المدرسة العليا للأساتذة بفاس
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE FES

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Module: Mathématique 1

Chapitre 1: Ensembles numériques et opérations

Prof. Mohammed SRATI

Licence d'Éducation

Spécialité: Enseignement Primaire

07-11-2022

Sommaire

1. Ensembles numériques et opérations
   - Nombres entiers naturels
   - Nombres entiers relatifs
   - Nombres décimaux, périodiques et rationnels
   - Nombres réels
   - Les intervalles
   - Approximation

Motivation

$1; 2; 3; 4; 5; ...$ sont les premiers nombres que l'on apprend déjà avant d'entrer à l'école.

Motivation

$1; 2; 3; 4; 5; \ldots$ sont les premiers nombres que l'on apprend déjà avant d'entrer à l'école.

Ces nombres permettent de compter des objets quelconques.

Motivation

$1; 2; 3; 4; 5; ...$ sont les premiers nombres que l'on apprend déjà avant d'entrer à l'école.

Ces nombres permettent de compter des objets quelconques.

Cette suite de nombres est illimitée : on n'a jamais fini de les énumérer.

Motivation

$1; 2; 3; 4; 5; ...$ sont les premiers nombres que l'on apprend déjà avant d'entrer à l'école.

Ces nombres permettent de compter des objets quelconques.

Cette suite de nombres est illimitée : on n'a jamais fini de les énumérer.

Assez rapidement dans l'histoire, on a éprouvé la nécessité de représenter l'absence d'objet à dénombrer par un symbole : 0 (zéro).

Motivation

$1; 2; 3; 4; 5; ...$ sont les premiers nombres que l'on apprend déjà avant d'entrer à l'école.

Ces nombres permettent de compter des objets quelconques.

Cette suite de nombres est illimitée : on n'a jamais fini de les énumérer.

Assez rapidement dans l'histoire, on a éprouvé la nécessité de représenter l'absence d'objet à dénombrer par un symbole : 0 (zéro).

Ces nombres sont appelés nombres entiers naturels.

Définition

Tous les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ *appelé l'ensemble des entiers naturels et qui est défini comme suit :*

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}.$$

Définition

Tous les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ *appelé l'ensemble des entiers naturels et qui est défini comme suit :*

$$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ ...\}.$$

Pour dire qu'un nombre tel que 17 est un élément de cet ensemble, on écrit, $17 \in \mathbb{N}$ qui se lit "17 appartient à" $\mathbb{N}$.

Définition

Tous les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ *appelé l'ensemble des entiers naturels et qui est défini comme suit :*

$$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ ...\}.$$

Pour dire qu'un nombre tel que 17 est un élément de cet ensemble, on écrit, $17 \in \mathbb{N}$ qui se lit "17 appartient à" $\mathbb{N}$.

On désigne par $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. $\mathbb{N}^*$ se lit $\mathbb{N}$ privé de zéro.

Puissance d'un nombre naturel

Definition

Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et a un nombre naturel

$$a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

a^n se lit " a à la puissance n ".

Exemple : $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$

Propriétés

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et a b deux nombres naturels. On a

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ *avec* $a \neq 0$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ *avec* $a \neq 0$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ *avec* $b \neq 0$

Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition

- *On dit qu'un entier n est un entier pair s'il divisible par* 2.

Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition

- *On dit qu'un entier n est un entier pair s'il divisible par* 2.
- *Un entier qui n'est pas pair est un entier impair.*

Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition

- *On dit qu'un entier n est un entier pair s'il divisible par* 2.
- *Un entier qui n'est pas pair est un entier impair.*

Exemple :

- L'ensemble des entiers naturels pairs peut être écrit comme ceci :

Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition

- *On dit qu'un entier n est un entier pair s'il divisible par* 2.
- *Un entier qui n'est pas pair est un entier impair.*

Exemple :

- L'ensemble des entiers naturels pairs peut être écrit comme ceci :

  Entiers naturels pairs $= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$

Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition

- *On dit qu'un entier n est un entier pair s'il divisible par* 2.
- *Un entier qui n'est pas pair est un entier impair.*

Exemple :

- L'ensemble des entiers naturels pairs peut être écrit comme ceci :

  Entiers naturels pairs $= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$

- L'ensemble des entiers naturels impairs peut être écrit comme ceci :

Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition

- *On dit qu'un entier n est un entier pair s'il divisible par* 2.
- *Un entier qui n'est pas pair est un entier impair.*

Exemple :

- L'ensemble des entiers naturels pairs peut être écrit comme ceci :

  Entiers naturels pairs $= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$

- L'ensemble des entiers naturels impairs peut être écrit comme ceci :

  Entiers naturel impair = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}

Propriétés

- *Un entier naturel* n *est pair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.

Propriétés

- *Un entier naturel* n *est pair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.
- *Un entier naturel* n *est impair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k + 1$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.

Propriétés

- *Un entier naturel* n *est pair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.
- *Un entier naturel* n *est impair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k + 1$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit n un entier naturel.

Propriétés

- *Un entier naturel* n *est pair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.
- *Un entier naturel* n *est impair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k + 1$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que si n est pair alors n^2 pair.

Propriétés

- *Un entier naturel* n *est pair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.
- *Un entier naturel* n *est impair si et seulement s'il s'écrit sous la forme* $n = 2 \times k + 1$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que si n est pair alors n^2 pair.
2. Montrer que si n est impair alors n^2 impair.

Proposition

La somme de deux entiers naturels de même parité est un entier naturel pair.
(C-à-d : pair + pair = pair et impair + impair = pair.)

