المدرسة العليا للأساتذة بفاس
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE FES

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Module: Mathématique 1

Chapitre 4: Dénombrement

Prof. Mohammed SRATI

Licence d'Éducation

Spécialité: Enseignement Primaire

07-12-2022

Sommaire

4. Dénombrement

- Ensembles finis
- Applications (injective, surjective, bijective, correspondance)
- Arrangements, permutations, combinaisons

Définition

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ *des objets mathématiques. On forme alors l'ensemble*

$$E = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p\}$$

On dit alors que chaque u_i*(pour* $1 \leq i \leq p$*) est un élément de l'ensemble* E*, ou autrement dit que* u_i *appartient à* E *et on écrit*

$$u_i \in E$$

Définition

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des objets mathématiques. On forme alors l'ensemble

$$E = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p\}$$

On dit alors que chaque u_i(pour $1 \leq i \leq p$) est un élément de l'ensemble E, ou autrement dit que u_i appartient à E et on écrit

$$u_i \in E$$

Exemples

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2,\ \ldots\}$ *est l'ensemble des entiers naturels.*

Définition

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ *des objets mathématiques. On forme alors l'ensemble*

$$E = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p\}$$

On dit alors que chaque u_i(*pour* $1 \leq i \leq p$) *est un élément de l'ensemble* E, *ou autrement dit que* u_i *appartient à* E *et on écrit*

$$u_i \in E$$

Exemples

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2,\ \ldots\}$ *est l'ensemble des entiers naturels.*
- $\mathbb{R}$ *est l'ensemble des nombres réels.*

Remarque

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. L'ordre des éléments n'est pas important. Ainsi, les ensembles :

$$\{1,2\}, \quad \{2,1\}, \quad \{1,1,2,2,2\}$$

sont en réalité le même ensemble au sens mathématique.

Remarque

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. L'ordre des éléments n'est pas important. Ainsi, les ensembles :

$$\{1,2\}, \quad \{2,1\}, \quad \{1,1,2,2,2\}$$

sont en réalité le même ensemble au sens mathématique.

Définition

Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le cardinal de E, on le note $Card(E)$.
Un ensemble est fini si son cardinal est un entier naturel, i.e. s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'il est infini.

Exemples

- *L'ensemble vide, noté* $\emptyset$*, est un ensemble de cardinal* 0.

Exemples

- *L'ensemble vide, noté* $\emptyset$*, est un ensemble de cardinal* 0.
- *L'ensemble* $\{*,\ \theta,\ \lambda,\ l\}$ *est de cardinal* 4.

Exemples

- *L'ensemble vide, noté* $\emptyset$*, est un ensemble de cardinal* 0.
- *L'ensemble* $\{*,\ \theta,\ \lambda,\ l\}$ *est de cardinal* 4*.*
- *Pour tous entiers naturels* m *et* n*, on note si* $m \leq n$ *:*

$$[m,\ n] = \{m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n-1,\ n\}$$

  et si $m > n$ *:* $[m,n] = \emptyset\cdot$
- *Si* $n \in \mathbb{N}$*, l'ensemble ,* $[1,n]$ *est fini et est de cardinal* n.

Exemples

- *L'ensemble vide, noté* $\emptyset$*, est un ensemble de cardinal* 0.
- *L'ensemble* $\{*,\ \theta,\ \lambda,\ l\}$ *est de cardinal* 4*.*
- *Pour tous entiers naturels* m *et* n*, on note si* $m \leq n$ *:*

$$[m,\ n] = \{m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n-1,\ n\}$$

  et si $m > n$ *:* $[m, n] = \emptyset$·
- *Si* $n \in \mathbb{N}$*, l'ensemble ,* $[1, n]$ *est fini et est de cardinal* n.
- *Si* $m \leq n$*, alors l'ensemble,* $[m, n]$ *est un ensemble fini de cardinal* $n - m + 1$.

Définition

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E et on écrit

$$F \subset E$$

si tout élément de l'ensemble F est aussi un élément de l'ensemble E, i.e.

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, \; x \in E$$

Lorsque $F \subset E$, on dit que F est une partie ou un sous-ensemble de E.

