Master MANu
Analyse numérique 2 (HAX704X)

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Méthodes différences finies
Chaleur 2D avec terme source et conditions mixtes

Dans ce TP, on se propose d'étudier l'influence de la position d'un radiateur vis à vis d'une fenêtre ouverte sur le répartition des températures dans une pièce carrée, et ainsi de reproduire les résultats vus en cours. Pour cela, on étudie le problème aux limites avec conditions mixtes et terme source suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t) + \varphi\left(u(\boldsymbol{x},t)\right), & \forall\, \boldsymbol{x} \in]0,1[^2,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \\ \nabla u(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n} = \alpha(\boldsymbol{x},t), & \forall\, \boldsymbol{x} \in \partial\left(]0,1[^2\right) \setminus \mathcal{F},\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(\boldsymbol{x},t) = T_{ext}, & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{F},\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \forall\, \boldsymbol{x} \in\ [0,1]^2 \setminus \mathcal{F}. \end{cases} \tag{1}$$

On modélise la présence d'un radiateur par un terme source de la forme :

$$\varphi\left(u(\boldsymbol{x},t)\right) = \left(T_{rad} - u(\boldsymbol{x},t)\right)^3 \mathbf{1}_\omega,$$

où ω représente la surface occupée par le radiateur, et $T_{rad} = 40^\circ\,\mathrm{C}$ sa température. Plusieurs positions ω seront étudiées.

On considère que la température initale de la pièce est de $u_0(\boldsymbol{x}) = 20^\circ\,\mathrm{C}$, et que les murs ne permettent pas de flux de chaleur, *i.e.* $\alpha(\boldsymbol{x},t) = 0$. Toutefois, une fenêtre située en $\mathcal{F} = \left\{x = 0,\ y \in [0.4, 0.6]\right\}$ impose à cet endroit une température de $T_{ext} = 5^\circ\,\mathrm{C}$.

A) On souhaite simuler ce problème jusqu'à l'instant $t = 5$ avec le schéma différences finies $D_0^{(2)} - E.E$ implémenté au TP précédent.

   A1. En utilisant le maillage et les notations introduites au TP précédent, écrire le schéma intérieur au point $(x_i,\ y_j)$. À noter que les conditions aux limites étant par endroit de type Neumann, la valeur de la solution aux points situés sur ces bord sont à présent des inconnues.

   A2. Dans le cas où $\varphi\left(u(\boldsymbol{x},t)\right) = 0$, retrouver par une analyse de Fourier la condition CFL imposant la stabilité obtenue au TP précédent par principe du maximum discret.

   A3. En réutilisant ce qui a été vu en cours dans le cas 1D, introduire le schéma d'approximation des points situés au bord.

   A4. Trouver une solution pour gérer les quatre coins.

   A5. Implémenter le schéma et tester le dans les 4 cas suivants : $\varphi\left(u(\boldsymbol{x},t)\right) = 0$ (pas de radiateur), $\omega = [0.9, 1] \times [0.4, 0.6]$, $\omega = [0.45, 0.55] \times [0.4, 0.6]$ et $\omega = [0, 0.1] \times [0.4, 0.6]$.

   A6. Vérifier numériquement la condition CFL trouvée à la question précédente.

B) Nous allons à présent chercher à implémenter une méthode de plus grande précision, en espace comme en temps.

B1. On souhaite tout d'abord mettre en place un schéma d'ordre 4 en espace avec la méthode Euler explicite d'ordre 1 en temps. En utilisant le TP1, ou la fonction `CoefDF` implémentée lors du TP2 du cours Analyse Numérique 1, écrire le schéma intérieur au point (x_i, y_j).

B2. Dans le cas où $\varphi(u(\boldsymbol{x}, t)) = 0$, trouver par analyse de Fourier la condition CFL imposant la stabilité L_2 du schéma intérieur.

B3. Grace à la fonction `CoefDF`, trouver comment gérer les points (x_i, y_j) pour $x_i \in \{\Delta x, 1 - \Delta x\}$ ou $y_j \in \{\Delta y, 1 - \Delta y\}$, tout en préservant l'ordre en espace de la méthode.

B4. Modifier ce qui a été fait aux questions A4. et A5. pour maintenir l'ordre en espace.

B5. Implémenter le schéma et tester les 4 cas vus à la question A6.

B6. Vérifier numériquement la condition CFL trouvée à la question précédente.

B7. Modifier votre code pour faire du Runge-Kutta d'ordre 2 en temps.