Proposition

La somme de deux entiers naturels de même parité est un entier naturel pair.
(C-à-d : pair + pair = pair et impair + impair = pair.)

Exercice :

Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n+1)$ est pair.

Diviseurs et Multiples d'un entier

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que

$$a = k \times b$$

On dit que

- *b divise a (ou b est un diviseur de a). On note $b|a$.*

Diviseurs et Multiples d'un entier

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que

$$a = k \times b$$

On dit que

- *b divise a (ou b est un diviseur de a). On note $b|a$.*
- *a est un multiple de b.*

Diviseurs et Multiples d'un entier

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que

$$a = k \times b$$

On dit que

- b *divise* a *(ou* b *est un diviseur de* a*). On note* $b|a$*.*
- a *est un multiple de* b*.*
- a *est divisible par* b*.*

Diviseurs et Multiples d'un entier

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que

$$a = k \times b$$

On dit que

- *b divise a (ou b est un diviseur de a). On note $b|a$.*
- *a est un multiple de b.*
- *a est divisible par b.*

Exemple :

7 divise 56 car $56 = 7 \times 8$.

Diviseurs et Multiples d'un entier

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que

$$a = k \times b$$

On dit que

- b *divise* a *(ou* b *est un diviseur de* a*). On note* $b|a$*.*
- a *est un multiple de* b*.*
- a *est divisible par* b*.*

Exemple :

7 divise 56 car $56 = 7 \times 8$.
7 est un diviseur de 56 et 56 est un multiple de 7.

Diviseurs et Multiples d'un entier

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que

$$a = k \times b$$

On dit que

- *b divise a (ou b est un diviseur de a). On note $b|a$.*
- *a est un multiple de b.*
- *a est divisible par b.*

Exemple :

7 divise 56 car $56 = 7 \times 8$.
7 est un diviseur de 56 et 56 est un multiple de 7.
On peut écrire $7|56$.

Remarque

- 0 *est un multiple de tous les entiers naturels non nuls.*

Remarque

- 0 *est un multiple de tous les entiers naturels non nuls.*
- 1 *est un diviseur de tous les entiers naturels.*

Remarque

- 0 *est un multiple de tous les entiers naturels non nuls.*
- 1 *est un diviseur de tous les entiers naturels.*
- *Tous les entiers naturels sont divisible par* 1 *et par eux-mêmes.*

Remarque

- 0 *est un multiple de tous les entiers naturels non nuls.*
- 1 *est un diviseur de tous les entiers naturels.*
- *Tous les entiers naturels sont divisible par* 1 *et par eux-mêmes.*
- *Tout entiers naturel non nul a un nombre fini de diviseurs. Pour simplifier les écritures, on notera souvent* $D(n)$. *L'ensemble des diviseurs de* n *dans* $\mathbb{N}$.

Remarque

- 0 *est un multiple de tous les entiers naturels non nuls.*
- 1 *est un diviseur de tous les entiers naturels.*
- *Tous les entiers naturels sont divisible par* 1 *et par eux-mêmes.*
- *Tout entiers naturel non nul a un nombre fini de diviseurs. Pour simplifier les écritures, on notera souvent* $D(n)$*. L'ensemble des diviseurs de* n *dans* $\mathbb{N}$*.*

Exemple :

Remarque

- 0 *est un multiple de tous les entiers naturels non nuls.*
- 1 *est un diviseur de tous les entiers naturels.*
- *Tous les entiers naturels sont divisible par* 1 *et par eux-mêmes.*
- *Tout entiers naturel non nul a un nombre fini de diviseurs. Pour simplifier les écritures, on notera souvent* $D(n)$*. L'ensemble des diviseurs de* n *dans* $\mathbb{N}$*.*

Exemple :

- Les diviseurs de 30 sont : $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Remarque

- 0 *est un multiple de tous les entiers naturels non nuls.*
- 1 *est un diviseur de tous les entiers naturels.*
- *Tous les entiers naturels sont divisible par* 1 *et par eux-mêmes.*
- *Tout entiers naturel non nul a un nombre fini de diviseurs. Pour simplifier les écritures, on notera souvent* $D(n)$*. L'ensemble des diviseurs de* n *dans* $\mathbb{N}$*.*

Exemple :

- Les diviseurs de 30 sont : $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.
- Les multiples de 30 sont : $M(30) = \{0, 30, 60, 90, ...\}$ (il y'en a une infinité).

Propriétés

(La divisibilité par : $2, 3, 5, 9$*)*

Propriétés

(La divisibilité par : $2, 3, 5, 9$*)*

- *Un entier est divisible par* 2 *si son chiffre des unités est pair (c-à-d :* $0; 2; 4; 6; 8$*).*

Propriétés

(La divisibilité par : $2, 3, 5, 9$*)*

- *Un entier est divisible par* 2 *si son chiffre des unités est pair (c-à-d :* $0; 2; 4; 6; 8$*).*
- *Un entier est divisible par* 3 *si la somme de ses chiffres est divisible par* 3*.*

Propriétés

(La divisibilité par : $2, 3, 5, 9$*)*

- *Un entier est divisible par* 2 *si son chiffre des unités est pair (c-à-d :* $0; 2; 4; 6; 8$*).*
- *Un entier est divisible par* 3 *si la somme de ses chiffres est divisible par* 3*.*
- *Un entier est divisible par* 5 *s'il se termine par* 0 *ou* 5*.*