Définition

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E et on écrit

$$F \subset E$$

si tout élément de l'ensemble F est aussi un élément de l'ensemble E, i.e.

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, \ x \in E$$

Lorsque $F \subset E$, on dit que F est une partie ou un sous-ensemble de E.

Exemples

- *On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*
- *Lorsqu'on a un ensemble E, il est courant de considérer un sous-ensemble F des éléments de Evériant une certaine propriété :*

$$F = \{x \in E / x^2 - 5x + 4 < 0\} \qquad F \subset E$$

Propriétés

Soient E, F et G trois ensembles. Alors :

1) $\emptyset \subset E$
2) $E \subset E$.
3) *Transitivité : si* $E \subset F$ *et* $F \subset G$, *alors* $E \subset G$.
4) *Double inclusion :* $E = F \Leftrightarrow E \subset F$ *et* $F \subset E$

Propriétés

Soient E, F et G trois ensembles. Alors :

1) $\emptyset \subset E$
2) $E \subset E$.
3) *Transitivité : si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*
4) *Double inclusion : $E = F \Leftrightarrow E \subset F$ et $F \subset E$*

Propriétés

Soit E un ensemble fini et soit A un sous-ensemble de E.

Propriétés

Soient E, F *et* G *trois ensembles. Alors :*

1) $\emptyset \subset E$
2) $E \subset E$.
3) *Transitivité : si* $E \subset F$ *et* $F \subset G$*, alors* $E \subset G$.
4) *Double inclusion :* $E = F \Leftrightarrow E \subset F$ *et* $F \subset E$

Propriétés

Soit E *un ensemble fini et soit A un sous-ensemble de* E.
Alors A *est également un ensemble fini et* $Card(A) \leq Card(E)$.

Propriétés

Soient E, F *et* G *trois ensembles. Alors :*

1) $\emptyset \subset E$
2) $E \subset E$.
3) *Transitivité : si* $E \subset F$ *et* $F \subset G$, *alors* $E \subset G$.
4) *Double inclusion :* $E = F \Leftrightarrow E \subset F$ *et* $F \subset E$

Propriétés

Soit E *un ensemble fini et soit A un sous-ensemble de* E.
Alors A *est également un ensemble fini et* $Card(A) \leq Card(E)$.
Si de plus, on a Card $(A) = Card(E)$ *, alors nécessairement* $A = E$.

Définition

Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par toutes les parties de E.

Définition

Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par toutes les parties de E.

Remarque

$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont chacun des éléments est un ensemble

Définition

Soient E et F deux ensembles.
• *On appelle intersection de E et F, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simul- tanément à E et à F.*

Définition

Soient E et F deux ensembles.

• *On appelle intersection de E et F, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simul- tanément à E et à F.*

• *On appelle union de E et F, notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F, i.e. dans au moins un des deux ensembles.*

Définition

Soient E et F deux ensembles.

• *On appelle intersection de E et F, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simul- tanément à E et à F.*

• *On appelle union de E et F, notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F, i.e. dans au moins un des deux ensembles.*

Deux ensembles E et F vérifiant $E \cap F = \emptyset$ sont dits disjoints.

Propriétés

La relation d'intersection est :

- *commutative :* $A \cap B = B \cap A$

Propriétés

La relation d'intersection est :

- *commutative :* $A \cap B = B \cap A$
- *associative :* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Propriétés

La relation d'intersection est :

- *commutative :* $A \cap B = B \cap A$
- *associative :* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap A = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :

- *commutative :* $A \cup B = B \cup A$

Propriétés

La relation d'intersection est :

- *commutative :* $A \cap B = B \cap A$
- *associative :* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap A = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :

- *commutative :* $A \cup B = B \cup A$
- *associative :* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Propriétés

La relation d'intersection est :

- *commutative :* $A \cap B = B \cap A$
- *associative :* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :

- *commutative :* $A \cup B = B \cup A$
- *associative :* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$

Propriétés

La relation d'intersection est :

- *commutative :* $A \cap B = B \cap A$
- *associative :* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap A = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :

- *commutative :* $A \cup B = B \cup A$
- *associative :* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup A = A$ *et* $A \cup \emptyset = A$

L'intersection et la réunion vérifient :

- *la distributivité de* $\cap$ *sur* $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

Propriétés

La relation d'intersection est :

- *commutative :* $A \cap B = B \cap A$
- *associative :* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap A = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :

- *commutative :* $A \cup B = B \cup A$
- *associative :* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup A = A$ *et* $A \cup \emptyset = A$

L'intersection et la réunion vérifient :

- *la distributivité de* $\cap$ *sur* $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- *la distributivité de* $\cup$ *sur* $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Remarque

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ensembles, on note :*

Remarque

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ensembles, on note :*

- *leur réunion* $\bigcup_{i\in I} A_i$, *dénie par :* $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I / x \in A_i$.

Remarque

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ensembles, on note :*

- *leur réunion* $\bigcup_{i\in I} A_i$, *dénie par :* $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I / x \in A_i$.
- *leur intersection* $\bigcap_{i\in I} A_i$, *dénie par :* $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$.

Remarque

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ensembles, on note :*

- *leur réunion* $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$*, dénie par :* $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I / x \in A_i$.
- *leur intersection* $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$*, dénie par :* $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$.

Propriétés

Soient E, F *deux ensembles finis. On a :*

- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$

Remarque

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ensembles, on note :*

- *leur réunion* $\bigcup_{i\in I} A_i$, *dénie par :* $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I / x \in A_i$.
- *leur intersection* $\bigcap_{i\in I} A_i$, *dénie par :* $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$.

Propriétés

Soient E, F *deux ensembles finis. On a :*

- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
- *En particulier, si* E *et* F *sont disjoints, on a* $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$.

Remarque

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, on note :

- *leur réunion* $\bigcup_{i\in I} A_i$, *dénie par :* $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I / x \in A_i$.
- *leur intersection* $\bigcap_{i\in I} A_i$, *dénie par :* $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$.

Propriétés

Soient E, F deux ensembles finis. On a :

- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
- *En particulier, si E et F sont disjoints, on a* $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$.

Preuve

Si on ajoute $Card(E)$ et $Card(F)$, on compte deux fois les éléments de $E \cap F$. On doit donc retrancher $Card(E \cap F)$ pour obtenir le cardinal de $E \cup F$.

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E\backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E\backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E\backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E\backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E\backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E\backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- ${}^{C}E = \emptyset$

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E\backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E\backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- ${}^{C}E = \emptyset$
- ${}^{C}\emptyset = E$

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E\backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E\backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- ${}^{C}E = \emptyset$
- ${}^{C}\emptyset = E$
- ${}^{C}({}^{C}A) = A$

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E\backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E\backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- ${}^{C}E = \emptyset$
- ${}^{C}\emptyset = E$
- ${}^{C}({}^{C}A) = A$
- $({}^{C}A) \cap A = \emptyset$

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E \backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E \backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- ${}^{C}E = \emptyset$
- ${}^{C}\emptyset = E$
- ${}^{C}({}^{C}A) = A$
- $({}^{C}A) \cap A = \emptyset$
- $({}^{C}A) \cup A = E$

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E\backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E\backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- ${}^{C}E = \emptyset$
- ${}^{C}\emptyset = E$
- ${}^{C}({}^{C}A) = A$
- $({}^{C}A) \cap A = \emptyset$
- $({}^{C}A) \cup A = E$
- ${}^{C}(A \cup B) = ({}^{C}A) \cap ({}^{C}B)$

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E \backslash A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E \backslash A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- ${}^{C}E = \emptyset$
- ${}^{C}\emptyset = E$
- ${}^{C}({}^{C}A) = A$
- $({}^{C}A) \cap A = \emptyset$
- $({}^{C}A) \cup A = E$
- ${}^{C}(A \cup B) = ({}^{C}A) \cap ({}^{C}B)$
- ${}^{C}(A \cap B) = ({}^{C}A) \cup ({}^{C}B)$.

