المدرسة العليا للأساتذة بفاس
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE FES

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Module: Mathématique 1

Chapitre 2: Fonctions numériques

Prof. Mohammed SRATI

Licence d'Éducation

Spécialité: Enseignement Primaire

14-11-2022

Sommaire

2. Fonctions numériques.

Définition

Une fonction numérique est une relation mathématique entre deux ensembles numériques (un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée) tel qu'à chaque élément de l'ensemble de départ, on fait correspondre au plus (Soit un seul élément ou aucun élément.) un élément de l'ensemble d'arrivée.

Définition

Une fonction numérique est une relation mathématique entre deux ensembles numériques (un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée) tel qu'à chaque élément de l'ensemble de départ, on fait correspondre au plus (Soit un seul élément ou aucun élément.) un élément de l'ensemble d'arrivée.
On note la fonction f d'une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, comme suit :

$$\begin{aligned} f : I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

où x désigne la variable de f (ou l'antécédent de $y = f(x)$) et $f(x)$ est l'image de x par f ($f(x)$ est unique si elle existe).

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \}.$$

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \}.$$

Exemples :

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \} .$$

Exemples :

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \}.$$

Exemples :

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \} .$$

Exemples :

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \}.$$

Exemples :

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \textit{ existe } \}.$$

Exemples :

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $D_f = [-1, 1]$

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \}.$$

Exemples :

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $D_f = [-1, 1]$
- La fonction $f(x) = sin(x)$ est définie sur

Définition

Le domaine de définition de f (ou l'ensemble de définition de f) est l'ensemble qui regroupe tous les réels admettant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \}.$$

Exemples :

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $D_f = [-1, 1]$
- La fonction $f(x) = sin(x)$ est définie sur tout $D_f = \mathbb{R}$.

Definition

La courbe représentative de f (ou le graphe de f) est l'ensemble des couples de réels de la forme $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f :

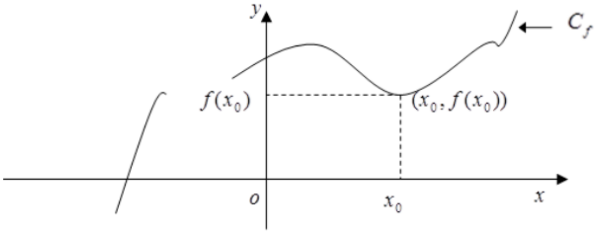
$$C_f = \left\{(x, f(x)/x \in D_f)\right\} \text{ (note aussi } G_f).$$

Definition

La courbe représentative de f (ou le graphe de f) est l'ensemble des couples de réels de la forme $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f :

$$C_f = \left\{(x, f(x)/x \in D_f)\right\} \text{ (note aussi } G_f).$$

La représentation graphique de la fonction f est schématisée géométriquement dans le plan cartésien (xoy) sous forme d'une courbe C_f d'équation : $y = f(x)$.



Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ***Fonction paire***. *f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.*

Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ***Fonction paire***. *f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.*
- ***Fonction impaire***. *f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.*

Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ***Fonction paire****. f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.*
- ***Fonction impaire****. f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.*
- ***Périodicité****. f est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ (appelé période) tel que $\forall x \in D_f$ on a : $x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.*

Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ***Fonction paire****. f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.*
- ***Fonction impaire****. f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.*
- ***Périodicité****. f est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ (appelé période) tel que $\forall x \in D_f$ on a : $x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.*

Exemples :

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est paire.

Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ***Fonction paire.*** *f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.*
- ***Fonction impaire.*** *f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.*
- ***Périodicité.*** *f est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ (appelé période) tel que $\forall x \in D_f$ on a : $x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.*

Exemples :

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est impaire.

Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ***Fonction paire**. f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.*
- ***Fonction impaire**. f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.*
- ***Périodicité**. f est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ (appelé période) tel que $\forall x \in D_f$ on a : $x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.*

Exemples :

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est impaire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$.

Remarque

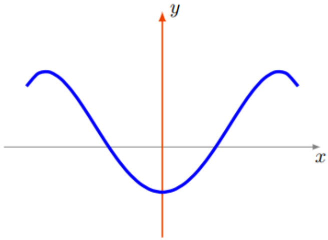
- *Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (l'axe (oy)),*

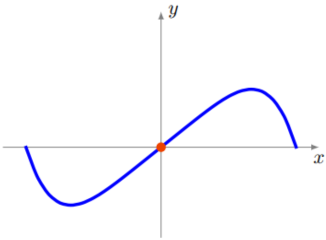
Remarque

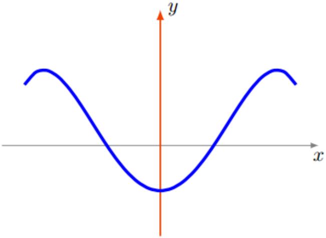
- *Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (l'axe (oy)),*
- *Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.*

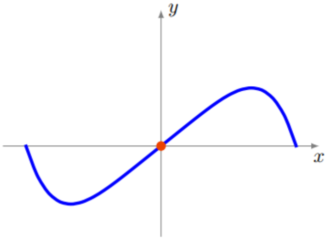
Remarque

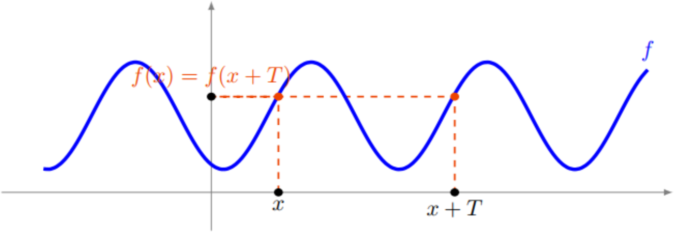
- *Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (l'axe (oy)),*
- *Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.*
- *Le graphe d'une fonction périodique de période* T *est invariant par la translation de vecteur* $\overrightarrow{T}$


y
x


y
x


y
x


y
x


$f(x) = f(x+T)$
f
x
$x+T$

Opérations sur les fonctions

$1)$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

Opérations sur les fonctions

$1)$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Égalité de deux fonctions**. L'égalité de f et g $(f = g)$ est définie par : $f(x) = g(x), \forall x \in I$.

Opérations sur les fonctions

$1)$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Égalité de deux fonctions**. L'égalité de f et g $(f = g)$ est définie par : $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Somme de deux fonctions**. La somme de f et g est la fonction définie sur I par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in I$.

Opérations sur les fonctions

$1)$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Égalité de deux fonctions**. L'égalité de f et g $(f = g)$ est définie par : $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Somme de deux fonctions**. La somme de f et g est la fonction définie sur I par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit de deux fonctions**. Le produit de f et g est la fonction définie sur I par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in I$.

Opérations sur les fonctions

$1)$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Égalité de deux fonctions**. L'égalité de f et g $(f = g)$ est définie par : $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Somme de deux fonctions**. La somme de f et g est la fonction définie sur I par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit de deux fonctions**. Le produit de f et g est la fonction définie sur I par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit d'une fonction par un réel**. Le produit de f par $\alpha \in \mathbb{R}$ est la fonction définie sur I par : $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in I$.

Opérations sur les fonctions

$1)$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Égalité de deux fonctions**. L'égalité de f et g ($f = g$) est définie par : $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Somme de deux fonctions**. La somme de f et g est la fonction définie sur I par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit de deux fonctions**. Le produit de f et g est la fonction définie sur I par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit d'une fonction par un réel**. Le produit de f par $\alpha \in \mathbb{R}$ est la fonction définie sur I par : $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in I$.
- **Quotient de deux fonctions**. Le quotient de f et g est la fonction définie sur I par : $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (avec $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$).

Opérations sur les fonctions

1). Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Égalité de deux fonctions**. L'égalité de f et g ($f = g$) est définie par : $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Somme de deux fonctions**. La somme de f et g est la fonction définie sur I par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit de deux fonctions**. Le produit de f et g est la fonction définie sur I par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit d'une fonction par un réel**. Le produit de f par $\alpha \in \mathbb{R}$ est la fonction définie sur I par : $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in I$.
- **Quotient de deux fonctions**. Le quotient de f et g est la fonction définie sur I par : $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (avec $g(x) \neq 0, \ \ \forall x \in I$).

2). Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions ($I, J \subseteq \mathbb{R}$).

Opérations sur les fonctions

1). Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Égalité de deux fonctions**. L'égalité de f et g $(f = g)$ est définie par : $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Somme de deux fonctions**. La somme de f et g est la fonction définie sur I par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit de deux fonctions**. Le produit de f et g est la fonction définie sur I par : $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in I$.
- **Produit d'une fonction par un réel**. Le produit de f par $\alpha \in \mathbb{R}$ est la fonction définie sur I par : $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in I$.
- **Quotient de deux fonctions**. Le quotient de f et g est la fonction définie sur I par : $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (avec $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$).

2). Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $(I, J \subseteq \mathbb{R})$.

- **Composée de deux fonctions**. La composée de f et g est la fonction $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in I$.

Exemples :

1. Soient $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$, et $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ On a : $f(x) = g(x)$.

Exemples :

1. Soient $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$, et $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ On a : $f(x) = g(x)$.

2. Soient $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1}$: *on a :*

$$g \circ f(x) = \sqrt{(\ln x)^2 + 1} \text{ et } f \circ g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$$

.

Limites

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction (*I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*) et soit* $x_0 \in I$ *ou une extrémité de* I*. On dit que* f *admet la limite* $l \in \mathbb{R}$ *en* x_0 *(ou* f *tend vers* l *quand* x *tend vers* x_0*) si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Limites

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction (*I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*) et soit* $x_0 \in I$ *ou une extrémité de* I*. On dit que* f *admet la limite* $l \in \mathbb{R}$ *en* x_0 *(ou* f *tend vers* l *quand* x *tend vers* x_0*) si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On écrit : $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$.

Cela signifie que la limite de f en x_0 est le réel l vers lequel se rapproche les valeurs $f(x)$ quand x se rapproche aussi près que l'on veut de x_0

Limites

Définition

On dit que f admet la limite $l \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$ ou tend vers l quand x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \text{ tel que } x > B(\text{ resp. } x < -B) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$.

Limites

Définition

On dit que f admet la limite $l \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$ ou tend vers l quand x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \text{ tel que } x > B(\text{ resp. } x < -B) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$.

Dire que la limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) est égale à $l \in \mathbb{R}$, signifie que $f(x)$ reste dans un voisinage de l (c-à-d dans un intervalle de la forme $]l - \epsilon, l + \epsilon[$) dès que x est suffisamment grand (resp. suffisamment petit).

Définition

$1)$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *au point* x_0 *si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Définition

1). *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *au point* x_0 *si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

2). *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $-\infty$ *au point* x_0 *si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| < -A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Définition

$1)$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *au point* x_0 *si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

$2)$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $-\infty$ *au point* x_0 *si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| < -A.$$

On écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Dire que la limite de f en x_0 est égale à $+\infty$ (resp. $-\infty$) est signifie que $f(x)$ devient de plus en plus grand (resp. petit) dès que x est suffisamment proche de x_0.

Définition

$1)$. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \text{ tel que } x > B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Définition

$1)$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \text{ tel que } x > B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$2)$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \text{ tel que } x < -B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Définition

$1)$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \text{ tel que } x > B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$2)$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \text{ tel que } x < -B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$3)$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $-\infty$ *au point* $+\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } x > B \Rightarrow |f(x)| < -A.$$

On écrit : $\lim_{x \to ++\infty} f(x) = -\infty$.

Définition

1). *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \textit{ tel que } x > B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2). *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \textit{ tel que } x < -B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3). *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $-\infty$ *au point* $+\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \textit{ tel que } x > B \Rightarrow |f(x)| < -A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to ++\infty} f(x) = -\infty$.

3). *On dit que* $f(x)$ *tend vers* $-\infty$ *au point* $-\infty$ *si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \textit{ tel que } x < -B \Rightarrow |f(x)| < -A.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to +-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x^2-1} = \pm\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sqrt{|x|} = +\infty.$

Limite à gauche et à droite

Définition

On dit que f admet $l \in I$ *pour limite à droite en* x_0 *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \textit{ tel que } 0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On écrit : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

Limite à gauche et à droite

Définition

On dit que f admet $l \in I$ pour limite à droite en x_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } 0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l.$

On dit que f admet $l \in I$ pour limite à gauche en x_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } 0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l.$

Exemples :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x > 1 \\ \\ x+1 & si \quad x \leqslant 1 \end{cases} \qquad ,$$

Alors $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$.