Propriétés

(La divisibilité par : $2, 3, 5, 9$*)*

- *Un entier est divisible par* 2 *si son chiffre des unités est pair (c-à-d :* 0; 2; 4; 6; 8*).*
- *Un entier est divisible par* 3 *si la somme de ses chiffres est divisible par* 3*.*
- *Un entier est divisible par* 5 *s'il se termine par* 0 *ou* 5*.*
- *Un entier est divisible par* 9 *si la somme de ses chiffres est divisible par* 9*.*

Propriétés

(La divisibilité par : $2, 3, 5, 9$*)*

- *Un entier est divisible par* 2 *si son chiffre des unités est pair (c-à-d :* $0; 2; 4; 6; 8$*).*
- *Un entier est divisible par* 3 *si la somme de ses chiffres est divisible par* 3*.*
- *Un entier est divisible par* 5 *s'il se termine par* 0 *ou* 5*.*
- *Un entier est divisible par* 9 *si la somme de ses chiffres est divisible par* 9*.*

Division euclidienne

Propriétés

Soit a un entier naturel et b entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers $(q;r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

Division euclidienne

Propriétés

Soit a un entier naturel et b entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers $(q;r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

Définition

- q est appelé le quotient de la division euclidienne de a par b,
- r est appelé le reste.

Exemple :

Dans la division euclidienne de 412 par 15, on a :

$$412 = 15 \times 27 + 7$$

Exercice : Calculer la division euclidienne de 164 par 5, et de 487 par 4.

Relation de congruence

On considère la suite de nombres : 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.

Relation de congruence

On considère la suite de nombres : 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.
Si on prend deux quelconques de ces nombres, alors leur différence est divisible par 5.

Relation de congruence

On considère la suite de nombres : 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.
Si on prend deux quelconques de ces nombres, alors leur différence est divisible par 5.
Par exemple : 21 -6 = 15 qui est divisible par 5. On dit que 21 et 6 sont congrus modulo 5.

Définition

Soit n un entier naturel non nul. Deux entiers a et b sont congrus modulo n lorsque $a-b$ est divisible par n. On note $a \equiv b[n]$.

Relation de congruence

On considère la suite de nombres : 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.
Si on prend deux quelconques de ces nombres, alors leur différence est divisible par 5.
Par exemple : 21 -6 = 15 qui est divisible par 5. On dit que 21 et 6 sont congrus modulo 5.

Définition

Soit n un entier naturel non nul. Deux entiers a et b sont congrus modulo n lorsque $a-b$ est divisible par n. On note $a \equiv b[n]$.

Exemple :

$11 \equiv 7[4]$
$42 \equiv 6[6]$

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul. Deux entiers a et b sont congrus modulo n, si et seulement si, la division euclidienne de a par n à le même reste que la division euclidienne de b par n.

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul. Deux entiers a et b sont congrus modulo n, si et seulement si, la division euclidienne de a par n à le même reste que la division euclidienne de b par n.

Exemple :

$11 = 4 \times 2 + 3$ et $7 = 4 \times 1 + 3$, donc $11 \equiv 7[4]$.

Exercice : Vérifier que $25 \equiv 1[12]$, $21 \equiv 6[5]$. .

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

a $a \equiv a[n]$ *pour tout entier relatif* a.

b *Si* $a \equiv b[n]$ *et* $b \equiv c[n]$ *alors* $a \equiv c[n]$ *(Relation de transitivité)*

Démonstration :

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

a $a \equiv a[n]$ *pour tout entier relatif* a.

b *Si* $a \equiv b[n]$ *et* $b \equiv c[n]$ *alors* $a \equiv c[n]$ *(Relation de transitivité)*

Démonstration :

a) $a - a = 0$ est divisible par n.

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

a $a \equiv a[n]$ *pour tout entier relatif* a.

b *Si* $a \equiv b[n]$ *et* $b \equiv c[n]$ *alors* $a \equiv c[n]$ *(Relation de transitivité)*

Démonstration :

a) $a - a = 0$ est divisible par n.
b) $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ donc n divise $a - b$ et $b - c$ donc n divise $a - b + b - c = a - c$.

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul. Soient a, b, a' et b' des nombres relatifs tels que $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a :

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul. Soient a, b, a' et b' des nombres relatifs tels que $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a :

- $a + a' \equiv b + b'[n]$

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul. Soient a, b, a' et b' des nombres relatifs tels que $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a :

- $a + a' \equiv b + b'[n]$
- $a - a' \equiv b - b'[n]$

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul. Soient a, b, a' et b' des nombres relatifs tels que $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a :

- $a + a' \equiv b + b'[n]$
- $a - a' \equiv b - b'[n]$
- $a \times a' \equiv b \times b'[n]$

Relation de congruence

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul. Soient a, b, a' et b' des nombres relatifs tels que $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a :

- $a + a' \equiv b + b'[n]$
- $a - a' \equiv b - b'[n]$
- $a \times a' \equiv b \times b'[n]$
- $a^p \equiv b^p[n]$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
- $ka \equiv kb[n]$ *avec* $k \in \mathbb{N}$

Démonstration : (Exercice)

PGCD de deux entiers

Définition

Soit a *et* b *deux entiers naturels non nuls. On appelle PGCD de* a *et* b *le plus grand cdiviseur ommun de* a *et* b *et note* $PGCD(a;b)$.

PGCD de deux entiers

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle PGCD de a et b le plus grand cdiviseur ommun de a et b et note $PGCD(a;b)$.

