2021

Ateliers d’optimisation

Sameh Najeh et Ali Saada
SUP’COM
01/09/2021

Avant-propos :

Ce nouveau cours qui entre dans le cursus de formation de SUP'COM et qui s'intitule Ateliers d'optimisation, vient combler un vide qui se trouve entre certaines matières théoriques du tronc commun et ceux des différentes options. Il s'appuie en particulier sur les éléments d'enseignement Recherche Opérationnelle et Optimisation convexe. Son contenu, qui a pour but de mettre en valeur par la pratique différents résultats rencontrés dans les deux éléments en question, est formé de six ateliers :

- Atelier Support Vector Machine (SVM),
- Atelier Régression linéaire,
- Atelier pénalisation,
- Atelier Convolutional Neural Network (CNN)
- Atelier théorie des jeux 1,
- Atelier théorie des jeux 2.

Les élèves sont tenus à faire pour les quatre premiers ateliers un rapport qui renferme un travail bibliographique et un travail de mise en œuvre avec discussion des résultats. La note[1] finale est la moyenne des six notes obtenues.

---

[1]

- Les élèves sont tenus à respecter rigoureusement la date de remise des rapports sous peine d'être pénalisés dans leurs notes. Chaque jour de retard génère un handicap d'un demi-point.
- A part la valeur du contenu, la note tiendra compte de la forme.
- Nous conseillons les élèves de travailler en groupe mais les rapports sont remis individuellement. Leurs contenus est un gage de connaissance qui peut être vérifiée par un test écrit qui peut modifier la note du rapport.

Table des matières

Atelier 1 : Mise en œuvre de la méthode Support Vector Machine

Présentation du problème

Notations :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Nous notons par $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{x^T} = (x_1, \dots, x_n)$ où pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i \in \mathbb{R}$ est la $i-ème$ composante de $\boldsymbol{x}$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, nous notons par $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{x^T y}$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et par norme de $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle}$.

Notons que la distance entre deux sous-ensembles E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^n$ est $d = \inf\limits_{x_1 \in E_1, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{E_2}} \|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|_2$.

Nous rappelons aussi qu'un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension $n-1$. D'une manière général, si $\mathcal{H}$ est un hyperplan, alors il existe $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{H}$, autrement dit $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n / \boldsymbol{w^T x} = 0\}$.

Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{R} = (O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ le repère qui lui est associé. Nous rappelons qu'un hyperplan affine de direction $\mathcal{H}$ et passant par le point M est $\mathcal{H}_M = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \left(\boldsymbol{x} - \overrightarrow{OM}\right) \in \mathcal{H}\right\}$

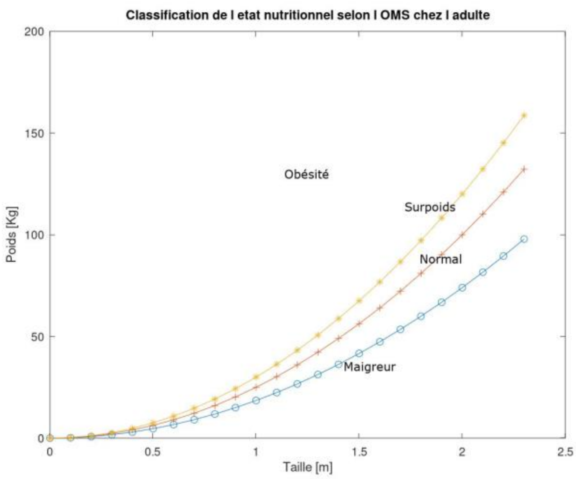
1. On considère pour $n = 2$ l'hyperplan d'équation $2x_1 - 3x_2 = 0$. Donner $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ orthogonal à tous les vecteurs de cet hyperplan.
2. Soit $\mathcal{R} = (O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ un repère orthonormé et K le point de coordonnées $(1,2)_{\mathcal{R}}$. Tracer sur une même figure $\boldsymbol{w}$, $\mathcal{H}_O$, $\mathcal{H}_K$, et l'hyperplan affine d'équation
$$2x_1 - 3x_2 - 8 = 0$$

Méthode SVM linéaire de classification :

Soit une population d'individus décrits par un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de paramètres. L'objectif de la classification est de regrouper les individus selon des critères définis sur ces paramètres. Ceci revient à définir des frontières qui séparent entre les classes d'individus. Un exemple important est celui de la classific ation de l'état nutritionnel chez l'adulte selon l'OMS[2] :

Classification	IMC (Kg/m^2)	Risque
Maigreur (Dénutrition)	$< 18{,}5$	
Normal	$18{,}5 - 24{,}9$	
Surpoids	$25 - 29{,}9$	Modérément augmenté
Obésité	> 30	Nettement augmenté

La figure ci-dessous décrit les frontières de cette classification :



Dans cette première partie nous nous proposons d'étudier la détermination de la frontière avec la méthode Support-Vector Machine (SVM) linéaire.

Soient quatre individus décrits par deux paramètres T et P selon le tableau suivant :

Individu	T	P	*IMC*
$\boldsymbol{I_1}$	1,5	72	32
$\boldsymbol{I_2}$	1,75	92	30,04
$\boldsymbol{I_3}$	1,6	60	23,43
$\boldsymbol{I_4}$	1,8	72	22,22

Les deux premiers sont hypertendus et les deux autres ne le sont pas. Nous affectons aux hypertendus la valeur 1 et aux autres la valeur -1.