Théorème

l est la limite de f quand x tend vers x_0 si et seulement si les deux limites à droite et à gauche de f en x_0 existent et sont égales à l :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l.$$

Propriétés des limites

Unicité de la limite

La limite quand elle existe (finie ou infinie) est unique.

Propriétés des limites

Unicité de la limite

La limite quand elle existe (finie ou infinie) est unique.

Inégalité des limites

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Si $f(x) \leqslant g(x)$ sur un voisinage de x_0, alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x)$$

Propriétés des limites

Unicité de la limite

La limite quand elle existe (finie ou infinie) est unique.

Inégalité des limites

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Si $f(x) \leqslant g(x)$ sur un voisinage de x_0, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

En particulier : si $f(x) \geqslant 0$ (resp. $f(x) \leqslant 0$) sur un voisinage de x_0, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0 \ \ (\text{ resp. } \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant 0)$$

Propriétés des limites

Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I tels que : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ (sur un voisinage de x_0). Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Propriétés des limites

Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I tels que : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ (sur un voisinage de x_0). Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *(Notons qu'au voisinage de $+\infty$ la limite de $\cos$ n'existe pas).*

Propriétés des limites

Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I tels que : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ (sur un voisinage de x_0). Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *(Notons qu'au voisinage de* $+\infty$ *la limite de* $\cos$ *n'existe pas).*

Puisqu'on a : $-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \forall x > 0$*, alors*

Propriétés des limites

Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I tels que : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ (sur un voisinage de x_0). Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *(Notons qu'au voisinage de $+\infty$ la limite de $\cos$ n'existe pas).*

Puisqu'on a : $-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \forall x > 0$*, alors* $\dfrac{-1}{\sqrt{x}} < \dfrac{cos(x)}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$ *de plus :*

Propriétés des limites

Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I tels que : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ (sur un voisinage de x_0). Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *(Notons qu'au voisinage de* $+\infty$ *la limite de* $\cos$ *n'existe pas).*

Puisqu'on a : $-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \forall x > 0$*, alors* $\dfrac{-1}{\sqrt{x}} < \dfrac{cos(x)}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$ *de plus :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ *(même limite des deux fonctions encadrantes), alors*

Propriétés des limites

Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I tels que : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ (sur un voisinage de x_0). Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *(Notons qu'au voisinage de* $+\infty$ *la limite de* $\cos$ *n'existe pas).*

Puisqu'on a : $-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \forall x > 0$, *alors* $\dfrac{-1}{\sqrt{x}} < \dfrac{cos(x)}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$ *de plus :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ *(même limite des deux fonctions encadrantes), alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Propriétés des limites

Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I tels que :
$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ (sur un voisinage de x_0). Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *(Notons qu'au voisinage de $+\infty$ la limite de $\cos$ n'existe pas).*

Puisqu'on a : $-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \forall x > 0$, *alors* $\frac{-1}{\sqrt{x}} < \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$ *de plus :* $\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ *(même limite des deux fonctions encadrantes), alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Propriétés des limites

Limite par majoration ou minoration

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Si $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in I$ alors on a :

Propriétés des limites

Limite par majoration ou minoration

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Si $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in I$ alors on a :

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Propriétés des limites

Limite par majoration ou minoration

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Si $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in I$ alors on a :
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - \sin(x)$.

Propriétés des limites

Limite par majoration ou minoration

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Si $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in I$ alors on a :

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - \sin(x)$.

En majorant la fonction comme suit : $x - sin(x) \leq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$*, et comme* $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$*, alors par majoration,*

$$\lim_{x \to -\infty} x - \sin(x) = -\infty.$$

Opérations sur les limites

Théorème

I). Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Alors :

- ***Limite de la somme.*** $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) + \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x)$.

Opérations sur les limites

Théorème

I). Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Alors :

- ***Limite de la somme.*** $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- ***Limite du produit.*** $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Opérations sur les limites

Théorème

I). Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Alors :

- ***Limite de la somme.*** $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- ***Limite du produit.*** $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
  En particulier : $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ \ (\alpha \in \mathbb{R})$.

Opérations sur les limites

Théorème

I). Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Alors :

- ***Limite de la somme.*** $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- ***Limite du produit.*** $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
  En particulier : $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
- ***Limite du quotient.*** $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ *(avec :* $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$*).*

Opérations sur les limites

Théorème

I). Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Alors :

- ***Limite de la somme.*** $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
- ***Limite du produit.*** $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
  En particulier : $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
- ***Limite du quotient.*** $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ *(avec : $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$).*

II). Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim\limits_{y \to y_0} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.

Exemple

$\lim_{x \to +\infty} \sin(\frac{1}{x})$. *Puisque*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \textit{ et } \lim_{x \to 0} \sin(x) = 0,$$

alors

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

(Composée de fonctions).

Conventions de calcul

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$

$\pm\infty+\alpha=\pm\infty, \qquad (+\infty)\times(+\infty)=+\infty.$

$(-\infty)\times(-\infty)=+\infty, \qquad (+\infty)\times(-\infty)=-\infty.$

$\alpha\times(+\infty)=(\text{ signe }\alpha)\infty, \qquad \alpha\times(-\infty)=(-\text{ signe }\alpha)\infty\ (\alpha\in\mathbb{R})$.

Conventions de calcul

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,\qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$

$\pm\infty+\alpha=\pm\infty,\qquad (+\infty)\times(+\infty)=+\infty.$

$(-\infty)\times(-\infty)=+\infty,\qquad (+\infty)\times(-\infty)=-\infty.$

$\alpha\times(+\infty)=(\text{ signe }\alpha)\infty,\qquad \alpha\times(-\infty)=(-\text{ signe }\alpha)\infty\ (\alpha\in\mathbb{R})$.

Formes indéterminées

$$(+\infty)+(-\infty)\ ,\ \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad 0\times\infty,\quad 0^0,\quad \infty^\infty,\quad \infty^0,\quad 1^\infty.$$

Exemples de calcul de limites.

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty - \infty$ (FI).

Exemples de calcul de limites.

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty - \infty$ (FI).
En multipliant par le conjugué, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}})(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}})}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \quad (\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = 0.$

Exemples de calcul de limites.

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.

Exemples de calcul de limites.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$.
On pose le changement de variable $u = 3x$ et $(x \to 0 \Leftrightarrow u \to 0)$, ainsi :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{3\sin u}{u} = 3\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 3 \times 1.$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = 3.$

Branches infinies et asymptotes

1. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.

Branches infinies et asymptotes

1. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.
2. Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$, alors C_f admet la droite d'équation $y = y_0$ comme asymptote horizontale.

Branches infinies et asymptotes

1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.
2. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$, alors C_f admet la droite d'équation $y = y_0$ comme asymptote horizontale.
3. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dans ce cas on calcule $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et là on distingue les sous-cas ci-dessous :

Branches infinies et asymptotes

1. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.
2. Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$, alors C_f admet la droite d'équation $y = y_0$ comme asymptote horizontale.
3. Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dans ce cas on calcule $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et là on distingue les sous-cas ci-dessous :
   a. Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (ox).

Branches infinies et asymptotes

1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.
2. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$, alors C_f admet la droite d'équation $y = y_0$ comme asymptote horizontale.
3. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dans ce cas on calcule $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et là on distingue les sous-cas ci-dessous :
   a. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (ox).
   b. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (oy).

Branches infinies et asymptotes

1. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.
2. Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$, alors C_f admet la droite d'équation $y = y_0$ comme asymptote horizontale.
3. Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dans ce cas on calcule $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et là on distingue les sous-cas ci-dessous :
   a. Si $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (ox).
   b. Si $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (oy).
   c. Si $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$, alors on distingue à nouveau deux cas :

Branches infinies et asymptotes

1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.
2. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$, alors C_f admet la droite d'équation $y = y_0$ comme asymptote horizontale.
3. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dans ce cas on calcule $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et là on distingue les sous-cas ci-dessous :
   a. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (ox).
   b. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (oy).
   c. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, alors on distingue à nouveau deux cas :
      c_1. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = ax$.

Branches infinies et asymptotes

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.
2. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$, alors C_f admet la droite d'équation $y = y_0$ comme asymptote horizontale.
3. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dans ce cas on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et là on distingue les sous-cas ci-dessous :
   a. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (ox).
   b. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (oy).
   c. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$, alors on distingue à nouveau deux cas :
      c_1. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = ax$.
      c_2. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$, alors C_f admet une asymptote oblique de direction $y = ax + b$.

Continuité

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ (*I* est un intervalle de $\mathbb{R}$).

Définition (Continuité en un point)

f est continue en x_0 (ou au point x_0) si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *.*

Continuité

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ (*I* est un intervalle de $\mathbb{R}$).

Définition (Continuité en un point)

f *est continue en* x_0 *(ou au point* x_0*) si :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition (Continuité sur un intervalle)

f *est continue sur I si* f *est continue en tout point de* I.

Exemples :

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n (a_i \in \mathbb{R}) \ .$$

Exemples :

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n (a_i \in \mathbb{R}) \ .$$

2. Les fonctions racine carrée et racines $n^{\text{ème}}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x}, \ \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Exemples :

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n (a_i \in \mathbb{R}) .$$

2. Les fonctions racine carrée et racines $n^{\text{ème}}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x}, \;\; \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

3. Les fonctions circulaires (ou trigonométriques) sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\cos x, \quad \sin x, \quad tgx.$$

Exemples :

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n (a_i \in \mathbb{R}) \ .$$

2. Les fonctions racine carrée et racines $n^{\text{ème}}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x}, \ \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

3. Les fonctions circulaires (ou trigonométriques) sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\cos x, \quad \sin x, \quad tgx.$$

4. Les fonctions logarithmiques sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\ln x, \ \log x, \ \log_a x.$$

Exemples :

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n (a_i \in \mathbb{R}) .$$

2. Les fonctions racine carrée et racines $n^{\text{ème}}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x}, \ \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

3. Les fonctions circulaires (ou trigonométriques) sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\cos x, \quad \sin x, \quad tgx.$$

4. Les fonctions logarithmiques sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\ln x, \ \log x, \ \log_a x.$$

5. Les fonctions exponentielles sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \exp x, \ a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} \ \ (a > 0) .$$

Exemples :

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n (a_i \in \mathbb{R}) .$$

2. Les fonctions racine carrée et racines $n^{\text{ème}}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x}, \ \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

3. Les fonctions circulaires (ou trigonométriques) sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\cos x, \quad \sin x, \quad tgx.$$

4. Les fonctions logarithmiques sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\ln x, \ \log x, \ \log_a x.$$

5. Les fonctions exponentielles sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \exp x, \ a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} \ \ (a > 0) .$$

6. La fonction partie entière est discontinue en tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:

$$E(x) = n \textit{ tel que } \ n \leq x < n + 1.$$

Continuité à droite et à gauche en un point

Définition

- *f est continue à droite en x_0 si :* $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Continuité à droite et à gauche en un point

Définition

- f *est continue à droite en* x_0 *si :* $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
- f *est continue à gauche en* x_0 *si :* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Continuité à droite et à gauche en un point

Définition

- *f est continue à droite en x_0 si :* $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
- *f est continue à gauche en x_0 si :* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Théorème

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0.

Exemples :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \quad \text{si} \quad 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 + x \quad \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Exemples :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \quad \text{si} \quad 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 + x \quad \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

• f est continue sur $]0, \dfrac{1}{2}]$ et sur $]\dfrac{1}{2}, 1]$.

Exemples :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \quad \text{si} \quad 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 + x \quad \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

• f est continue sur $]0, \dfrac{1}{2}]$ et sur $]\dfrac{1}{2}, 1]$.

• Au point 0, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc f n'est pas continue à droite de 0.

Exemples :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \quad \text{si} \quad 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 + x \quad \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

• f est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$.

• Au point 0, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc f n'est pas continue à droite de 0.

• Au point $\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} (1 + x) = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{1}{x} = 2 = f(2)$.