Exemple :

PGCD de deux entiers

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle PGCD de a et b le plus grand cdiviseur ommun de a et b et note $PGCD(a;b)$.

Exemple :

$$PGCD(60;100) = 20$$

Propriétés

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

a) $PGCD(a;0) = a$

b) $PGCD(a;1) = 1$

c) *Si b divise a alors $PGCD(a;b) = b$*

Démonstration : (Exercice)

Les nombre premiers

Définition

Un nombre qui a exactement deux diviseurs est appelé nombre premier. c-à-d n'admet que deux diviseurs 1 *et lui même.*

Les nombre premiers

Définition

Un nombre qui a exactement deux diviseurs est appelé nombre premier. c-à-d n'admet que deux diviseurs 1 *et lui même.*

Exemple :

Les nombre premiers

Définition

Un nombre qui a exactement deux diviseurs est appelé nombre premier. c-à-d n'admet que deux diviseurs 1 et lui même.

Exemple :

Les nombre premiers inférieurs à 30 sont : $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29$.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriétés

Tout entier naturel non premier supérieur à 1 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. On dit alors qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.

Pour obtenir la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers on effectue des divisions successives par les nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$ tant que c'est possible.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriétés

Tout entier naturel non premier supérieur à 1 *peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. On dit alors qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.*

Pour obtenir la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers on effectue des divisions successives par les nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$ tant que c'est possible. **Exemple :**

Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriétés

Tout entier naturel non premier supérieur à 1 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. On dit alors qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.

Pour obtenir la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers on effectue des divisions successives par les nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$ tant que c'est possible. **Exemple :**

350

Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriétés

Tout entier naturel non premier supérieur à 1 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. On dit alors qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.

Pour obtenir la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers on effectue des divisions successives par les nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$ tant que c'est possible. **Exemple :**

350 **Exercice :**

Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriétés

Tout entier naturel non premier supérieur à 1 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. On dit alors qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.

Pour obtenir la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers on effectue des divisions successives par les nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$ tant que c'est possible. **Exemple :**

350 **Exercice :**

Décomposer 640 et 435 en produits de facteurs premiers.

Nombres premiers entre eux

Definition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On dit que a et b sont premiers entre eux ssi leur $PGCD$ est égal à 1.

Exemple :
42 et 55 sont premiers entre eux en effet $PGCD(42;55) = 1$.

Théorème d'Euclide

Soient a, b et c trois entiers naturels. Si a divise le produit bc et si a est premier avec b, alors a divise c. On note $a \wedge b = 1$
Formellement : si $a|bc$ et $PGCD(a,b) = 1$, alors $a|c$.

Exemple : $\frac{2}{20} = \frac{2}{4 \times 5}$, Or $2 \wedge 5 = 1$, alors 2 divise 4.

Nombres entiers relatifs

Dans l'ensemble des nombres entiers naturels, on peut additionner, multiplier, soustraire ou diviser. Cependant, le résultat n'est pas toujours un nombre entier naturel.

Nombres entiers relatifs

Dans l'ensemble des nombres entiers naturels, on peut additionner, multiplier, soustraire ou diviser. Cependant, le résultat n'est pas toujours un nombre entier naturel.
L'addition de deux nombres entiers naturels est un nombre entier naturel : par exemple, $8 + 4 = 12$, $5 + 10 = 15$, $7 + 3 = 10$.

Nombres entiers relatifs

Dans l'ensemble des nombres entiers naturels, on peut additionner, multiplier, soustraire ou diviser. Cependant, le résultat n'est pas toujours un nombre entier naturel.
L'addition de deux nombres entiers naturels est un nombre entier naturel : par exemple, $8+4=12$, $5+10=15$, $7+3=10$.
La multiplication de deux nombres entiers naturels est un nombre entier naturel : par exemple : $8\times 4=32$, $5\times 10=50$, $7\times 3=21$.

Nombres entiers relatifs

Cependant, la soustraction de deux nombres entiers naturels n'est pas toujours un nombre entier naturel : $8 - 4 = 4$ ou $7 - 3 = 4$ sont bien des nombres entiers naturels, mais pas $5 - 10$.

Nombres entiers relatifs

Cependant, la soustraction de deux nombres entiers naturels n'est pas toujours un nombre entier naturel : $8-4=4$ ou $7-3=4$ sont bien des nombres entiers naturels, mais pas $5-10$.
Pour remédier à ce problème, on agrandit l'ensemble des nombres entiers naturels pour y englober tous les résultats possibles des soustractions de deux nombres de $\mathbb{N}$.

Nombres entiers relatifs

Cependant, la soustraction de deux nombres entiers naturels n'est pas toujours un nombre entier naturel : $8-4=4$ ou $7-3=4$ sont bien des nombres entiers naturels, mais pas $5-10$.
Pour remédier à ce problème, on agrandit l'ensemble des nombres entiers naturels pour y englober tous les résultats possibles des soustractions de deux nombres de $\mathbb{N}$.
Si on regarde ce qu'il se passe pour les températures, on sait qu'une chute de $10^{\circ}C$ depuis une température de $5^{\circ}C$ nous donne une température de $-5^{\circ}C$ ("moins" $5^{\circ}C$).

Nombres entiers relatifs

Ainsi, une soustraction de deux nombres entiers naturels peut nous donner soit un nombre entier naturel, soit un nombre entier mais avec un signe "-" devant.

