Masters MANu et Maths Fonda.
Analyse numérique 1 (HAX703X)

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Méthodes différences finies
Approximation des dérivées

On considère la fonction $u(x) = \sin(x)$ et $\bar{x} = 1$. On cherche à approcher $u'(\bar{x}) = \cos(1) \approx 0.05403023$ avec les formules aux différences finies suivantes :

$$D_+ u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad D_- u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h},$$

$$D_0 u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

$$D_3 u(x) = \frac{2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)}{6h}.$$

1. Calculer l'erreur de troncature au point $\tau_h(\bar{x}) = L_h u(\bar{x}) - u'(\bar{x})$ pour différentes valeurs de h, en considérant chacune de ces formules, et remplir le tableau 1.

h	$D_+ u(\bar{x})$	$D_- u(\bar{x})$	$D_0 u(\bar{x})$	$D_3 u(\bar{x})$
1.0E-01				
5.0E-02				
1.0E-02				
5.0E-03				
1.0E-03				

Table 1: Convergence des opérateurs approchés pour plusieurs formules DF

2. Vérifier que :

$$\begin{aligned} D_1^+ u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) &\approx C_1 h \\ D_2 u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) &\approx C_2 h^2 \\ D_3 u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) &\approx C_3 h^3 \end{aligned} \tag{1}$$

   On constate ainsi que τ_h se comporte comme $\tau_h \approx C h^p$ où p est l'ordre de précision de la méthode considérée.

3. Tracez les graphes de τ_h en fonction de h pour chacune des 4 formules, en utilisant les valeurs du tableau 1, en échelles logarithmiques, et vérifiez que pour chacun des 4 cas, on a bien :

$$\ln(|\tau_h|) \approx \ln(|C|) + p \ln(h).$$

   Ainsi, en échelle logarithmique, on constate que l'erreur se comporte linéairement, avec une pente égale à p, l'ordre de précision de la méthode.

4. Vérifier les résultats trouvés en remplissant le tableau 2 avec le formule vue en cours

$$p \approx \frac{\ln\left(\frac{\tau_{h_1}}{\tau_{h_2}}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}.$$

Plus h sera petit, plus l'ordre trouvé doit être proche de l'ordre de précision théorique de la méthode.

h	$D_+ u(\bar{x})$	$D_- u(\bar{x})$	$D_0 u(\bar{x})$	$D_3 u(\bar{x})$
1.0E-01				
5.0E-02				
1.0E-02				
5.0E-03				
1.0E-03	-	-	-	-

Table 2: Ordres de convergence pour plusieurs formules DF