Exemples :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0<x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1+x & \text{si} \quad \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1 \end{cases}$$

• f est continue sur $]0,\dfrac{1}{2}]$ et sur $]\dfrac{1}{2},1]$.

• Au point 0, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, donc f n'est pas continue à droite de 0.

• Au point $\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}(1+x)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ et

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\dfrac{1}{x}=2=f(2)$.

Donc f n'est pas continue en $\dfrac{1}{2}$.

Prolongement par continuité

Théorème

Soit I un intervalle d' extrémité droite (resp. gauche) a et ne contenant pas a. Si $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur I sauf en a et si f admet en a une limite finie l, alors la fonction notée $\tilde{f}$, définie sur $I \cup \{a\}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in I \\ \ell & si\ x = a \end{cases}$$

est une fonction continue sur $I \cup \{a\}$ appelée le prolongement continu (ou le prolongement par continuité) de f en a.

Exemples :

1. La fonction continue $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, par suite f est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement par continuité de f en 0 (qui est une fonction continue en 0) est :

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Exemples :

1. La fonction continue $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, par suite f est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement par continuité de f en 0 (qui est une fonction continue en 0) est :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. La fonction continue $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie en 0 et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, alors f n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Théorème

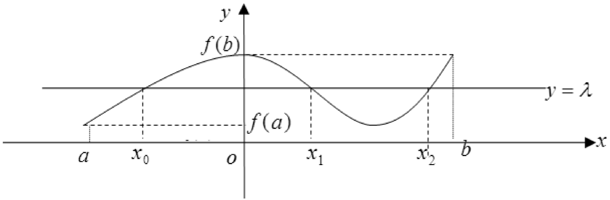
Soit $f : [a,\ b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,\ b]$. Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un point $x_0 \in [a,\ b]$ tel que : $f(x_0) = \lambda$.

Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Théorème

Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,\ b]$. Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un point $x_0 \in [a,\ b]$ tel que : $f(x_0) = \lambda$.

Interprétation géométrique.

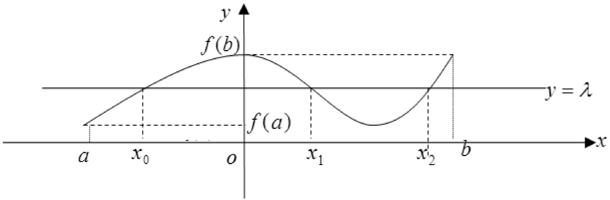


Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Théorème

Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,\ b]$. Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un point $x_0 \in [a,\ b]$ tel que : $f(x_0) = \lambda$.

Interprétation géométrique.



Dans cet exemple, la droite d'équation $y = \lambda$ rencontre la courbe de f en trois points :

$$f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = \lambda.$$

Remarque (Cas particulier du TVI)

Si $f(b)f(a) < 0$ alors il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que : $f(x_0) = 0$ (cela parce que $f(a)$ et $f(a)$ sont de signe opposé et donc il suffit de prendre la valeur $\lambda = 0$ qui est évidement comprise entre $f(a)$ et $f(b)$).

Exemple :

Vérifions que l'équation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exemple :

Vérifions que l'équation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.
Posons
$$f(x) = x^3 + x^2 - 1$$
qui est définie et continue sur $[0, 1]$ (Fonction polynômiale).

Exemple :

Vérifions que l'équation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.
Posons
$$f(x) = x^3 + x^2 - 1$$
qui est définie et continue sur $[0, 1]$ (Fonction polynômiale).
On a : $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, alors d'après la remarque précédente, il existe au moins $x_0 \in]0, 1[$ tel que : $f(x_0) = 0$
(remarquons que 0 et 1 ne sont pas des racines de l'équation ce qui justifie le fait que $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq 1$).

Théorème du Point Fixe (TPF)

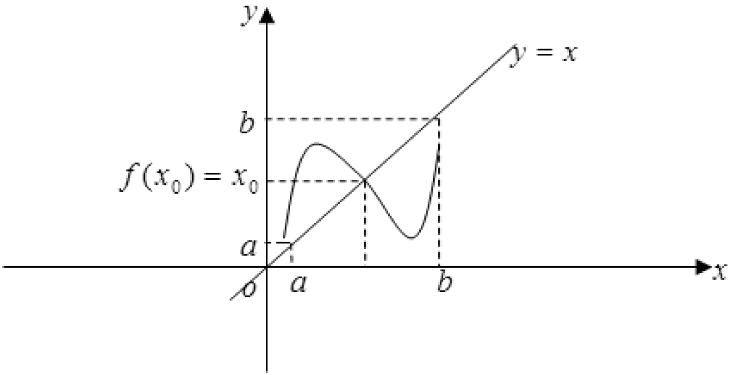
Théorème

Si $f : [a,\ b] \to [a,\ b]$ est continue sur $[a,\ b]$, alors il existe au moins un point $x_0 \in [a,\ b]$ tel que : $f(x_0) = x_0$ (Tout réel x qui réalise $f(x) = x$ est appelé un point fixe de f).

Théorème du Point Fixe (TPF)

Théorème

Si $f : [a,\ b] \to [a,\ b]$ est continue sur $[a,\ b]$, alors il existe au moins un point $x_0 \in [a,\ b]$ tel que : $f(x_0) = x_0$ (Tout réel x qui réalise $f(x) = x$ est appelé un point fixe de f).



Minimum et maximum d'une fonction

Définition

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. *On* dit *que* f *admet un minimum (resp. un maximum) sur* I *en* $x_0 \in I$ *si :* $f(x_0) \leq f(x)$ $($*resp.* $f(x_0) \geq f(x)), \forall x \in I.$
On note : $\min f(x) = f(x_0)$ $($*resp.* $\max f(x) = f(x_0))$ *.*

Minimum et maximum d'une fonction

Définition

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un minimum (resp. un maximum) sur I en $x_0 \in I$ si : $f(x_0) \leq f(x)$ *(resp.* $f(x_0) \geq f(x)), \forall x \in I$.
On note : $\min f(x) = f(x_0)$ *(resp.* $\max f(x) = f(x_0)$) .

Théorème

Si f est continue sur $[a,\ b]$ alors f atteint ses bornes (son minimum et son maximum) sur $[a,\ b]$: $\exists$ au moins $x_0, x_1 \in [a,\ b]$ tels que $f(x_0) = \min f(x)$ et $f(x_1) = \max f(x)$.

Dérivabilité en un point

Définition

On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Dérivabilité en un point

Définition

On dit *que* f *est dérivable en* x_0 *si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Cette limite finie est appelée la dérivée de f *en* x_0 *et est notée* $f'(x_0)$ *:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si cette limite n'existe pas ou est infinie, on dit *que* f *n'est pas dérivable en* x_0*.*

Dérivabilité en un point

Définition

On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Cette limite finie est appelée la dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si cette limite n'existe pas ou est infinie, on dit que f n'est pas dérivable en x_0.

Remarque

La dérivée de f en x_0 est unique.

Exemples :

1. $f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R})$:

Exemples :

1. $f(x) = c \ \ (c \in \mathbb{R})$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \ \ (\forall x_0 \in \mathbb{R}) .$$

Exemples :

1. $f(x) = c \ \ (c \in \mathbb{R})$:
   $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \ \ (\forall x_0 \in \mathbb{R}) .$$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

Exemples :

1. $f(x) = c \ \ (c \in \mathbb{R})$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \ \ (\forall x_0 \in \mathbb{R}).$$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \ \ (\forall x_0 \neq 0).$$

Exemples :

1. $f(x) = c \ \ (c \in \mathbb{R})$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \ \ (\forall x_0 \in \mathbb{R}) .$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \ \ (\forall x_0 \neq 0) .$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$:

Exemples :

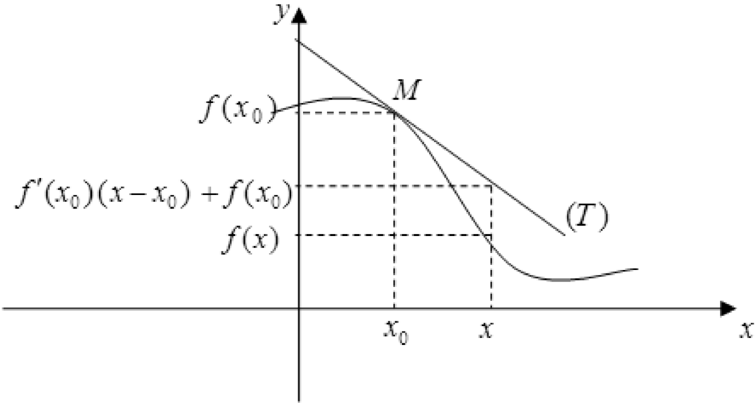
1. $f(x) = c \ \ (c \in \mathbb{R})$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \ \ (\forall x_0 \in \mathbb{R}) .$$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \ \ (\forall x_0 \neq 0) .$$
3. $f(x) = \sqrt{x}$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \ \ (\forall x_0 >$$

Exemples :

1. $f(x) = c \ \ (c \in \mathbb{R})$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \ \ (\forall x_0 \in \mathbb{R}) .$$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \ \ (\forall x_0 \neq 0) .$$
3. $f(x) = \sqrt{x}$:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \ \ (\forall x_0 >$$

   Si $x_0 = 0$: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique de la dérivée en un point.



La tangente (T) à la courbe C_f au point x_0 a pour pente $f'(x_0)$ et est d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \ .$$

Dérivabilité à droite et Dérivabilité à gauche

Définition

- *f est dérivable à droite de x_0 si* $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

  Cette limite finie est la dérivée à droite de f en x_0 et est notée $f'_d(x_0)$.

Dérivabilité à droite et Dérivabilité à gauche

Définition

- f *est dérivable à droite de* x_0 *si* $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

  Cette limite finie est la dérivée à droite de f *en* x_0 *et est notée* $f'_d(x_0)$ *.*

- f *est dérivable à gauche de* x_0 *si* $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

  Cette limite finie est la dérivée à gauche de f *en* x_0 *et est notée* $f'_g(x_0)$ *.*

Remarque

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et*

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

Remarque

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et*
$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$
- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0*

Remarque

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et*
$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$
- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0*
- *la réciproque est fausse. Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = |x|$ qui est continue en 0 mais non dérivable en 0 (puisque $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$).*
-
- *Les deux demi-tangentes droite et gauche à la courbe de f en ce point : d'équations respectives $y = f'_d(x)(x - x_0) + f(x_0)$ et $y = f'_g(x)(x - x_0) + f$*

Dérivabilité sur un intervalle, Fonction dérivée

Définition

Une fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I. La dérivée f' de f est la fonction définie sur I telle que à chaque x, elle fait correspondre la dérivée de f en x :

$$f' : I \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

Opérations sur les dérivées

Théorème

I. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $x \in I$, alors :

1. *$(f+g)$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*

Opérations sur les dérivées

Théorème

I. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $x \in I$, alors :

1. *$(f+g)$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
2. *(fg) est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*

Opérations sur les dérivées

Théorème

I. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $x \in I$, alors :

1. *$(f+g)$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
2. *(fg) est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*
   En particulier : $(\alpha g)'(x) = \alpha g'(x) (\alpha \in \mathbb{R})$.

Opérations sur les dérivées

Théorème

I. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $x \in I$, alors :

1. *$(f+g)$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
2. *(fg) est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*
   En particulier : $(\alpha g)'(x) = \alpha g'(x) (\alpha \in \mathbb{R})$.
3. *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.*

Opérations sur les dérivées

Théorème

I. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ *sont dérivables en* $x \in I$*, alors :*

1. $(f+g)$ *est dérivable en* x *et* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. (fg) *est dérivable en* x *et* $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
   En particulier : $(\alpha g)'(x) = \alpha g'(x) (\alpha \in \mathbb{R})$.
3. $\frac{f}{g}$ *est dérivable en* x *et* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.
   En particulier : $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

Opérations sur les dérivées

Théorème

I. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $x \in I$, alors :

1. *$(f+g)$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
2. *(fg) est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*
   En particulier : $(\alpha g)'(x) = \alpha g'(x) (\alpha \in \mathbb{R})$.
3. *$\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.*
   En particulier : $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

II. Si $f : I \to J$ est dérivable en x et $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x tel que : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Quelques dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$c \ (\in \mathbb{R})$	0
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$n\, x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\ln x \quad (x > 0)$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha\, x^{\alpha - 1}$
$a^x = e^{x \ln a} \ (a > 0)$	$a^x \ \ln a$

Dérivées successives

Définition (Fonction de classe C^1)

On dit que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Dérivées successives

Définition (Fonction de classe C^1)

On dit que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Définition (Dérivée d'ordre 2, Fonction de classe C^2)

Si f est de classe C^1 sur I et f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable et on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde (ou d'ordre 2) de f. Si f'' est continue sur I, on dit que f est de classe C^2.