Nombres entiers relatifs

Ainsi, une soustraction de deux nombres entiers naturels peut nous donner soit un nombre entier naturel, soit un nombre entier mais avec un signe "-" devant.
L'ensemble de tous ces résultats possibles est appelé l'ensemble des nombres entiers relatifs, ensemble que l'on désigne par $\mathbb{Z}$. On a donc :

Definition

L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{...;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ ...\}.$$

Dans l'ensemble des nombres entiers relatifs, on peut additionner, multiplier, soustraire ou diviser. Cependant, le résultat n'est pas toujours un nombre entier relatif.

L'addition de deux nombres entiers relatifs est un nombre entier relatif : par exemple, $8+4=12$ ou $5+10=15$ ou $7+3=10$. La soustraction de deux nombres entiers relatifs est un nombre entier relatif : par exemple, $8-4=4$ ou $5-10=-5$ ou $7-3=4$.

La multiplication de deux nombres entiers relatifs est un nombre entier relatif : par exemple : , $8\times 4=32$ ou $5\times 10=50$ ou $7\times 3=21$.

Cependant, la division de deux nombres entiers relatifs n'est pas toujours un nombre entier relatif : $8\div 4=2$ est bien un nombre entier relatif, mais pas $5\div 10$ ou $7\div 3$.

Afin de pallier à ce problème, on agrandit l'ensemble des nombres entiers relatifs pour y englober tous les résultats possibles des divisions de deux nombres de $\mathbb{Z}$.

On remarque tout d'abord que $5\div 10=0.5$, ce qui est un nombre à virgule ayant un nombre fini de décimales (chiffres après la virgule).

Si on considère tous les résultats des divisions qui nous donnent des nombres ayant un nombre fini de décimales, on obtient un nouvel ensemble, celui des nombres décimaux, désigné par la lettre $\mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ est donc l'ensemble de tous les nombres entiers (positifs, nuls ou négatifs) ou ayant un nombre fini de décimales.

Definition

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.
$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 : c'est-à-dire sous la forme d'une fraction décimale.
En résumé un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{10^n}$$

avec le nombre $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, n étant non nul.

Exemple :

Si on considère tous les résultats des divisions qui nous donnent des nombres ayant un nombre fini de décimales, on obtient un nouvel ensemble, celui des nombres décimaux, désigné par la lettre $\mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ est donc l'ensemble de tous les nombres entiers (positifs, nuls ou négatifs) ou ayant un nombre fini de décimales.

Definition

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.
$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 : c'est-à-dire sous la forme d'une fraction décimale.
En résumé un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{10^n}$$

avec le nombre $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, n étant non nul.

Exemple :

$0,75 \in \mathbb{D}$, $1/3 \notin \mathbb{D}$

Les nombres rrationnels et irrationnels

Cependant, cet ensemble ne contient pas encore tous les résultats des divisions de deux nombres entiers relatifs. En effet, $7 \div 3 = 2,3333333... = 2,\bar{3}$ ce qui n'est pas un nombre ayant un nombre fini de décimales. On remarque qu'ici le se répète 3 indéfiniment après la virgule dans le résultat de (c'est pourquoi on le surmonte d'une barre dans le code à virgule).

En essayant plusieurs divisions de deux nombres entiers relatifs, on constate que le quotient est soit un nombre décimal (voir ci-dessus), soit un nombre dont un ou plusieurs chiffres après la virgule se répètent indéfiniment (par exemple : $3 \div 7 = 0.428571428571428571... = 0,\overline{428571}$.)

On appelle un nombre qui a un ou plusieurs chiffres après la virgule qui se répètent indéfiniment un nombre périodique (en mathématique et en physique, une période est un phénomène qui se reproduit continuellement).
L'ensemble formé des nombres décimaux et des nombres périodiques forme un nouvel ensemble de nombre, les nombres rationnels (de "ratio", qui signifie rapport, division).
Comme un nombre entier relatif pour toujours être considéré comme le quotient de lui-même par 1, l'ensemble des nombres rationnels est donc constitué de l'ensemble des nombres entiers relatifs, des nombres décimaux et des nombres périodiques.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Definition

L'ensemble des nombres rationnels est noté est $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul.

Exemple :

On appelle un nombre qui a un ou plusieurs chiffres après la virgule qui se répètent indéfiniment un nombre périodique (en mathématique et en physique, une période est un phénomène qui se reproduit continuellement).
L'ensemble formé des nombres décimaux et des nombres périodiques forme un nouvel ensemble de nombre, les nombres rationnels (de "ratio", qui signifie rapport, division).
Comme un nombre entier relatif pour toujours être considéré comme le quotient de lui-même par 1, l'ensemble des nombres rationnels est donc constitué de l'ensemble des nombres entiers relatifs, des nombres décimaux et des nombres périodiques.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Definition

L'ensemble des nombres rationnels est noté est $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul.

Exemple :

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$,...

Definition

Les nombres qui ne sont pas rationnels s'appellent les nombres irrationnels. Ce sont tous les nombres ayant une infinité de chiffre après la virgule et qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul.

Definition

Les nombres qui ne sont pas rationnels s'appellent les nombres irrationnels. Ce sont tous les nombres ayant une infinité de chiffre après la virgule et qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul.

Rappel :

Definition

Les nombres qui ne sont pas rationnels s'appellent les nombres irrationnels. Ce sont tous les nombres ayant une infinité de chiffre après la virgule et qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul.

Rappel :

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur commun (autre que 1). Pour rendre irréductible une fraction, on simplifie le numérateur et le dénominateur par leur(s) diviseur(s) commun(s). Pour cela, on peut utiliser la décomposition en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 2 :

Definition

Les nombres qui ne sont pas rationnels s'appellent les nombres irrationnels. Ce sont tous les nombres ayant une infinité de chiffre après la virgule et qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul.