3. Nous nous proposons de trouver les paramètres $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ et $w_3 \in \mathbb{R}$ de la fonction frontière d'équation $g(\boldsymbol{x}) = 0$, où

$$\begin{array}{rcl} g: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} - w_3 \end{array}$$

et vérifie $g(\boldsymbol{I_i}) \geq 1$ pour $i = 1\ et\ 2$, $g(\mathrm{I_i}) \leq -1$ pour $i = 3\ et\ 4$ et telle que la distance entre l'ensemble des potentiellement hypertendus

$$HT_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\ /\ g(\boldsymbol{x}) \geq 1\}$$

et l'ensemble des potentiellement non-hypertendus

---

[2] OMS : Organisation mondiale de la Santé https://www.who.int/fr

$$HT_{-} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) \leq -1\}$$

soit **maximale**.

a. Ecrire la contraintes g_i que doivent vérifier $\boldsymbol{w}$ et w_3 aux différents $\boldsymbol{I_i}$ pour $i = 1,2,3$ et 4

b. Montrer que la distance qui existe entre l'ensemble $D_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) = 1\}$ et l'ensemble $D_{-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) = -1\}$ est égale à $\frac{2}{\|\boldsymbol{w}\|_2}$.

c. Calculer la distance entre O, l'origine du repère, et $D_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) = 0\}$

d. Déduire de a. et de b. le problème de minimisation à résoudre pour déterminer $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \\ \overline{w_3} \end{pmatrix}$.

e. Donner, en appliquant le théorème de Kuhn & Tucker[3], le système à résoudre en explicitant les équations.

f. Les contraintes peuvent-elles être simultanément non saturées. Justifier la réponse.

g. Donner le nombre de contraintes maximales qui soient saturées simultanément. Justifier la réponse

h. Donner les équations à résoudre si les contraintes 1, 2 et 3 sont saturées. (On ne demande pas de résoudre ces équations)

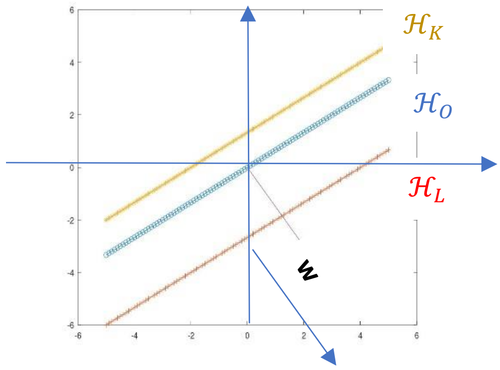
4. Tracer sur une même figure les points $M_i / \overrightarrow{OM_i} = \boldsymbol{I_i}$, pour $i = 1,2,3$ et 4 et la frontière en supposant que les contraintes 1, 2 et 3 sont saturées.
5. **Question subsidiaire** : Donner une formulation plausible pour retrouver les frontières relatives à la classification OMS de la figure ci-dessus.

[3] **Théorème de Kuhn & Tucker.** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et soient $g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour $i = 1,2, \dots, p$. On pose $g = \left(g_1, g_2, \dots, g_p\right)^t$ et on considère $K = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1,2, \dots, p\}$ et on considère $\bar{x} \in \mathbb{R}^n / f(\bar{x}) = \inf_{x \in K} f(x)$. On suppose que f est différentiable en $\bar{x}$ et que $\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I(\bar{x})}$ où $I(\bar{x}) = \{i \in \{1,2, \dots; p\} / g_i(x) = 0\}$ est une famille libre, alors il existe $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I(\bar{x})}$ de réels positifs tels que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

Correction

1. **On considère pour $n = 2$ l'hyperplan d'équation $2x_1 - 3x_2 = 0$. Donner $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ orthogonal à tous les vecteurs de cet hyperplan.**
   Tout vecteur $w = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$est orthogonal à $\{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x_1 - 3x_2 = 0\}$
2. **Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ un repère orthonormé et K le point de coordonnées $(1,2)_{\mathcal{R}}$. Tracer sur une même figure w, $\mathcal{H}_O$, $\mathcal{H}_K$, et l'hyperplan affine d'équation $2x_1 - 3x_2 - 8 = 0$**
   $\mathcal{H}_K = \{x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 3x_2 + 4 = 0\}$, et $\{x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 3x_2 - 8 = 0\}$ est l'hyperplan $\mathcal{H}_L$ où K est le point $(4,0)_{\mathcal{R}}$. Nous avons alors la figure



Remarque : Les hyperplan de même direction restent parallèles

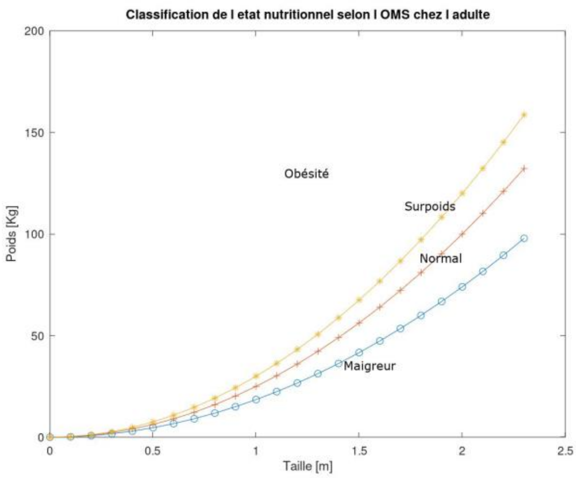
Méthode SVM linéaire de classification :

Soit une population d'individus décrits par un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de paramètres. L'objectif de la classification est de regrouper les individus selon des critères définis sur ces paramètres. Ceci revient à définir des frontières qui séparent entre les classes d'individus. Un exemple important est celui de la classification de l'état nutritionnel chez l'adulte selon l'OMS[4] :

Classification	IMC (Kg/m^2)	Risque
Maigreur (Dénutrition)	$< 18{,}5$	
Normal	$18{,}5 - 24{,}9$	
Surpoids	$25 - 29{,}9$	Modérément augmenté
Obésité	> 30	Nettement augmenté

La figure ci-dessous décrit les frontières de cette classification :

[4] OMS : Organisation mondiale de la Santé https://www.who.int/fr



Dans cette première partie nous nous proposons d'étudier la détermination de la frontière avec la méthode Support-Vector Machine (SVM) linéaire.