Dérivées successives

Définition (Fonction de classe C^1)

On dit que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Définition (Dérivée d'ordre 2, Fonction de classe C^2)

Si f est de classe C^1 sur I et f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable et on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde (ou d'ordre 2) de f. Si f'' est continue sur I, on dit que f est de classe C^2.

Définition (Dérivée d'ordre n, Fonction de classe C^n)

Si les dérivées successives de f $(f', f'', \dots, f^{(n)})$ existent telles que $f^{(k)} = (f^{(k-1)})', \ (\forall k \leq n)$, on dit que f est n fois dérivable et on note $f^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ème}}$ ou la dérivée d'ordre n de f. Si en plus $f^{(n)}$ est continue, f est de classe C^n. Et si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe C^∞ ou qu'elle est indéfiniment dérivable.

Exemples :

1. $f(x) = x^3$:

Exemples :

1. $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x, f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \geq 4$.

Exemples :

1. $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x, f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \geq 4$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$:

Exemples :

1. $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x, f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \geq 4$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$: $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $f^{(3)} = \dfrac{2 \times 3}{(1-x)^4}$,
   $f^{(n)}(x) = \dfrac{2 \times 3 \times \cdots \times n}{(1-x)^{n+1}} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$

Exemples :

1. $f(x)=x^3$: $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x, f^{(3)}(x)=6$, $f^{(n)}(x)=0$, $\forall n\geq 4$.
2. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$: $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$, $f^{(3)}=\dfrac{2\times 3}{(1-x)^4}$,
$$f^{(n)}(x)=\frac{2\times 3\times\cdots\times n}{(1-x)^{n+1}}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \forall n\in\mathbb{N}$$

Théorème (Règle de l'Hospital (RH))

Soient $f, g : I\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $x_0\in I$ ou une extrémité (finie ou non) de I. Si $g(x)\neq 0$ et $g'(x)\neq 0, \forall x\in I$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ ou $\pm\infty$, alors :

Exemples :

1. $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x, f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \geq 4$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$: $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $f^{(3)} = \dfrac{2\times 3}{(1-x)^4}$,
$f^{(n)}(x) = \dfrac{2\times 3\times\cdots\times n}{(1-x)^{n+1}} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$

Théorème (Règle de l'Hospital (RH))

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $x_0 \in I$ ou une extrémité (finie ou non) de I. Si $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$, alors :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

N.B. La règle de l'Hospital permet de lever les deux formes indéterminées : $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.

Exemples :

1) $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x}$

Exemples :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$, "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$" (FI).

Exemples :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$, „$\dfrac{+\infty}{+\infty}$" (FI).
En appliquant la règle de l'Hospital, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x} = 0 \ \left(\frac{1}{+\infty}\right).$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ „$\dfrac{0}{0}$" (FI).

Exemples :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$, "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$" (FI).
En appliquant la règle de l'Hospital, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x} = 0 \ \left(\frac{1}{+\infty}\right).$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ "$\dfrac{0}{0}$" (FI).
En appliquant la règle de l'Hospital, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

3) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)\ln(x-1) = "0 \times -\infty"$ (FI).

3) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)\ln(x-1) = "0 \times -\infty"$ (FI).
On pose le changement de variable $u = x - 1 \Rightarrow (x \to 1^+ \Leftrightarrow u \to 0^+)$, par suite :

3) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1) = "0 \times -\infty"$ (FI).
On pose le changement de variable $u = x-1 \Rightarrow (x \to 1^+ \Leftrightarrow u \to 0^+)$, par suite :

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1) = \lim_{u\to 0+} u\ln(u) = "0 \times -\infty" \text{ (FI)} .$$

On peut réécrire aussi :

$$\lim_{u\to 0+} u\ln(u) = \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln(u)}{\frac{1}{u}} = "\frac{-\infty}{+\infty}" \text{ (FI)}.$$

Par application de la règle de l'Hospital, et par passage aux dérivées on a :

$$\lim_{u\to 0+} \frac{\ln(u)}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to 0+} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}} = \lim_{u\to 0^+} -u = 0.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1+} (x-1)\ln(x-1) = 0.$

Théorème de Rolle et Théorème des Accroissements Finis

Théorème de Rolle

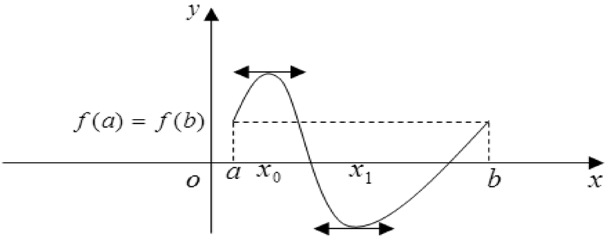
Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que : $f(a)=f(b)$. Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a,b[$ tel que : $f'(x_0)=0$.

Théorème de Rolle et Théorème des Accroissements Finis

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que : $f(a)=f(b)$. Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a,b[$ tel que : $f'(x_0)=0$.

Interprétation géométrique.

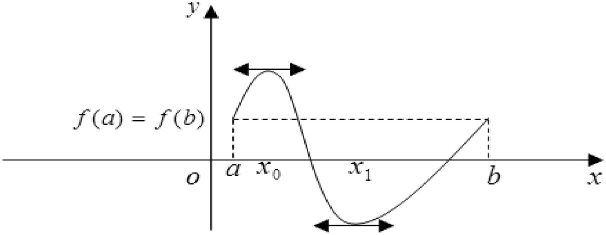


Théorème de Rolle et Théorème des Accroissements Finis

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que : $f(a)=f(b)$. Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a,b[$ tel que : $f'(x_0)=0$.

Interprétation géométrique.



Il existe au moins un point de la courbe dont la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe (ox) (c-à-d horizontale). Dans cet exemple, Il y a deux points : $f'(x_0)=f'(x_1)=0$.

Exemple d'application.
Vérifions que l'équation $x^2 + \ln(x+1) = 0$ admet 0 comme solution unique.

Exemple d'application.
Vérifions que l'équation $x^2 + \ln(x+1) = 0$ admet 0 comme solution unique.
Pour cela, considérons la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 + \ln(x+1) \quad (f(0) = 0)$.

Exemple d'application.
Vérifions que l'équation $x^2 + \ln(x+1) = 0$ admet 0 comme solution unique.
Pour cela, considérons la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 + \ln(x+1) \quad (f(0) = 0)$.
En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe une autre solution $a \in]-1, +\infty[$ différente de 0.

Exemple d'application.
Vérifions que l'équation $x^2 + \ln(x+1) = 0$ admet 0 comme solution unique.
Pour cela, considérons la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 + \ln(x+1) \quad (f(0) = 0)$.
En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe une autre solution $a \in]-1, +\infty[$ différente de 0. On pourra supposer que $a > 0$ et puisque f est continue et dérivable sur $[0,\ a]$ et vérifie $f(a) = f(0) = 0$ alors le théorème de Rolle implique

Exemple d'application.
Vérifions que l'équation $x^2 + \ln(x+1) = 0$ admet 0 comme solution unique.
Pour cela, considérons la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 + \ln(x+1) \quad (f(0) = 0)$.
En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe une autre solution $a \in]-1, +\infty[$ différente de 0. On pourra supposer que $a > 0$ et puisque f est continue et dérivable sur $[0, \ a]$ et vérifie $f(a) = f(0) = 0$ alors le théorème de Rolle implique l'existence d'un point $x_0 \in]0, a[$ tel que $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x_0) = 2x_0 + \frac{1}{x_0+1} = 0 \Leftrightarrow 2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0.$$

Exemple d'application.
Vérifions que l'équation $x^2+\ln(x+1)=0$ admet 0 comme solution unique.
Pour cela, considérons la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par
$f(x)=x^2+\ln(x+1) \quad (f(0)=0)$.
En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe une autre solution $a\in]-1,+\infty[$ différente de 0. On pourra supposer que $a>0$ et puisque f est continue et dérivable sur $[0,\ a]$ et vérifie $f(a)=f(0)=0$ alors le théorème de Rolle implique l'existence d'un point $x_0\in]0,a[$ tel que $f'(x_0)=0$:

$$f'(x_0)=2x_0+\frac{1}{x_0+1}=0 \Leftrightarrow 2x_0^2+2x_0+1=0.$$

Or le discriminant de cette équation du second degré est $\triangle=-4<0$,

Exemple d'application.
Vérifions que l'équation $x^2 + \ln(x+1) = 0$ admet 0 comme solution unique. Pour cela, considérons la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 + \ln(x+1) \quad (f(0) = 0)$.
En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe une autre solution $a \in]-1, +\infty[$ différente de 0. On pourra supposer que $a > 0$ et puisque f est continue et dérivable sur $[0, \ a]$ et vérifie $f(a) = f(0) = 0$ alors le théorème de Rolle implique l'existence d'un point $x_0 \in]0, a[$ tel que $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x_0) = 2x_0 + \frac{1}{x_0+1} = 0 \Leftrightarrow 2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0.$$

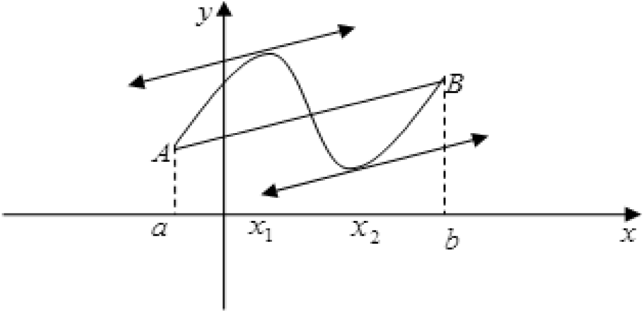
Or le discriminant de cette équation du second degré est $\triangle = -4 < 0$, donc elle ne peut admettre de solution et ce qui est impossible. Ainsi la supposition posée est fausse et donc 0 est bien l'unique solution de l'équation
$x^2 + \ln(x+1) = 0$.

Théorème (Théorème des Accroissements Finis (TAF))

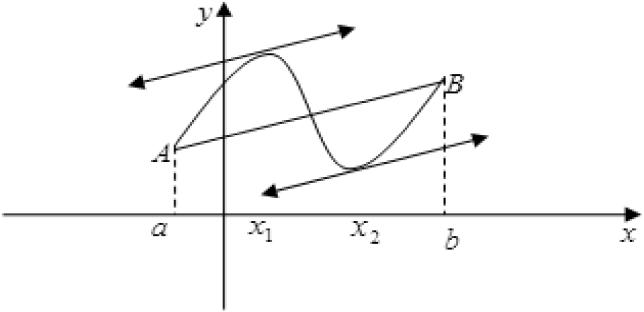
.

Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a,b[$ tel que : $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation géométrique.

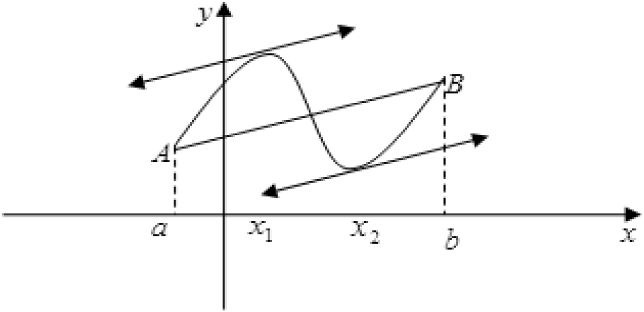


Interprétation géométrique.



A noter que la pente de la droite (AB) est : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation géométrique.



