادعا می‌کنیم در هر مرحله با برداشتن دو عدد دلخواه a و b و گذاشتن عدد $a + b + ab$ به جای آن، مقدار S ثابت می‌ماند. حال به اثبات آن می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم در مرحله‌ی اول دو عدد دلخواه x_i و x_j را انتخاب می‌کنیم و به جای آن $x_i + x_j + x_i x_j$ قرار می‌دهیم. این مقدار درواقع معادل $(x_i + 1)(x_j + 1) - 1$ می‌باشد. بدین ترتیب مقدار S که تاکنون برابر $(x_{20} + 1) \dots (x_2 + 1)(x_1 + 1)$ بوده است؛ به صورت زیر به‌روزرسانی خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 S &= \left(\prod_{k=1, k \neq i, j}^{20} (x_k + 1) \right) (((x_i + 1)(x_j + 1) - 1) + 1) \\
 &= \left(\prod_{k=1, k \neq i, j}^{20} (x_k + 1) \right) (x_i + 1)(x_j + 1) \\
 &= (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_{20} + 1)
 \end{aligned}$$

بنابراین در هرگام و با انتخاب هر دو عدد دلخواه، مقدار تعریف شده برای S ثابت خواهد ماند. بدین ترتیب عدد باقیمانده روی تخته برای اعداد یک تا بیست برابر است با:

$$(1+1)(2+1) \dots (20+1) - 1 = 21! - 1$$

(از آنجایی که مقدار ناوردا بر اساس y_i تعریف شده است. در نهایت مقدار نهایی که براساس x_i است، یک واحد از مقدار ناوردا کمتر خواهد بود.)

سؤال ۲.۳.

در یک ردیف ۲۰۰۰ عدد نوشته شده است. فرض کنید به ازای هر عدد a در این دنباله، $f(a)$ برابر با تعداد دفعاتی باشد که a در دنباله آمده است. در هر مرحله به ازای هر عضوی از دنباله مثل x مقدار $f(x)$ را زیر آن می‌نویسیم تا یک دنباله ۲۰۰۰ تایی جدید حاصل شود. آیا می‌توان این دنباله را تا ابد ادامه داد به طوری که هیچ دو دنباله متوالی باهم برابر نباشند؟

پاسخ .

خیر این حالت امکان‌پذیر نیست. چون لازم است تعداد اعداد تکرار شده در هر مرحله باهم متفاوت باشد و پس از گذر از چند مرحله این امکان از بین می‌رود.

نکات:

E.XXVI : استدلال فوق شهودی است و شهود به هیچ عنوان ارزش ریاضی ندارد.

پاسخ .

عده‌ها در هر ستون را ناوردا در نظر می‌گیریم. واضح است این اعداد کران‌دار هستند پس یک جایی همه این ثابت می‌مانند و دو دنباله متوالی وجود خواهد داشت که باهم برابر باشند.

نکات:

E.XXV

T.XXVII : اشاره و اثبات نوع ناوردا ضروری است. نوع ناوردا می‌تواند ثابت یا افزایشی یا کاهشی باشد. در این پاسخ نوع ناوردا غیر نزولی است زیرا اعداد در یک ستون از عدد دوم به بعد یا افزایش می‌یابند یا ثابت می‌مانند. توجه کنید ممکن است در سوالاتی که ناوردای کاهشی یا افزایشی دارند تغییرات یک متغیر ناوردا باشد و نه مقدار آن. این موضوع را در پاسخ صحیح همین سوال مورد توجه قرار دهید.

پاسخ صحیح .

با ناوردایی مساله را حل می کنیم. مقدار ناوردا در این مساله، تعداد جملات متمایز و متفاوت است. اولین دنباله‌ی جدید ایجاد شده را در نظر بگیرید. در این دنباله به تعداد عددهایی که در دنباله‌ی قبلی i بار آمده بودند، جمله با مقدار i داریم. یعنی اگر در دنباله‌ی قبلی X عدد داشتیم، که هر یک i بار تکرار شده باشند، در دنباله‌ی جدید، $X \times i$ جمله با مقدار i خواهیم داشت. بدین ترتیب در هر گام تعداد جملات متمایز موجود در دنباله (ناوردا) همواره کاهش می یابد یا ثابت می ماند چرا که $x \geq 1$ است. اگر زمانی باشد که این تعداد ثابت بماند، دنباله در مرحله‌ی بعد و دومرحله بعد آن یکسان خواهند بود و مساله حل است. در غیر این صورت یک تابع ناوردای کاهشی داریم. از طرفی کران گام نیز داریم. چون تعداد عدد صحیح می باشد، این کران یک خواهد بود. هم چنین چون مقدار ناوردای کاهشی داریم و همواره در طی گامها مقدار ناوردای انتخابی کم می شود و کران پایین هم داریم (تعداد جملات در کمترین حالت ممکن می توانند صفر باشند)، بالاخره به نقطه‌ای خواهیم رسید که تعداد جملات متمایز یک خواهد بود و تمام جملات دنباله یکسان می شوند و از آن پس دیگر دنباله‌ی متمایز نخواهیم داشت.

سؤال ۳.۳.

ثابت کنید ۱۰۰۰۰۰ عدد طبیعی متوالی می توان یافت که در بین آن ها دقیقا ۵ عدد اول وجود دارد.

پاسخ .

اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ را در نظر بگیرید، بین این اعداد بیشتر از ۵ عدد اول وجود دارد. XXIX.

حال دنباله اعداد

$$99999 + 100000! + 2, \dots, 100000! + 1, 100000! + 100000!, 100000!$$

را در نظر بگیرید، این دنباله حداکثر ۱ عدد اول دارد XXIX. بنابراین قطعا بین این دنباله و دنباله اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ دنباله‌ای وجود دارد که دقیقا ۵ عدد اول دارد.

نکات:

E.XXVIII : لازم است که گام ناوردا ذکر و اثبات شود.

E.XXIX : اثبات حکمهای اشاره شده ضروری است .

E.XXX : لازم است به استفاده از پیوستگی گسسته در این اثبات اشاره شود.

پاسخ صحیح .

اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ را در نظر بگیرید، بین این اعداد حداقل ۶ عدد اول وجود دارد. (۲،۳،۵،۷،۱۱،۱۳). حال دنباله اعداد

$$99999 + 100000! + 2, \dots, 100000! + 1, 100000! + 100000!, 100000!$$

را در نظر بگیرید، این دنباله حداکثر ۱ عدد اول دارد. چون به ازای تمام i های بین ۲ و ۹۹۹۹۹ داریم:

$$100000! + i = i \left(\frac{100000!}{i} + 1 \right)$$

پس این اعداد اول نیستند و تنها عددی که ممکن است اول باشد عدد $100000! + 1$ است.

حال از دنباله اولیه شروع می کنیم و در هر گام، کوچکترین عدد دنباله را حذف کرده و عدد بعد از بزرگترین عدد را به آن اضافه می کنیم. در هر گام تعداد اعداد اول دنباله حداکثر یک واحد تغییر می کند. بنابراین چون در ابتدا دنباله بیش از ۵ عدد اول و در زمان رسیدن به دنباله دوم، حداکثر ۱ عدد اول دارد، طبق پیوستگی گسسته، دنباله‌ای در این گامها وجود دارد که دقیقا ۵ عدد اول دارد.

سؤال ۴.۳.

سه دسته سنگریزه داریم که به ترتیب شامل ۱۱، ۱۸۵ و ۱۸۹ سنگریزه هستند. در هر حرکت می‌توانیم دو دسته از سنگریزه‌ها را با هم ترکیب کرده و یا یک دسته که تعداد زوجی سنگریزه دارد را به دو دسته با تعداد سنگریزه‌های یکسان تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم در نهایت به ۳۸۵ دسته برسیم که هر کدام ۱ سنگریزه دارند؟

پاسخ.

مشاهده می‌شود که برای این که به دسته‌های با یک سنگریزه برسیم، باید تعداد سنگریزه دسته‌ها مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ نداشته باشند زیرا مقسوم علیه مشترک در اینجا یک ناوردا است. در مورد این دسته‌ها هم این موضوع صدق می‌کند، پس می‌توان این تقسیم را انجام داد.

نکات:

E.XXV

T.XXXI : نمی‌توان از برقرار بودن شرط لازم برای برقراری یک حکم، به درست بودن آن رسید. مثلاً در این جواب، مقسوم علیه مشترک بیشتر از یک نداشتن دسته‌ها، شرط لازم برای برقراری حکم است اما کافی نیست، بنابراین نمی‌توان از آن برای اثبات درست بودن حکم استفاده کرد.

پاسخ.

