Masters MANu et Maths Fonda.
Analyse numérique 1 (HAX703X)

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Méthodes différences finies
Problème aux limites pour l'équation de Poisson

Dans ce TP, on se propose de résoudre numériquement un problème aux limites associé à l'équation modèle étudiée en cours :

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), \quad x \in]a, b[\\ u'(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction "régulière" donnée. Tout d'abord, au crayon, sur feuille

1. Rappeler la discrétisation vue en cours pour ce problème, et la formulation matricielle associée.
2. Pour $f(x) = \exp(x)$, calculez la solution exacte u.

Nous allons maintenant écrire un programme `poisson1D` permettant de calculer des approximations de la solution u. La qualité de ces approximations sera bien entendu fixée par le nombre de noeuds que nous allons choisir pour notre maillage. Nous pourrons comparer la solution calculée numériquement avec la solution exacte trouvée plus haut.

1 Calcul de la solution à l'ordre 2

On fixe dans la suite $a = 0$, $b = 3$, $\alpha = -5$ et $\beta = 3$. On rappelle qu'avec une condition de Neumann à gauche, la valeur de u_0 est à déterminer également. Le nombre d'intervalle est fixé pour l'instant à $nint = 20$, cette valeur sera utilisée pour calculer `h=(b-a)/nint` (et cela donnera $m = 19$ points intérieurs, $m2 = 21$ noeuds au total en incluant les 2 frontières, et $m1 = 20$ valeurs à calculer). On introduira `x`, vecteur contenant les abscisses des points de votre maillage (incluant `a` et `b`).

1. Votre programme doit permettre successivement de :
   (a) créer `A` (matrice associée au schéma différences finies d'ordre 2, avec conditions mixtes), créer `F` (vecteur second membre, associé à la fonction f) et un vecteur `Bc` contenant les conditions aux bors, et calculer `U` (vecteur solution, contenant les valeurs de la solution `u` à chaque noeud du maillage)
   (b) visualiser vos résultats, en traçant sur un même graphe les points associés au vecteur `U`, et la solution analytique (cette solution analytique sera tracée en utilisant 100 points). Voir Figure 1.

(c) calculer l'erreur en chaque point du maillage. Pour cela on introduira, comme en cours, un vecteur `E=U-Uex`, où `Uex` est construit à partir de la solution exacte. Enfin, on introduira `err = max(abs(E))`, norme de `E`.

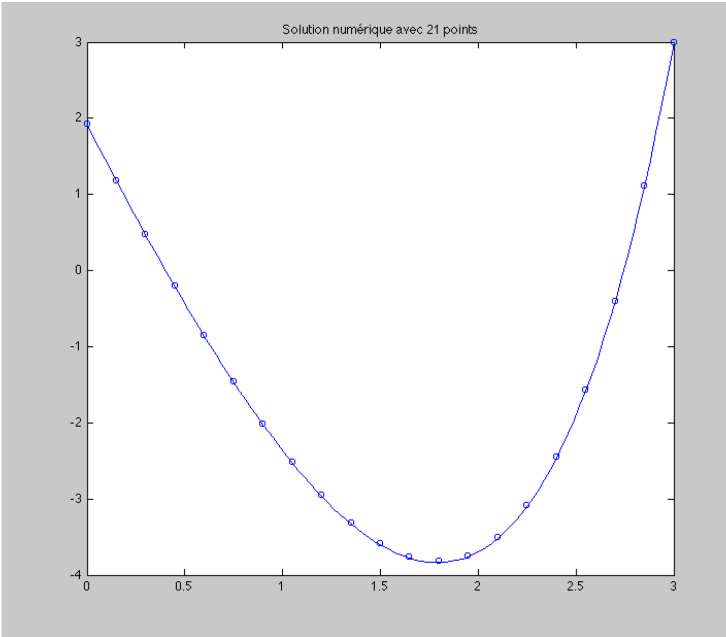

Figure 1: Comparaison entre résultats numériques et solution analytique.

2 Tracé du graphe de convergence

1. Pour tracer le graphe `log-log`, nous avons besoin de l'erreur globale `err` pour plusieurs valeurs de `nint`. Modifiez votre programme en créant une boucle permettant à `nint` de prendre successivement les valeurs $10, 20, 40, 80$, et de refaire dans chaque cas le calcul de la solution discrète. Certaines variables scalaires devront donc devenir vectorielles.

2. A partir de `hvec` (vecteur contenant les valeurs successives du pas `h`, lorsque `nint` varie) et de `err_vect` (vecteur contenant les valeurs successives de `err`, lorsque `nint` varie), tracez le graphe de convergence `log-log`.

3. Déterminez une valeur approchée de la pente de la droite ainsi obtenue. La valeur de cette pente est l'ordre de la méthode.