المدرسة العليا للأساتذة بفاس
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE FES

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Module: Mathématique 1

Chapitre 3: Calcul d’intégrale

Prof. Mohammed SRATI

Licence d’Éducation

Spécialité: Enseignement Primaire

30-11-2022

Sommaire

3. Calcul d'intégrale

- Primitive d'une Fonction
- Intégrale d'une Fonction Continue
- Propriétés de l'Intégrale Simple
- Méthodes pour calculer les intégrales classiques

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I ;, toute fonction F définie sur I telle que F est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I ;, toute fonction F définie sur I telle que F est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemples :

- La fonction $x \mapsto lnx + x^3 + x + 1$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + 3x^2 + 1$ sur $]0, +\infty[$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I ;, toute fonction F définie sur I telle que F est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemples :

- La fonction $x \mapsto lnx + x^3 + x + 1$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + 3x^2 + 1$ sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est une primitive de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Theorem

Soit I un intervalle réel et $x_0 \in I$ un réel.

- *Toute fonction réelle f continue sur I admet une primitive sur I.*

Theorem

Soit I un intervalle réel et $x_0 \in I$ un réel.

- *Toute fonction réelle f continue sur I admet une primitive sur I.*
- *Si f admet une primitive F sur I alors f admet une infinité de primitives sur I qui s'écrivent $F(x) + k$ avec k un réel quelconque.*

Theorem

Soit I un intervalle réel et $x_0 \in I$ un réel.

- *Toute fonction réelle f continue sur I admet une primitive sur I.*
- *Si f admet une primitive F sur I alors f admet une infinité de primitives sur I qui s'écrivent $F(x) + k$ avec k un réel quelconque.*
- *Si k est un réel quelconque et f une fonction réelle alors : il existe une seule et unique primitive de f sur I vérifiant : $F(x_0) = k$.*

Exemple

Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 3x^2 + 2x$ vérifiant : $F(1) = -3$.

Theorem

Soit I *un intervalle réel et* $x_0 \in I$ *un réel.*

- *Toute fonction réelle* f *continue sur* I *admet une primitive sur* I.
- *Si* f *admet une primitive* F *sur* I *alors* f *admet une infinité de primitives sur* I *qui s'écrivent* $F(x) + k$ *avec* k *un réel quelconque.*
- *Si* k *est un réel quelconque et* f *une fonction réelle alors : il existe une seule et unique primitive de* f *sur* I *vérifiant :* $F(x_0) = k$.

Exemple

Déterminer la primitive F *sur* $\mathbb{R}$ *de* $f(x) = 3x^2 + 2x$ *vérifiant :* $F(1) = -3$.
La fonction : $x \mapsto x^3 + x^2$ *est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$.

Theorem

Soit I *un intervalle réel et* $x_0 \in I$ *un réel.*

- *Toute fonction réelle* f *continue sur* I *admet une primitive sur* I.
- *Si* f *admet une primitive* F *sur* I *alors* f *admet une infinité de primitives sur* I *qui s'écrivent* $F(x) + k$ *avec* k *un réel quelconque.*
- *Si* k *est un réel quelconque et* f *une fonction réelle alors : il existe une seule et unique primitive de* f *sur* I *vérifiant :* $F(x_0) = k$.

Exemple

Déterminer la primitive F *sur* $\mathbb{R}$ *de* $f(x) = 3x^2 + 2x$ *vérifiant :* $F(1) = -3$.
La fonction : $x \mapsto x^3 + x^2$ *est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$. *Donc d'aprés ce qui précéde* $F(x) = x^3 + x^2 + k$, *calculons* k *?*

Theorem

Soit I *un intervalle réel et* $x_0 \in I$ *un réel.*

- *Toute fonction réelle* f *continue sur* I *admet une primitive sur* I.
- *Si* f *admet une primitive* F *sur* I *alors* f *admet une infinité de primitives sur* I *qui s'écrivent* $F(x) + k$ *avec* k *un réel quelconque.*
- *Si* k *est un réel quelconque et* f *une fonction réelle alors : il existe une seule et unique primitive de* f *sur* I *vérifiant :* $F(x_0) = k$.

Exemple

Déterminer la primitive F *sur* $\mathbb{R}$ *de* $f(x) = 3x^2 + 2x$ *vérifiant :* $F(1) = -3$.
La fonction : $x \mapsto x^3 + x^2$ *est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$. *Donc d'aprés ce qui précéde* $F(x) = x^3 + x^2 + k$, *calculons* k *? D'aprés la condition de l'éxercice* $F(1) = -3$ *on écrit alors :* $1^3 + 1^2 + k = -3$.

Theorem

Soit I un intervalle réel et $x_0 \in I$ un réel.

