Masters MANu et Maths Fonda.
Analyse numérique 1 (HAX703X)

Méthodes différences finies
Équation de la chaleur 1D

Dans ce TP, on se propose de résoudre numériquement un problème d'évolution associé à l'équation de la chaleur 1D. Pour cela, on étudie le problème aux limites avec conditions de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \nu \partial_{xx} u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}_+^*, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

Schéma implicite

Nous allons écrire un programme `chaleur1D_imp` permettant de calculer des approximations de la solution u à différents instants, en utilisant le schéma implicite d'ordre 2 vu en cours :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \tag{2}$$

où Δx et Δt sont respectivement les pas d'espace et de temps associés à la discrétisation. Dans nos calculs, nous allons prendre alternativement les fonctions suivantes pour u_0 :

1. $u_0(x) = \exp(-5(x - \frac{L}{2})^2)$
2. $u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } L/2 - 1 \le x \le L/2 + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $u_0(x) = \sin(\frac{\pi x}{L}) + \sin(\frac{10\pi x}{L})$

On fixe dans la suite $L = 10$, $\nu = 1$. Le temps maximal de simulation sera fixé à $T = 10\,s$. Les valeurs de `Nx` et `Nt` seront fournies par l'utilisateur en cours d'exécution (commande `input`). Connaissant `Nx`, on introduira `h=L/Nx` (pas de discrétisation en espace), `x` (vecteur de taille $Nx + 1$ contenant les abscisses des points de votre maillage, incluant `a` et `b`), `deltat = T/Nt` (pas de discrétisation en temps) et `t` (vecteur de taille $Nt + 1$ contenant les valeurs des différents instants $t_n = n\Delta t$, incluant 0 et T). Enfin la solution discrète U_i^n, avec $1 < i < Nx + 1$ et $1 < n < Nt + 1$ sera stockée dans une matrice `u(1..Nx+1, 1..Nt+1)`.

Ecrire le programme demandé. Il devra vous permettre successivement de :

1. créer `A` (matrice associée au schéma différences finies implicite d'ordre 2, avec conditions de Dirichlet) et calculer, à chaque pas de temps n, le vecteur `U(2:Nx,n)` (vecteur solution, contenant les valeurs de la solution `u` à chaque noeud du maillage, pour l'instant t_n). Pensez à prendre en compte les conditions aux limites à chaque pas de temps.

2. Testez le schéma avec plusieurs valeurs de `Nx` et `Nt` et visualiser vos résultats à l'aide de la commande plot, en traçant la solution à différents instants, sur le même graphe.

Schéma explicite

Ecrivez un nouveau programme `chaleur1D_exp` permettant cette fois de résoudre le problème avec le schéma explicite suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0. \tag{3}$$

On mettra ensuite en évidence les problèmes de stabilité et de restriction du pas de temps étudiés en cours. Pour cela, définissez un nouveau pas de temps par la formule $\Delta t = \text{CFL}\ \frac{\Delta x^2}{\nu}$, où CFL est donné par l'utilisateur. Trouvez le coefficient CFL assurant la stabilité.

Schéma de Crank-Nicolson

Ecrivez un dernier programme de résolution `chaleur1D_CN` basé cette fois sur le schéma de Crank-Nicolson :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0. \tag{4}$$

Tentez de voir si le schéma est inconditionnellement stable (*i.e.* pas de restiction sur le pas de temps), et si une condition CFL est nécessaire pour la précision.