برای شروع، از آنجایی که تعداد سنگ‌ها در تمامی دسته‌ها فرد است، فقط اجازه داریم که دو دسته را انتخاب کرده آن‌ها را با هم ترکیب کنیم. بر این اساس، سه حالت پیش می‌آید.

۱. دسته‌ی ۱۸۵ و ۱۸۹ تایی را جهت ترکیب شدن انتخاب کنیم. در این صورت با اجرای مرحله‌ی اول دو دسته‌ی ۳۷۴ تایی و ۱۱ تایی خواهیم داشت.

۲. دسته‌ی ۱۱ و ۱۸۵ تایی را انتخاب کنیم. دو دسته‌ی نهایی باقی‌مانده ۱۹۶ تایی و ۱۸۹ تایی خواهند بود.

۳. دسته‌ی ۱۸۹ تایی و ۱۱ تایی را برگزینیم. در نهایت دو دسته‌ی ۲۰۰ تایی و ۱۸۵ تایی خواهیم داشت.

مساله را با ناوردایی حل می‌کنیم. عددی مانند C را در نظر می‌گیریم. مقدار ناوردا را در هر حالت باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته بر C را در نظر می‌گیریم. اثبات می‌کنیم اگر عددی وجود داشته باشد که باقی‌مانده‌ی تعداد دسته‌های اولیه بر آن برابر صفر باشد، این باقی‌مانده در تمامی مراحل همچنان صفر خواهد ماند. فرض کنید C یک عدد اول باشد ادعا می‌کنیم که اگر عدد اولی با چنین شرایطی یافت شود، با هر مرحله تقسیم و ترکیب دسته‌ها باز هم می‌تواند تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته بشمارد. (این بدان معنی است که تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته بر عدد اول پیدا شده بخش پذیر باشد). حال به اثبات ادعای خود می‌پردازیم:

طبق نظریه‌ی اعداد، دو حالت زیر را به ازای عدد اول P برقرار است.

۱. در صورتیکه P بتواند هر دو دسته‌ی a و b را بشمارد، ترکیب آن دو را نیز می‌تواند بشمارد.

$$\text{if } P|a \ \& \ P|b \rightarrow P|a+b \quad (1)$$

۲. در صورتیکه P بتواند دسته‌ای با تعداد عضو زوج مثل $2c$ را بشمارد، نصف آن را نیز می‌تواند بشمارد.

$$\text{if } P|2c \rightarrow P|c \quad (2)$$

مجدداً تاکید شود که رابطه‌ی ۵ و ۶ به ازای عدد اول بزرگتر از ۲ برقرار است.

بنابراین باقی‌مانده‌ی تعداد سنگ‌ریزه‌های هر دسته بر عددی مانند C با شرایط فوق، همواره صفر خواهد ماند و ثابت است. حال با توجه به این اثبات کافیت برای هر یکی از سه حالت بالا، عدد اولی بیابیم که هر دو دسته را بتواند بشمارد. در صورتی که چنین چیزی ممکن باشد،

تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته در هر یکی از حالات کران پایین خواهد داشت و به ازای هر گام، تعداد سنگ‌ریزه‌های همواره بزرگ‌تر مساوی آن کران خواهد بود؛ که این کران همان عدد اول پیدا شده است.

برای حالت اول، عدد ۱۱، در حالت دوم، عدد ۷ و در حالت سوم، عدد ۵، سه عدد اول بزرگ‌تر از ۲ هستند که می‌توانند تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دو دسته را بشمارند. بدین ترتیب تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته‌ی ایجاد شده هیچ‌گاه از عدد اول شمارنده‌ی آن کمتر نخواهد شد. پس هیچ‌گاه نمی‌توانیم ۱۸۱ دسته سنگ‌ریزه داشته باشیم که هر یک فقط یک سنگ‌ریزه داشته باشد.

نکات:

T.XXXII : بالاتر ذکر شده بود که می‌خواهیم حکم را برای هر عدد دلخواه c ثابت کنیم، اما جلوتر c اول فرض شده و در نهایت هم برای $c > 2$ اثبات شده است. تغییر فرض اثبات در مراحل بعد صحیح نیست و باید از ابتدا درست ذکر شود، چون در این حالت حکم متفاوتی با آنچه در ابتدا بیان کردیم، اثبات شده است.

پاسخ صحیح .

برای شروع، از آنجایی که تعداد سنگ‌ها در تمامی دسته‌ها فرد است، فقط اجازه داریم که دو دسته را انتخاب کرده آن‌ها را با هم ترکیب کنیم. بر این اساس، سه حالت پیش می‌آید.

۱. دسته‌ی ۱۸۵ و ۱۸۹ تایی را جهت ترکیب شدن انتخاب کنیم. در این صورت با اجرای مرحله‌ی اول دو دسته‌ی ۳۷۴ تایی و ۱۱ تایی خواهیم داشت.

۲. دسته‌ی ۱۱ و ۱۸۵ تایی را انتخاب کنیم. دو دسته‌ی نهایی باقی‌مانده ۱۹۶ تایی و ۱۸۹ تایی خواهند بود.

۳. دسته‌ی ۱۸۹ تایی و ۱۱ تایی را برگزینیم. در نهایت دو دسته‌ی ۲۰۰ تایی و ۱۸۵ تایی خواهیم داشت.

مسئله را با ناوردایی حل می‌کنیم. اثبات می‌کنیم اگر عدد اول و فردی وجود داشته باشد که باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد سنگ‌ریزه‌ها در دسته‌های اولیه بر آن برابر صفر باشد، این باقی‌مانده در تمامی مراحل همچنان صفر خواهد ماند.

اثبات:

این عدد را p می‌نامیم، دو حالت زیر را به ازای عدد اول فرد P برقرار است.

۱. در صورتیکه P بتواند هر دو دسته‌ی a و b را بشمارد، ترکیب آن دو را نیز می‌تواند بشمارد.

$$\text{if } P|a \ \& \ P|b \rightarrow P|a+b \quad (3)$$

۲. در صورتیکه P بتواند دسته‌ای با تعداد عضو زوج مثل $2c$ را بشمارد، نصف آن را نیز می‌تواند بشمارد.

$$\text{if } P|2c \rightarrow P|c \quad (4)$$

مجددا تاکید شود که رابطه‌ی ۵ و ۶ به ازای عدد اول بزرگ‌تر از ۲ برقرار است.

بنابراین باقی‌مانده‌ی تعداد سنگ‌ریزه‌های هر دسته بر عددی مانند p با شرایط فوق، همواره صفر خواهد ماند و ثابت است. حال با توجه به این اثبات کافیت برای هر یکی از سه حالت بالا، عدد اولی بیابیم که هر دو دسته را بتواند بشمارد. در صورتی که چنین چیزی ممکن باشد، تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته در هر یکی از حالات کران پایین خواهد داشت و به ازای هر گام، تعداد سنگ‌ریزه‌های همواره بزرگ‌تر مساوی آن کران خواهد بود؛ که این کران همان عدد اول پیدا شده است.

برای حالت اول، عدد ۱۱، در حالت دوم، عدد ۷ و در حالت سوم، عدد ۵، سه عدد اول بزرگ‌تر از ۲ هستند که می‌توانند تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دو دسته را بشمارند. بدین ترتیب تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته‌ی ایجاد شده هیچ‌گاه از عدد اول شمارنده‌ی آن کمتر نخواهد شد. پس هیچ‌گاه نمی‌توانیم ۱۸۱ دسته سنگ‌ریزه داشته باشیم که هر یک فقط یک سنگ‌ریزه داشته باشد.

فصل ۴ : استقرا

سؤال ۱.۴.

تساوی های زیر برقرار است:

$$F(1, 1) = 2$$

$$F(m+1, n) = F(m, n) + 2(m+n)$$

$$F(m, n+1) = F(m, n) + 2(m+n-1)$$

ثابت کنید:

$$F(m, n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$$

پاسخ .

حکم را با استقرا روی m و n نشان می دهیم:

پایه استقرا:

$$F(1, 1) = 2$$

فرض استقرا:

$$F(m, n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$$

حکم استقرا:

$$F(m+1, n+1) = (m+1+n+1)^2 - (m+1+n+1) - 2n$$

اثبات:

$$F(m+1, n+1) = F(m, n+1) + 2(m+n+1)$$

$$\rightarrow F(m+1, n+1) = F(m, n) + 2(m+n-1) + 2(m+n+1)$$

$$\rightarrow F(m+1, n+1) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2 + 4(m+n)$$

$$\rightarrow F(m+1, n+1) = m^2 + 2mn + n^2 - m - n - 2n + 2 + 4m + 4n + 4 - 4$$

$$\rightarrow F(m+1, n+1) = (m^2 + 2 + n^2 + 2mn + 4m + 4n) + (-m - n - 2) - 2n$$

$$\rightarrow F(m+1, n+1) = (m+1+n+1)^2 - (m+1+n+1) - 2n$$

حکم اثبات شد.