- *Toute fonction réelle f continue sur I admet une primitive sur I.*
- *Si f admet une primitive F sur I alors f admet une infinité de primitives sur I qui s'écrivent $F(x) + k$ avec k un réel quelconque.*
- *Si k est un réel quelconque et f une fonction réelle alors : il existe une seule et unique primitive de f sur I vérifiant : $F(x_0) = k$.*

Exemple

Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 3x^2 + 2x$ vérifiant : $F(1) = -3$.
La fonction : $x \mapsto x^3 + x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donc d'aprés ce qui précéde $F(x) = x^3 + x^2 + k$, calculons k ? D'aprés la condition de l'éxercice $F(1) = -3$ on écrit alors : $1^3 + 1^2 + k = -3$.
Par conséquent : $2 + k = -3$ d'oú : $k = -5$. La primitive qu'on cherche est $F(x) = x^3 + x^2 - 5$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle réel I et k un réel.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle réel I et k un réel.

- *Si F et G sont les primitives sur I de f et g respectivement, alors : $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I.*

Propriétés

Soient f *et* g *deux fonctions continues sur un intervalle réel* I *et* k *un réel.*

- *Si* F *et* G *sont les primitives sur* I *de* f *et* g *respectivement, alors :* $F+G$ *est une primitive de la fonction* $f+g$ *sur* I.
- *Si* F *est une primitive de* f *sur* I *alors :* kF *est une primitive de la fonction* kf *sur* I.

Exemple

(a) *Considérons la fonction* $h(x) = \frac{-1}{x^2} + sinx$ *cherchons une primitive de la fonction* h *sur* $[1, 5]$.

Exemple

(a) *Considérons la fonction* $h(x) = \dfrac{-1}{x^2} + sinx$ *cherchons une primitive de la fonction* h *sur* $[1,5]$.
La fonction $F(x) = \dfrac{1}{x}$ *une primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ *sur* $[1,5]$.

Exemple

(a) *Considérons la fonction* $h(x) = \dfrac{-1}{x^2} + sinx$ *cherchons une primitive de la fonction* h *sur* $[1,5]$.
La fonction $F(x) = \dfrac{1}{x}$ *une primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ *sur* $[1,5]$.
La fonction $G(x) = -cosx$ *est une primitive de la fonction* $x \mapsto sinx$ *sur* $[1,5]$.

Exemple

(a) *Considérons la fonction* $h(x) = \frac{-1}{x^2} + sinx$ *cherchons une primitive de la fonction* h *sur* $[1,5]$.
La fonction $F(x) = \frac{1}{x}$ *une primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ *sur* $[1,5]$.
La fonction $G(x) = -cosx$ *est une primitive de la fonction* $x \mapsto sinx$ *sur* $[1,5]$.
donc : $F(x) + G(x) = \frac{1}{x} - cosx$ *est une primitive de la fonction* h *sur* $[1,5]$.

Exemple

(a) *Considérons la fonction* $h(x) = \dfrac{-1}{x^2} + sinx$ *cherchons une primitive de la fonction* h *sur* $[1,5]$.

La fonction $F(x) = \dfrac{1}{x}$ *une primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ *sur* $[1,5]$.

La fonction $G(x) = -cosx$ *est une primitive de la fonction* $x \mapsto sinx$ *sur* $[1,5]$.

donc : $F(x) + G(x) = \dfrac{1}{x} - cosx$ *est une primitive de la fonction* h *sur* $[1,5]$.

(b) *Cherchons une primitive de la fonction* $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{1+x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exemple

(a) *Considérons la fonction* $h(x) = \dfrac{-1}{x^2} + sinx$ *cherchons une primitive de la fonction* h *sur* $[1,5]$.
La fonction $F(x) = \dfrac{1}{x}$ *une primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ *sur* $[1,5]$.
La fonction $G(x) = -cosx$ *est une primitive de la fonction* $x \mapsto sinx$ *sur* $[1,5]$.
donc : $F(x) + G(x) = \dfrac{1}{x} - cosx$ *est une primitive de la fonction* h *sur* $[1,5]$.

(b) *Cherchons une primitive de la fonction* $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{1+x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$.
On sait que : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *est la dérivée de la fonction* $arctg$

Exemple

(a) *Considérons la fonction* $h(x) = \frac{-1}{x^2} + sinx$ *cherchons une primitive de la fonction* h *sur* $[1, 5]$.
La fonction $F(x) = \frac{1}{x}$ *une primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ *sur* $[1, 5]$.
La fonction $G(x) = -cosx$ *est une primitive de la fonction* $x \mapsto sinx$ *sur* $[1, 5]$.
donc : $F(x) + G(x) = \frac{1}{x} - cosx$ *est une primitive de la fonction* h *sur* $[1, 5]$.