A noter que la pente de la droite (AB) est : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Alors, il existe au moins un point dont la tangente à la courbe est parallèle à la droite (AB). Dans cet exemple, on voit qu'il y a deux tangentes de même pente que celle de (AB) : $f'(x_1) = f'(x_2) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0$.

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0.$
  La fonction $f(x) = \sin x$ est continue et dérivable sur R.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à f sur $[0,\ x]$: $\exists x_0 \in]0, x[$, tel que :

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0$.
  La fonction $f(x) = \sin x$ est continue et dérivable sur R.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à f sur $[0,\ x]$: $\exists x_0 \in]0, x[$, tel que :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos x_0.$$

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0$.
  La fonction $f(x) = \sin x$ est continue et dérivable sur R.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à f sur $[0,\ x]$: $\exists x_0 \in]0, x[$, tel que :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos x_0.$$

Or $\cos x_0 \leq 1$, alors $\dfrac{\sin x}{x} \leq 1$, d'où : $\sin x \leq x, (\forall x > 0)$.

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0$.
  La fonction $f(x) = \sin x$ est continue et dérivable sur R.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à f sur $[0,\ x]$: $\exists x_0 \in]0, x[$, tel que :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos x_0.$$

  Or $\cos x_0 \leq 1$, alors $\dfrac{\sin x}{x} \leq 1$, d'où : $\sin x \leq x, (\forall x > 0)$.
  Et en remarquant que pour $x = 0, \sin 0 = 0$, alors : $\sin x \leq x, \forall x \geq 0$.

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0$.
  La fonction $f(x) = \sin x$ est continue et dérivable sur R.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à f sur $[0,\ x]$: $\exists x_0 \in]0, x[$, tel que :

  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos x_0.$$

  Or $\cos x_0 \leq 1$, alors $\dfrac{\sin x}{x} \leq 1$, d'où : $\sin x \leq x, (\forall x > 0)$.
  Et en remarquant que pour $x = 0, \sin 0 = 0$, alors : $\sin x \leq x, \forall x \geq 0$.
- Montrons la double inégalité suivante : $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1 + \dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$.

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0$.
  La fonction $f(x) = \sin x$ est continue et dérivable sur R.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à f sur $[0,\ x]$: $\exists x_0 \in]0, x[$, tel que :
  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos x_0.$$
  Or $\cos x_0 \leq 1$, alors $\frac{\sin x}{x} \leq 1$, d'où : $\sin x \leq x, (\forall x > 0)$.
  Et en remarquant que pour $x = 0, \sin 0 = 0$, alors : $\sin x \leq x, \forall x \geq 0$.
- Montrons la double inégalité suivante : $\frac{1}{x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, \forall x > 0$.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à la fonction logarithme népérien qui est continue sur le segment $[x,\ x+1]$ et dérivable sur $[x,\ x+1]$, alors $\exists\, c \in]x, x+1[$ tel que :

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0$.
  La fonction $f(x) = \sin x$ est continue et dérivable sur R.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à f sur $[0,\ x]$: $\exists x_0 \in]0, x[$, tel que :
  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos x_0.$$
  Or $\cos x_0 \leq 1$, alors $\dfrac{\sin x}{x} \leq 1$, d'où : $\sin x \leq x, (\forall x > 0)$.
  Et en remarquant que pour $x = 0, \sin 0 = 0$, alors : $\sin x \leq x, \forall x \geq 0$.
- Montrons la double inégalité suivante : $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1 + \dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à la fonction logarithme népérien qui est continue sur le segment $[x,\ x+1]$ et dérivable sur $[x,\ x+1]$, alors $\exists\, c \in]x, x+1[$ tel que :
  $$\ln'(c) = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln(\frac{x+1}{x}) = \ln(1 + \frac{1}{x}).$$

Exemples d'application.

- Montrons l'inégalité suivante : $\sin x \leq x, \forall x > 0$.
  La fonction $f(x) = \sin x$ est continue et dérivable sur R.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à f sur $[0,\ x]$: $\exists x_0 \in]0, x[$, tel que :
  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos x_0.$$
  Or $\cos x_0 \leq 1$, alors $\dfrac{\sin x}{x} \leq 1$, d'où : $\sin x \leq x, (\forall x > 0)$.
  Et en remarquant que pour $x = 0, \sin 0 = 0$, alors : $\sin x \leq x, \forall x \geq 0$.
- Montrons la double inégalité suivante : $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1 + \dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$.
  Soit $x > 0$, en appliquant le TAF à la fonction logarithme népérien qui est continue sur le segment $[x,\ x+1]$ et dérivable sur $[x,\ x+1]$, alors $\exists\, c \in]x, x+1[$ tel que :
  $$\ln'(c) = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln(\frac{x+1}{x}) = \ln(1 + \frac{1}{x}).$$

Or $x < c < x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$, d'où la double inégalité.

Ce type d'inégalités peut servir à l'encadrement et au calcul de limites,

Ce type d'inégalités peut servir à l'encadrement et au calcul de limites, par exemple, à partir de la double inégalité précédente, on peut déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$ qui est égale à $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, en effet :

Ce type d'inégalités peut servir à l'encadrement et au calcul de limites, par exemple, à partir de la double inégalité précédente, on peut déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ qui est égale à $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, en effet :

Comme $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1+\dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} < x\ln(1+\dfrac{1}{x}) < \dfrac{x}{x} = 1, \forall x > 0$

Ce type d'inégalités peut servir à l'encadrement et au calcul de limites, par exemple, à partir de la double inégalité précédente, on peut déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$ qui est égale à $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, en effet :

Comme $\dfrac{1}{x+1}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{x}{x+1}<x\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{x}{x}=1,\forall x>0$et puisque $\exp^x$ est une fonction strictement croissante, alors :

Ce type d'inégalités peut servir à l'encadrement et au calcul de limites, par exemple, à partir de la double inégalité précédente, on peut déterminer la valeur de $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ qui est égale à $\lim_{x\to+\infty}\exp^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, en effet :

Comme $\frac{1}{x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < x\ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{x}{x} = 1, \forall x > 0$et puisque $\exp^x$ est une fonction strictement croissante, alors :

$$\exp^{\frac{x}{x+1}} < \mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})} < \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Ce type d'inégalités peut servir à l'encadrement et au calcul de limites, par exemple, à partir de la double inégalité précédente, on peut déterminer la valeur de $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ qui est égale à $\lim_{x\to+\infty}\exp^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, en effet :

Comme $\frac{1}{x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < x\ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{x}{x} = 1, \forall x > 0$et puisque $\exp^x$ est une fonction strictement croissante, alors :

$$\exp^{\frac{x}{x+1}} < \mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})} < \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Et par passage à la limite, on a :

$\lim_{x\to+\infty}\exp^{\frac{x}{x+1}} = \exp \leq \lim_{x\to+\infty}\exp^{x\ln(1+\frac{1}{x})} \leq \lim_{x\to+\infty}\exp = \exp .$

Ce type d'inégalités peut servir à l'encadrement et au calcul de limites, par exemple, à partir de la double inégalité précédente, on peut déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$ qui est égale à $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, en effet :

Comme $\dfrac{1}{x+1}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{x}{x+1}<x\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{x}{x}=1,\forall x>0$et puisque $\exp^x$ est une fonction strictement croissante, alors :

$$\exp^{\frac{x}{x+1}}<\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})}<\mathrm{e}^1=\mathrm{e}.$$

Et par passage à la limite, on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\exp^{\frac{x}{x+1}}=\exp\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\exp^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\exp=\exp.$
Ainsi d'après la propriété d'encadrement des limites (Théorème des gendarmes), on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\exp.$

Extremums

Définition

(Extremum global et Extremum local).

- $f : I \to \mathbb{R}$ *admet un minimum (resp. un maximum) global ou absolu en* x_0 *si :* $f(x_0) \leq f(x)$ *(resp* $f(x) \leq f(x_0)$*),* $\forall x \in I$.

Extremums

Définition

(Extremum global et Extremum local).

- $f : I \to \mathbb{R}$ *admet un minimum (resp. un maximum) global ou absolu en* x_0 *si :* $f(x_0) \leq f(x)$ *(resp* $f(x) \leq f(x_0)$*),* $\forall x \in I$.
- $f : I \to \mathbb{R}$ *admet un minimum (resp. un maximum) local ou relatif en* x_0 *s'il existe un voisinage* V_{x_0} *de* x_0 *tel que :* $f(x_0) \leq f(x)$ *(resp* $f(x) \leq f(x_0)$*),* $\forall x \in V_{x_0}$.

Extremums

Définition

(Extremum global et Extremum local).

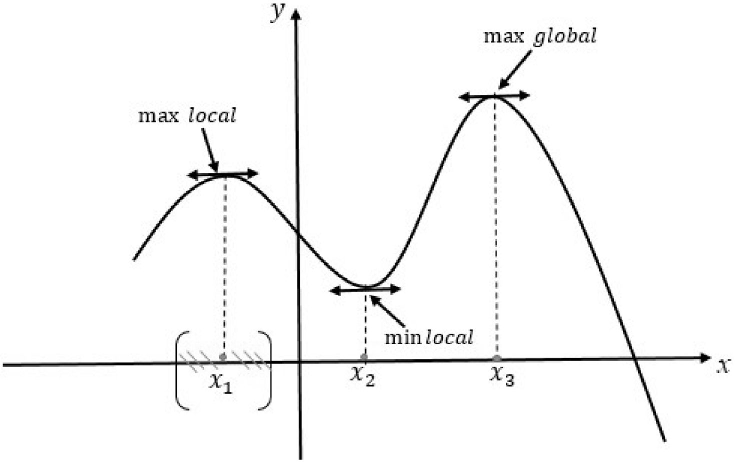
- ☐ $f : I \to \mathbb{R}$ *admet un minimum (resp. un maximum) global ou absolu en* x_0 *si :* $f(x_0) \leq f(x)$ *(resp* $f(x) \leq f(x_0)$*),* $\forall x \in I$.
- ☐ $f : I \to \mathbb{R}$ *admet un minimum (resp. un maximum) local ou relatif en* x_0 *s'il existe un voisinage* V_{x_0} *de* x_0 *tel que :* $f(x_0) \leq f(x)$ *(resp* $f(x) \leq f(x_0)$*),* $\forall x \in V_{x_0}$.
- ☐ *Un extremum est soit un minimum soit un maximum (local ou global).*

Exemples :

1. $f(x) = \sqrt{x-1} \geq f(1) = 0,\ \forall x \in [1, +\infty[$: f admet un minimum global en 1.

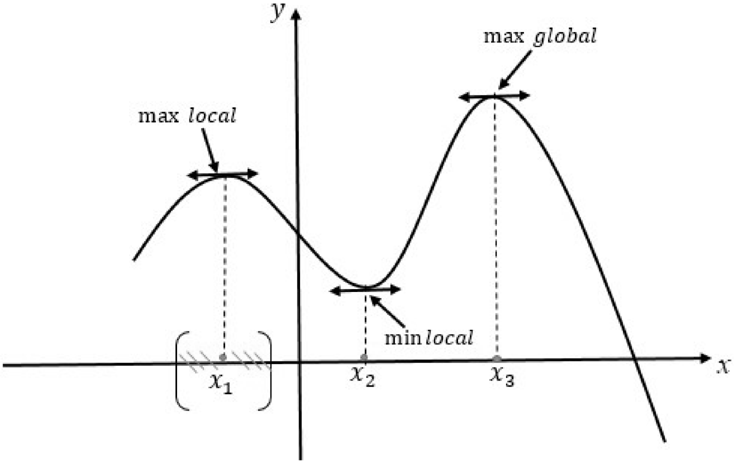
Exemples :

1. $f(x) = \sqrt{x-1} \geq f(1) = 0,\ \forall x \in [1, +\infty[$: f admet un minimum global en 1.



Exemples :

1. $f(x) = \sqrt{x-1} \geq f(1) = 0,\ \forall x \in [1, +\infty[$: f admet un minimum global en 1.



N.B. Un extremum global est un extremum local, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Théorème (Condition nécessaire ou du 1^{er} ordre)

.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle ouvert I et admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors : $f'(x_0) = 0$ (C.N).