نکات:

E.XXXIII : استقرا باید تمام حالت ها را در بر بگیرد، اما در اینجا فقط حالت هایی اثبات شده که $m = n$

پاسخ .

فرض کنید n دلخواه باشد، حکم را با استقرا روی m نشان می دهیم:

پایه استقرا:

$$F(1, 1) = 2$$

فرض استقرا:

$$F(m, n) = (m + n)^2 - (m + n) - 2n + 2$$

حکم استقرا:

$$F(m + 1, n) = (m + 1 + n)^2 - (m + 1 + n) - 2n + 2$$

اثبات:

$$F(m + 1, n) = F(m, n) + 2(m + n)$$

$$\rightarrow F(m + 1, n) = (m + n)^2 - (m + n) - 2n + 2 + 2(m + n)$$

$$\rightarrow F(m + 1, n) = m^2 + 2mn + n^2 - m - n - 2n + 2 + 2m + 2n + 1 - 1$$

$$\rightarrow F(m + 1, n) = (m^2 + 1 + n^2 + 2mn + 2m + 2n) + (-m - n - 1) - 2n + 2$$

$$\rightarrow F(m + 1, n) = (m + 1 + n)^2 - (m + 1 + n) - 2n + 2$$

چون n را دلخواه در نظر گرفته بودیم، به ازای تمام m و n ها، حکم اثبات شد.

نکات:

E.XXXIV : پایه استقرا باید با توضیح داده شده مطابقت داشته باشد، در این مثال، برای درست بودن اثبات، باید پایه

$$F(1, n) = (1 + n)^2 - (1 + n) - 2n + 2$$

در نظر گرفته می شد که خود نیازمند اثبات است.

E.XXXIII

پاسخ صحیح .

حکم را با استقرا روی m و n نشان می دهیم:

پایه استقرا:

$$F(1, 1) = 2$$

فرض استقرا:

$$F(m, n) = (m + n)^2 - (m + n) - 2n + 2$$

حکم استقرا:

$$F(m + 1, n) = (m + 1 + n)^2 - (m + 1 + n) - 2n + 2$$

$$F(m, n + 1) = (m + n + 1)^2 - (m + n + 1) - 2n$$

اثبات:

۱.

$$\begin{aligned}
 F(m+1, n) &= F(m, n) + \mathfrak{z}(m+n) \\
 \rightarrow F(m+1, n) &= (m+n)^{\mathfrak{z}} - (m+n) - \mathfrak{z}n + \mathfrak{z} + \mathfrak{z}(m+n) \\
 \rightarrow F(m+1, n) &= m^{\mathfrak{z}} + \mathfrak{z}mn + n^{\mathfrak{z}} - m - n - \mathfrak{z}n + \mathfrak{z} + \mathfrak{z}m + \mathfrak{z}n + 1 - 1 \\
 \rightarrow F(m+1, n) &= (m^{\mathfrak{z}} + 1 + n^{\mathfrak{z}} + \mathfrak{z}mn + \mathfrak{z}m + \mathfrak{z}n) + (-m - n - 1) - \mathfrak{z}n + \mathfrak{z} \\
 \rightarrow F(m+1, n) &= (m+1+n)^{\mathfrak{z}} - (m+1+n) - \mathfrak{z}n + \mathfrak{z}
 \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}
 F(m, n+1) &= F(m, n) + \mathfrak{z}(m+n-1) \\
 \rightarrow F(m+1, n) &= (m+n)^{\mathfrak{z}} - (m+n) - \mathfrak{z}n + \mathfrak{z} + \mathfrak{z}(m+n-1) \\
 \rightarrow F(m+1, n) &= m^{\mathfrak{z}} + \mathfrak{z}mn + n^{\mathfrak{z}} - m - n - \mathfrak{z}n + \mathfrak{z}m + \mathfrak{z}n + 1 - 1 \\
 \rightarrow F(m+1, n) &= (m^{\mathfrak{z}} + 1 + n^{\mathfrak{z}} + \mathfrak{z}mn + \mathfrak{z}m + \mathfrak{z}n) + (-m - n - 1) - \mathfrak{z}n \\
 \rightarrow F(m+1, n) &= (m+1+n)^{\mathfrak{z}} - (m+1+n) - \mathfrak{z}n
 \end{aligned}$$

حکم اثبات شد.

سؤال ۲.۴.

به یک گراف کامل جهت دار تورنمنت می گوئیم، یک راس را شاه می نامیم اگر بتوان آن راس با مسیرهایی حداکثر به طول ۲ به بقیه رئوس گراف رسید. نشان دهید به ازای همه n ها به جز ۲ و ۴ تورنمنتی n - راسی داریم که همه رئوس در آن شاه هستند.

پاسخ.

پایه ها:



G_n را از روی G_{n-1} می سازیم به این صورت که G_{n-1} را جفت جفت افراز کرده و اتصال هر جفت با راس جدید را جداگانه بررسی می کنیم. جفت راس i, j را در نظر بگیرید که در آن یال j, i از سمت یال i به سمت j باشد، حال (بدون کم شدن از کلیت مسئله) راس جدید x را به این صورت به مجموعه اضافه می کنیم:



تمام مسیرهای $i, j, i, x, j, x, x, i, j, i, x, j, x$ به طول حداکثر ۲ موجودند، این کار را برای تمام جفت راس ها انجام می دهیم. بنابراین تمام مسیرها به طول حداکثر ۲ موجودند، راس x به تمام راس ها یال دارد، پس به گراف دلخواه G_n رسیدیم.

نکات:

E.XXXV : ناقص بودن گام استقرا: این گام در صورتی صحیح است که n فرد باشد. و با توجه به وابستگی اثبات n های فرد به صحیح بودن حکم برای n های زوج، حکم اثبات نمی شود.

T.XXXVI : حکم برای حالت ۱ و ۳ اثبات نشده است.

پاسخ صحیح .

پایه استقرا:

$$G_{n=1} : \bullet \quad \checkmark$$

$$G_{n=3} : \triangle$$

$$G_{n=5} : \text{pentagon with all diagonals}$$

$$G_{n=6} : \text{hexagon with all diagonals}$$

برای $n > 6$ ما دو حالت داریم: حالت اول n زوج . حالت دوم n فرد.

الف) n فرد می باشد. پس G_{n-1} تعداد زوجی راس دارد. G_n را از روی G_{n-1} می سازیم به این صورت که G_{n-1} را جفت جفت افزا کرده و اتصال هر جفت با راس جدید را جداگانه بررسی می کنیم. جفت راس i, j را در نظر بگیرید که در آن یال j, i از سمت یال i به سمت j باشد، حال (بدون کم شدن از کلیت مسئله) راس جدید x را به این صورت به مجموعه اضافه می کنیم:



تمام مسیرهای ij, ix, jx, xi, ji, xj به طول حداکثر ۲ موجودند، این کار را برای تمام جفت راس ها انجام می دهیم. بنابراین تمام مسیرها به طول حداکثر ۲ موجودند، راس x به تمام راس ها یال دارد، پس به گراف دلخواه G_n رسیدیم.

ب) n زوج باشد. در این حالت G_n را از G_{n-2} می سازیم. دو راس جدید x, y را بهم متصل می کنیم (از x به سمت y) حال به ازای هر راس i در G_{n-2} آن را به این صورت به x به y متصل می کنیم.



تمامی مسیرهای $xy, xi, ix, yi, iy, yx, xy$ به طول حداکثر ۲ موجود هستند چون این کار را برای تمام راس های G_{n-2} انجام دادیم پس تمام مسیرها به طول حداکثر ۲ موجودند و راس ها جدید x, y به تمام راس ها یال دارند، پس گراف دلخواه G_n را ساختیم.

چون هم برای n های زوج ثابت کردیم و هم برای n های فرد، پس می توان G_n را به ازای تمام $n > 6$ ساخت.

سؤال ۳.۴.

نشان بدهید که میتوان اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ را طوری کنار هم چید، که میانگین هیچ دو عددی بین آن دو عدد دیده نشود.

پاسخ .

برای $n = 1, 2$ به طور بدیهی می توان جایگشتی ساخت که میانگین هیچ دو عددی بین آن دو عدد دیده نشود.

$$n = 2 \rightarrow \{1, 2\}$$

برای n های بزرگ تر از ۲، عددها را به دو دسته زوج و فرد تقسیم می کنیم و اعداد را مانند الگوریتم زیر می چینیم.