(b) *Cherchons une primitive de la fonction* $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{1 + x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$.
On sait que : $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$ *est la dérivée de la fonction* $arctg$ *donc :*
$F(x) = \sqrt{3}arctg$ *est une primitive de la fonction* f *sur* $\mathbb{R}$.

Intégrale d'une Fonction Continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\ b]$ de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $[a,\ b]$. On appelle intégrale de f de a à b, le réel noté $\int_a^b f(t)dt$ déni par :

Intégrale d'une Fonction Continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\ b]$ de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $[a,\ b]$. On appelle intégrale de f de a à b, le réel noté $\int_a^b f(t)dt$ déni par :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)\ .$$

Exemple

Calculons l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^5 \frac{-1}{t^2}dt.$

Exemple

Calculons l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^5 \frac{-1}{t^2}dt$. *La fonction intégrée est :* $f(t) = \dfrac{-1}{t^2}$ *et on sait que* $t \mapsto \dfrac{-1}{t^2}$ *est la dérivée de la fonction* $t \mapsto \dfrac{1}{t}$,

Exemple

Calculons l'intégrale suivante : $\int_1^5 \frac{-1}{t^2}dt$. *La fonction intégrée est :* $f(t) = \frac{-1}{t^2}$ *et on sait que* $t \mapsto \frac{-1}{t^2}$ *est la dérivée de la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t}$, *d'oú :* $F(t) = \frac{1}{t}$ *est une primitive de la fonction* f *sur* $[1, 5]$.

Exemple

Calculons l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^5 \frac{-1}{t^2}dt$*. La fonction intégrée est :* $f(t) = \dfrac{-1}{t^2}$ *et on sait que* $t \mapsto \dfrac{-1}{t^2}$ *est la dérivée de la fonction* $t \mapsto \dfrac{1}{t}$*, d'oú :* $F(t) = \dfrac{1}{t}$ *est une primitive de la fonction* f *sur* $[1, 5]$*.*
En appliquant la définition précédente on trouve :

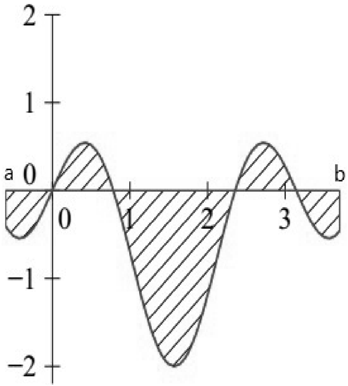
$$\int_1^5 \frac{-1}{t^2}dt = \left[\frac{1}{t}\right]_1^5 = F(5) - F(1) = \frac{1}{5} - 1 = \frac{-4}{5}$$

Interprétation Géométrique et aire

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On appelle intégrale de a à b de la fonction f la mesure de l'aire de la surface de partie hachurée du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ et la courbe C_f.

Interprétation Géométrique et aire

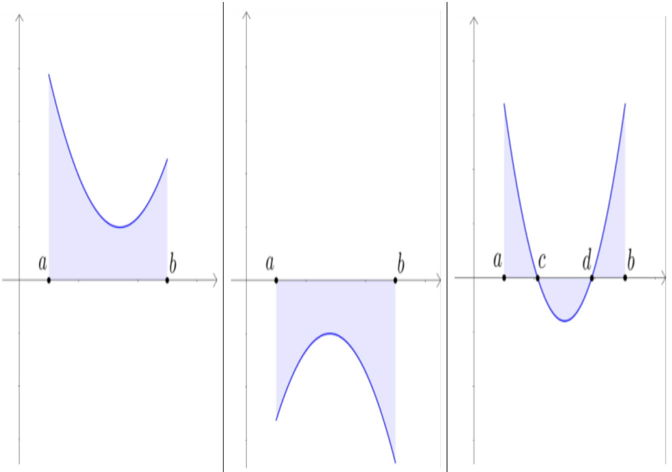
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On appelle intégrale de a à b de la fonction f la mesure de l'aire de la surface de partie hachurée du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe C_f.



Une aire est une mesure de surface qui est toujours **positive**.

Une aire est une mesure de surface qui est toujours **positive**. Nous avons jusque à présent rencontré des fonctions dont le graphe était situé au-dessus de l'axe des x. Pour ces cas, on a vu que l'intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$ était positive (l'adjectif définie indique que les bornes a et b ont des valeurs fixées). La situation est différente dans le cas où la courbe se situe sous l'axe des ox.

