Masters MANu et Maths Fonda.
Analyse numérique 1 (HAX703X)

Méthodes différences finies
Méthode des coefficients indéterminés

On s'intéresse à la construction d'un schéma aux différences finies à n points suivant :

$$\frac{1}{h^k}\big(c_1 u(x_1) + c_2 u(x_2) + \ldots + c_n u(x_n)\big) = u^{(k)}(\bar{x}) + O(h^p),$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des points fixés autour de $\bar{x}$, qu'on considérera uniformément espacés (par exemple $\bar{x} - 2h$, $\bar{x} - h$, $\bar{x}$, $\bar{x} + h$ pour un schéma décentré à 4 points).

Nous avons vu en cours et en TD que les coefficients c_j doivent être choisis tels que

$$\frac{1}{(i-1)!}\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{(x_j - \bar{x})^{i-1}}{h^k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \; i-1 = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

ramenant le calcul des coefficients à la résolution d'un système linéaire.

1. Implémentation d'un cas particulier, pour se "faire la main": à l'aide de `Matlab` (ou tout autre langage de programmation), construire une formule de différences finies consistante pour approcher $u^{(3)}(\bar{x})$ en utilisant uniquement les valeurs aux noeuds $\bar{x} - 2h$, $\bar{x} - h$ $\bar{x} + h$ et $\bar{x} + 2h$. Retrouver les résultats du TD1.

   Aide : le choix de $\bar{x}$ et h ne doit pas changer le résultat. Prenez par exemple $\bar{x} = 0$ et $h = 1$. Vérifier ensuite en prenant d'autres $\bar{x}$ et h.

2. Cas général: écrire une fonction nommée `CoefDF(k, xbar, x)`, recevant en argument l'entier `k` associé à l'ordre de la dérivée que l'on veut approcher, le réel `xbar` et le vecteur `x`, de taille `n`, contenant les coordonnées des points du stencil voulu, et renvoyant en résultat le vecteur `C` des coefficients recherchés.

3. Validation de la fonction `CoefDF`:

   (a) retrouver les résultats de la question 1

   (b) construire une formules de différences finies consistante pour approcher $u^{(4)}(\bar{x})$ en utilisant uniquement les valeurs aux noeuds $\bar{x} - 2h$, $\bar{x} - h$, $\bar{x}$, $\bar{x} + h$ et $\bar{x} + 2h$. Quelle est la précision de cette formule ? En utilisant les outils du TP1, tracer le graphe log-log de l'erreur associée à cette formule, pour la fonction sin, au point $\bar{x} = 1$.