برای $n = 3$ ابتدا اعداد فرد را در سمت چپ و سپس عدد زوج را می نویسیم.

$$n = 3 \rightarrow \{1, 3, 2\}$$

برای $n = 4$ نیز، دو دسته زوج و فرد را تشکیل می دهیم و مانند $n = 2$ ، سمت چپ اعداد فرد و سمت راست اعداد زوج را می نویسیم.

برای $n = 5$ نیز، دو دسته زوج و فرد را به ترتیب با ۲ و ۳ عضو تشکیل می دهیم و دسته فرد را سمت چپ و دسته زوج را سمت راست قرار می دهیم.

اگر به همین ترتیب پیش برویم جایگشت مناسب برای هر عدد را می توان با استفاده از اعداد قبل نوشت. پس حکم اثبات شد.

نکات:

E.XIV

مثال زدن و تعمیم دادن آن اثبات محسوب نمی شود.

E.XXXVII : همین تفکر گام به گام را می توان با استفاده از استقرا بیان کرد. در این صورت باید همه الزامات استقرا اعم از پایه و فرض و حکم استقرا را نوشت و به طور کامل اثبات را پیش برد. در این پاسخ فقط پایه استقرا رعایت شده است.

پاسخ صحیح .

پایه استقرا: $n = 2$ برقرار است.

چینش: ۱۲

سوال را با دو گام حل می کنیم:

آ) گام اول: $n \rightarrow 2n$

ب) گام دوم: $n \rightarrow n - 1$

فرض استقرا: $n = 2^k$

حکم استقرا: $n = 2^{k+1}$

اثبات: مجموعه ی حکم را به دو قسمت زوج ها و فرد ها تقسیم می کنیم.

۱. برای زوج ها هر عدد را بر دو تقسیم می کنیم. به مجموعه ی فرض می رسم که شرایط مسئله در آن برقرار است و جایگشتی از اعضا را دارد که در آن چینش میانگین هیچ دو عضوی بیش از یک نیست. حال این جایگشت را در نظر گرفته و هر عضو را در دو ضرب می کنیم.

۲. برای فرد ها هر عدد را به علاوه یک و سپس بر دو تقسیم می کنیم. به مجموعه ی فرض می رسم که شرایط مسئله در آن برقرار است و جایگشتی از اعضا را دارد که در آن چینش میانگین هیچ دو عضوی بیش از یک نیست. حال این جایگشت را در نظر گرفته و هر عضو را در دو ضرب و منهای یک می کنیم.

ادعا می کنیم مجموعه ی حاصل مجموعه ی جواب است، هر دو عددی که از مجموعه ی زوج ها انتخاب کنیم، میانگینشان هم فقط در دو ضرب شده است و در نتیجه بین آن دو نخواهد بود. هر دو عددی که از مجموعه فرد ها انتخاب کنیم، میانگینشان در دو ضرب و منهای یک شده است و بنا به فرض بین آن دو نخواهد بود. اگر عددی از فرد ها و عددی از زوج ها را انتخاب کنیم، میانگینشان طبیعی نخواهد بود و جزو شرایط مسئله نیست. همه ی حالت ها را بررسی کردیم، پس ادعا صحیح و حکم ثابت می شود.

با حذف بزرگ ترین عدد از مجموعه فرض استقرا می توان به جایگشتی از $n - 1$ عضو رسید به طوری که میانگین هیچ دو عضوی بیش از یک نیست. پس در این صورت شرایط سوال برای $n - 1$ برقرار است و حکم استقرا ثابت است.

با شروع از پایه ۲ و با استفاده از گام اول می‌توان حکم را برای همه اعداد توان ۲ ثابت کرد و با استفاده از گام ۱- همه اعداد بین توان های ۲ متوالی را پوشش داد. بنابراین حکم سوال برای تمام اعداد طبیعی برقرار است.

نکات:

E.XXXVIII : به این گونه سوالات که یک گام بزرگ (گام آ) دارد و یک گام معکوسی (گام ب) که کم می‌کند استقرای قهقرایی می‌گویند. در این سوالات حکم را با گام بزرگ اثبات می‌کنیم و با استفاده از گام کوچک از آن کم می‌کنیم تا همه اعداد را پوشش دهیم.

E.XXXIX : توجه کنید در اثبات‌ها باید با استفاده از گام(ها) و فرض ، حکم را برای همه اعداد طبیعی ثابت کنید.

فصل ۵ : نکات نوشتار

نکات:

N.XL : در حل سوالات توجه کنید هر گزاره، فرمول، اتحاد و... که درستی آن‌ها اثبات شده است باید منبع معتبر آن ذکر شود. این منابع می‌توان اسم عام آن، آدرس سوال و تمرینی که قبلاً داده شده، مطالب داخل کلاس، جزوه و... باشد.

E.XLI : در طول اثبات توصیه اکید می‌شود از کلمه «بدیهی است» استفاده نکنید. حتی در مسیر یافتن جواب هم در ذهن خود بسپارید هیچ چیز بدیهی نیست، یا نیاز به اثبات دارد یا قبلاً اثبات شده است یا از اصول و تعاریف پایه است **N.XL**. به عبارتی برای هر جمله به سوال «چرا؟» پاسخ دهید. چرا؟ (چون استفاده از بعضی از جملات اعم از «بدیهی است» و مواردی که اشاره خواهیم کرد در طول اثبات باعث کژفهمی کلیت اثبات یا کامل به نظر رسیدن اثباتی ناقص و یا حتی غلط می‌شود. به عبارت دیگر مانند فرایندهای منطقی **E.XX** هر جمله باید از جملات قبلی و یا اصول پایه نتیجه گرفته شود.

N.XLII : یکی از چراغ خطرهای در طول اثبات استفاده از «و.../و غیره/...» است. این کلمات به خودی خود بد نیستند، اما زمانی که ما می‌توانیم از علائم اختصاری استفاده کنیم اثبات ما تمیزتر و خواناتر و به طور حتم به دور از ابهام می‌شود. برای شفاف شدن موضوع به دو مثال زیر توجه کنید:

۱. دنباله «۲ و ۴ و ۶ و...» را داریم.

«و...» نشان دهنده چه جملاتی در دنباله است؟

آیا منظور دنباله $a_n = 2n$ است؟

یا دنباله $a_1 = 4, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ؟

یا دنباله $a_n = 2n + (1-n)^3(2-n)^2(3-n)$ ؟

۲. s را در نظر می‌گیریم $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

زیباتر است بنویسیم : $s = \sum_{i=1}^n a_i$

N.XLIII : تا آن‌جا که می‌توانید جملات، عبارات ریاضی و گزاره‌ها را فارسی ننویسید. از گزاره‌های منطقی استفاده کنید یا به شکل عبارات و معادلات ریاضی بنویسید.

E.XLIV : در مباحثی که مدل نوشتاری خاص وجود دارد مثل استقرا، ناوردایی و نظریه اعداد حتماً اصول را رعایت کنید.

E.XLV : از نوشتن عبارت‌هایی مثل «بهترین حالت این است که...» یا «در بدترین حالت داریم که...» پرهیز کنید. توجه کنید که بهترین و بدترین و مفاهیمی از این دست، در ریاضیات معنایی ندارند مگر آن‌ها را تعریف کنید و توضیح بدهید که چرا در نظر گرفتن این حالت به حل مسئله کمک می‌کند.

N.XLVI : بهتر است در صورتی که در اثبات خود از روش یا ایده مشخص و شناخته شده‌ای استفاده می‌کنید، (مثل ناوردایی - استقرا - برهان خلف - دوگانه شماری و...) آن را ذکر کنید تا دنبال کردن اثبات شما برای خواننده راحت تر بشود و اثبات شما را بهتر متوجه بشود.

E.XLVII : اگر در نوشتن اثبات از رسم شکل استفاده می‌کنید، حذف کردن شکل نباید باعث ناقص شدن اثبات شما بشود، به عبارت دیگر شکل تنها باید به فهم بهتر اثبات کمک کند و نباید مستقیماً برای اثبات استفاده شود.

E.XLVIII : استفاده از مثال برای فهم بهتر اثبات یک حکم کلی اقدام خیلی خوبی است، اما نباید جایگزین اثبات اصلی بشود.

E.XLIX : همواره دقت نمایید تا جملات استفاده شده به یکی از اشکال زیر باشد:

۱. خود فرض مسئله باشد.

۲. به صورت کاملاً شفاف و واضح از جملات قبلی نتیجه شده باشد.

۳. درستی آن قبلاً اثبات شده باشد.

E.L : در طول اثبات به هیچ عنوان به شهود اکتفا نکنید. شهود به هیچ عنوان ارزش ریاضی ندارد.

فصل ۶ : گراف

سؤال ۱.۶.

ثابت کنید یک گراف ۳-منتظم رأس برشی دارد اگر و تنها اگر یال برشی داشته باشد.

پاسخ .