Une aire est une mesure de surface qui est toujours **positive**. Nous avons jusque à présent rencontré des fonctions dont le graphe était situé au-dessus de l'axe des x. Pour ces cas, on a vu que l'intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$ était positive (l'adjectif définie indique que les bornes a et b ont des valeurs fixées). La situation est différente dans le cas où la courbe se situe sous l'axe des ox. En effet, dans ces cas, la valeur de $f(x)$ prise pour calculer la hauteur des rectangles est négative et le résultat que nous calculons est **l'opposé** de l'aire des rectangles concernés. La relation entre l'aire A et la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est donnée ci-dessous :



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la surface délimitée par la parabole $x \mapsto x^2$, *pour* $x \in [-1, 1]$.

Propriétés de l'Intégrale Simple

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\ b]$. Alors :

Propriétés de l'Intégrale Simple

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\ b]$. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$

Propriétés de l'Intégrale Simple

Propriétés

Soit f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,\ b]$*. Alors :*

- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
- $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0.$

Propriétés de l'Intégrale Simple

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\ b]$. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
- $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0.$

Propriétés

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,\ b]$ et α un réel. Alors,

Propriétés de l'Intégrale Simple

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\ b]$. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
- $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0.$

Propriétés

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,\ b]$ et α un réel. Alors,

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Propriétés de l'Intégrale Simple

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\ b]$. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
- $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0.$

Propriétés

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,\ b]$ et α un réel. Alors,

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

$$\int_a^b (\alpha f(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$$

Propriétés

(Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I.
Alors,

Propriétés

(Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I.
Alors,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemples :

1) Calculer $J = \int_{-2}^{2} |t-1|dt.$

Propriétés

(Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I.
Alors,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemples :

1) Calculer $J = \int_{-2}^{2} |t-1|dt$. En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned} J = \int_{-2}^{2} |t-1|dt &= \int_{-2}^{1} |t-1|dt + \int_{1}^{2} |t-1|dt \\ &= \int_{-2}^{1} (1-t)dt + \int_{1}^{2} (t-1)dt \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{1}^{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

2) Calculer $I = \displaystyle\int_0^4 |t^2 - 3t + 2| dt.$

2) Calculer $I = \int_0^4 |t^2 - 3t + 2|dt.$

Pour calculer cette intégrale il faut trouver une primitive de la fonction intégrée et pour cela il faut enlever la valeur absolue ! ! !

2) Calculer $I = \displaystyle\int_0^4 |t^2 - 3t + 2| dt$.

Pour calculer cette intégrale il faut trouver une primitive de la fonction intégrée et pour cela il faut enlever la valeur absolue ! ! !

Pour ce fait nous allons étudier le signe de la fonction $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ sur $[0, 4]$.

On commence par résoudre l'équation $t^2 - 3t + 2 = 0$,

2) Calculer $I = \int_0^4 |t^2 - 3t + 2| dt$.

Pour calculer cette intégrale il faut trouver une primitive de la fonction intégrée et pour cela il faut enlever la valeur absolue ! ! !

Pour ce fait nous allons étudier le signe de la fonction $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ sur $[0, 4]$.

On commence par résoudre l'équation $t^2 - 3t + 2 = 0$, les solutions sont 1 et 2 et en donnant le tableau de signe du polynôme $t^2 - 3t + 2$ on trouve que

2) Calculer $I = \int_0^4 |t^2 - 3t + 2| dt$.

Pour calculer cette intégrale il faut trouver une primitive de la fonction intégrée et pour cela il faut enlever la valeur absolue ! ! !

Pour ce fait nous allons étudier le signe de la fonction $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ sur $[0, 4]$.

On commence par résoudre l'équation $t^2 - 3t + 2 = 0$, les solutions sont 1 et 2 et en donnant le tableau de signe du polynôme $t^2 - 3t + 2$ on trouve que

$t^2 - 3t + 2 \leq 0$ sur $[1, 2]$.

$t^2 - 3t + 2 \geq 0$ sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

2) Calculer $I = \displaystyle\int_0^4 |t^2 - 3t + 2| dt.$

Pour calculer cette intégrale il faut trouver une primitive de la fonction intégrée et pour cela il faut enlever la valeur absolue ! ! !

Pour ce fait nous allons étudier le signe de la fonction $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ sur $[0,4]$.

On commence par résoudre l'équation $t^2 - 3t + 2 = 0$, les solutions sont 1 et 2 et en donnant le tableau de signe du polynôme $t^2 - 3t + 2$ on trouve que

$t^2 - 3t + 2 \leq 0$ sur $[1,2]$.

$t^2 - 3t + 2 \geq 0$ sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

Comme le polynôme change de signe sur $[0,4]$ et que $[0,4] = [0,1] \cup [1,2] \cup [2,4]$, sur chaque intérvalle des trois la fonction intégrée aura un signe constant ! !. On écrit alors :

$$I = \int_0^4 |t^2 - 3t + 2| dt = \int_0^1 (t^2 - 3t + 2) dt + \int_1^2 -(t^2 - 3t + 2) dt + \int_2^4 (t^2 - 3t + 2) dt$$

et en calculons une primitive pour chaque intégrale on trouve la valeur de l'intégrale. Le calcul est simple je vous laisse le soin de le faire.

