Master MANu
Analyse numérique 2 (HAX704X)

Méthodes différences finies
Équation de la chaleur 2D

Dans ce TP, on se propose de résoudre numériquement un problème d'évolution associé à l'équation de la chaleur 2D. Pour cela, on étudie le problème aux limites avec conditions de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,y,t) = \Delta u(x,y,t), & \forall\,(x,y) \in]0,1[^2,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,y,t) = 0, & \forall\,(x,y) \in \partial\left(]0,1[^2\right),\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & \forall\forall\,(x,y) \in]0,1[^2. \end{cases} \tag{1}$$

On introduit les points d'approximation $(x_i, y_j) = (i\,\Delta x,\ j\,\Delta y)$, où $(i,j) \in [\![0, m+1]\!] \times [\![0, p+1]\!]$, et où Δx et Δy sont les pas d'espace, voir Figure 1.

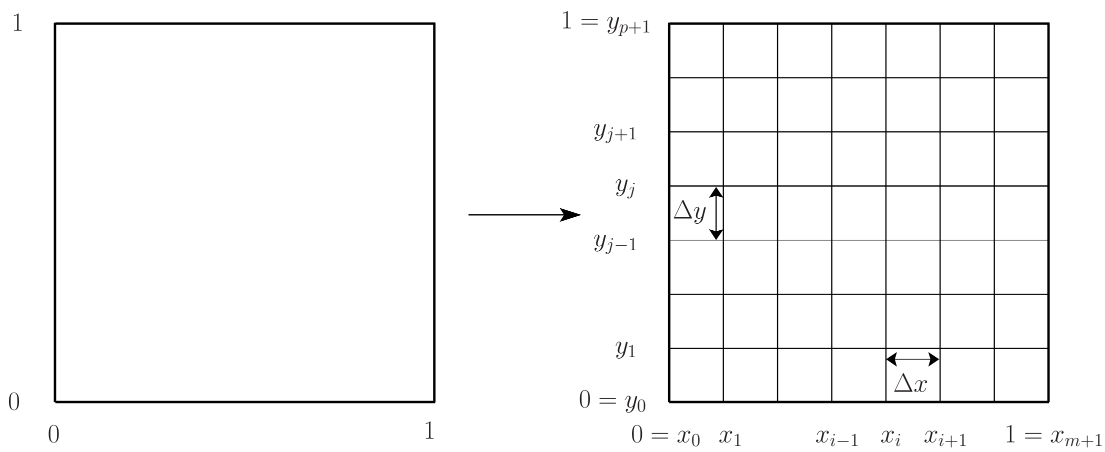

Figure 1: Définition du maillage.

Les conditions aux bords étant de type Dirichlet, nous allons donc chercher à calculer la solution aux $m \times p$ points intérieurs. Pour ce faire, nous allons utiliser pour le laplacien l'approximation DF à 5 points vu dans le TP précédent.

A) Nous allons dans un premier temps utiliser le schéma explicite en temps suivant :

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t\, \frac{u_{i+1,j}^n - 2\,u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \Delta t\, \frac{u_{i,j+1}^n - 2\,u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}, \\ &= \left(1 - 2\,(\lambda_x + \lambda_y)\right)\, u_{i,j}^n + \lambda_x\, u_{i+1,j}^n + \lambda_x\, u_{i-1,j}^n + \lambda_y\, u_{i,j+1}^n + \lambda_y\, u_{i,j-1}^n, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\lambda_x = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$ et $\lambda_y = \dfrac{\Delta t}{\Delta y^2}$.

A1. Sous quelle condition CFL ce schéma preserve-t-il le principe du maximum discret ?

A2. Nous allons maintenant implémenter cette méthode. Comme le schéma est totallement explicite, nul besoin de définir la matrice d'approximation associée. Il suffit de simplement mettre à jour, à chaque pas de temps, le vecteur solution `Uh(1..m, 1..p, n)` en utilisant ses valeurs à l'instant précédent, `Uh(:, :, n-1)`. Pour tester notre méthode, nous allons considérer le cas $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{40}$, et la condition initiale suivante :

$$u_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in [\![0.4,\, 0.6]\!]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

Verifiez numériquement la stabilité de cette méthode vis à vis à la condition CFL trouvée à la question précédente, et assurez-vous d'obtenir des résultats cohérents avec Figure 2.