فرض کنید V یک رأس برشی از گراف G است. چون گراف ۳-منتظم است پس با حذف V گراف به ۳ مولفه تقسیم می شود. همسایه های x, y, z را V می نامیم. نشان می دهیم هر کدام از یال ها برشی هستند.

بدون تغییر کلیت سوال یال Vx را در نظر بگیرید. مثلاً V را در مولفه ای در نظر بگیرید که y در آن قرار دارد. می دانیم که x با تنها گذر از V می تواند به y برسد یعنی در واقع وارد مولفه مزبور شود. پس Vx یال برشی است.

برای طرف دوم می خواهیم ثابت کنیم؛ اگر گراف ۳-منتظم یال برشی داشته باشد، آنگاه رأس برشی دارد. عکس نقیض گزاره فوق را در نظر می گیریم.

عکس نقیض: اگر گراف ۳-منتظم رأس برشی نداشته باشد، آنگاه یال برشی ندارد.

در قسمت اول دیدیم اگر رأس برشی داشته باشیم پس یال برشی داریم. بنابراین اگر رأس برشی نداشته باشیم، یال برشی هم نداریم.

عکس نقیض گزاره درست است. چون هر گزاره با عکس نقیض خود هم ارز است، پس گزاره اصلی هم درست است.

نکات:

E.LI : در حل سوالات باید تمامی حالت هایی که ممکن است پیش بیاید را در نظر بگیریم. در اینجا با حذف V ممکن است گراف به ۲ مولفه همبندی تقسیم شود.

E.XXII گزاره «اگر گراف ۳-منتظم رأس برشی داشته باشد، آنگاه یال برشی دارد.» را معادل $p \rightarrow q$ در نظر بگیرید.

گزاره «اگر گراف ۳-منتظم رأس برشی نداشته باشد، آنگاه یال برشی ندارد.» معادل می شود با $\neg p \rightarrow \neg q$ که این وارون گزاره فوق است و با هم هم ارز نیستند. بنابراین نمی توان از گر رأس برشی داشته باشیم پس یال برشی داریم نتیجه بگیریم گر رأس برشی نداشته باشیم، یال برشی هم نداریم.

پاسخ صحیح .

ابتدا ثابت می کنیم که اگر در این گراف رأس برشی داشته باشیم، یال برشی داریم.

اگر k رأس برشی باشد، چون درجه آن ۳ است، دو حالت داریم :

(۱) به دو مؤلفه یال داشته باشد. در این صورت به یکی از مؤلفه ها ۲ یال و به دیگری یک یال دارد و می توانیم گراف را به صورت شکل ۱ رسم کنیم. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، مؤلفه ای که k به آن یک یال دارد را A و مؤلفه دیگر را B می نامیم. چون k برشی است پس از A به B فقط یک مسیر گذرا از k وجود دارد و چون از A به k نیز فقط یک یال وجود دارد، این یال برشی است.

(۲) در غیر این صورت اگر به سه مؤلفه یال داشته باشد، به هریک از ۳ مؤلفه، یک یال دارد و میتوانیم گراف را به صورت شکل ۲ رسم کنیم. چون k برشی است و به هر مؤلفه فقط یک یال دارد، پس هرکدام از این یال‌ها نیز برشی هستند.



سپس اثبات میکنیم که اگر یال برشی داشته باشیم، رأس برشی داریم.

اگر u یال برشی باشد، می‌توانیم گراف را مانند شکل زیر رسم کنیم و چون یال u برشی است، بنابراین به جز u یال دیگری از رأس a (یک سر یال u در یک مؤلفه) به مؤلفه دیگر وجود ندارد. بنابراین رأس a نیز برشی است.



سؤال ۲.۶.

ثابت کنید در یک تورنمنت (گراف کامل ساده جهت دار) قویا همبند، به ازای هر k به طوری که $3 \leq k \leq n$ ، دوری جهت دار وجود دارد.

پاسخ.

در یک گراف ساده‌ی جهت دار همبند بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود دارد. برای یافتن دور جهت دار به طول k به طوری که $3 \leq k \leq n$ باشد، کافی است مسیری به طول $k-1$ از رأس دلخواه a به رأس دلخواه b پیدا کنیم. از آنجایی که بین هر دو رأس مسیر جهت دار وجود دارد، از a به b نیز مسیر جهت دار وجود دارد. پس می‌توان دوری جهت دار به طول k پیدا کرد.

نکات:

N.XLII هیچ جمله‌ای را بدیهی فرض نکنید! در اینجا باید ذکر شود چگونه مسیر به طول $k-1$ پیدا می‌شود.

E.XLIX همان طور که قبلاً گفتیم هر عبارت باید نتیجه شده از عبارت قبلی باشد. عبارت آخر «پس می‌توان دوری جهت دار به طول k پیدا کرد.» از جملات قبلی نتیجه نمی‌شود. در اینجا مسیری به طول $k-1$ از رأس دلخواه a به رأس دلخواه b پیدا شده است، از a به b نیز مسیر جهت دار وجود دارد، ولی تضمینی نیست که طول آن یک باشد تا دور به طول k تشکیل شود.

پاسخ صحیح.

روی k استقرا می‌زنیم و داریم:

پایه: $k=3$. رأس v را در نظر بگیرید. اگر رئوسی که به v یال دارند را در مجموعه A و رئوسی که v به آن‌ها یال دارد را در مجموعه B قرار دهیم، با توجه به این که گراف قویاً همبند است، مجموعه‌های A و B تهی نیستند و رأس w در B وجود دارد که به رأس u در A یال دارد. بنابراین رئوس w و u و v دور به طول ۳ تشکیل می‌دهند.

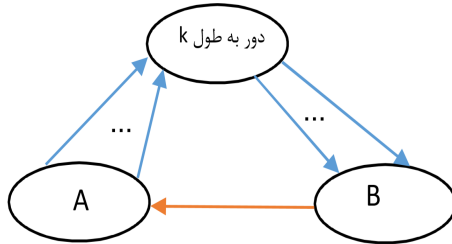


فرض: دور به طول k داریم.

حکم: دور به طول $k+1$ داریم.

دور به طول k را (با توجه به فرض استقرا) در نظر بگیرید. حال اگر رأس u خارج از این دور وجود داشته باشد که به رؤس داخل دور، هم یال ورودی و هم یال خروجی داشته باشد (حداقل یک یال ورودی و یک یال خروجی)، با توجه به این که گراف تورنمنت قویاً همبند است و u به تمام رؤس داخل دور یال ورودی یا خروجی دارد، رؤس x و y در این دور وجود دارند به طوری که x و y همسایه باشند و از x با یال خروجی به u برویم و با یال ورودی به y برگردیم. پس دور به طول $k+1$ هم داریم.

در غیر این صورت، اگر رؤسی داشته باشیم که همه به رؤس داخل دور وارد می شوند (مجموعه A) و رؤسی داشته باشیم که همه از آنها خارج می شوند (مجموعه B)، چون گراف قویاً همبند است، پس حتماً از B به A مسیر داریم. این رأس از B را b می نامیم که به رأس a از A یال دارد. رأس v_1 از دور به طول k را در نظر بگیرید. چون همه همسایه های v_1 به b یال دارند و از a هم یال ورودی دارند، پس می توان دور به طول $k+1$ را به صورت $v_1 \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_3 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow v_1$ تشکیل داد.



سؤال ۳.۶.

ثابت کنید تعداد گراف های ساده با مجموعه رؤس های $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ که درجه هریک از رؤس های آنها زوج است، برابر است با $2^{\binom{n-1}{2}}$.

پاسخ.

نشان می دهیم تعداد این گراف ها برابر تعداد گراف های $n-1$ راسی است.

اثبات: گراف های $n-1$ راسی را در نظر بگیرید. حال رأس n ام را اضافه کرده و به تمام رؤس با درجه فرد وصل می کنیم. درجه این رأس زوج است چون تعداد رؤس درجه فرد در گراف $n-1$ راسی زوج بود. پس از هر گراف $n-1$ راسی می توان یک گراف n راسی ساخت که درجه تمام رؤس آن زوج باشد.

حال کافی است این تعداد را بشماریم که برابر $2^{\binom{n-1}{2}}$ است.

E.LII: لازم است برای اثبات برابر بودن تعداد این دو دسته، ثابت کنیم که تناظر بین آنها یک به یک است، به این معنی که گراف به دست آمده در این فرایند یکتا است.

پاسخ صحیح.

اگر A مجموعه همه گراف های ساده با مجموعه رؤس $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ باشد و B مجموعه گراف های ساده با مجموعه رؤس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد به گونه ای که درجه تمام رؤس زوج باشد، می دانیم $|A| = 2^{\binom{n-1}{2}}$ بنابراین می خواهیم تناظر یک به یک بین اعضای مجموعه های A و B برقرار کنیم تا نشان دهیم $|B| = 2^{\binom{n-1}{2}}$.