Propriétés

Si f *et* g *sont deux fonctions continues sur* $[a,\ b]$.

Propriétés

Si f *et* g *sont deux fonctions continues sur* $[a,\ b]$.

$\bullet f \geq 0$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0.$

Propriétés

Si f *et* g *sont deux fonctions continues sur* $[a,\ b]$.

$\bullet f \geq 0$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0.$

$\bullet f \leq g$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$

Propriétés

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,\ b]$.

•$f \geq 0$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0.$

•$f \leq g$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$

•$\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$

Theorem

Soit f une fonction réelle définie sur $[a,\ b]$.

Propriétés

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,\ b]$.

•$f \geq 0$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq 0.$

•$f \leq g$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$

•$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$

Theorem

Soit f une fonction réelle définie sur $[a,\ b]$.

- *Si* $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,\ b]$ *alors :* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Propriétés

Si f *et* g *sont deux fonctions continues sur* $[a,\ b]$.

$\bullet f \geq 0$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

$\bullet f \leq g$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

$\bullet \left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.

Theorem

Soit f *une fonction réelle définie sur* $[a,\ b]$.

- *Si* $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,\ b]$ *alors :* $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
- *Si* $|f(x)| \leq M\ \forall x \in [a,\ b]$ *alors :* $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq M(b-a)$.

Propriétés

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,\ b]$.

$\bullet f \geq 0$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0.$

$\bullet f \leq g$ *sur* $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$

$\bullet \left| \displaystyle\int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$

Theorem

Soit f une fonction réelle définie sur $[a,\ b]$.

- *Si* $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,\ b]$ *alors :* $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
- *Si* $|f(x)| \leq M\ \forall x \in [a,\ b]$ *alors :* $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)dt \right| \leq M(b-a).$

Preuve :

• Si $m \leq f(x) \leq M$, la double inégalité est conservée par passage au signe intégrale d'aprés la Propriétés 1.5 ci-dessus et on a :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Preuve :

• Si $m \leq f(x) \leq M$, la double inégalité est conservée par passage au signe intégrale d'aprés la Propriétés 1.5 ci-dessus et on a :

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx.$$

D'une part :

$$\int_a^b mdx = m\int_a^b 1.dx = m[1]_a^b = m.(b-a)$$

(car : m est une constante).

Preuve :

• Si $m \leq f(x) \leq M$, la double inégalité est conservée par passage au signe intégrale d'aprés la Propriétés 1.5 ci-dessus et on a :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

D'une part :

$$\int_a^b m dx = m \int_a^b 1.dx = m[1]_a^b = m.(b-a)$$

(car : m est une constante).
de même :

$$\int_a^b M dx = M. \int_a^b 1.dx = M[1]_a^b = M.(b-a)$$

(car : M est une constante). Finalement on trouve :

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M.(b-a)$$

• Pour démontrer le deuxiéme résultat de ce Théorème on va faire appelle une fois de plus *à* la propriétés 1.5 ci-dessus :

• Pour démontrer le deuxiéme résultat de ce Théorème on va faire appelle une fois de plus *à* la propriétés 1.5 ci-dessus :

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

et d'autre on a :

• Pour démontrer le deuxiéme résultat de ce Théorème on va faire appelle une fois de plus *à* la propriétés 1.5 ci-dessus :

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

et d'autre on a :

$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, \ b] \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b Mdx = M(b-a)$$

• Pour démontrer le deuxiéme résultat de ce Théorème on va faire appelle une fois de plus *à* la propriétés 1.5 ci-dessus :

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

et d'autre on a :

$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, \ b] \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b Mdx = M(b-a)$$

donc :

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a).$$

Le théorème est démontré.

Theorem

(Théorème de la moyenne) Si f *est une fonction réelle continue sur* $[a.b]$*, alors :* $\exists c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$

$m := f(c)$ *est appelé valeur moyenne de f sur l’intervalle* $[a.b]$*.*

Theorem

(Théorème de la moyenne) Si f *est une fonction réelle continue sur* $[a.b]$*, alors :* $\exists c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$

$m := f(c)$ *est appelé valeur moyenne de f sur l'intervalle* $[a.b]$*.*

Exemple

Soit $f(x) = 3x - 2$*, déterminons la moyenne de* f *sur* $[1,\ 4]$*.*

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{(4-1)} \int_1^4 3x - 2dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^4 \\ &= 5,5 \end{aligned}$$

Or $f(1) = 1$ *et* $f(4) = 10$*.* $5,5$ *est la moyenne entre* 1 *et* 10*.*

Theorem

Si f *est continue sur* $[a,\ b]$ *alors :*

la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *est dérivable sur* $[a,\ b]$. *De plus :*

$F'(x) = f(x), \forall x \in [a,\ b].$

Exemple

Soit $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ *définie sur* $[1, 5]$. *Chercher la primitive de* f *définie sur* $[1, 5]$ *et qui s'annule au point* 1.