Soient quatre individus décrits par deux paramètres T et P selon le tableau suivant :

Individu	T	P
$\boldsymbol{I_1}$	1,5	72
$\boldsymbol{I_2}$	1,75	92
$\boldsymbol{I_3}$	1,6	60
$\boldsymbol{I_4}$	1,8	72

Les deux premiers sont hypertendus et les deux autres ne le sont pas. Nous affectons aux hypertendus la valeur 1 et aux autres la valeur -1.

3. Nous nous proposons de trouver les paramètres $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ et $w_3 \in \mathbb{R}$ de la fonction frontière d'équation $g(\boldsymbol{x}) = 0$, où

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{w^T x} - w_3 \end{array}$$

et vérifie $g(\boldsymbol{I_i}) \geq 1$ pour $i = 1 \; et \; 2$, $g(\mathrm{I_i}) \leq -1$ pour $i = 3 \; et \; 4$ et telle que la distance entre l'ensemble des potentiellement hypertendus

$$HT_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \; / \; g(\boldsymbol{x}) \geq 1\}$$

et l'ensemble des potentiellement non-hypertendus

$$HT_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) \leq -1\}$$

soit **maximale**.

i. **Ecrire la contraintes $\boldsymbol{g_i}$ que doivent vérifier $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w_3}$ aux différents $\boldsymbol{I_i}$ pour $\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$ et 4**

Nous avons $g(\boldsymbol{I_1}) \geq 1$, $g(\boldsymbol{I_2}) \geq 1$, $g(\boldsymbol{I_3}) \leq -1$ et $g(\boldsymbol{I_4}) \leq -1$ ceci implique que nous avons $\boldsymbol{w^T I_1} - w_3 \geq 1$, $\boldsymbol{w^T I_2} - w_3 \geq 1$, $\boldsymbol{w^T I_3} - w_3 \leq -1$ et $\boldsymbol{w^T I_4} - w_3 \leq -1$ ou encore $1 - \boldsymbol{w^T I_1} + w_3 \leq 0$; $1 - \boldsymbol{w^T I_2} + w_3 \leq 0$, $\boldsymbol{w^T I_3} - w_3 + 1 \leq 0$ et $\boldsymbol{w^T I_4} - w_3 + 1 \leq 0$ ou encore $g_1(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$, $g_2(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$, $g_3(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$ et $g_4(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$ avec $g_1(\boldsymbol{w}, w_3) = 1 - \boldsymbol{w^T I_1} + w_3$, $g_2(\boldsymbol{w}, w_3) = 1 - \boldsymbol{w^T I_2} + w_3$, $g_3(\boldsymbol{w}, w_3) = \boldsymbol{w^T I_3} - w_3 + 1$ et $g_4(\boldsymbol{w}, w_3) = \boldsymbol{w^T I_4} - w_3 + 1$

j. **Montrer que la distance qui existe entre l'ensemble $\boldsymbol{D_1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{g(x) = 1}\}$ et l'ensemble $\boldsymbol{D_{-1}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{g(x) = -1}\}$ est égale à $\frac{2}{\|w\|_2}$.**

$$d(D_1, D_2) = \inf_{x_1 \in D_1, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_2}} \|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|_2$$

Il s'agit donc de minimiser $\|x_1 - x_2\|_2$ avec $w^T x_1 - w_3 = 1$ et $w^T x_2 - w_3 = -1$. C'est un problème de minimisation avec deux contraintes d'égalité. Comme la norme est positive le problème devient à minimiser $\frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_2^2$sous les contraintes $w^T x_1 - w_3 = 1$ et $w^T x_2 - w_3 = -1$ou encore, en faisant un changement de variable $(y = x_1 - x_2)$, de minimiser $f(y) = \frac{1}{2}\|y\|_2^2$ sous les contraintes $w^T x_1 - w_3 = 1$ et $w^T(x_1 - y) - w_3 = -1 \Leftrightarrow w^T x_1 - w_3 - w^T y = -1 \Longrightarrow w^T y - 2 = 0$.

D'après le théorème de Lagrange, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que:

$\begin{cases} y + \lambda w = 0 \\ w^T y - 2 = 0 \\ w^T x_1 - w_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$ en multipliant la première équation par w^T et en tenant compte de la deuxième on a $\lambda = \frac{-2}{\|w\|_2^2} \Longrightarrow y = \frac{2}{\|w\|_2^2} w$ et pour cette valeur, la distance est $\|y\|_2 = \sqrt{\langle y|y\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{2}{\|w\|_2^2} w \middle| \frac{2}{\|w\|_2^2} w \right\rangle} = \frac{2}{\|w\|_2^2}\|w\|_2 = \frac{2}{\|w\|_2}$

k. **Calculer la distance entre $\boldsymbol{O}$, l'origine du repère, et $\boldsymbol{D_0} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{g(x) = 0}\}$**

$d(O, D_2) = \inf_{x_1 \in D_1} \|\boldsymbol{x}\|_2$. Il s'agit donc de minimiser $\|\boldsymbol{x}\|_2$ avec $\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} - w_3 = 0$, ou encore comme précédemment, Il s'agit donc de minimiser $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|_2$ avec $\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} - w_3 = 0$. Encore une fois par Lagrange, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$\begin{cases} \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{w} = 0 \\ \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} - w_3 = 0 \end{cases}$, et de la même manière on obtient $\lambda = \frac{-w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2}$ et$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2} w \middle| \frac{w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2} \boldsymbol{w} \right\rangle} = \frac{w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2}\|\boldsymbol{w}\|_2 = \frac{w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2}$

l. **Déduire de a. et de b. le problème de minimisation à résoudre pour déterminer $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w_1} \\ \boldsymbol{w_2} \\ \boldsymbol{w_3} \end{pmatrix}$.**

