Master MANu
Analyse numérique 2 (HAX704X)

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Méthodes volumes finies
Lois de conservations scalaires 1D

Dans ce TP, on se propose d'étudier l'implémentation des méthodes volumes finis (VF) dans le cadre vu en cours, à savoir les lois de conservation scalaire 1D, et l'influence du choix du flux numérique. Pour cela, on introduit ici l'équation étudiée complétée par des conditions aux limites périodiques :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x f\left(u(x,t)\right) = 0, & \forall\, x \in [a,b],\, \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(a,t) = u(b,t), & \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall\, x \in [a,b]. \end{cases} \tag{1}$$

Le but ici est de coder un schéma volumes finis dans lequel la formule du flux, celle du flux numérique ou même la donnée intiale pourront être choisies.

La première étape consiste à partitionner le domaine $[a,b]$ en m mailles $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, tel que $x_{\frac{1}{2}} = a$ et $x_{m+\frac{1}{2}} = b$. On introduit ensuite u_h la solution approchée de (1), avec les notations suivantes :

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_h(x,t_n)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Ces valeurs moyennes sont alors les inconnues qu'on calculera grace au schéma VF :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathcal{F}(u_i^n, u_{i+1}^n) - \mathcal{F}(u_{i-1}^n, u_i^n)\right), \qquad \forall i \in [\![1,m]\!]. \tag{3}$$

Afin d'initialiser notre schéma, on pourra utiliser la procédure suivante :

$$u_i^0 = u_0(x_i), \tag{4}$$

où $x_i = \dfrac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2}$ est le point milieu de la maille C_i. L'initialisation définie dans (4) n'est pas exacte, mais du fait que

$$u_0(x_i) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x)\,\mathrm{d}x + O\left(\Delta x^2\right),$$

l'erreur commise étant d'ordre 2, elle sera négligeable par rapport à l'erreur numérique commise par le schéma volumes finis.

Pour imposer des conditions aux bords périodiques, on définira les flux numériques aux bords comme suit :

$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{F}(u_m^n, u_1^n) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_{m+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}(u_m^n, u_1^n). \tag{5}$$

Afin de s'assurer de la stabilité des différents schémas, nous allons utiliser la condidition CFL suivante :

$$\Delta t = cfl\,\frac{\Delta x}{\gamma}, \tag{6}$$

où $\gamma = \sup_u \left|f'(u)\right|$ et cfl un coefficient à prendre inférieur à un pour s'assurer de caractère TVD des schémas. En pratique, pour calculer γ nous allons utiliser la définition suivante à chaque itération :

$$\gamma = \max_{i\in[\![1,m]\!]} \left|f'(u_i^n)\right|. \tag{7}$$

À noter qu'on utilisera également ce γ dans la définition du flux Lax-Friedrichs global.

A) Coder ce schéma dans le cas de l'équation de Burgers, *i.e.* $f(u) = \frac{1}{2}\,u^2$. On considérera tout d'abord une donnée initiale régulière, à savoir $u_0(x) = \sin(2\,\pi\,x)$ sur le domaine $[0, 1]$. On étudiera l'influence des flux numériques en considérant les cas du schéma de Lax-Friedrichs global, Lax-Friedrichs local et Murman-Roe.

A1. Dans le problème étudié, exprimer grace à la méthode des caractéristiques la solution forte. Jusqu'à quel temps t_c, cette solution forte reste valide ?

A2. Pour être capable de tracer la solution forte, implémenter une routine qui permet d'obtenir le pied X de la caractéristique qui passe par le point (x, t), pour x et t donnés. Pour ce faire, utilisez la méthode de Newton (voir cours).

A3. Comparer au temps $t = 0.9\,t_c$ les solution numériques obtenues avec les trois types de flux numériques et la solution forte.

A4. À présent, pour $t = 4\,t_c$, soit après formation du choc stationnaire, comparer les résultats obtenus avec les différents schémas.

B) Nous allons à présent partir d'une donnée intiale différente. Comme dans l'exemple vu en TD, nous allons considérer sur le domaine $[-1.5, 1]$ la fonction suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0.3, \\ -1 & \text{si } x \in]0.3, 0.7[, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 0.7. \end{cases}$$

Ici, la solution n'est plus pérodique. La condition (5) n'est donc plus adaptée. Comme la solution exacte est connue, on pourra imposer les conditions suivantes :

$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{F}\left(u(a, t_n), u_1^n\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_{m+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}\left(u_m^n, u(b, t_n)\right), \tag{8}$$

où la fonction u est la solution faible entropique du problème étudié.

B1. Rappeler la solution faible entropique, avant et après que l'onde de détente rencontre l'onde de choc.

B2. En utilisant successivement 40, 80, 160 puis 320 mailles, observer la convergence du schéma Lax-Friedrichs global.

B3. Pour $t = 3.2$, comparer les résultats obtenus avec les différents schémas.

B4. Qu'observez-vous pour le schéma Murman-Roe ? Comment l'expliquez vous ?

C) On va à présent étudier le cas plus complexe d'un flux non-convexe :

$$f(u) = \frac{4\,u^2}{4\,u^2 + (1-u)^2}.$$

La donnée intiale définie sur $[-1, 1]$ est donnée par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\frac{1}{2}, 0[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les conditions aux bords sont ici périodiques. On pourra donc utiliser (5). En revanche, en utilisant la condition (7) pour définir γ, on obtientrait $\gamma = 0$ initialement. Cela provient du fait que le flux est non-convexe. Afin de s'assurer de la stabilité des schémas, nous allons alors imposer $\gamma = 2.34$ tout au long du calcul.

C1. Télécharger le fichier *buckley.dat* contenant la solution entropique à $t = 0.4$.

C2. En utilisant successivement 40, 80, 160 puis 320 mailles, observer la convergence du schéma Lax-Friedrichs global.

C3. Pour 200 mailles, comparer les résultats obtenus avec les différents schémas.

C4. Qu'observez-vous avec le schéma de Lax-Friedrichs local ? Comment l'expliquez vous ?