Théorème (Condition nécessaire ou du 1^{er} ordre)

.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle ouvert I et admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors : $f'(x_0) = 0$ (C.N).

Remarques :

- La condition nécessaire $f'(x_0) = 0$ est équivalente à ce que la tangente à la courbe de f en x_0 (d'équation : $y = fx_0$ est horizontale (voir l'exemple graphique ci-dessus).

Théorème (Condition nécessaire ou du 1^{er} ordre)

.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle ouvert I et admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors : $f'(x_0) = 0$ (C.N).

Remarques :

- La condition nécessaire $f'(x_0) = 0$ est équivalente à ce que la tangente à la courbe de f en x_0 (d'équation : $y = fx_0$ est horizontale (voir l'exemple graphique ci-dessus).
- Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en x_0 sachant que x_0 n'est pas une extrémité de I (dans le théorème précédent, l'intervalle I étant supposé ouvert).

Théorème (Condition nécessaire ou du 1^{er} ordre)

.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle ouvert I et admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors : $f'(x_0) = 0$ (C.N).

Remarques :

- La condition nécessaire $f'(x_0) = 0$ est équivalente à ce que la tangente à la courbe de f en x_0 (d'équation : $y = fx_0$ est horizontale (voir l'exemple graphique ci-dessus).
- Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en x_0 sachant que x_0 n'est pas une extrémité de I (dans le théorème précédent, l'intervalle I étant supposé ouvert).
  Par ailleurs, il est possible d'avoir une extrémité de l'intervalle où f atteint un extremum local sans que nécessairement f' soit nulle en ce point.

Théorème (Condition nécessaire ou du 1^{er} ordre)

.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle ouvert I et admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors : $f'(x_0) = 0$ (C.N).

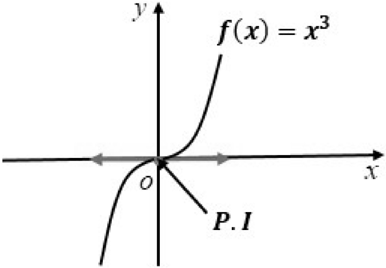
Remarques :

- La condition nécessaire $f'(x_0) = 0$ est équivalente à ce que la tangente à la courbe de f en x_0 (d'équation : $y = fx_0$ est horizontale (voir l'exemple graphique ci-dessus).
- Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en x_0 sachant que x_0 n'est pas une extrémité de I (dans le théorème précédent, l'intervalle I étant supposé ouvert).
  Par ailleurs, il est possible d'avoir une extrémité de l'intervalle où f atteint un extremum local sans que nécessairement f' soit nulle en ce point.
  Notons que la recherche d'extremums locaux se fait soit aux extrémités de l'intervalle, soit aux points intérieurs de dérivée nulle et parfois même aux points où la fonction n'est pas dérivable comme par exemple la fonction $|x|$ qui n'est pas dérivable en 0 et malgré cela, elle admet un minimum global en 0(puisque $|x| \geq |0| = 0, \ \forall x \in \mathbb{R})$.

- Cette condition nécessaire n'est pas suffisante,

- Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, en effet étant donnée la fonction $f(x) = x^3$ qui vérifie $f'(0) = 0$, mais en 0, f n'admet ni un minimum local ni un maximum local, il en fait d'un point d'inflexion de la courbe (voir plus loin, c'est un point où la courbe change de concavité) :

- Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, en effet étant donnée la fonction $f(x) = x^3$ qui vérifie $f'(0) = 0$, mais en 0, f n'admet ni un minimum local ni un maximum local, il en fait d'un point d'inflexion de la courbe (voir plus loin, c'est un point où la courbe change de concavité) :



Théorème(Condition suffisante ou du 2^{me} ordre)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I telle que $f'(x_0) = 0$. Alors on a :

Théorème(Condition suffisante ou du 2^{me} ordre)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I telle que $f'(x_0) = 0$. Alors on a :

a. Si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0.

Théorème(Condition suffisante ou du 2^{me} ordre)

Soit $f\,:\ I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I telle que $f'(x_0) = 0$. Alors on a :

a. Si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0.

b. Si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local en x_0.

Théorème(Condition suffisante ou du 2^{me} ordre)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I telle que $f'(x_0) = 0$. Alors on a :

a. Si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0.

b. Si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local en x_0.

Remarque

Dans le cas où $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien conclure. Il faut procéder par d'autres méthodes comme les développements limités.

Sens de variation (Monotonie)

Définition (Fonctions monotones)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Sens de variation (Monotonie)

Définition (Fonctions monotones)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- ☐ **Fonction croissante.** f est croissante sur I si :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y), \ \forall x, \ y \in I.$$

Sens de variation (Monotonie)

Définition (Fonctions monotones)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- ☐ **Fonction croissante.** f est croissante sur I si :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),\ \forall x,\ y \in I.$$

- ☐ **Fonction décroissante.** f est décroissante sur I si $-f$ est croissante sur I :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y),\ \forall x,\ y \in I.$$

Sens de variation (Monotonie)

Définition (Fonctions monotones)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- □ **Fonction croissante.** f est croissante sur I si :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y), \; \forall x, \; y \in I.$$

- □ **Fonction décroissante.** f est décroissante sur I si $-f$ est croissante sur I :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y), \; \forall x, \; y \in I.$$

- □ **Fonction monotone.** f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante.

La stricte monotonie est définie avec des inégalités strictes : f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

La stricte monotonie est définie avec des inégalités strictes : f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

N.B. Une fonction est constante si elle est croissante et décroissante.

La stricte monotonie est définie avec des inégalités strictes : f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

N.B. Une fonction est constante si elle est croissante et décroissante.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors :

La stricte monotonie est définie avec des inégalités strictes : f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

N.B. Une fonction est constante si elle est croissante et décroissante.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors :

a. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.*

La stricte monotonie est définie avec des inégalités strictes : f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

N.B. Une fonction est constante si elle est croissante et décroissante.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors :

a. f *est croissante sur I si et seulement si* $f'(x) \geq 0, \forall x \in I.$

b. f *est décroissante sur I si et seulement si* $f'(x) \leq 0, \forall x \in I.$

La stricte monotonie est définie avec des inégalités strictes : f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

N.B. Une fonction est constante si elle est croissante et décroissante.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors :

a. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.*
b. *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.*

N.B. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$)$\forall x \in I$.

La stricte monotonie est définie avec des inégalités strictes : f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

N.B. Une fonction est constante si elle est croissante et décroissante.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors :

a. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.*
b. *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.*

N.B. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$)$\forall x \in I$.
f est constante sur $I \Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in I$ (puisque f est croissante et décroissante sur I donc $f'(x) \leq 0$ et $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$).

Théorème (2^{me} méthode d'extremalité (Condition suffisante))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I telle que $f'(x_0) = 0$ $(x_0 \in I)$. Si f' change de signe, alors f possède un extremum local en x_0.

Théorème (2^{me} méthode d'extremalité (Condition suffisante))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I telle que $f'(x_0) = 0$ $(x_0 \in I)$. Si f' change de signe, alors f possède un extremum local en x_0.

Tableau de variation

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min local	$\nearrow$

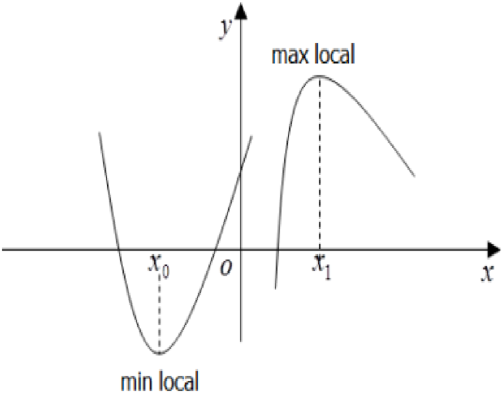
Théorème (2^{me} méthode d'extremalité (Condition suffisante))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I telle que $f'(x_0) = 0$ $(x_0 \in I)$. Si f' change de signe, alors f possède un extremum local en x_0.

Tableau de variation

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min local	$\nearrow$

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max local	$\searrow$


y
max local
x_0
o
x_1
x
min local

Remarque

Si $f'(x_0) = 0$ *sans que* f' *change de signe alors* x_0 *est dit un point d'inflexion "PI" de* $\mathcal{C}_f$.

Remarque

Si $f'(x_0) = 0$ *sans que* f' *change de signe alors* x_0 *est dit un point d'inflexion "PI" de* $\mathcal{C}_f$.

Tableau de variation

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	PI	$\searrow$

Remarque

Si $f'(x_0) = 0$ *sans que* f' *change de signe alors* x_0 *est dit un point d'inflexion "PI" de* $\mathcal{C}_f$.

Tableau de variation

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	PI	$\searrow$

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	PI	$\nearrow$

Fonctions réciproques

Définition (Injection, Surjection, Bijection)

Soit $f : I \to J$ (I, J sont des parties de $\mathbb{R}$) :

Fonctions réciproques

Définition (Injection, Surjection, Bijection)

Soit $f : I \to J$ (I, J sont des parties de $\mathbb{R}$) :

- f est injective si :

  $\forall y \in J, \ \exists$ au plus $x \in I$ tel que $f(x) = y$
  $(\Leftrightarrow \forall x, \ x' \in I, \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

Fonctions réciproques

Définition (Injection, Surjection, Bijection)

Soit $f : I \to J$ ($I,\ J$ sont des parties de $\mathbb{R}$) :

- f est injective si :

  $\forall y \in J,\ \exists$ au plus $x \in I$ tel que $f(x) = y$
  $(\Leftrightarrow \forall x,\ x' \in I,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.
- f est surjective si : $\forall y \in J, \exists$ au moins $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Fonctions réciproques

Définition (Injection, Surjection, Bijection)

Soit $f : I \to J$ ($I,\ J$ sont des parties de $\mathbb{R}$) :

- f est injective si :

  $\forall y \in J,\ \exists$ au plus $x \in I$ tel que $f(x) = y$
  $(\Leftrightarrow \forall x,\ x' \in I,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.
- f est surjective si : $\forall y \in J, \exists$ au moins $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
- f est bijective (injective et surjective) si : $\forall y \in J, \exists x \in I$ unique tel que $f(x) = y$.

Fonctions réciproques

Définition (Injection, Surjection, Bijection)

Soit $f : I \to J$ (I, J sont des parties de $\mathbb{R}$) :

- ☐ f est injective si :

  $\forall y \in J$, $\exists$ au plus $x \in I$ tel que $f(x) = y$
  ($\Leftrightarrow \forall x, \ x' \in I, \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$).
- ☐ f est surjective si : $\forall y \in J, \exists$ au moins $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
- ☐ f est bijective (injective et surjective) si : $\forall y \in J, \exists x \in I$ unique tel que $f(x) = y$.

Exemples :

1. $f(x) = x^3 (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ est injective : $x^3 = x'^3 \Rightarrow x = x', \forall x, x' \in \mathbb{R}$.

Fonctions réciproques

Définition (Injection, Surjection, Bijection)

Soit $f : I \to J$ (I, J sont des parties de $\mathbb{R}$) :

- f est injective si :

  $\forall y \in J, \exists$ au plus $x \in I$ tel que $f(x) = y$
  $(\Leftrightarrow \forall x, x' \in I, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.
- f est surjective si : $\forall y \in J, \exists$ au moins $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
- f est bijective (injective et surjective) si : $\forall y \in J, \exists x \in I$ unique tel que $f(x) = y$.

Exemples :

1. $f(x) = x^3 (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ est injective : $x^3 = x'^3 \Rightarrow x = x', \forall x, x' \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2 (\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+)$ est surjective : $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x = \pm\sqrt{y}$ tel que $y = x^2$.

Fonctions réciproques

Définition (Injection, Surjection, Bijection)

Soit $f\,:\,I \to J$ ($I,\;J$ sont des parties de $\mathbb{R}$) :

- f est injective si :

  $\forall y \in J,\;\exists$ au plus $x \in I$ tel que $f(x) = y$
  $(\Leftrightarrow \forall x,\;x' \in I,\;f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.
- f est surjective si : $\forall y \in J, \exists$ au moins $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
- f est bijective (injective et surjective) si : $\forall y \in J, \exists x \in I$ unique tel que $f(x) = y$.