Comme le but est de maximiser la distance entre HT_+de frontière D_1 et entre HT_-de frontière D_{-1} et que la distance entre ces deux frontières est égale à $\frac{2}{\|w\|_2}$, alors le problème revient à minimiser $f(\boldsymbol{w}, w_3) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|_2$ sous les contraintes $g_1(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$, $g_2(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$, $g_3(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$ et $g_4(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$ avec $g_1(\boldsymbol{w}, w_3) = 1 - \boldsymbol{w^T I_1} + w_3$, $g_2(\boldsymbol{w}, w_3) = 1 - \boldsymbol{w^T I_2} + w_3$, $g_3(\boldsymbol{w}, w_3) = \boldsymbol{w^T I_3} - w_3 + 1$ et $g_4(\boldsymbol{w}, w_3) = \boldsymbol{w^T I_4} - w_3 + 1$

m. **Donner, en appliquant le théorème de Kuhn & Tucker, le système à résoudre en explicitant les équations.**

Le théorème de Kuhn et Tucker implique que si $(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3})$ est un minimum, alors ils existent des réels positifs λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \nabla g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) = 0 \\ \lambda_i g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) = 0 \; pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4 \\ g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) \leq 0 \qquad pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -I_{11} \\ -I_{12} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -I_{21} \\ -I_{22} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} I_{31} \\ I_{32} \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} I_{41} \\ I_{42} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \lambda_i g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) = 0 \; pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4 \\ g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) \leq 0 \qquad pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4 \end{cases}$$

où I_{i1} et I_{i2} sont les composantes de I_i.

n. Les contraintes peuvent elles être simultanément non saturées. Justifier la réponse.

Si les contraintes sont simultanément non saturées alors, par les équations $\lambda_i g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) = 0 \; pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4$, on obtient que les multiplicateurs sont tous nuls et par conséquent que $w_1 = w_2 = 0$ ce qui est impossible.

o. Donner le nombre de contraintes maximales qui soient saturées simultanément. Justifier la réponse

La matrice $[\nabla g_1(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}), \nabla g_2(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}), \nabla g_3(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}), \nabla g_4(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3})] = \begin{bmatrix} -I_{11} & -I_{21} & I_{31} & I_{41} \\ -I_{11} & -I_{21} & I_{31} & I_{41} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ est de rang égal à 3. Ceci implique qu'il existe au plus trois contraintes simultanément saturées.

p. Donner les équations à résoudre si les contraintes 1, 2 et 3 sont saturées. (On ne demande pas de résoudre ces équations)

Comme les quatre contraintes ne peuvent être saturées simultanément. La saturation des contraintes 1, 2 et 3 implique que $g_4(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) < 0$ et par conséquent $\lambda_4 = 0$. Les équations à résoudre sont alors :

$$\begin{gathered} w_1 - \lambda_1 I_{11} - \lambda_2 I_{21} + \lambda_3 I_{31} = 0 \\ w_2 - \lambda_1 I_{12} - \lambda_2 I_{22} + \lambda_3 I_{32} = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -w_1 I_{11} - w_2 I_{12} + w_3 + 1 = 0 \\ -w_1 I_{21} - w_2 I_{22} + w_3 + 1 = 0 \\ w_1 I_{31} + w_2 I_{32} - w_3 + 1 = 0 \\ w_1 I_{41} + w_2 I_{42} - w_3 + 1 < 0 \\ \lambda_1 \geq 0; \; \lambda_2 \geq 0; \; \lambda_3 \geq 0 \end{gathered}$$

4. **Tracer sur une même figure les points $\boldsymbol{M_i}/\overrightarrow{\boldsymbol{OM_i}} = \boldsymbol{I_i}$, pour $\boldsymbol{i} = \mathbf{1, 2, 3}$ et $\mathbf{4}$ et la frontière en supposant que les contraintes 1, 2 et 3 sont saturées.**

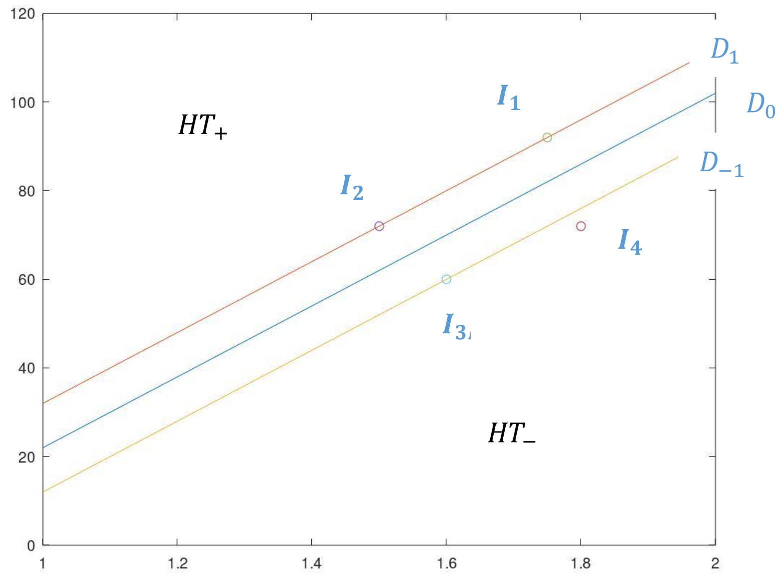
1ère méthode pour le calcul de $\overline{\boldsymbol{w}}$ et de $\overline{\boldsymbol{w_3}}$:

Les équations 4, 5 et 6 de la question précédente donnent un système $\begin{bmatrix} -I_{11} & -I_{12} & 1 \\ -I_{21} & -I_{22} & 1 \\ I_{31} & I_{32} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui peut être inversé pour donner $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0.1 \\ -\frac{29}{5} \end{pmatrix}$.