اگر G گرافی ساده با مجموعه رؤس $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ باشد، رأس v_n را به آن اضافه می کنیم و آن را به تمام رؤس با درجه فرد وصل می کنیم و گراف حاصل را G' می نامیم. بنابراین تمام رؤس با درجه فرد در G ، در G' درجه زوج دارند. همچنین چون تعداد رؤس با درجه فرد در هر گراف زوج است، پس درجه v_n نیز زوج می باشد. از طرف دیگر اگر برعکس این عمل را روی هر گراف با مجموعه رؤس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ که درجه تمام رؤس آن زوج هستند انجام دهیم و رأس v_n را از آن ها حذف کنیم، گرافی ساده با مجموعه رؤس $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ ایجاد می شود.

برای رسیدن از گراف $n-1$ راسی A به گراف n راسی B ، به a رأس v_n و یال هایش را اضافه می کنیم و برعکس آن، برای رسیدن از B به a ، رأس v_n و یال هایش را حذف می کنیم. بنابراین با رفتن از گرافی در A به گرافی در B و برگشتن از B به A ، به همان گراف

اول می رسمیم. پس تناظر ما یک به یک است.

$$|B| = 2^{\binom{n-1}{2}}, \text{ پس چون بین اعضای این دو مجموعه تناظر یک به یک وجود دارد,}$$

سؤال ۴.۶.

گراف همبند و بی جهت G را در نظر بگیرید. ثابت کنید می توانیم یال های این گراف را به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک شود.

پاسخ.

از استقرا استفاده می کنیم.

پایه: برای گراف های با $n = 1, n = 2$ راس، واضح است که می توانیم یال های این گراف را به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک شود.

فرض: گراف $n - 1$ راسی را در نظر بگیرید که حکم برای آن درست است.

حکم: می خواهیم ثابت کنیم گراف n راسی را می توانیم به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه ی ورودی و خروجی هر راس آن، حداکثر یک شود.

اثبات: گراف $n - 1$ راسی را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا یال های این گراف را به صورتی جهت دهی کرده ایم که تفاضل درجه ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک است. به این گراف راس n ام را اضافه می کنیم. از راس n فقط به یکی از راس های قبلی یال وصل می کنیم. اگر درجه خروجی این راس یکی بیشتر بود، یال را ورودی رسم می کنیم. اگر درجه ورودی این راس یکی بیشتر بود، یال را خروجی رسم می کنیم و در غیر این صورت به طور دلخواه جهت می دهیم. بنابراین برای گراف n راسی هم حکم ثابت شد.

نکات:

E.XXXIII

پاسخ.

از استقرا استفاده می کنیم.

پایه: برای گراف های با $n = 1, n = 2$ راس، واضح است که می توانیم یال های این گراف را به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک شود.

فرض: گراف $n - 1$ راسی را در نظر بگیرید که حکم برای آن درست است.

حکم: می خواهیم ثابت کنیم گراف n راسی را می توانیم به صورتی جهت دهی کنیم که تفاضل درجه ی ورودی و خروجی هر راس آن، حداکثر یک شود.

اثبات: گراف $n - 1$ راسی را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا یال های این گراف را به صورتی جهت دهی کرده ایم که تفاضل درجه ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک است. به این گراف راس n ام را اضافه می کنیم. این راس به هر یک از راس ها حداکثر یک یال دارد. هر یال راس n را در نظر بگیرید. آن را $v_i n$ می نامیم. اگر تا پیش از این تعداد یال های ورودی و خروجی راس v_i برابر بود، یال را دلخواه جهت گذاری می کنیم. در غیر این صورت چون اختلاف درجه ی ورودی و خروجی راس v_i یک است جهت یال $v_i n$ را طوری انتخاب می کنیم که این اختلاف صفر شود. بنابراین برای گراف n راسی هم حکم ثابت شد.

نکات:

E.LIII : اثبات ناقص است. باید توجه کنیم که شرایط سوال برای راس n ام برقرار نمی شود. به طور کلی در اثبات از روش استقرا، درستی شرایط برای راس یا یالی که اضافه می شود را در نظر بگیرید.

پاسخ.

گراف با راس‌های $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ را داریم. تمام یال‌های v_1 را به طور دلخواه جهت دهی می‌کنیم طوری که شرایط سوال برقرار باشد. به سراغ راس v_2 می‌رویم و یال‌های آن را جهت دهی می‌کنیم. همین کار را برای سایر راس‌ها انجام می‌دهیم. در صورتی که به راس v_i رسیدیم که نمی‌توانستیم یال‌های آن را متناسب با این شرایط جهت دهی کنیم، به یکی از همسایه‌های v_i می‌رویم که اختلاف درجه ورودی و خروجی آن صفر است. سپس جهت یال مشترکشان را عوض می‌کنیم. اختلاف درجه ورودی و خروجی راس همسایه برابر یک می‌شود و حال امکان برقراری شرایط برای v_i وجود دارد. به همین ترتیب تا راس v_n پیش می‌رویم و در نهایت یال‌های گراف را طوری جهت داده‌ایم که تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک است.

نکات:

E.L

پاسخ صحیح .

اگر درجه تمامی رئوس گراف زوج باشد که می‌توان گذر اوپلری در آن ایجاد کرد که پس از آن اگر یال‌ها را طبق جهت پیموده شده جهت دهی کنیم، حکم ثابت است وگرنه $2k$ تا راس درجه فرد وجود دارند. راس v را به گراف اضافه می‌کنیم و سپس آن را به راس‌های درجه فرد گراف وصل می‌کنیم. پس از آن درجه تمامی رئوس زوج خواهد بود و مانند قبل یال‌ها را جهت می‌دهیم. در پیمایش دور اوپلری درجه ورودی و خروجی هر راس برابر می‌شود. سپس راس v و یال‌هایش را حذف می‌کنیم. چون هر راس گراف حداکثر یک یال به v داشت بنابراین تفاضل درجه‌ی ورودی و خروجی هر راس، حداکثر یک می‌شود.

سؤال ۵.۶

ثابت کنید برای هر گراف G ، زیرگراف دو بخشی H ای وجود دارد که $e(H) > \frac{e(G)}{4}$ باشد.

پاسخ .

گراف G با n راس را در نظر می‌گیریم. راس دلخواه v را از این گراف برمی‌داریم. فرض می‌کنیم برای $n - 1$ راس زیر گراف دو بخشی وجود دارد که شامل بیش از نیمی از یال‌های گراف اصلی است. حال باید راس v را به یکی از این دو بخش طوری اضافه کنیم که تعداد یال‌هایی که بین v و راس‌ها در بخش اضافه شده است کمتر از تعداد یال‌هایی که بین v و بخش دیگر گراف وجود دارند باشد.

برای این کار می‌توان، تعداد یال‌هایی که راس v با بخش اول می‌تواند بسازد را با تعداد یال‌هایی که v با بخش دوم می‌سازد مقایسه کنید. اگر تعداد یال‌های v با بخش اول بیشتر v را به بخش دوم و اگر برعکس بود v را به بخش اول اضافه می‌کنیم و اگر مساوی بودند فرقی نمی‌کند به کدام اضافه کنیم.

v را به بخش مورد نظر اضافه می‌کنیم و یال‌های متصل از v به بخش دیگر را رسم می‌نماییم. به این ترتیب مطمئن هستیم حکم سوال برقرار است.

نکات:

E.XLIV زمانی که در حل سوال از یک حالت (مثلاً گراف n راسی) به حالتی کوچکتر (گراف $n - 1$ راسی) می‌رسیم و فرض می‌کنیم حکم برای حالت کوچکتر درست است؛ به معنی این است که از استقرا استفاده می‌کنیم. بنابراین رعایت مدل نوشتار استقرا شامل پایه، فرض استقرا و حکم استقرا الزامی است.

T.LIV : سوال برای حالت بزرگتر مساوی اثبات شده است.

پاسخ صحیح .

به صورت دلخواه راس‌های گراف G را به دو دسته تقسیم می‌کنیم، سپس در هر مرحله یک راس که تعداد یال‌هایی که با راس‌های هم گروه خود دارد از تعداد یال‌هایی که با راس‌های گروه دیگر دارد بیشتر است را انتخاب می‌کنیم و آن را به گروه دیگر منتقل می‌کنیم. با استفاده از ناوردایی نشان می‌دهیم بعد از تعداد متناهی مرحله، به حالتی از دسته‌بندی راس‌ها می‌رسیم که دیگر راسی برای جابجایی وجود ندارد. مقدار ناوردا: تعداد یال‌های بین دو گروه.