Définition

On appelle produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, l'ensemble des suites finies :

$$E_1 \times E_2 \times \ \cdots \ \times E_n = \{(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2,\ \dots,\ x_n \in E_n\}$$

En particulier, lorsque les E_i sont tous identiques, on le note simplement E^n.

Définition

On appelle produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, l'ensemble des suites finies :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}$$

En particulier, lorsque les E_i sont tous identiques, on le note simplement E^n.

Propriétés

Si E et F sont deux ensembles finis, alors

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

Remarque

De manière plus générale, si $E_1, \ldots, E_n$ *sont* n *ensembles finis, alors*

$$Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \prod_{k=1}^{n} Card(E_k).$$

En particulier, si E *est un ensemble fini, alors*

$$Card(E^n) = (Card(E))^n$$

Propriétés

Si E est fini, on a les équivalences :

- *il existe une injection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est infni ou card $(F) \geq card(E)$.*

Propriétés

Si E est fini, on a les équivalences :

- *il existe une injection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est infni ou card $(F) \geq card(E)$.*
- *il existe une surjection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est fni et $card(F) \leq card(E)$.*

Propriétés

Si E *est fini, on a les équivalences :*

- *il existe une injection de* E *dans* $F \Leftrightarrow F$ *est infni ou card* $(F) \geq card(E)$.
- *il existe une surjection de* E *dans* $F \Leftrightarrow F$ *est fni et* $card(F) \leq card(E)$.
- *il existe une bijection de* E *dans* $F \Leftrightarrow F$ *est fni et* $card(F) = card(E)$.

Propriétés

Si E est fini, on a les équivalences :

- *il existe une injection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est infni ou card $(F) \geq card(E)$.*
- *il existe une surjection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est fni et $card(F) \leq card(E)$.*
- *il existe une bijection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est fni et $card(F) = card(E)$.*

Propriétés

Soient E, F de même cardinal et fnis. Soit $f : \quad E \to F$. On a les équivalences :

Propriétés

Si E est fini, on a les équivalences :

- *il existe une injection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est infni ou card $(F) \geq card(E)$.*
- *il existe une surjection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est fni et $card(F) \leq card(E)$.*
- *il existe une bijection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est fni et $card(F) = card(E)$.*

Propriétés

Soient E, F de même cardinal et fnis. Soit $f : \quad E \rightarrow F$. On a les équivalences :

- *f est injective $\Leftrightarrow f$ est bijective.*

Propriétés

Si E est fini, on a les équivalences :

- *il existe une injection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est infni ou card $(F) \geq card(E)$.*
- *il existe une surjection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est fni et $card(F) \leq card(E)$.*
- *il existe une bijection de E dans $F \Leftrightarrow F$ est fni et $card(F) = card(E)$.*

Propriétés

Soient E, F de même cardinal et fnis. Soit $f : \quad E \to F$. On a les équivalences :

- *f est injective $\Leftrightarrow f$ est bijective.*
- *f est surjective $\Leftrightarrow f$ est bijective.*

Dénombrement des p-listes

Définition

On appelle p-liste ou p-uplet d'un ensemble E tout élément de E^p, i.e. un élément de la forme $(x_1, \ \ldots, \ x_p)$, avec $\forall 1, ..., p, \, x_i \in E$.

Dénombrement des p-listes

Définition

On appelle p-liste ou p-uplet d'un ensemble E tout élément de E^p, i.e. un élément de la forme $(x_1, \ \ldots, \ x_p)$, avec $\forall 1, ..., p, x_i \in E$.

Theorem

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p.

Dénombrement des p-listes

Définition

On appelle p-liste ou p-uplet d'un ensemble E tout élément de E^p, i.e. un élément de la forme $(x_1, \ldots, x_p)$, avec $\forall 1, ..., p, x_i \in E$.

Theorem

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p.

Preuve Cela vient du fait que $card(E^p) = card(E)^p$

Dénombrement des p-listes

Définition

On appelle p-liste ou p-uplet d'un ensemble E tout élément de E^p, i.e. un élément de la forme $(x_1, \ \ldots, \ x_p)$, avec $\forall 1, ..., p, x_i \in E$.

Theorem

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p.