2ème méthode pour le calcul de $\overline{\boldsymbol{w}}$ et de $\overline{\boldsymbol{w_3}}$:

Si les contraintes 1 et 2 sont saturées ceci implique que la droite D_1 est de direction le vecteur $\boldsymbol{I_2} - \boldsymbol{I_1} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 20 \end{pmatrix}$ où encore que $D_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} - w_3 = \mathbf{1}\}$ avec $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} -20 \\ 0,25 \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $w_3 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{I_1} - \mathbf{1} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{I_2} - \mathbf{1} = (-20 \times 1{,}5\alpha + 0{,}25 \times 72\alpha) - 1 = (-20 \times 1{,}75\alpha + 0{,}25 \times 92\alpha) - 1 = -12\alpha - 1$. α est alors déterminé en écrivant que $g_4(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w_3}) = 0$, autrement dit $w^T \boldsymbol{I_3} - w_3 = -1 \Longrightarrow (-20 \times 1{,}6\alpha + 0{,}25 \times 60\alpha) + 1 + 12\alpha = -1 \Longrightarrow \alpha = \frac{2}{5} \Longrightarrow \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ et $w_3 = -\frac{29}{5}$

Ceci nous donne la figure suivante :



Remarque : Cette solution n'est pas bonne, car $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $w_3 = -\frac{29}{5}$ font que $\lambda_2 < 0$

5. **Question subsidiaire** : Donner une formulation plausible pour retrouver les frontières relatives à la classification OMS de la figure ci-dessus.

Délivrable

Un rapport contenant :

1. Une bibliographie sur la méthode
2. La Programmation de la méthode
3. Une discussion sur les résultats de la programmation

Support pour l'atelier 1

Rappel de cours

Théorème (de Kuhn[5] & Tucker[6]). Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et soient $g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour $i = 1,2,\dots,p$. On pose $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)^t$ et on considère $K = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1,2,\dots,p\}$ et on considère $\bar{x} \in \mathbb{R}^n / f(\bar{x}) = \inf_{x \in K} f(x)$. On suppose que f est différentiable en $\bar{x}$ et que $\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I(\bar{x})}$ où $I(\bar{x}) = \{i \in \{1,2,\dots;p\} / g_i(x) = 0\}$ est une famille libre, alors il existe $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_i)_{i \in I(\bar{x})}$ de réels positifs tels que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

Remarque : Dans la pratique nous résolvons le système

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, & i = 1,2,\dots,p \\ g_i(\bar{x}) \leq 0, & i = 1,2,\dots,p \\ \bar{\lambda}_i \geq 0, & i = 1,2,\dots,p \end{cases}$$

Algorithme d'Uzawa :

Présentation de l'algorithme :

L'algorithme d'Uzawa pour la résolution numérique du système ci-dessus repose sur différentes propriétés du problème.

La première propriété est que la solution théorique $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est un point selle du lagrangien, autrement dit elle vérifie :

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^p; x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

où $\mathcal{L}$ est le lagrangien :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{L}: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, \lambda) & \longmapsto & f(x) + \langle \lambda | g(x) \rangle = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) \end{array}$$

(1) implique que pour

$$\lambda \in \mathbb{R}^p, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \lambda) \tag{2}$$

et pour

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) \tag{3}$$

La seconde propriété est que la fonction

$$\begin{array}{llll} M: & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longmapsto & M(\lambda) = \mathcal{L}(x_\lambda, \lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \lambda) \end{array}$$

[5] https://fr.wikipedia.org/wiki/Harold_W._Kuhn
[6] https://fr.wikipedia.org/wiki/Albert_W._Tucker

est concave.

Il s'écrit donc comme suit:

$$\begin{cases} p \in \mathbb{R}_+^*, \lambda^{(0)} \in \mathbb{R}_+^p \text{ donnés} \\ \begin{cases} \text{pour } k = 0,1, \dots \text{faire} \\ x^{(k)} \,/\, \mathcal{L}\left(x^{(k)}, \lambda^{(k)}\right) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}\left(x, \lambda^{(k)}\right) \\ \lambda^{(k+1)} = P_{\mathbb{R}_+^p}\left(\lambda^{(k)} + p\nabla M\left(\lambda^{(k)}\right)\right) \end{cases} \end{cases}$$

Commentaire sur l'algorithme

Dans l'étape d'initialisation :

- $p \in \mathbb{R}_+^*$ est le pas pour la méthode du gradient pour chercher le maximum de M,
- $\lambda^{(0)}$ est le vecteur de départ pour le calcul de la suite $\left(\lambda^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$qui convergerait si le pas est bien choisi vers $\bar{\lambda}$.

Dans l'étape itérative :

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}\left(x, \lambda^{(k)}\right)$ qui est obtenu en $x^{(k)}$ est par définition $M\left(\lambda^{(k)}\right)$. Ceci permet de calculer le gradient de M en $\lambda^{(k)}$, à savoir $\nabla M\left(\lambda^{(k)}\right)$, et d'incrémenter $\lambda^{(k)}$ par $p\nabla M\left(\lambda^{(k)}\right)$ pour obtenir après projection sur $\mathbb{R}_+^p$, $\lambda^{(k+1)} = P_{\mathbb{R}_+^p}\left(\lambda^{(k)} + p\nabla M\left(\lambda^{(k)}\right)\right)$.