گام ناوردا: با هر بار تکرار مرحله بالا تعداد یال‌های بین دو گروه در هر مرحله حداقل یک واحد افزایش می‌یابد. پس ناوردای افزایشی داریم.

حال چون تعداد کل یال‌های گراف ثابت است و ناوردا نمی‌تواند از این تعداد بیشتر شود؛ پس، بعد از تعداد متناهی مرحله، به حالتی از دسته‌بندی راس‌ها می‌رسیم که دیگر راسی برای جابجایی وجود ندارد.

در اینجا اگر تعداد یال‌هایی که دو سر آن‌ها در یک گروه است، از تعداد بقیه یال‌ها کمتر باشد، با حذف این یال‌ها، گراف خواسته شده H به دست آمده است. در غیر این صورت، برای تمام راس‌های گراف، تعداد یال‌هایی که سر دیگر آن‌ها در گروه دیگر است با تعداد یال‌هایی که سر دیگر آن‌ها در همان گروه است برابر است و به این ترتیب تعداد یال‌های بین دو گروه دقیقاً برابر تعداد یال‌هایی است که دو سر آن هم گروه هستند. در اینجا یک یال دلخواه AB که گروه راس‌های A و B متفاوت است را انتخاب می‌کنیم. حال گروه راس A را عوض می‌کنیم و به این ترتیب تعداد یال‌های بین دو گروه ثابت می‌ماند و دو سر یال AB در یک گروه است در حالی که وضعیت بقیه یال‌های متصل به راس B ثابت مانده است، حال تعداد یال‌هایی که راس B با رئوس هم گروه خود دارد یک واحد بیشتر از تعداد یال‌هایی است که با راس‌های گروه دیگر دارد و به این ترتیب با انتقال این راس به گروه دیگر، تعداد یال‌های بین دو گروه یک واحد بیشتر می‌شود و همچنین تعداد آن از بقیه یال‌ها هم بیشتر می‌شود پس با حذف یال‌هایی که دو سر آن‌ها در یک گروه هستند که تعداد آن‌ها کمتر از نصف تعداد کل یال‌ها در گراف G است، به گراف خواسته شده H می‌رسیم.

سؤال ۶.۶.

ثابت کنید گراف n راسی با $2 + \binom{n-1}{2}$ یال، دارای دور همیلتونی است.

پاسخ.

راس n را از گراف حذف می‌کنیم و گراف به دست آمده را کامل می‌کنیم. چون این گراف $\binom{n-1}{2}$ راس دارد و دور همیلتونی دارد، اگر دو راس متوالی در این دور را به راس n وصل کنیم، گراف حاصل با $2 + \binom{n-1}{2}$ راس دارای دور همیلتونی است.

نکات:

E.LV: در اینجا سوال برای تعدادی حالت خاص اثبات شده است، برای صحیح بودن این روش اثبات، باید نشان داد که این حالت‌ها همه حالات را در بر می‌گیرد (البته در این مثال اینطور نیست).

پاسخ صحیح.

طبق قضیه اوره می‌دانیم، اگر مجموع درجات هر دو راس غیرمجاور در گراف n راسی بزرگتر مساوی n باشد، گراف دارای دور همیلتونی است. پس با اثبات این که در گراف مسئله ما جمع درجات هر دو راس غیرمجاور بزرگتر مساوی n است، حکم مسئله به دست می‌آید. برای اثبات این موضوع از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض کنید راس‌های غیرمجاور A و B در گراف G وجود دارند به طوری که مجموع درجات آن‌ها کمتر یا مساوی تعداد راس‌های گراف است، حال این دو راس را از گراف حذف کرده و به گراف G' می‌رسیم که دارای $n - 2$ راس است و برای تعداد یال‌های آن داریم:

$$|E'| > \binom{n-1}{2} + 2 - n$$

$$\rightarrow |E'| > \frac{(n-1)(n-2) - 2(n-2)}{2} = \frac{(n-3)(n-2)}{2} = \binom{n-2}{2}$$

اما گراف G' نمی‌تواند بیش از $\binom{n-2}{2}$ یال داشته باشد و این تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

سؤال ۷.۶.

n راس دور دایره قرار دارند. هر راس به دو راس قبلی و دو راس بعدی خود یال دارد، ثابت کنید این گراف از حاصل اجتماع دو دور همیلتونی به دست آمده است. ($n \geq 5$)

پاسخ .

دو دور همیتونی به شکل زیر است:



نکات:

E.XLVII

E.LV

پاسخ صحیح .

راس‌ها را به ترتیب روی دایره از ۱ تا n شماره گذاری می‌کنیم. اگر n فرد باشد، یک دور ما حاصل وصل شدن تمامی رئوس متوالی روی دایره به هم و دیگری حاصل وصل شدن رئوس با فاصله ۲ روی دایره به شکل $\{1, 3, \dots, n, 2, \dots, n-1, 1\}$ خواهد بود و به این ترتیب دو دور همیتونی معرفی شد که یال‌های آن‌ها حاصل افزای یال‌های گراف اولیه ما است. اما اگر n زوج بود، در دور اول به شکل

$$\{1, 3, 2, 4, 5, \dots, n, 1\}$$

(اتصال دو جفت راس ۱-۳ و ۲-۴ و تمام رئوس به فاصله ۱ به جز ۱-۲ و ۳-۴)

و دور دوم به شکل

$$\{1, 2, n, n-2, n-4, \dots, 4, 3, 5, \dots, n-1, 1\}$$

(اتصال دو جفت راس ۱-۲ و ۳-۴ و تمام رئوس به فاصله ۲ به جز ۱-۳ و ۲-۴)

که در این حالت نیز این دو دور همیتونی شرایط مسئله را دارند پس حکم ثابت است.

سؤال ۸.۶.

گراف G گرافی است که در آن دورهای فرد، دو به دو حداقل در یک رأس مشترکند. کوچک‌ترین کران بالا عدد رنگی این گراف را بدست آورید.

پاسخ .

یک دور C را در نظر بگیرید. چونکه تمام دورهای فرد این گراف در حداقل یک رأس مشترکند گراف $G - C$ هیچ دور فردی ندارد و در نتیجه دو بخشی است، پس با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. دور فرد C را به گراف برمی‌گردانیم. دورهای فرد نیز با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی است پس در اشتراک این‌ها عدد رنگی گراف $\chi(G) = 3$ است.

نکات:

E.LVI : در حل سوالات باید توجه کرد تمامی حالات را دربرگیریم.

E.XLIX

پاسخ.

اگر گراف دور فرد نداشته باشد در این صورت گراف دوبخشی بوده و $\chi(G) \leq 2$ است. در غیر این صورت اگر گراف دور فرد داشته باشد دور فرد دلخواه C' را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه تمام دورهای فرد این گراف در حداقل یک رأس مشترکند پس از هر دور حداقل یک راس حذف می‌شود. گراف $G - C'$ هیچ دور فردی ندارد پس دو بخشی است. پس با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. هر دور فرد با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی است پس دور فرد C' را با ۳ رنگ متفاوت از رنگ‌های استفاده شده برای رنگ‌آمیزی $G - C'$ رنگ می‌کنیم. ممکن است بتوان یکی از دو رنگ استفاده شده برای گراف دو بخشی را برای رنگ‌آمیزی دور فرد دوباره استفاده کرد. سپس دور C' به همراه رنگ‌هایش را به گراف برمی‌گردانیم. پس یک رنگ‌آمیزی صحیح با پنج رنگ یا کمتر داریم. بنابراین $\chi(G) \leq 5$ است.

نکات:

E.LVII: توجه کنید سوال کوچک‌ترین کران بالا را خواسته است. در اینجا کوچک‌ترین بودن این مقدار ثابت نشده است.

پاسخ صحیح.

دو حالت داریم:

۱. حالتی که گراف دور فرد نداشته باشد: در این صورت با استناد به قضیه «گرافی که دور فرد ندارد، دو بخشی است.» نتیجه می‌گیریم گراف دوبخشی بوده و $\chi(G) \leq 2$ است.

۲. حالتی که گراف دور فرد داشته باشد: دور فرد دلخواه C' را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه تمام دورهای فرد این گراف در حداقل یک رأس مشترکند گراف $G - C'$ هیچ دور فردی ندارد و در نتیجه دو بخشی است. پس با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است و همچنین بدیهی است که هر دور فرد با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی است پس دور فرد C' را با حداکثر ۳ رنگ متفاوت از رنگ‌های استفاده شده برای رنگ‌آمیزی $G - C'$ رنگ می‌کنیم. توجه کنید که ممکن است بتوان یکی از دو رنگ استفاده شده برای گراف دو بخشی را برای رنگ‌آمیزی دور فرد دوباره استفاده کرد. بنابراین می‌توان این دو گراف را ادغام کرد و همچنان یک رنگ‌آمیزی صحیح با پنج رنگ یا کمتر داشت. (توجه کنید در حالت پیشینه باید ۳ رنگ متفاوت از دو رنگ استفاده شده برای $G - C'$ به کار برد.) بنابراین $\chi(G) \leq 5$ است.