Exemple

Soit $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ *définie sur* $[1,5]$. *Chercher la primitive de* f *définie sur* $[1,5]$ *et qui s'annule au point* 1. *D'aprés la définition ci-dessus la primitive de* f *sur* $[1,5]$ *qui s'annule au point* 1 *est donnée par :*

Exemple

Soit $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ *définie sur* $[1,5]$. *Chercher la primitive de* f *définie sur* $[1,5]$ *et qui s'annule au point* 1. *D'aprés la définition ci-dessus la primitive de* f *sur* $[1,5]$ *qui s'annule au point* 1 *est donnée par :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{t^2+1} dt, \ \forall x \in [1,5]$$

Exemple

Soit $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ *définie sur* $[1,5]$. *Chercher la primitive de* f *définie sur* $[1,5]$ *et qui s'annule au point* 1. *D'aprés la définition ci-dessus la primitive de* f *sur* $[1,5]$ *qui s'annule au point* 1 *est donnée par :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{t^2+1}dt, \ \forall x \in [1,5]$$

Et :

$$\int_1^x \frac{t}{t^2+1}dt = [\frac{1}{2}ln(t^2+1)]_1^x = \frac{1}{2}(ln(x^2+1) - ln(2))$$

Exemple

Soit $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ *définie sur* $[1,5]$. *Chercher la primitive de* f *définie sur* $[1,5]$ *et qui s'annule au point* 1. *D'aprés la définition ci-dessus la primitive de* f *sur* $[1,5]$ *qui s'annule au point* 1 *est donnée par :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{t^2+1}dt, \ \forall x \in [1,5]$$

Et :

$$\int_1^x \frac{t}{t^2+1}dt = [\frac{1}{2}ln(t^2+1)]_1^x = \frac{1}{2}(ln(x^2+1) - ln(2))$$

D'oú : $F(x) = ln(x^2+1) - ln(2)$ *,* $\forall x \in [1,5]$ *(effectivement* $F(1) = 0$*). De plus d'aprés le théorème précédent on a :* $F'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\forall x \in [1,5]$.

Méthodes pour calculer les intégrales classiques

En générale il ya 3 principales méthodes pour calculer une intégrale classique :

Méthodes pour calculer les intégrales classiques

En générale il ya 3 principales méthodes pour calculer une intégrale classique :

• Méthode de la primitive.

Méthodes pour calculer les intégrales classiques

En générale il ya 3 principales méthodes pour calculer une intégrale classique :

- Méthode de la primitive.
- Méthode d'intégration par parties.

Méthodes pour calculer les intégrales classiques

En générale il ya 3 principales méthodes pour calculer une intégrale classique :

- Méthode de la primitive.
- Méthode d'intégration par parties.
- Méthode de changement de variable.

Theorem

(Théorème fondamentale de l'intégration)
Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ et F une primitive de f sur $[a,\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)\ .$$

Exemple

Calculons les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1}dt$ *et* $J = \int_1^2 \frac{1}{t}dt$.

Exemple

Calculons les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1}dt$ *et* $J = \int_1^2 \frac{1}{t}dt$.

$$I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1}dt = 5\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt,$$

Exemple

Calculons les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1} dt$ *et* $J = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$.

$I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1} dt = 5 \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$, *or on sait que* $arctg'(t) = \frac{1}{t^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exemple

Calculons les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1} dt$ *et* $J = \int_1^2 \frac{1}{t} dt.$

$I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1} dt = 5 \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$*, or on sait que* $arctg'(t) = \frac{1}{t^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$*. Donc :*

$$I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1} dt = 5[arctg(t)]_0^1 = 5(arctg(1) - arctg(0)) = \frac{5\pi}{4}$$

(car : $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ *et* $arctg(0) = 0.$*)*

Pour l'intégrale J*, on sait que :* $ln'(t) = \frac{1}{t}$ *sur* $]0, +\infty[$*,*

Exemple

Calculons les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1} dt$ *et* $J = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$.