L'algorithme ci-dessus cherche à calculer le point selle du lagrangien en chercher à construire la suite des $\lambda^{(k)}$ qui convergerait vers λ. A l'initialisation, nous considérons $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}_+^p$ et nous cherchons à trouver $x^{(0)}$ qui minimise $= \mathcal{L}\left(x, \lambda^{(0)}\right)$ autrement dit, nous calculons $M\left(\lambda^{(0)}\right)$. Nous savons par (2) que si $\lambda^{(0)} = \lambda$ alors $x^{(0)} = \bar{x}$. En revanche, si $\lambda^{(0)} \neq \lambda$, vue la concavité de M nous calculons $\widetilde{\lambda^{(1)}} = \lambda^{(0)} + p\nabla M\left(\lambda^{(0)}\right)$[7].Enfin, nous projetons $\widetilde{\lambda^{(1)}}$ sur $\mathbb{R}_+^p$ en annulant toutes les composantes négatives pour obtenir $\lambda^{(1)}$ puis nous passons à l'itération d'après.

Une remarque importante est que $M(\mu) = \mathcal{L}\left(x_\mu, \mu\right) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \mu) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n}\left(f(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(x)\right)$

Son gradient à la première à la $k-\grave{e}me$ itération est $\begin{pmatrix} \partial M/\partial \mu_1 \\ \vdots \\ \partial M/\partial \mu_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1\left(x^{(k)}\right) \\ \vdots \\ g_p\left(x^{(k)}\right) \end{pmatrix}$.

Présentation du problème :

Ecriture du lagrangien :

Dans le problème posé, nous avons

$$f(w, w_3) = \frac{1}{2}\|w\|_2^2 = \frac{1}{2}\left(w_1^2 + w_2^2\right) \Longrightarrow \nabla f(\overline{w}, \overline{w_3}) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et autant de contraintes que d'individus avec :

[7] Nous savons dans le cours que pour une fonction **convexe** f, les itérées pour la recherche du **minimum** sont obtenues en les incrémentant dans le **sens opposé du gradient** $x^{(k+1)} = x^{(k)} - p\nabla f\left(x^{(k)}\right)$. Pour une fonction **concave** où il faut chercher le **maximum**, les itérées sont obtenues en les incrémentant dans **le sens du gradient**.

Pour $I_i^+ = \begin{pmatrix} I_{i1}^+ \\ I_{i2}^+ \end{pmatrix}$ qui a une hypertension ($I_i^+ \in HT_+$) on a la contrainte

$$g_{I_i^+}(w, w_3) = 1 - w^T I_i^+ + w_3 = 1 - w_1 I_{i1}^+ - w_2 I_{i2}^+ + w_3 \Longrightarrow \nabla g_k(\overline{w}, \overline{w_3}) = \begin{pmatrix} -I_{i1}^+ \\ -I_{i2}^+ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $I_i^- = \begin{pmatrix} I_{i1}^- \\ I_{i2}^- \end{pmatrix}$ qui n'a pas d'hypertension ($I_i^- \in HT_-$) on a la contrainte

$$g_{I_i^-}(w, w_3) = w^T I_i^- - w_3 + 1 = w_1 I_{i1}^- + w_2 I_{i2}^- - w_3 + 1 \Longrightarrow \nabla g_p(\overline{w}, \overline{w_3}) = \begin{pmatrix} I_{i1}^- \\ I_{i2}^- \\ -1 \end{pmatrix}$$

le lagrangien dans le cas d'existence de plusieurs individus est donc

$$\mathcal{L}(W, \lambda) = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) + \sum_{I_i^+ \in HT_+} \lambda_{I_i^+}(1 - w_1 I_{i1}^+ - w_2 I_{i1}^+ + w_3)$$
$$+ \sum_{I_i^- \in HT_+} \lambda_{I_i^-}(w_1 I_{i1}^- + w_2 I_{i2}^- - w_3 + 1)$$

Et dans le cas de quatre individus tel que c'est proposé dans le problème, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) + \lambda_1(1 - w_1 I_{11} - w_2 I_{12} + w_3) + \lambda_2(1 - w_1 I_{21} - w_2 I_{22} + w_3)$$
$$+ \lambda_3(w_1 I_{31} + w_2 I_{32} - w_3 + 1) + \lambda_4(w_1 I_{41} + w_2 I_{42} - w_3 + 1)$$

L'algorithme appliqué au problème:

Réécrivons l'algorithme dans sa forme générale :

$$\begin{cases} p \in \mathbb{R}_+^*, \lambda^{(0)} \in \mathbb{R}_+^p \text{ donnés} \\ \begin{cases} \text{pour } k = 0,1, \dots \text{faire} \\ x^{(k)} \;/\; \mathcal{L}\left(x^{(k)}, \lambda^{(k)}\right) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}\left(x, \lambda^{(k)}\right) \\ \lambda^{(k+1)} = P_{\mathbb{R}_+^p}\left(\lambda^{(k)} + p\nabla M\left(\lambda^{(k)}\right)\right) \end{cases} \end{cases}$$

Nous pouvons donc commencer par initialiser $\lambda^{(0)}$ par $0_{\mathbb{R}_+^p}$

Dans ce cas nous résolvons le problème sans contraintes

$$W^{(0)}?/\mathcal{L}\left(W^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) = \min_{W \in \mathbb{R}^3} \mathcal{L}\left(W, \lambda^{(0)}\right) = \min_{W \in \mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2)\right)$$

Dans cette itération, nous avons alors $w_1 = w_2 = 0$ et on sait que pour w_3, il existe un individu I_i^+ et un individu I_i^- tels que $w^T I_i^+ - w_3 = 1$ et $w^T I_i^- - w_3 = -1$ ce qui implique que $w_3 = \frac{w^T(I_i^+ + I_i^-)}{2} = 0$

On a alors $\widetilde{\lambda^{(1)}} = \lambda^{(0)} + p\nabla M(\lambda^{(0)}) = p\begin{pmatrix} g_1(W^{(0)}) \\ \vdots \\ g_p(W^{(0)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix}$ et comme $p > 0$, on a $\lambda^{(1)} = \widetilde{\lambda^{(1)}}$.