برای اثبات کوچک‌ترین بودن این مقدار گراف K_5 را در نظر بگیرید که در آن همه دورهای فرد، دو به دو حداقل در یک راس مشترک هستند یعنی شرایط سوال برای آن برقرار است. می‌دانیم عدد رنگی گراف K_5 برابر ۵ است. پس کران بالا عدد رنگی گرافی با شرایط سوال بزرگ‌تر مساوی ۵ است.

در نهایت نتیجه می‌گیریم کوچک‌ترین کران بالا برابر ۵ است.

سؤال ۹.۶.

ثابت کنید مقدار ثابت در چندجمله‌ای رنگی صفر است.

پاسخ.

با توجه به این که اگر چندجمله‌ای رنگی را چندین بار تجزیه کنیم در نهایت به گراف مسیر یا گراف کامل می‌رسیم، و چندجمله‌ای رنگی این دو گراف برابر است با:

گراف کامل: $\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)$

گراف مسیر: $\lambda(\lambda - 1)^{n-1}$

مقدار ثابت در چندجمله‌ای هر دو گراف صفر است، پس مقدار ثابت در چندجمله‌ای رنگی صفر است.

نکات:

E.XLIX

پاسخ صحیح .

می‌دانیم چند جمله‌ای رنگی گراف G که به صورت $P(G, \lambda)$ نوشته می‌شود تعداد حالاتی است که گراف G را با λ رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد و این چندجمله‌ای باید برای هر λ و هر گرافی پاسخ صحیح و معناداری دهد. با توجه به این تعریف $P(G, 0)$ برابر صفر خواهد بود. اگر این چندجمله‌ای به صورت $P(G, \lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots$ باشد، پس با جایگذاری $\lambda = 0$ چندجمله‌ای نیز باید صفر شود؛ یعنی $c_0 = 0$.

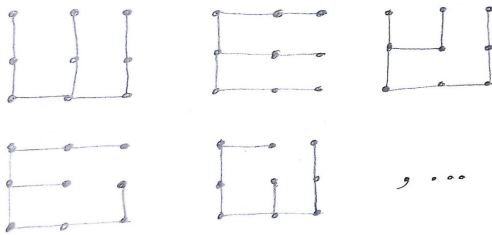
فصل ۷ : درخت

سؤال ۱.۷.

$9n^2$ رأس به شکل یک جدول $3n \times 3n$ قرار گرفته‌اند. می‌خواهیم تعدادی از آن‌ها را با یال‌هایی به رأس‌های مجاورشان (یکی از چهار جهت) وصل کنیم، به طوری که گراف نهایی یک درخت باشد (ریشه این درخت را چپ‌ترین رأس در پایین‌ترین ردیف در نظر بگیرید). به چند روش می‌توان یال‌ها را انتخاب کرد، به طوری که اگر یال‌ها را به سمت بالا و راست جهت‌دهی کنیم؛ از ریشه بتوان به همه رئوس رسید.

پاسخ .

در حالت کلی‌تر برای جدول $n \times n$ سوال را حل می‌کنیم. یک جدول 2×2 را در نظر بگیرید. واضح است برای این، ۲ درخت داریم. حال اگر جدول 3×3 داشته باشیم، مثل موارد زیر ۱۶ درخت متفاوت می‌توان کشید.



$$2^{1 \times 1} = 2$$

$$2^{2 \times 2} = 16$$

پس می‌توان این گونه برداشت کرد که از رابطه $2^{(n-1)(n-1)}$ پیروی می‌کنند. پس برای جدول $3n \times 3n$ داریم: $2^{(3n-1)(3n-1)}$

نکات:

E.XLVIII

پاسخ صحیح .

چون نمی‌توانیم به چپ و پایین حرکت کنیم پس برای رسیدن به رأس‌های پایین‌ترین ردیف تنها یک حالت وجود دارد (باید تمام یال‌های افقی رئوس پایین‌ترین ردیف به هم متصل باشند)، همچنین برای رسیدن به رأس‌های چپ‌ترین ستون نیز تنها یک حالت وجود دارد (باید تمام یال‌های عمودی رئوس چپ‌ترین ردیف به هم متصل باشند). تعداد رئوس باقیمانده نیز برابر است با: $(3n-1)(3n-1)$. دو حالت جهت دسترسی به این رئوس وجود دارد از طریق پایین و یا چپ که دقیقاً یکی از این دو مسیر باید باز باشد (اتصال رأس به یکی از دو رأس چپ یا پایین) پس در کل می‌شود: $2^{(3n-1)(3n-1)}$

سؤال ۲.۷.

در درخت $T(V, E)$ ، مجموع فواصل تمام رئوس T از هم را $dis(T)$ تعریف می‌کنیم. در هر مرحله اگر

$$\exists v, u, w \in V | ((v, u) \in E) \wedge ((v, w) \notin E) \wedge (dis(T'(V, E - (v, u) + (v, w))) < dis(T))$$

یال (v, u) را از درخت حذف می‌کنیم و یال (v, w) را اضافه می‌کنیم. واضح است که به دلیل نزولی بودن روند $dis(T)$ و مثبت بودن آن این مراحل پایان‌پذیر است. اثبات کنید درخت T با هر شرایط اولیه‌ای در مرحله آخر به یک ستاره تبدیل می‌شود. (۱۰)

پاسخ .

سوال را با ناوردایی حل می‌کنیم. مقدار ناوردا مجموع فواصل تمام رئوس از هم است که طبق فرض سوال ناوردای کاهشی است. حال کافی است اثبات کنیم که کران پایین این ناوردا گراف ستاره است. اثبات: حکم را به کمک برهان خلف اثبات می‌کنیم، فرض کنید گراف ستاره کران پایین نباشد، در این صورت یال (v, u) و راس w وجود دارد که با انجام این فرایند روی آن‌ها $dis(T') < dis(T)$ باشد با توجه به تقارن میان یال‌ها در گراف ستاره تفاوتی ندارد که کدام را در نظر بگیریم. حال با انجام یک گام روی این راس، مسیری به طول ۳ در این گراف پدید می‌آید. برای $dis(T')$ داریم:

$$dis(T') = (n - 2)^2 + 1 + 2 + 3(n - 3)$$

اما:

$$dis(T) = (n - 1)^2 < (n - 2)(n + 1) = dis(T')$$

که این تناقض است، پس گراف ستاره کران پایین این ناوردا است و اثبات تمام است.

نکات:

E.LVIII : این که گراف ستاره یک کران پایین برای این ناوردا باشد شرط لازم است اما کافی نیست و برای اثبات حکم باید نشان داد که این گراف تنها کران پایین برای این ناوردا است.

E.LIX : حالت $n = 3$ بررسی نشده است.

N.LX : بهتر بود دلیل رسیدن به عبارت $dis(T')$ ذکر شود.

پاسخ صحیح .

از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض کنید درختی وجود دارد که ستاره نیست و نمی‌توان روی آن عمل جابجایی را انجام داد. این درخت را T می‌نامیم.

در درخت T حداقل یک مسیر شامل سه یال وجود دارد، یکی از این مسیرها را $abcd$ می‌نامیم. با حذف سه یال این مسیر، درخت به چهار مؤلفه همبندی تقسیم می‌شود. مؤلفه‌ای که شامل راس x است را با G_x نشان می‌دهیم. با توجه به تقارن بین دو راس c و b و بدون تغییر در کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که $n(G_b) \geq n(G_c)$. حال اگر در درخت T یال بین d و c را قطع کنیم و b را به d متصل کنیم اگر گراف جدید را T' بنامیم، داریم:

$$dis(T') = dis(T) - n(G_d)(n(G_b) + n(G_a)) + n(G_d)n(G_c)$$

(فواصل بین رئوس مؤلفه G_d با رئوس مؤلفه‌های G_a و G_b یک واحد کاهش یافته و فواصل بین رئوس دو مؤلفه G_c و G_d یک واحد افزایش یافته است.)

اما داریم:

$$n(G_b) \geq n(G_c) \rightarrow n(G_d)(n(G_b) + n(G_a) - n(G_c)) > 0 \\ \rightarrow dis(T) - n(G_d)(n(G_b) + n(G_a) - n(G_c)) < dis(T) \rightarrow dis(T') < dis(T)$$

که این خلاف فرض و تناقض است.

پس در نتیجه فرض خلف باطل و حکم اثبات شده است.