Exemples :

1. $f(x) = x^3 (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ est injective : $x^3 = x'^3 \Rightarrow x = x', \forall x, x' \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2 (\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+)$ est surjective : $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x = \pm\sqrt{y}$ tel que $y = x^2$.
3. $f(x) = x^2 (\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+)$ est bijective : $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x = \sqrt{y} \geq 0$ unique tel que $y = x^2$.

Théorème

Une fonction $f : I \to J$ *est une bijection si et seulement s'il existe une autre fonction bijective* $g : J \to I$ *telle que :* $g \circ f(x) = x, \forall x \in I$ *et* $f \circ g(y) = y, \forall y \in J$.
On note $g = f^{-1}$ *et on l'appelle la fonction réciproque (ou inverse) de* f.

Théorème

Une fonction $f\,:\,I \to J$ *est une bijection si et seulement s'il existe une autre fonction bijective* $g : J \to I$ *telle que :* $g \circ f(x) = x, \forall x \in I$ *et* $f \circ g(y) = y, \forall y \in J$.
On note $g = f^{-1}$ *et on l'appelle la fonction réciproque (ou inverse) de* f.

Théorème

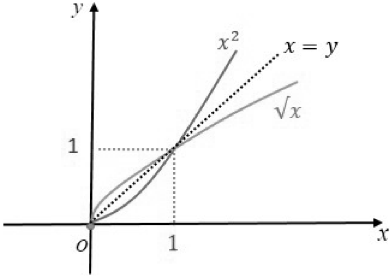
Si $f\,:\,I \to J$ *est continue et strictement monotone sur* I, *alors* f *est bijective et sa fonction réciproque* f^{-1} *est continue sur* J *et est de même sens de variation que* f.
De plus les courbes représentatives de f *et de* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = x$.

Exemples :

- La fonction $f(x) = x^2$ (continue, strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$) a pour fonction réciproque $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (continue, strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$) .

Exemples :

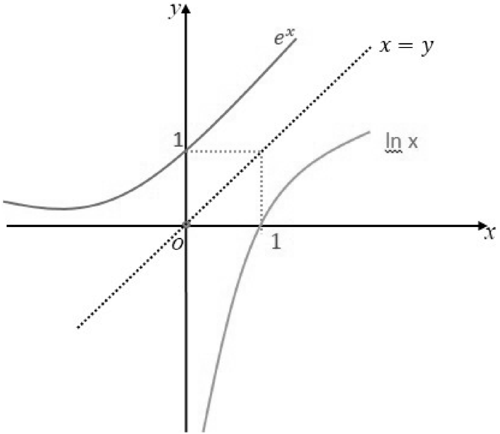
- La fonction $f(x) = x^2$ (continue, strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$) a pour fonction réciproque $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (continue, strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$) .



La fonction réciproque de $f(x) = e^x$

La fonction réciproque de $f(x) = e^x$ (continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0,\ +\infty[$) a pour fonction réciproque $f^{-1}(x) = \ln x$ (continue, strictement croissante de $]\,0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$).

La fonction réciproque de $f(x) = e^x$ (continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0,\ +\infty[$) a pour fonction réciproque $f^{-1}(x) = \ln x$ (continue, strictement croissante de $]\,0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$).



Théorème

Soit $f : I \to J$ *une fonction continue, strictement monotone et dérivable sur* I.
Si $x_0 \in I$ *est tel que* $f'(x_0) \neq 0$, *alors* f^{-1} *est dérivable en* $y_0 = f(x_0)$ *et on a :*

Théorème

Soit $f : I \to J$ *une fonction continue, strictement monotone et dérivable sur* I.
Si $x_0 \in I$ *est tel que* $f'(x_0) \neq 0$, *alors* f^{-1} *est dérivable en* $y_0 = f(x_0)$ *et on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques.

- La fonction réciproque de $f(x) = \sin x$

Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques.

- La fonction réciproque de $f(x) = \sin x$(continue, strictement croissante et dérivable de $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$) est la fonction $f^{-1}(x) = \arcsin x$ (continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$) :

Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques.

- La fonction réciproque de $f(x) = \sin x$(continue, strictement croissante et dérivable de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$) est la fonction $f^{-1}(x) = \arcsin x$ (continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) :

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \ \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \ \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}).$$

Donc $\arcsin$ est dérivable sur$]-1,1[$ de dérivée :

Donc $\arcsin$ est dérivable sur] $-1,1[$ de dérivée :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[.$$

Donc $\arcsin$ est dérivable sur] $-1,1[$ de dérivée :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[.$$

En effet, soit $y \in]-1,1[\Leftrightarrow \exists x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tel que : $\sin x = y$.

Donc $\arcsin$ est dérivable sur$]-1,1[$ de dérivée :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in]-1,1[.$$

En effet, soit $y \in]-1,1[\Leftrightarrow \exists x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tel que : $\sin x = y$.

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, alors on a :

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

- La fonction réciproque de $f(x) = \cos x$

- La fonction réciproque de $f(x) = \cos x$(continue, strictement décroissante et dérivable de $[0,\ \pi]$ dans $[-1, 1]$) est la fonction $f^{-1}(x) = \arccos x$ (continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0,\ \pi]$) :

- La fonction réciproque de $f(x) = \cos x$(continue, strictement décroissante et dérivable de $[0,\ \pi]$ dans $[-1, 1]$) est la fonction $f^{-1}(x) = \arccos x$ (continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0,\ \pi]$) :

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$$(\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},\ \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6})$$

- La fonction réciproque de $f(x) = \cos x$(continue, strictement décroissante et dérivable de $[0,\ \pi]$ dans $[-1, 1]$) est la fonction $f^{-1}(x) = \arccos x$ (continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0,\ \pi]$) :

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$(\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},\ \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6})$
Donc $\arccos$ est dérivable sur$]-1, 1[$ de dérivée :

- La fonction réciproque de $f(x) = \cos x$(continue, strictement décroissante et dérivable de $[0,\ \pi]$ dans $[-1, 1]$) est la fonction $f^{-1}(x) = \arccos x$ (continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0,\ \pi]$) :

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$(\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},\ \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6})$
Donc $\arccos$ est dérivable sur$]-1, 1[$ de dérivée :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in]-1, 1[.$$

- La fonction réciproque de $f(x) = \tan x = tg(x)$

- La fonction réciproque de $f(x) = \tan x = tg(x)$ (continue, strictement croissante et déri- vable de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction $f^{-1}(x) = \arctan x =$ (continue, strictement croissante sur $]-\infty, \infty[$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) :

- La fonction réciproque de $f(x) = \tan x = tg(x)$ (continue, strictement croissante et déri- vable de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction $f^{-1}(x) = \arctan x =$ (continue, strictement croissante sur $]-\infty, \infty[$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) :

$$\arctan x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- La fonction réciproque de $f(x) = \tan x = tg(x)$ (continue, strictement croissante et déri- vable de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction $f^{-1}(x) = \arctan x =$ (continue, strictement croissante sur $]-\infty, \infty[$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) :

$$\arctan x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$(\arctan 0 = 0, \ \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \ \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3})$.
Donc $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

- La fonction réciproque de $f(x) = \tan x = tg(x)$ (continue, strictement croissante et déri- vable de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction $f^{-1}(x) = \arctan x =$ (continue, strictement croissante sur $]-\infty, \infty[$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) :

$$\arctan x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$(\arctan 0 = 0,\ \arctan 1 = \frac{\pi}{4},\ \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3})$.
Donc $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Concavité et Points d'inflexion

Définition (Fonction convexe, Fonction concave)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f est convexe sur I si : $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, $\forall x,\ y \in I, \forall \alpha \in [0,1]$.

Concavité et Points d'inflexion

Définition (Fonction convexe, Fonction concave)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f est convexe sur I si : $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, $\forall x,\ y \in I, \forall \alpha \in [0,1]$.
- f est concave sur I si : $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, $\forall x,\ y \in I, \forall \alpha \in [0,1]$.

Concavité et Points d'inflexion

Définition (Fonction convexe, Fonction concave)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f est convexe sur I si : $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, $\forall x,\ y \in I, \forall \alpha \in [0,1]$.
- f est concave sur I si : $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, $\forall x,\ y \in I, \forall \alpha \in [0,1]$.

Remarque

f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

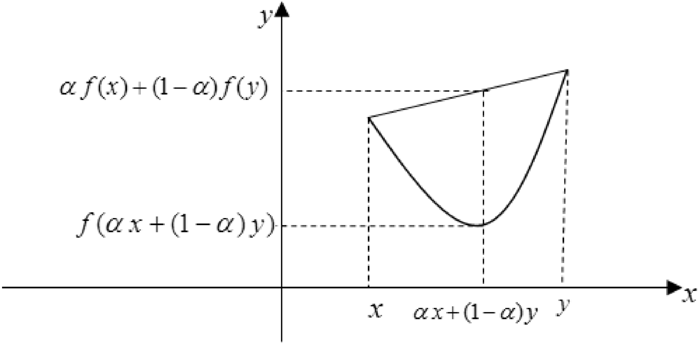
Interprétation géométrique.

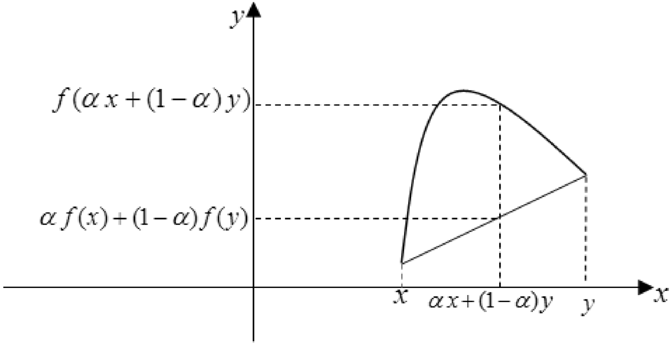
Interprétation géométrique.

L'inégalité dans la définition de la convexité (resp. la concavité) s'interprète géométriquement par le fait que tout arc de la courbe est situé au dessous (resp. au dessus) de sa corde :

Interprétation géométrique.

L'inégalité dans la définition de la convexité (resp. la concavité) s'interprète géométriquement par le fait que tout arc de la courbe est situé au dessous (resp. au dessus) de sa corde :




y
$f(\alpha x+(1-\alpha)y)$
$\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$
x
$\alpha x+(1-\alpha)y$
y
x

On définit aussi la stricte convexité et la stricte concavité avec les inégalités strictes :

On définit aussi la stricte convexité et la stricte concavité avec les inégalités strictes :

- f est strictement convexe sur I si :
  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),\ \forall x \neq y \in I,\ \forall \alpha \in]0,1[.$

On définit aussi la stricte convexité et la stricte concavité avec les inégalités strictes :

- f est strictement convexe sur I si :
  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \ \forall x \neq y \in I, \ \forall \alpha \in]0,1[.$
- f est strictement concave si sur I si :
  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \ \forall x \neq y \in I, \ \forall \alpha \in]0,1[.$

On définit aussi la stricte convexité et la stricte concavité avec les inégalités strictes :

- f est strictement convexe sur I si :
  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),\ \forall x \neq y \in I,\ \forall \alpha \in]0,1[.$
- f est strictement concave si sur I si :
  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),\ \forall x \neq y \in I,\ \forall \alpha \in]0,1[.$

Exemples :

1. La fonction e^x est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

On définit aussi la stricte convexité et la stricte concavité avec les inégalités strictes :

- f est strictement convexe sur I si :
  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),\ \forall x \neq y \in I,\ \forall \alpha \in]0,1[.$
- f est strictement concave si sur I si :
  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),\ \forall x \neq y \in I,\ \forall \alpha \in]0,1[.$

Exemples :

1. La fonction e^x est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $\ln x$ est strictement concave sur $]0,+\infty[$.