Rappel :

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur commun (autre que 1). Pour rendre irréductible une fraction, on simplifie le numérateur et le dénominateur par leur(s) diviseur(s) commun(s). Pour cela, on peut utiliser la décomposition en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Exemple 2 :

La fraction $\frac{67}{15}$ est-elle irréductible ?
Les nombres 15 et 67 n'ont aucun diviseur commun autre que 1, donc la fraction $\frac{67}{15}$ est irréductible.

Exemple 1 :

Exemple 1 :

Rendre irréductible la fraction $\dfrac{68}{51}$.
On

$$\frac{68}{51} = \frac{2^2 \times 17}{3 \times 17} = \frac{4}{3},$$

qui est une fraction irréductible.
Exemple 2 :

Exemple 1 :

Rendre irréductible la fraction $\frac{68}{51}$.
On

$$\frac{68}{51} = \frac{2^2 \times 17}{3 \times 17} = \frac{4}{3},$$

qui est une fraction irréductible.

Exemple 2 :

La fraction $\frac{67}{15}$ est-elle irréductible ?
Les nombres 15 et 67 n'ont aucun diviseur commun autre que 1, donc la fraction $\frac{67}{15}$ est irréductible.

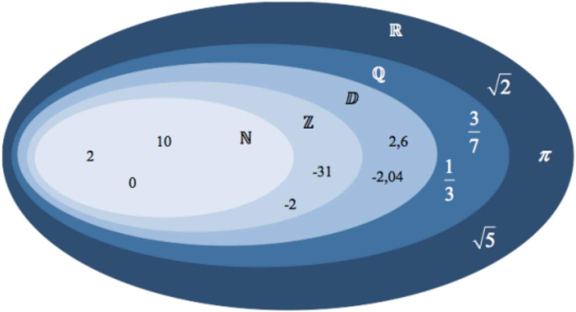
Nombres réels

Si on adjoint à l'ensemble des nombres rationnels tous les nombres irrationnels, on obtient l'ensemble appelé ensemble des nombres réels. Cet ensemble, noté $\mathbb{R}$, contient tous les nombres que l'on peut écrire avec les symboles $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9 et le symbole "," (virgule).

Definition

L'ensemble des nombres réels est formé de l'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$.

Hiérarchie des ensembles de nombres :
Les ensembles des nombres entiers naturels, des nombres entiers relatifs, des nombres rationnels et des nombres réels peuvent représentés par le diagramme suivant :



Ainsi, l'ensemble des nombres entiers naturels est inclus dans l'ensemble des nombres entiers relatifs, qui est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels, qui est inclus dans l'ensemble des nombres réels.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Régles de calcul dans $\mathbb{R}$

Addition

L'addition des réels possède les propriétés suivantes :

- Commutativité : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x.$
- Associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$
- 0 est élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$
- Tout réel a un opposé : $x + (x) = (x) + x = 0$

On résume ces propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif

Régles de calcul dans $\mathbb{R}$

Multiplication

La multiplication des réels possède les propriétés suivantes :

- Commutativité : $\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = yx$.
- Associativité : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x(yz) = (xy)z$
- 1 est élément neutre : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x1 = 1x = x$
- Tout réel non nule a un inverse : $x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1$

De plus, les deux opérations sont liées par la propriété suivante :
Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad : \quad x(y+z) = xy + xz$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad : \quad (y+z)x = yx + zx$$

On résume toutes ces propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Opérations sur les fractions

Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$:

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad-bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
- $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$
- $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$
- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

L'écriture scientifique

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif x est de la forme

$$x = a \times 10^p \quad avec\ a \in \mathbb{D},\ 1 \leq a < 10,\ et\ p \in \mathbb{Z}$$

Remarque

Si x est négatif on écrit $x = -a \times 10^p$.

Exemple :

$$54739 = 5,4739 \times 10^4 \ ; \quad 0,4219 = 4,219 \times 10^{-1} \ ; \quad -0,00435 = -4,35 \times 10^{-3}$$

Identités remarquables

Soient a et b dans $\mathbb{R}$.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Les intervalles bornés

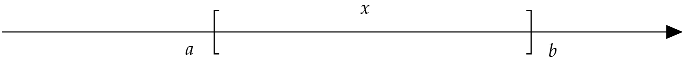
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (c'est un intervalle fermé).

Les intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

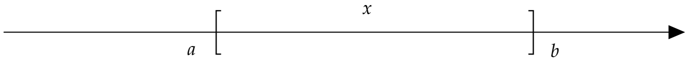
1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (c'est un intervalle fermé).



Les intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (c'est un intervalle fermé).

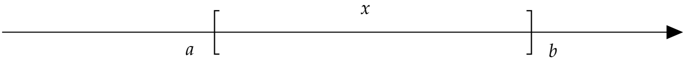


2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).

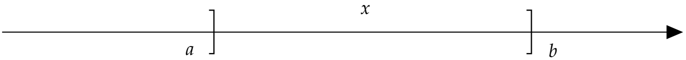
Les intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (c'est un intervalle fermé).



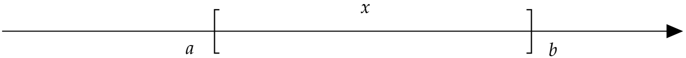
2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).