A l'itération suivante, on a une forme plus générale :

$$\begin{aligned} W^{(1)}?/\mathcal{L}(W^{(1)}, \lambda^{(1)}) &= \min_{W\in\mathbb{R}^3} \mathcal{L}\left(W, \lambda^{(1)}\right) \\ &= \min_{W\in\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) + \sum_{I_i^+\in HT_+} p(1 - w_1 I_{i1}^+ - w_2 I_{i1}^+ + w_3) \right. \\ &\left. \quad + \sum_{I_i^-\in HT_+} p(w_1 I_{i1}^- + w_2 I_{i2}^- - w_3 + 1) \right) \end{aligned}$$

<u>Questions :</u>

La fonction

$$\frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) + \sum_{I_i^+\in HT_+} p(1 - w_1 I_{i1}^+ - w_2 I_{i1}^+ + w_3) + \sum_{I_i^-\in HT_+} p(w_1 I_{i1}^- + w_2 I_{i2}^- - w_3 + 1)$$

Est elle strictement convexe ? convexe ?

Comment calculer son minimum ?

Donner l'algorithme final.

Atelier 2 : Mise en œuvre de La régression linéaire

Présentation du problème

Soit $p \in \mathbb{N}^*$et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$. On note par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$ et par $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme euclidienne correspondante.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. On note par $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la transposée de A et on définit son noyau par $KerA = \{x \in \mathbb{R}^m / Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$

1. Exemple 1 : Dans le plan (s, t), on cherche la droite d'équation $t = \alpha + \beta s$ qui passe par les points $(0,1), (1,9), (3,9)$ et $(4,21)$
   a) Montrer que si cette droite existait, le vecteur $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ serait solution d'un système $Ax = b$. On donnera explicitement la matrice A et le vecteur b.
   b) Montrer qu'une telle droite n'existe pas.

Dans la suite du problème on va trouver la droite qui passe le « plus près » possible de ces quatre points, au sens de la norme euclidienne.

2. Exemple 2 : On cherche maintenant à déterminer les coefficients α, β et γ d'une fonction linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, dont on ne connait la valeur qu'en deux points : $T(1,1,1) = 3$ et $T(0,1,1) = 2$.
   a) Montrer que les coefficients α, β et γ s'ils existent, satisfont un système linéaire $Ax = b$. On donnera explicitement la matrice A et le vecteur b.
   b) Montrer qu'il existe une infinité de solutions au système $Ax = b$.

Dans la suite du problème, on va trouver les coefficients α, β et γ qui donnent un vecteur x de norme euclidienne minimale.

On considère maintenant une matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$et $b \in \mathbb{R}^n$, et on veut résoudre dans un sens aussi « satisfaisant » que possible le système linéaire

$$Ax = b$$

avec $x \in \mathbb{R}^m$ lorsque $m \neq n$ ou lorsque $m = n$ mais que A n'est pas inversible. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \|Ax - b\|^2$. On cherche à minimiser f, c'est-à-dire à trouver $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$f(\bar{x}) = \min_{x\in\mathbb{R}^m} f(x) \qquad (1)$$

3. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$tel que $\mathbb{R}^m = E + KerA$.
   a) Montrer que $f(z) \longrightarrow +\infty$ lorsque $\|z\| \longrightarrow +\infty$ et $z \in E$,
   b) Montrer que f est strictement convexe de E dans $\mathbb{R}$.
   c) En déduire qu'il existe un unique $\bar{z} \in E$ tel que $f(\bar{z}) \leq f(z)\ \forall z \in E$
4. Soit $X_b = \{\bar{z} + y, y \in KerA\}$, où $\bar{z}$ est défini à la question précédente. Montrer que $X_b$est égal à l'ensemble des solutions du problème de minimisation (1)
5. Montrer que $x \in X_b \Leftrightarrow A^T Ax = A^T b$.

On appelle système d'équations normales, le système $A^T Ax = A^T b$.

6. Ecrire les équations normales dans le cas de l'exemple de la question 1. et en déduire l'équation de la droite obtenue par moindres carrés, i.e., par résoluion de (1). Tracer les quatre points donnés à la question 1. Et la droite obtenue sur un graphique.
7. Ecrire les équations normales dans le cas de l'exemple de la question 2. et vérifier que le système obtenu n'est pas inversible.
8. Pour $y \in KerA$, on pose $g(y) = \|y + \bar{z}\|^2$, où $\bar{z}$ est la solution définie à la question 3. Montrer qu'il existe un unique $\bar{y} \in KerA$, tel que $g(\bar{y}) \leq g(y) \forall y \in KerA$. En déduire qu'il existe un unique $\bar{x} \in X_b$ tel que $\|\bar{x}\|^2 \leq \|x\|^2 \ \ \forall x \in X_b$. On appelle $\bar{x}$ pseudo-solution de (1).
9. Calculer $\bar{x}$ dans le cas des questions 1. Et 2.

Dans la suite du problème, on considère, pour $\varepsilon > 0$ fixé, une version pénalisée du système (1). On introduit la fonction $f_\varepsilon(x) = \|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|A^T Ax - A^T b\|^2$, et on cherche à trouver x_ε solution du problème de minimisation :

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \ f_\varepsilon(x), \forall \ x_\varepsilon \in \mathbb{R}^m \qquad (2)$$

10. Montrer que le problème (2) possède une unique solution x_ε.
11. Calculer $\nabla f_\varepsilon(x)$ et en déduire l'équation satisfaite par x_ε.
12. Montrer que x_ε converge vers $\bar{x}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Correction

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$. On note par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$ et par $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme euclidienne correspondante.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. On note par $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la transposée de A et on définit son noyau par $KerA = \{x \in \mathbb{R}^m / Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$

1. **Exemple 1 : Dans le plan (s, t), on cherche la droite d'équation $t = \alpha + \beta s$ qui passe par les points $(0, 1), (1, 9), (3, 9)$ et $(4, 21)$**
   c) **Montrer que si cette droite existait, le vecteur $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ serait solution d'un système $Ax = b$. On donnera explicitement la matrice A et le vecteur b.**

   Le vecteur $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ vérifie $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 9\\ 9\\ 21\end{bmatrix}$. Si on prenait les deux premiers points

   Montrer qu'une telle droite n'existe pas.