Théorème

Si f est de classe C^1 sur I, alors :

Théorème

Si f est de classe C^1 sur I, alors :

a. *f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

Théorème

Si f est de classe C^1 sur I, alors :

a. *f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

b. *f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I (si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

Théorème

Si f est de classe C^1 sur I, alors :

a. *f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

b. *f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I (si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

Théorème

Si f est de classe C^1 sur I, alors :

a. *f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

b. *f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I (si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

a. *Si f est convexe sur I, alors la courbe de f est au dessus de chacune de ses tangentes :*

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \leq f(x), \ \forall x, \ x_0 \in I \ :$$

Théorème

Si f est de classe C^1 sur I, alors :

a. *f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

b. *f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I (si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I lorsque f est deux fois dérivable).*

Théorème

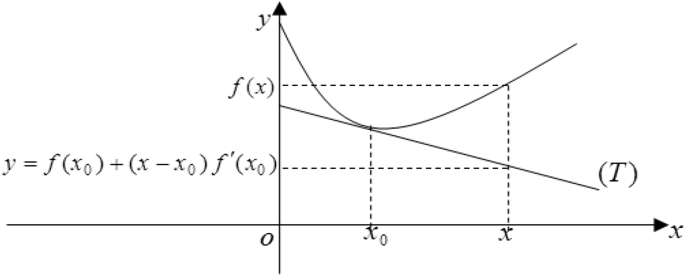
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

a. *Si f est convexe sur I, alors la courbe de f est au dessus de chacune de ses tangentes :*

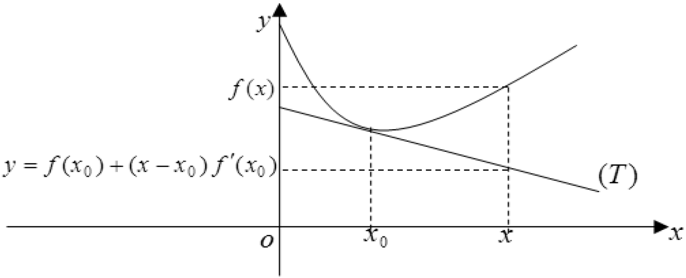
$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \leq f(x), \ \forall x, \ x_0 \in I \ :$$

b. *Si f est concave sur I alors la courbe de f est au dessous de chacune de ses tangentes :*

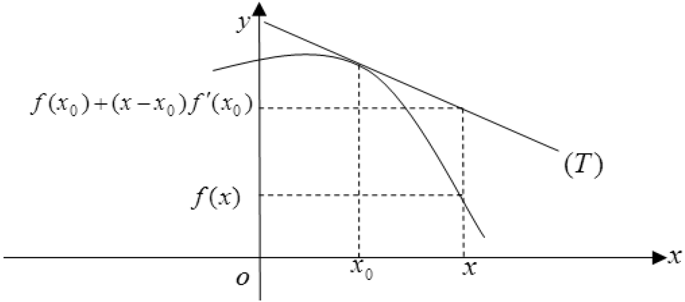
$$f(x) \leq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0), \ \forall x, \ x_0 \in I.$$



y
$f(x)$
$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$
(T)
O
x_0
x
x



y
f(x)
y = f(x_0) + (x − x_0) f′(x_0)
(T)
o
x_0
x
x



y
f(x_0) + (x − x_0) f′(x_0)
(T)
f(x)
o
x_0
x
x

Propriétés

Si f est de classe C^1 est convexe (resp. concave) sur $I=[a,\ b]$ telle que $f'(x_0)=0$, alors f atteint un minimum (resp. un maximum) global en x_0.

Propriétés

Si f est de classe C^1 est convexe (resp. concave) sur $I = [a,\ b]$ telle que $f'(x_0) = 0$, alors f atteint un minimum (resp. un maximum) global en x_0.

Définition (Point d'inflexion)

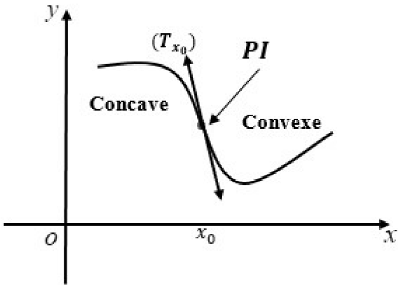
Soit $f\,:\, I \to \mathbb{R}$ une fonction. Tout point $x_0 \in I$ où la concavité change (d'un côté f est convexe et de l'autre elle est concave) est appelé un point d'inflexion de la courbe de f.

Propriétés

Si f est de classe C^1 est convexe (resp. concave) sur $I = [a, \ b]$ telle que $f'(x_0) = 0$, alors f atteint un minimum (resp. un maximum) global en x_0.

Définition (Point d'inflexion)

Soit $f \ : \ I \to \mathbb{R}$ une fonction. Tout point $x_0 \in I$ où la concavité change (d'un côté f est convexe et de l'autre elle est concave) est appelé un point d'inflexion de la courbe de f.



Remarque

- *La tangente en tout point d'inflexion où la fonction est dérivable, traverse la courbe de la fonction. Cependant, on peut rencontrer le cas d'un point d'inflexion même si la fonction n'est pas dérivable en ce point.*

Remarque

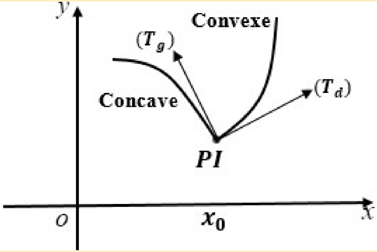
- *La tangente en tout point d'inflexion où la fonction est dérivable, traverse la courbe de la fonction. Cependant, on peut rencontrer le cas d'un point d'inflexion même si la fonction n'est pas dérivable en ce point.*

  L'exemple suivant montre que la fonction est dérivable à droite et à gauche en x_0 mais n'étant pas dérivable en x_0 (d'où la présence de deux demi-tangentes à la courbe en ce point) et qu'en ce point la courbe admet un point d'inflexion dû à un changement de concavité :

Remarque

- *La tangente en tout point d'inflexion où la fonction est dérivable, traverse la courbe de la fonction. Cependant, on peut rencontrer le cas d'un point d'inflexion même si la fonction n'est pas dérivable en ce point.*

  L'exemple suivant montre que la fonction est dérivable à droite et à gauche en x_0 mais n'étant pas dérivable en x_0 (d'où la présence de deux demi-tangentes à la courbe en ce point) et qu'en ce point la courbe admet un point d'inflexion dû à un changement de concavité :



Remarque

- *Si f est deux fois dérivable sur I et x_0 est un point d'inflexion de la courbe de f alors : $f''(x_0) = 0$ (car en ce point, f est convexe $(f''(x_0) \geq 0)$ et f est concave $(f''(x_0) \leq 0)$). Par ailleurs, cette condition n'est pas suffisante (Exemple : $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ et $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ est totalement convexe sur $\mathbb{R}$ donc n'admet aucun point d'inflexion).*

Remarque

- *Si f est deux fois dérivable sur I et x_0 est un point d'inflexion de la courbe de f alors : $f''(x_0) = 0$ (car en ce point, f est convexe $(f''(x_0) \geq 0)$ et f est concave $(f''(x_0) \leq 0)$). Par ailleurs, cette condition n'est pas suffisante (Exemple : $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ et $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ est totalement convexe sur $\mathbb{R}$ donc n'admet aucun point d'inflexion).*
- *Si f est deux fois dérivable sur I telle que $f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe, alors x_0 est un point d'inflexion de la courbe de f.*

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.
- Déterminer le domaine de définition de f.

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.
- Déterminer le domaine de définition de f.
- Regarder si elle est paire, impaire ou périodique pour réduire son domaine d'étude.

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.
- Déterminer le domaine de définition de f.
- Regarder si elle est paire, impaire ou périodique pour réduire son domaine d'étude.
- Étudier la continuité de f et distinguer les points de discontinuité éventuels.

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.
- Déterminer le domaine de définition de f.
- Regarder si elle est paire, impaire ou périodique pour réduire son domaine d'étude.
- Étudier la continuité de f et distinguer les points de discontinuité éventuels.
- Étudier la dérivabilité de f tout en précisant les points où f n'étant pas dérivable puis calculer sa fonction dérivée.

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.
- Déterminer le domaine de définition de f.
- Regarder si elle est paire, impaire ou périodique pour réduire son domaine d'étude.
- Étudier la continuité de f et distinguer les points de discontinuité éventuels.
- Étudier la dérivabilité de f tout en précisant les points où f n'étant pas dérivable puis calculer sa fonction dérivée.
- Étudier les branches infinies s'il y'en a.

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.
- Déterminer le domaine de définition de f.
- Regarder si elle est paire, impaire ou périodique pour réduire son domaine d'étude.
- Étudier la continuité de f et distinguer les points de discontinuité éventuels.
- Étudier la dérivabilité de f tout en précisant les points où f n'étant pas dérivable puis calculer sa fonction dérivée.
- Étudier les branches infinies s'il y'en a.
- Étudier le sens de variation de f (en discutant le signe de f') et construire le tableau de variation puis déterminer ses extremums locaux (globaux) s'il y'en a.

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.
- Déterminer le domaine de définition de f.
- Regarder si elle est paire, impaire ou périodique pour réduire son domaine d'étude.
- Étudier la continuité de f et distinguer les points de discontinuité éventuels.
- Étudier la dérivabilité de f tout en précisant les points où f n'étant pas dérivable puis calculer sa fonction dérivée.
- Étudier les branches infinies s'il y'en a.
- Étudier le sens de variation de f (en discutant le signe de f') et construire le tableau de variation puis déterminer ses extremums locaux (globaux) s'il y'en a.
- Étudier la convexité et la concavité de f et en déduire les points d'inflexion éventuels.

Démarche pratique pour l'étude globale des fonctions.

- Simplifier si possible l'expression de la fonction f à étudier.
- Déterminer le domaine de définition de f.
- Regarder si elle est paire, impaire ou périodique pour réduire son domaine d'étude.
- Étudier la continuité de f et distinguer les points de discontinuité éventuels.
- Étudier la dérivabilité de f tout en précisant les points où f n'étant pas dérivable puis calculer sa fonction dérivée.
- Étudier les branches infinies s'il y'en a.
- Étudier le sens de variation de f (en discutant le signe de f') et construire le tableau de variation puis déterminer ses extremums locaux (globaux) s'il y'en a.
- Étudier la convexité et la concavité de f et en déduire les points d'inflexion éventuels.
- Construire la courbe représentative de f d'équation $y = f(x)$ sur un repère orthonormé(xoy).

Exemple

Soit la fonction $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$ *qui est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(fonction polynomiale).*

Exemple

Soit la fonction $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$ *qui est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(fonction polynomiale).*
Sa dérivée est $f'(x) = -x^2 + 2x + 3$ *et* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 3$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$ *qui est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(fonction polynomiale).*

Sa dérivée est $f'(x) = -x^2 + 2x + 3$ *et* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 3$.

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-5}{3}$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$ *qui est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(fonction polynomiale).*

Sa dérivée est $f'(x) = -x^2 + 2x + 3$ *et* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 3$.

Tableau de variation de f.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x & -\infty & & -1 & & 3 & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\
\hline
f(x) & +\infty & & & & 9 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & \frac{-5}{3} & & & & -\infty \\
\hline
\end{array}
$$

D'après ce tableau de variation, f *admet un minimum local en* -1 *et un maximum local en 3 ; puisque en ces points* f' *s'annule en changeant de signe (mais il ne s'agit pas d'extremums globaux de* f*).*

f *est deux fois dérivable :* $f''(x) = -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$ *qui est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(fonction polynomiale).*

Sa dérivée est $f'(x) = -x^2 + 2x + 3$ *et* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 3$.

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-5}{3}$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

D'après ce tableau de variation, f *admet un minimum local en* -1 *et un maximum local en 3 ; puisque en ces points* f' *s'annule en changeant de signe (mais il ne s'agit pas d'extremums globaux de* f*).*

f *est deux fois dérivable :* $f''(x) = -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Puisque f'' *s'annule en* 1 *et change de signe* $(f''(x) \leq 0, \forall x \geq 1$ *:* f *est concave sur* $[1, +\infty[$ *et* $f''(x) \geq 0, \forall x \leq 1$ *:* f *est convexe sur* $]-\infty, 1]$ *alors la courbe de* f *admet un seul point d'inflexion en* 1.