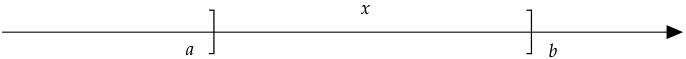
Les intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (c'est un intervalle fermé).



2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).

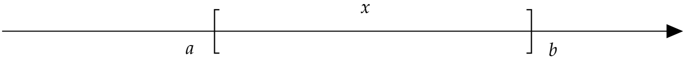


3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).

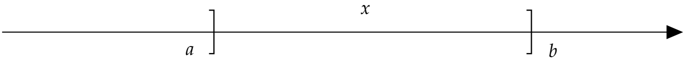
Les intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

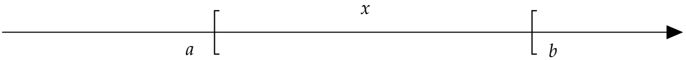
1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (c'est un intervalle fermé).



2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).



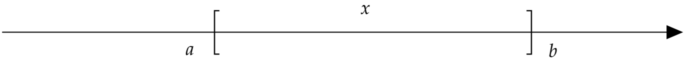
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).



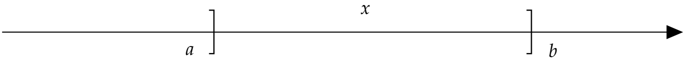
Les intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

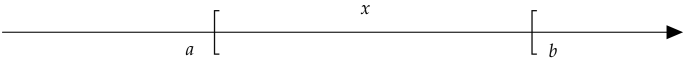
1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (c'est un intervalle fermé).



2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).



3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).

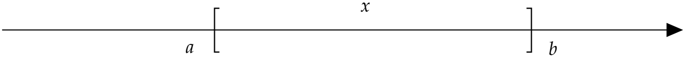


4. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (c'est un intervalle ouvert).

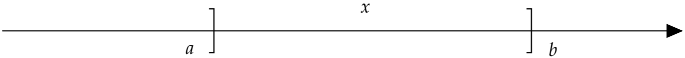
Les intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

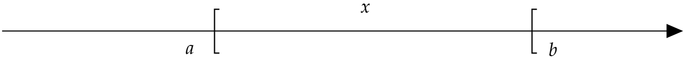
1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (c'est un intervalle fermé).



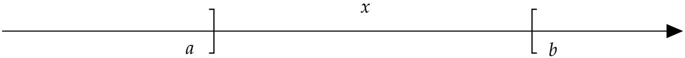
2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).



3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (c'est un intervalle semi ouvert ou semi fermé).



4. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (c'est un intervalle ouvert).



Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

Les intervalles non bornés

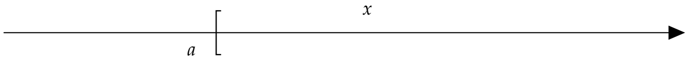
Soient a un nombre réel.

1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

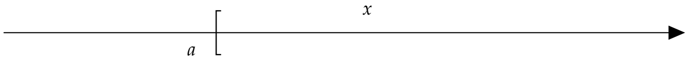
1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

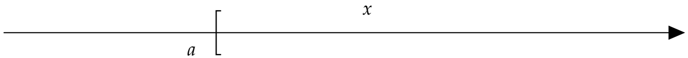


2. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

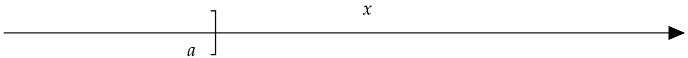
Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



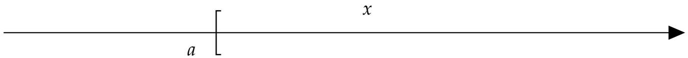
2. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



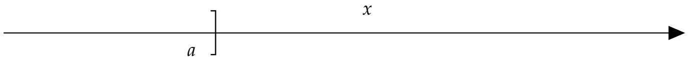
Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



2. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

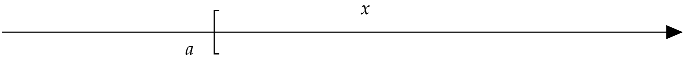


3. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

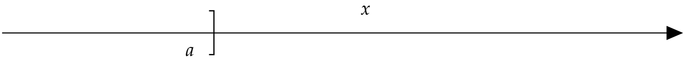
Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

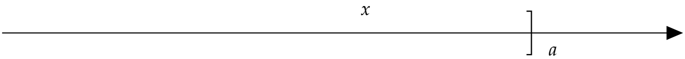
1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



2. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



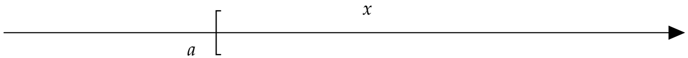
3. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$



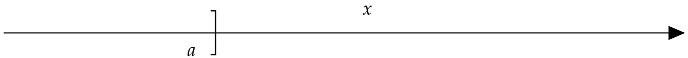
Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

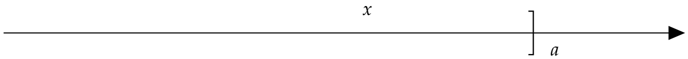
1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



2. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



3. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

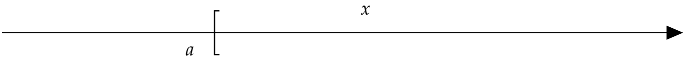


4. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

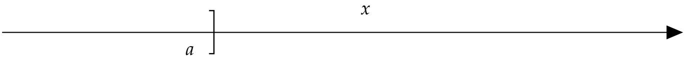
Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

