Module: Mathématique 1

Chapitre 5: Suites

Prof. Mohammed SRATI

Licence d'Éducation

Spécialité: Enseignement Primaire

02-01-2023

Sommaire

3. Suites

- Suites numériques
- Suites arithmétiques
- Suites géométriques

Definition

Une suite numérique est une application u définie d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow u(n) = u_n. \end{aligned}$$

Le nombre réel $u(n) = u_n$ s'appelle le terme général de la suite. La suite définie par l'application u est notée $(u_n)_{n\in I}$ ou tout simplement (u_n) si $I = \mathbb{N}$. L'ensemble $\{u(n) : n \in I\}$ est appelé ensemble des valeurs de la suite.

Definition

Une suite numérique est une application u définie d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow u(n) = u_n. \end{aligned}$$

Le nombre réel $u(n) = u_n$ s'appelle le terme général de la suite. La suite définie par l'application u est notée $(u_n)_{n\in I}$ ou tout simplement (u_n) si $I = \mathbb{N}$. L'ensemble $\{u(n) : n \in I\}$ est appelé ensemble des valeurs de la suite.

Exemple

$u_n = \dfrac{1}{n+1}$
$v_n = (-1)^n, \ n \geq 1.$

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par le couple* (a,f), *où* a *est un réel et* f *une fonction réelle de variable réelle, telle que*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \textit{si } n \geq 1 \end{cases}$$

est appelée suite récurrente (simple).

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par le couple* (a,f), *où* a *est un réel et* f *une fonction réelle de variable réelle, telle que*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

est appelée suite récurrente (simple).

Définition

On dit que la suite (u_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \Rightarrow \ |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *ou* $u_n \to \ell$.

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le couple (a,f), où a est un réel et f une fonction réelle de variable réelle, telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \textit{si } n \geq 1 \end{cases}$$

est appelée suite récurrente (simple).

Définition

On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \Rightarrow \ |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Exemple

La suite $(\frac{1}{n+1})$ *converge vers 0.*
Déterminons la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$*. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Exemple

La suite $(\dfrac{1}{n+1})$ *converge vers 0.*
Déterminons la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. *On a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

Définition

(Divergence vers $\pm\infty$*)*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, une suite réelle, diverge vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*), si* $\forall A > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_0$

$$u_n > A \qquad (\text{resp. } u_n < -A)$$

Exemple

La suite $(\dfrac{1}{n+1})$ *converge vers 0.*
Déterminons la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. *On a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Définition

(Divergence vers $\pm\infty$*)*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *une suite réelle, diverge vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*), si* $\forall A > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_0$

$$u_n > A \qquad (\text{resp. } u_n < -A)$$

Exemple

$u_n = n^2 + 1$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Propriétés

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Propriétés

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Exercice Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}, \quad v_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}, \quad w_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

Suite majorée, minorée, bornée

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite.*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée si* $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée si* $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :*

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Suite majorée, minorée, bornée

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite.*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée si* $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée si* $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :*

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Exemple

La suite de terme général $u_n = \sin(n)$ *est bornée car pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leqslant 1.$

Propriétés

Toute suite convergente est bornée.

Propriétés

Toute suite convergente est bornée.

Remarque

La réciproque est fausse.

Propriétés

Toute suite convergente est bornée.

Remarque

La réciproque est fausse.

Exemple

La suite $(-1)^n$, $n \geq 1$, *est bornée mais n'est pas convergente.*

Suites monotones

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite.*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si* $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si* $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Suites monotones

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite.*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Remarque

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n)*, on peut :*

1. *étudier le signe de* $u_{n+1} - u_n$ *pour tout* n,
2. *comparer le quotient* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *à 1 (pour tout* n*), à condition que la suite* (u_n) *ne comporte pas de termes nuls,*
3. *étudier les variations de la fonction* f *s'il existe* f *telle que* $f(n) = u_n$.