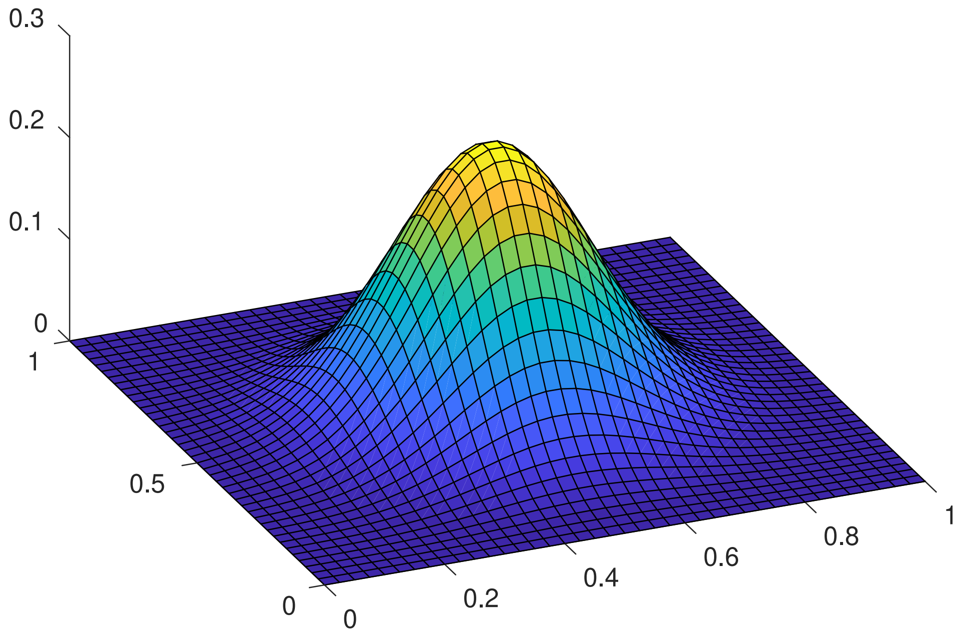

Figure 2: Schéma numérique explicite à $t = 0.01$ pour une CFL de 0.45.

B) Pour obtenir une méthode inconditionnellement stable, nous allons à présent utiliser le schéma implicite suivant :

$$(1 + 2\,(\lambda_x + \lambda_y))\; u_{i,j}^{n+1} - \lambda_x\, u_{i+1,j}^{n+1} - \lambda_x\, u_{i-1,j}^{n+1} - \lambda_y\, u_{i,j+1}^{n+1} - \lambda_y\, u_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^{n}. \tag{4}$$

Cette fois-ci, nous ne pouvons plus faire l'économie de définir la matrice de discrétisation, car nous allons devoir l'inverser. Pour se retrouver dans la situation vu en 1D définie comme $\boldsymbol{U}_h^{n+1} = \mathsf{A}^{-1}\, \boldsymbol{U}_h^n$, nous allons devoir renuméroter les noeuds pour définir un vecteur colonne `Uh(1..q, n)`, solution numérique à l'instant t_n, avec $q = m \times p$ le nombre de noeuds où déterminer la solution.

Pour se faire, nous allons utiliser le mapping suivant vu en cours :

$$\begin{array}{ccc} [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & [\![1,q]\!] \\ (i,j) & \longrightarrow & k = (j-1)\,m + i \end{array} \tag{5}$$

B1. Utiliser la renumérotation (5) pour définir la matrice de discrétisation A.

B2. Montrer que cette matrice est bien inversible.

B3. Démontrer que la méthode DF associée est bien inconditionnellement stable.

B4. Implémenter à présent ce schéma et vérifier sa stabilité, voir Figure 2.

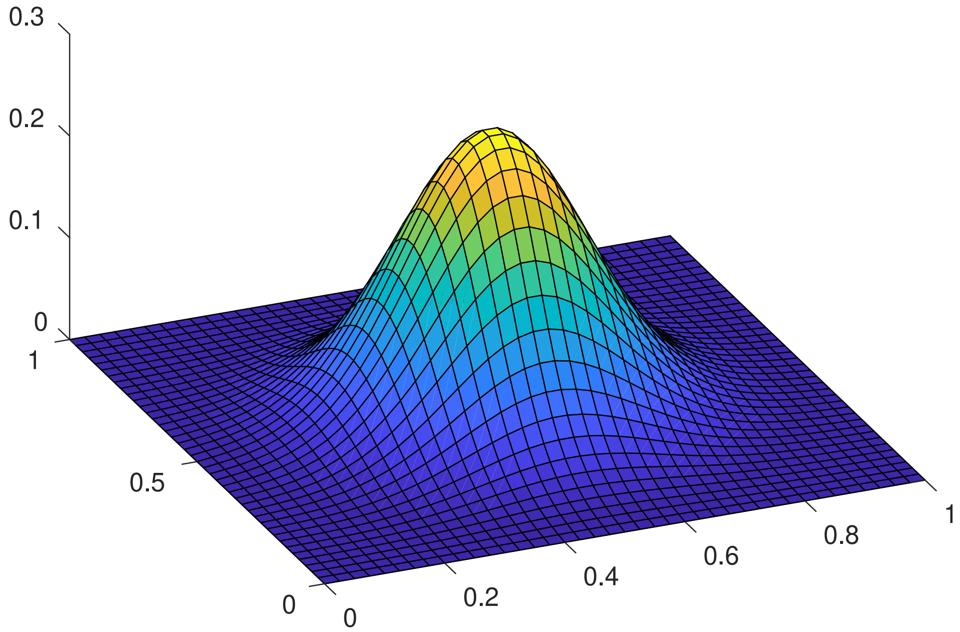

Figure 3: Schéma numérique implicite à $t = 0.01$ pour une CFL de 1.