Preuve Cela vient du fait que $card(E^p) = card(E)^p$

Remarque

On utilise les p-listes en cas de choix successifs de p éléments d'un ensemble, avec éventuelles répétitions

Exemple

On tire trois cartes avec remise dans un jeu de 32 *cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ? Un tirage de trois cartes avec remise est une* 3*-liste d'un ensemble à* 32 *éléments : il y a donc* $32^3 = 32768$ *possibilités.*

Exemple

On tire trois cartes avec remise dans un jeu de 32 *cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ? Un tirage de trois cartes avec remise est une* 3*-liste d'un ensemble à* 32 *éléments : il y a donc* $32^3 = 32768$ *possibilités.*

Exercice

$1)$ Déterminer le nombre de code à 4 chiffres pour une carte bancaire.
$2)$ Déterminer le nombre de numéros de téléphone portable possibles (06 plus 8 chiffres).

Arrangements

Définition

Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-arrangement de E ou arrangement de p éléments de E toute suite de p éléments distincts de E.

Arrangements

Définition

Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-arrangement de E ou arrangement de p éléments de E toute suite de p éléments distincts de E. Si E contient n éléments, on note A_n^p le nombre d'arrangement à p éléments d'un ensemble à n éléments

Arrangements

Définition

Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-arrangement de E ou arrangement de p éléments de E toute suite de p éléments distincts de E. Si E contient n éléments, on note A_n^p le nombre d'arrangement à p éléments d'un ensemble à n éléments

Remarque

Si $p > n$, il ne peut pas y avoir de p-arrangements dans l'ensemble E. On a alors $A_n^p = 0$.

Theorem

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \leq n$. Alors le nombre de p-arrangements A_n^p de l'ensemble E est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

où on a noté $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, appelé factorielle n.

Theorem

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \leq n$. Alors le nombre de p-arrangements A_n^p de l'ensemble E est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

où on a noté $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, appelé factorielle n.

Remarque

On utilise les arrangements en cas de choix succesifs de p éléments pris parmi n, sans répétition.

Theorem

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \leq n$. Alors le nombre de p-arrangements A_n^p de l'ensemble E est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

où on a noté $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, appelé factorielle n.

Remarque

On utilise les arrangements en cas de choix succesifs de p éléments pris parmi n, sans répétition.

Exemple

Le nombre de bureaux éligibles de 4 personnes d'une association de 30 membres est de :

$$A_{30}^4 = 30 \times 29 \times 28 \times 27$$

Theorem

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \leq n$. Alors le nombre de p-arrangements A_n^p de l'ensemble E est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

où on a noté $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, appelé factorielle n.

Remarque

On utilise les arrangements en cas de choix succesifs de p éléments pris parmi n, sans répétition.

Exemple

Le nombre de bureaux éligibles de 4 personnes d'une association de 30 membres est de :

$$A_{30}^4 = 30 \times 29 \times 28 \times 27$$

Exercice Déterminer le nombre de tirages successifs, sans remise, de 3 boules dans une urne comportant 9 boules numérotées de 1 à 9.

Permutations

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Un n-arrangement de E est appelé une permutation de E. Une permutation est donc un n-uplet constitué, dans un certain ordre, des n éléments de E.

Permutations

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Un n-arrangement de E est appelé une permutation de E. Une permutation est donc un n-uplet constitué, dans un certain ordre, des n éléments de E.

Theorem

Soit E un ensemble à n éléments. Alors il y a $n!$ permutations de E. Autrement dit, il y a $n!$ faąons de ranger n éléments distincts dans tous les ordres possibles.

Permutations

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Un n-arrangement de E est appelé une permutation de E. Une permutation est donc un n-uplet constitué, dans un certain ordre, des n éléments de E.

Theorem

Soit E un ensemble à n éléments. Alors il y a $n!$ permutations de E. Autrement dit, il y a $n!$ façons de ranger n éléments distincts dans tous les ordres possibles.

Remarque

On utilise les permutations dans les cas où on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble sans répétition

Exemple

De combien de manières différentes peut-on mélanger un jeu de 32 *cartes ?*
Le nombre de mélanges correspond au nombre de permutations sur les 32 cartes : il y en a $32!$.