Exemple

- *Soit* (u_n) *la suite de terme général* $u_n = 3n + 2$*. La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f(x) = 3x + 2$ *vérifie bien la relation* $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = u_n$*. Cette fonction étant strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$*, la suite* (u_n) *l'est aussi.*

Exemple

- *Soit* (u_n) *la suite de terme général* $u_n = 3n + 2$. *La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f(x) = 3x + 2$ *vérifie bien la relation* $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = u_n$. *Cette fonction étant strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$, *la suite* (u_n) *l'est aussi.*
- *Soit* (u_n) *la suite de terme général* $u_n = n^2$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1 > 0.$$

La suite (u_n) *est donc strictement croissante.*

Exemple

- *Soit* (u_n) *la suite de terme général* $u_n = 3n + 2$*. La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f(x) = 3x + 2$ *vérifie bien la relation* $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = u_n$*. Cette fonction étant strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$*, la suite* (u_n) *l'est aussi.*
- *Soit* (u_n) *la suite de terme général* $u_n = n^2$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1 > 0.$$

La suite (u_n) *est donc strictement croissante.*

Theorem

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Remarque

- *Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers* $+\infty$.
- *Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers* $-\infty$.

Remarque

- *Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers* $+\infty$.
- *Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers* $-\infty$.

Exemple

- *La suite de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *pour* $n \geqslant 1$ *est décroissante et minorée donc convergente.*

Remarque

- *Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers* $+\infty$.
- *Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers* $-\infty$.

Exemple

- *La suite de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *pour* $n \geqslant 1$ *est décroissante et minorée donc convergente.*
- *La suite de terme général* $u_n = e^n$ *est croissante mais pas majorée donc est une suite divergente.*

Opération élémentaires sur les suites convergentes

Propriétés

Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles. Si (u_n) converge vers l_1 et (v_n) converge vers l_2. Alors

1. *La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$.*
2. *La suite produit $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.*
3. *La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l_1|$.*
4. *Si $l_1 \neq 0$, alors il existe un entier N tel que $u_n \neq 0$ si $n \geq N$ et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq N}$ converge vers $\frac{1}{l_1}$.*

Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Propriétés

1. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$. *Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Remarque

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. *Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
2. *Attention : si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite convergente telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, *on ne peut pas affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$. *Par exemple la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donnée par*

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.

Theorem (*Théorème de gendarme*)

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *trois suites réelles telles que :*

$$u_n \leq v_n \leq w_n \ \text{ pour tout } \ n \in \mathbb{N}.$$

On a :

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple

Etudier la suite de terme général

$$u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n+2}.$$

On a

$$-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-1}{n+2} \leqslant \frac{\sin(n)}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$

$$2 + \frac{-1}{n+2} \leqslant 2 + \frac{\sin(n)}{n+2} \leqslant 2 + \frac{1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \dfrac{-1}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \dfrac{1}{n+2} = 2$, *ce qui implique*

$$\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{\sin(n)}{n+2} = 2.$$

Remarque

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l'$, *et* $l \neq l'$, *on ne peut rien dire de* v_n.

Remarque

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l'$, *et* $l \neq l'$, *on ne peut rien dire de* v_n.

Exemple

$$u_n = -2 + \frac{1}{n}, \qquad w_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -2, \qquad \lim_{n\to+\infty} w_n = 2$$

Si on prend $v_n = \frac{1}{n}$, *on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ *et* $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si on prend $v_n = (-1)^n$ *n'a pas de limite bien que :* $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Exercice. Déterminer par comparaison (théorème de gendarme) la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes

$$u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n+1}, \quad v_n = \frac{2n + (-1)^n}{2n+1}, \quad w_n = \frac{n^2 + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2 + n + 1}.$$

Remarquer que $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
1. La suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est décroissante.
3. La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Définition

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
1. La suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est décroissante.
3. La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Exemple

$u_n = \frac{-1}{n}$ *et* $v_n = \frac{1}{n}$ *sont deux suites adjacentes, car la première est croissante, la seconde est décroissante et leur différence est nulle.*

Propriétés

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Propriétés

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Exercice. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

Exemple

- *La suite* (u_n) *définie par :* $u_n = 7 - 9n$ *est une suite arithmétique. En effet :*

$$u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9.$$

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9*.* (u_n) *est une suite arithmétique de raison* -9*.*