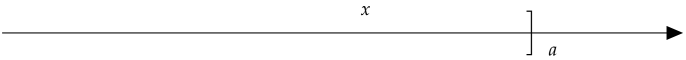
1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



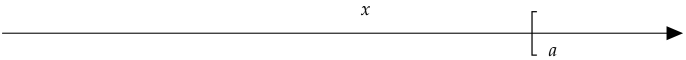
2. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



3. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$



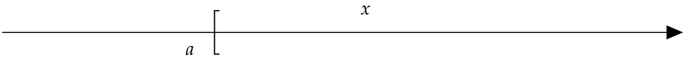
4. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



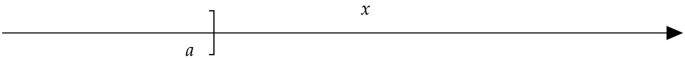
Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

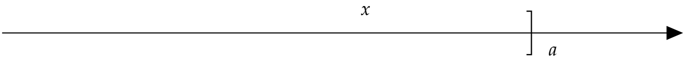
1. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



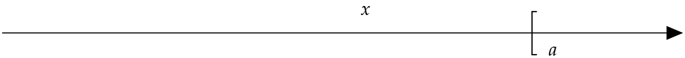
2. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



3. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$



4. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



Remarque

$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\ ;\ \mathbb{R}^*_+ =]0, +\infty[\ ;\ \mathbb{R}^- =]-\infty, 0]\ ;\ \mathbb{R}^*_- =]-\infty, 0[\ ;\ \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$

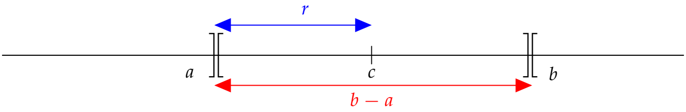
Encadrement

Définition

Soit x un réel. Encadrer le point x c'est trouver deux réels a et b tels que $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x < b$.
Le nombre $b - a$ appelé amplitude de cet encadrement.

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

1. Le centre d'un intervalle dont les extrémités sont a et b est $c = \dfrac{a+b}{2}$.
2. Le rayon d'un intervalle dont les extrémités sont a et b est $r = \dfrac{b-a}{2}$.



Exemple :

Soit $I = [-5, 3]$.

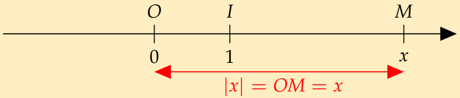
1. L'amplitude de l'intervalle I est $3 - (-5) = 8$.
2. Le centre de l'intervalle I est $\dfrac{3 + (-5)}{2} = -1$.
3. Le rayon de l'intervalle I est $\dfrac{3 - (-5)}{2} = 4$.

Valeur absolue

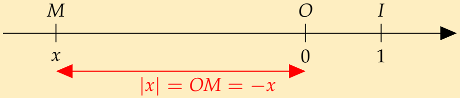
Définition

Soit x un nombre réel et M le point d'abscisse x sur un axe gradué $D(O;I)$. La valeur absolu de nombre réel x est la distance OM, noté $|x|$. Et on a :

- *Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$*



- *Si $x < 0$, alors $|x| = -x$*



Exemple

$$\left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3} \;\; ; \;\; |-3| = 3 \;\; ; \;\; |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} \;\; ;$$
$$|3-\sqrt{11}| = -(3-\sqrt{11}) = \sqrt{11}-1.$$

Propriétés

Soient x, y et r trois réels telles que $r \geq 0$.

- $|x| \leq r$ *si et seulement si* $-r \leq x \leq r$.
- $|x| < r$ *si et seulement si* $-r < x < r$.
- $|x| > r$ *si et seulement si* $x > r$ *ou* $x < -r$.

Valeur absolue

Propriétés

Soient x et y deux réels. On a

- $|x| = 0 \Longrightarrow x = 0$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
- $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$

Valeur approchée

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Tout nombre réel a qui vérifier $|x - a| \leq r$ est appelé valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r).

Exemple

On a $|\sqrt{3} - 1.73| \leq 0.003$. Donc 1.73 est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à la précision $0.003 = 3 \times 10^{-3}$.

Approximation par défaut et par excès

Définition

Si $a \leq x \leq b$ (ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x < b$). Alors :

- *a est une valeur approchée de x à $(b-a)$ près par défaut.*
- *b est une valeur approchée de x à $(b-a)$ près par excès.*

Exemple

On a $2.6457 \leq \sqrt{7} \leq 2.6458$.
Donc $b - a = 2.6458 - 2.6457 = 0.0001 = 10^{-4}$. D'où

- 2.6457 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-4} près par défaut.
- 2.6458 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-4} près par excès.

Approximation décimale

Définition

Soit x *un réel tel que* $p \times 10^{-n} \leq x \leq (p+1) \times 10^{-n}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $\in \mathbb{N}$.

- $p \times 10^{-n}$ *est appelé l'approximation de réel* x *à* 10^{-n} *près par défaut.*
- $(p+1) \times 10^{-n}$ *est appelé l'approximation de réel* x *à* 10^{-n} *près par excès.*

Exemple

On a $3.14 \leq \pi \leq 3.15$ donc $314 \times 10^{-2} \leq \pi \leq 315 \times 10^{-2}$. Donc :

- 314×10^{-2} est appelé l'approximation de réel π à 10^{-2} près par défaut.
- 315×10^{-2} est appelé l'approximation de réel π à 10^{-2} près par excès.

Définition (Monotonie, Majoration, Minoration)

Théorème (khkh)

.....

Proposition

Remarque

contenu...