Exemple

De combien de manières différentes peut-on mélanger un jeu de 32 cartes ?
Le nombre de mélanges correspond au nombre de permutations sur les 32 cartes : il y en a $32!$.

Exercice De combien de manières peut-on disposer 6 livres (distincts) sur une étagère ?

Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E qui contient p éléments. On note le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments : C_n^p, qui se lit p parmi n

Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E qui contient p éléments. On note le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments : C_n^p, qui se lit p parmi n

Remarque

- *Les éléments d'une combinaison de p éléments sont deux à deux distincts.*
- *Si $p > n$ ou si $p < 0$ on a $C_n^p = 0$*

Combinaisons

Définition

Soit E *un ensemble à* n *éléments. On appelle combinaison de* p *éléments de* E *toute partie de* E *qui contient* p *éléments. On note le nombre de combinaisons de* p *éléments d'un ensemble de* n *éléments :* C_n^p*, qui se lit* p *parmi* n

Remarque

- *Les éléments d'une combinaison de* p *éléments sont deux à deux distincts.*
- *Si* $p > n$ *ou si* $p < 0$ *on a* $C_n^p = 0$
- *L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.*

Theorem

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $0 \leq p \leq n$. Alors, le nombre de combinaisons de p éléments parmi un ensemble à n éléments est égal à

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\cdots 1}$$

Theorem

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $0 \leq p \leq n$. Alors, le nombre de combinaisons de p éléments parmi un ensemble à n éléments est égal à

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\cdots 1}$$

Exemple

$$C_8^2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28, \quad C_3^{50} = \frac{50 \times 49 \times 48}{2 \times 1 \times 1} = 19600.$$

Theorem

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $0 \leq p \leq n$. Alors, le nombre de combinaisons de p éléments parmi un ensemble à n éléments est égal à

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\cdots 1}$$

Exemple

$$C_8^2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28, \quad C_3^{50} = \frac{50 \times 49 \times 48}{2 \times 1 \times 1} = 19600.$$

Remarque

On retiendra que l'on utilise les combinaisons dans les problèmes de choix simultanés de p éléments choisis parmi n, sans considération d'ordre et sans répétition.

Exemple

On tire simultanément trois cartes dans un jeu de 32 *cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ?*

Exemple

On tire simultanément trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ?
Un tirage simultané de trois cartes est une partie à 3 éléments d'un ensemble à 32 éléments : il y a donc

$$C_{32}^{3} = \frac{32 \times 31 \times 30}{3 \times 2 \times 1} = 4960$$

possibilités. C'est beaucoup moins que le nombre de 3-listes d'éléments distincts, car l'ordre dans lequel on pioche les cartes ne compte pas.

Tirages	Successifs (l'ordre compte)	Simultanés (l'ordre ne compte pas)
Avec remise	n^p p-listes	
Sans remise	A_n^p Arrangements	C_n^p Combinaisons

Exercice Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen. De combien de manières peut-il répondre ?

Exercice Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen. De combien de manières peut-il répondre ?

Theorem

(Formule du binôme de Newton)
Soient a et b deux nombres réels et n un entier. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Exercice Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen. De combien de manières peut-il répondre ?

Theorem

(Formule du binôme de Newton)
Soient a et b deux nombres réels et n un entier. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Theorem

Soient n et p deux entiers. Alors :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

.

Exercice Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen. De combien de manières peut-il répondre ?

Theorem

(Formule du binôme de Newton)
Soient a et b deux nombres réels et n un entier. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Theorem

Soient n et p deux entiers. Alors :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

.

Preuve

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = C_n^{n-p}.$$

Exercice. Un sac contient 9 jetons numérotés : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1) On tire 3 jetons successivement, en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac avant de tirer le suivant. On écrit côte à chacun des 3 chiffres tirés, dans l'ordre du tirage, formant ainsi un nombre de 3 chiffres. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?
2) On procédé au tirage de 3 jetons successivement, mais sans remise. On place les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage. Combien de peut-on former ainsi de nombres de 3 chiffres ?
3) On procédé au tirage de 3 jetons simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?