Exemple

- *La suite* (u_n) *définie par :* $u_n = 7 - 9n$ *est une suite arithmétique. En effet :*

$$u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9.$$

  La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9*.* (u_n) *est une suite arithmétique de raison* -9*.*

- *La suite* (v_n) *définie par :* $v_n = n^2 + 3$ *est-elle arithmétique ?*

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1.$$

  La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante. (v_n) *n'est pas une suite arithmétique.*

Propriétés

Si (u_n) *est une suite arithmétique de raison r, alors*

$$u_n = u_0 + nr \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Propriétés

Si (u_n) *est une suite arithmétique de raison r, alors*

$$u_n = u_0 + nr \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice. Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

1. Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Remarque

Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison r.*
Si $r = 0$ *la suite* (u_n) *est constante.*
Si $r > 0$*, la suite* (u_n) *est strictement croissante.*
Si $r < 0$*, la suite* (u_n) *est strictement décroissante.*

Remarque

Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison r.*
Si $r = 0$ *la suite* (u_n) *est constante.*
Si $r > 0$, *la suite* (u_n) *est strictement croissante.*
Si $r < 0$, *la suite* (u_n) *est strictement décroissante.*

Propriétés

Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison r, alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)\frac{2u_0 + nr}{2}$$

Remarque

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Si $r = 0$ la suite (u_n) est constante.
Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Propriétés

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)\frac{2u_0 + nr}{2}$$

Remarque

Si le premier terme de la suite est u_1, alors

$$S_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}.$$

Exemple

- *La suite* (u_n) *définie par* $u_n = n$ *est arithmétique de raison 1 donc :*

$$S_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- *La suite* (u_n) *définie par* $u_n = 2n + 1$ *est arithmétique de raison 2 donc :*

$$S_n = 1 + 3 + ... + (2n+1) = \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2.$$

Exercice. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 10.

- Donner le terme général de (u_n) et calculer u_{20} .
- Calculer la somme $S_{20} = u_0 + u_1 + ... + u_{20}$.

Exercice. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 10.

- Donner le terme général de (u_n) et calculer u_{20} .
- Calculer la somme $S_{20} = u_0 + u_1 + ... + u_{20}$.

Exercice. Soit (u_n) la suite défini sur $\mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = u_n + 3, \quad \text{et} \quad u_0 = 1$$

- Justifier que cette suite est arithmétique.
- Calculer u_1, u_2, et u_3.
- Calculer u_n en fonction de n.
- A partir de quel rang la suite u_n est elle supérieur ou égale à 100.

Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) *est dite géométrique s'il existe un réel* q *tel que, pour tout entier naturel* n*,*

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre réel q *est appelé la raison de la suite géométrique* (u_n)*.*

Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n).

Exemple

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = 5.$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.
(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

Exercice. Montrer que ces suites sont géométriques, et préciser leur raison et leur premier terme.

$$u_n = (-4)^{2n+1}, \quad v_n = 2^n \times \frac{1}{3^{n+1}}, \quad w_n = (-1)^n \times 2^{3n+1}.$$

Exercice. Montrer que ces suites sont géométriques, et préciser leur raison et leur premier terme.

$$u_n = (-4)^{2n+1}, \quad v_n = 2^n \times \frac{1}{3^{n+1}}, \quad w_n = (-1)^n \times 2^{3n+1}.$$

Remarque

Si $q = 0$ tous les termes de la suite sont nuls sauf, peut être, u_0. Nous supposerons dans la suite que $q \neq 0$.

Propriétés

Soit (u_n) *une suite géométrique de raison* q*, alors :*

$$u_n = q^n u_0 \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice. Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.

1. Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice. Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.

1. Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Propriétés

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \textit{si} \quad q \neq 1$$

$$S_n = (n+1)u_0 \quad \textit{si} \quad q = 1.$$

En particulier, si $0 < |q| < 1$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = u_0 \dfrac{1}{1-q}$.

Exercice. On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite u_n.
- Déterminer la monotonie de la suite u_n, et préciser sa limite.
- Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.