$I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1} dt = 5 \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$, *or on sait que* $arctg'(t) = \frac{1}{t^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$. *Donc :*

$$I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1} dt = 5[arctg(t)]_0^1 = 5(arctg(1) - arctg(0)) = \frac{5\pi}{4}$$

(car : $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ *et* $arctg(0) = 0$.*)*

Pour l'intégrale J, *on sait que :* $ln'(t) = \frac{1}{t}$ *sur* $]0, +\infty[$, *donc* $t \mapsto ln(t)$ *c'est une primitive de* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *sur* $[1, 2]$, *donc :*

Exemple

Calculons les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1}dt$ *et* $J = \int_1^2 \frac{1}{t}dt.$

$I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1}dt = 5\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$*, or on sait que* $arctg'(t) = \frac{1}{t^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$*. Donc :*

$$I = \int_0^1 \frac{5}{t^2+1}dt = 5[arctg(t)]_0^1 = 5(arctg(1) - arctg(0)) = \frac{5\pi}{4}$$

(car : $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ *et* $arctg(0) = 0.$*)*

Pour l'intégrale J*, on sait que :* $ln'(t) = \frac{1}{t}$ *sur* $]0, +\infty[$*, donc* $t \mapsto ln(t)$ *c'est une primitive de* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *sur* $[1, 2]$*, donc :*

$$J = \int_1^2 \frac{1}{t}dt = [ln(t)]_1^2 = ln(2) - ln(1) = ln(2)$$

car $ln(1) = 0.$

Primitives des Fonctions Usuelles

1. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + \text{cte}.$
2. $\displaystyle\int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)} + \text{cte}.$
3. $\displaystyle\int u'(x)u^{\alpha}(x)dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + \text{cte}, \alpha \neq -1.$
4. $\displaystyle\int u'(x)\cos(u(x))dx = \sin(u(x)) + \text{cte}.$
5. $\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))dx = -\cos(u(x)) + \text{cte}.$
6. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}dx = \arctan(u(x)) + \text{cte}.$
7. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}dx = \arcsin(u(x)) + \text{cte}.$
8. $\displaystyle\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}dx = \arccos(u(x)) + \text{cte}.$

Theorem

Soient f *et* g *deux fonctions de* C^1 *sur un intérvalle* $[a,\ b]$*. On a l'égalité suivante :*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Theorem

Soient f et g deux fonctions de C^1 sur un intérvalle $[a,\ b]$. On a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exemples :

Calculer en utilisant une intégration par parties les intégrales qui suivent :
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$ et $\displaystyle\int_1^3 xe^{(2x)}dx$.

Theorem

Soient f et g deux fonctions de C^1 sur un intérvalle $[a,\ b]$. On a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exemples :

Calculer en utilisant une intégration par parties les intégrales qui suivent :

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$ et $\displaystyle\int_1^3 xe^{(2x)}dx$.

- Calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$

Theorem

Soient f et g deux fonctions de C^1 sur un intérvalle $[a,\ b]$. On a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exemples :

Calculer en utilisant une intégration par parties les intégrales qui suivent :
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$ et $\displaystyle\int_1^3 xe^{(2x)}dx$.

• Calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(sinx)'dx = [xsinx]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxdx = \frac{\pi}{3}sin(\frac{\pi}{3}) - [-cosx]_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Theorem

Soient f et g deux fonctions de C^1 sur un intérvalle $[a,\ b]$. On a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exemples :

Calculer en utilisant une intégration par parties les intégrales qui suivent :
$\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$ et $\int_1^3 xe^{(2x)}dx.$

• Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(sinx)'dx = [xsinx]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxdx = \frac{\pi}{3}sin(\frac{\pi}{3}) - [-cosx]_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

En effectuant les calculs nécéssaires on trouve :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x.cosxdx = \frac{1}{2}[\sqrt{3}\frac{\pi}{3} - 1]$$

- Calculons $\int_1^3 xe^{(2x)}dx$:

- Calculons $\int_1^3 xe^{(2x)}dx$:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x.e^{(2x)}dx &= \int_1^3 x.(\frac{1}{2}e^{(2x)})'dx \\ &= [x.\frac{1}{2}e^{(2x)}]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}e^{(2x)}dx \\ &= [x\frac{1}{2}e^{(2x)}]_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 e^{(2x)}dx.\end{aligned}$$

- Calculons $\int_1^3 xe^{(2x)}dx$:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x.e^{(2x)}dx &= \int_1^3 x.(\frac{1}{2}e^{(2x)})'dx \\ &= [x.\frac{1}{2}e^{(2x)}]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}e^{(2x)}dx \\ &= [x\frac{1}{2}e^{(2x)}]_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 e^{(2x)}dx.\end{aligned}$$

Aprés calcul on trouve :

$$\int_1^3 xe^{(2x)}dx = [\frac{3}{2}e^{(6)} - \frac{1}{2}e^{(2)}] - \frac{1}{4}[e^{(6)} - e^{(2)}]$$

• Calculons $\int_1^3 xe^{(2x)}dx$:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x.e^{(2x)}dx &= \int_1^3 x.(\frac{1}{2}e^{(2x)})'dx\\ &= [x.\frac{1}{2}e^{(2x)}]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}e^{(2x)}dx\\ &= [x\frac{1}{2}e^{(2x)}]_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 e^{(2x)}dx.\end{aligned}$$

Aprés calcul on trouve :

$$\int_1^3 xe^{(2x)}dx = [\frac{3}{2}e^{(6)} - \frac{1}{2}e^{(2)}] - \frac{1}{4}[e^{(6)} - e^{(2)}]$$

Finalement : $\int_1^3 xe^{(2x)}dx = \frac{5}{4}e^{(6)} - \frac{1}{4}e^{(2)}$.

Méthode de changement de variable

Theorem

Soient $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : [\alpha,\ \beta] \to [a,\ b]$ *une fonction de classe* C^1 *avec* $\varphi(\alpha) = a$ *et* $\varphi(\beta) = b$. *Alors*

Méthode de changement de variable

Theorem

Soient $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : [\alpha,\ \beta] \to [a,\ b]$ *une fonction de classe* C^1 *avec* $\varphi(\alpha) = a$ *et* $\varphi(\beta) = b$*. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

La transformation $x = \varphi(t)$ *s'appelle changement de variable.*

Méthode de changement de variable

Theorem

Soient $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha,\ \beta] \to [a,\ b]$ une fonction de classe C^1 avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

La transformation $x = \varphi(t)$ s'appelle changement de variable.

Exemples :

Moyennant un changement de variable calculer l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^3 \frac{1}{t^2+3}dt$$

D'abord on va commencer par factoriser par 3 au niveau du dénominateur :

$$K = \int_0^3 \frac{1}{t^2+3} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{1}{\frac{t^2}{3}+1} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1} dt.$$

D'abord on va commencer par factoriser par 3 au niveau du dénominateur :

$$K = \int_0^3 \frac{1}{t^2+3}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{\frac{t^2}{3}+1}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}dt.$$

Le but c'est de faire apparaître la dérivée de la fonction $arctg$. D'aprés l'expression obtenue le changement de variable est le suivant : $X = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$. Pour calculer notre intégrale on va suivre les étapes suivantes :

D'abord on va commencer par factoriser par 3 au niveau du dénominateur :

$$K = \int_0^3 \frac{1}{t^2+3}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{\frac{t^2}{3}+1}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}dt.$$

Le but c'est de faire apparaître la dérivée de la fonction $arctg$. D'aprés l'expression obtenue le changement de variable est le suivant : $X = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$. Pour calculer notre intégrale on va suivre les étapes suivantes :

• Etape.1 : Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale :

Si : t $= 0$ alors : $X = \dfrac{0}{\sqrt{3}} = 0$

Si : t $= 3$ alors : $X = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

D'abord on va commencer par factoriser par 3 au niveau du dénominateur :

$$K = \int_0^3 \frac{1}{t^2+3}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{\frac{t^2}{3}+1}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}dt.$$

Le but c'est de faire apparaître la dérivée de la fonction $arctg$. D'aprés l'expression obtenue le changement de variable est le suivant : $X = \frac{t}{\sqrt{3}}$. Pour calculer notre intégrale on va suivre les étapes suivantes :

• Etape.1 : Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale :

Si : t $= 0$ alors : $X = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$

Si : t $= 3$ alors : $X = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

• Etape.2 : Calculer l'élément d'intégration dt en fonction de dX :

$$X = \frac{t}{\sqrt{3}} \Rightarrow dX = \frac{dt}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \sqrt{3}dX$$

• Etape.3 : Exprimer l'intégrale moyennant les nouvelles valeurs calculées :

$$K = \int_0^3 \frac{1}{t^2+3}dt = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+1}\sqrt{3}dX = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+1}dX.$$

• Etape.3 : Exprimer l'intégrale moyennant les nouvelles valeurs calculées :

$$K = \int_0^3 \frac{1}{t^2+3}dt = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+1}\sqrt{3}dX = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+1}dX.$$

Par conséquent : $K = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+1}.dX = \frac{\sqrt{3}}{3}[arctgX]_0^{\sqrt{3}}.$

• Etape.3 : Exprimer l'intégrale moyennant les nouvelles valeurs calculées :

$$K = \int_0^3 \frac{1}{t^2+3} dt = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+1}\sqrt{3} dX = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+1} dX.$$

Par conséquent : $K = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+1} .dX = \frac{\sqrt{3}}{3}[arctgX]_0^{\sqrt{3}}$.

Finalement : $K = \frac{\sqrt{3}}{3}[arctg(\sqrt{3}) - arctg(0)] = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{3}$.

Car $arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ et $arctg(0) = 0$.