   $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 9\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 8\end{bmatrix} \Longrightarrow$ en considérant le troisième point $9 = 1 + 8 * 3 = 25$ impossible. Donc il n'existe pas de droite qui passe par tous ces points

Dans la suite du problème on va trouver la droite qui passe le « plus près » possible de ces quatre points, au sens de la norme euclidienne.

2. **Exemple 2 : On cherche maintenant à déterminer les coefficients α, β et γ d'une fonction linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, dont on ne connait la valeur qu'en deux points : $T(1, 1, 1) = 3$ et $T(0, 1, 1) = 2$.**
   c) **Montrer que les coefficients α, β et γ s'ils existent, satisfont un système linéaire $Ax = b$. On donnera explicitement la matrice A et le vecteur b.**

   Si elle une telle application linéaire existait on aurait $\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = 3$ et $\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$.

   d) **Montrer qu'il existe une infinité de solutions au système $Ax = b$.**

   $$\begin{cases}\alpha + \beta + \gamma & = & 3\\ \quad \beta + \gamma & = & 2\end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \in \{(1,0,2) + \beta(0,1,-1), \beta \in \mathbb{R}\}$$

Dans la suite du problème, on va trouver les coefficients α, β et γ qui donnent un vecteur x de norme euclidienne minimale.

On considère maintenant une matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, et on veut résoudre dans un sens aussi « satisfaisant » que possible le système linéaire

$$Ax = b$$

avec $x \in \mathbb{R}^m$ lorsque $m \neq n$ ou lorsque $m = n$ mais que A n'est pas inversible. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \|Ax - b\|^2$. On cherche à minimiser f, c'est-à-dire à trouver $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$f(\overline{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x) \qquad (1)$$

3. **Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$tel que $\mathbb{R}^m = E + KerA$.**
   d) **Montrer que $f(z) \longrightarrow +\infty$ lorsque $\|z\| \longrightarrow +\infty$ et $z \in E$,**

$$f(z) = \|Az - b\|^2 = \langle Az - b, Az - b\rangle = \langle Az, Az\rangle - 2\langle Az, b\rangle + \langle b, b\rangle$$
$$= \langle A^T Az, z\rangle - 2\langle Az, b\rangle + \langle b, b\rangle$$

   $A^T A$ est symétrique définie positive. Si $z \notin KerA$ on a :

$$f(z) = \langle A^T Az, z\rangle - 2\langle Az, b\rangle + \langle b, b\rangle \;= \|z\|^2 \left(\langle A^T A \frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\rangle - 2\left\langle A \frac{z}{\|z\|^2}, b\right\rangle + \frac{1}{\|z\|^2}\langle b, b\rangle\right) \underset{\|z\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   e) **Montrer que f est strictement convexe de E dans $\mathbb{R}$.**
   $A^T A$ est symétrique définie positive donc f est strictement convexe sur E (cours)
   f) **En déduire qu'il existe un unique $\bar{z} \in E$ tel que $f(\bar{z}) \leq f(z)$ $\forall z \in E$**
   a) Et b) impliquent c) (cours)
4. **Soit $X_b = \{\bar{z} + y, y \in KerA\}$, où $\bar{z}$ est défini à la question précédente. Montrer que $X_b$est égal à l'ensemble des solutions du problème de minimisation (1)**
   Soit $x = \bar{z} + y$, avec $y \in KerA \Rightarrow f(x) = \|A(\bar{z} + y) - b\|^2 = \|A\bar{z} - b\|^2 \leq \|Az - b\|^2 \forall z \in E \Longrightarrow f(x) \leq \|A(z + y) - b\|^2 \forall (z, y) \in E \times KerA = \mathbb{R}^m \Rightarrow x$ est solution de (1). Réciproquement, soit $x \in E \times KerA = \mathbb{R}^m$ alors il existe un couple $(\breve{z}, \tilde{y}) \in E \times KerA / x = \tilde{z} + \tilde{y}$. x est solution de $(1) \Rightarrow f(x) = f(\tilde{z}) \leq f(z) \forall z \in E \subset \mathbb{R}^m \Rightarrow \tilde{z} = \bar{z}$
5. **Montrer que $x \in X_b \Leftrightarrow A^T Ax = A^T b$.**
   On a vu que $f(z) = \langle A^T Az, z\rangle - 2\langle Az, b\rangle + \langle b, b\rangle = \langle A^T Az, z\rangle - 2\langle A^T b, z\rangle + \langle b, b\rangle$, avec $A^T A$ est symétrique définie positive sur E. On sait par le cours que le minimum de f est unique et est atteint en $\bar{z}$ tel que $\nabla f(\bar{z}) = 2(A^T A\bar{z} - A^T b) = 0$.
   Ainsi, pour $x \in X_b$, x= $\bar{z} + y$ avec $y \in KerA \Longrightarrow A^T Ax - A^T b = A^T A(\bar{z} + y) - A^T b = A^T A\bar{z} - A^T b = 0$
   Réciproquement soit $x \in \mathbb{R}^m \Longrightarrow \exists (z, y) \in E \times KerA / x = z + y$ et $A^T Ax - A^T b = 0 \Longrightarrow A^T Az - A^T b = 0 \Longrightarrow z = \bar{z}$ par unicité de $\bar{z}$

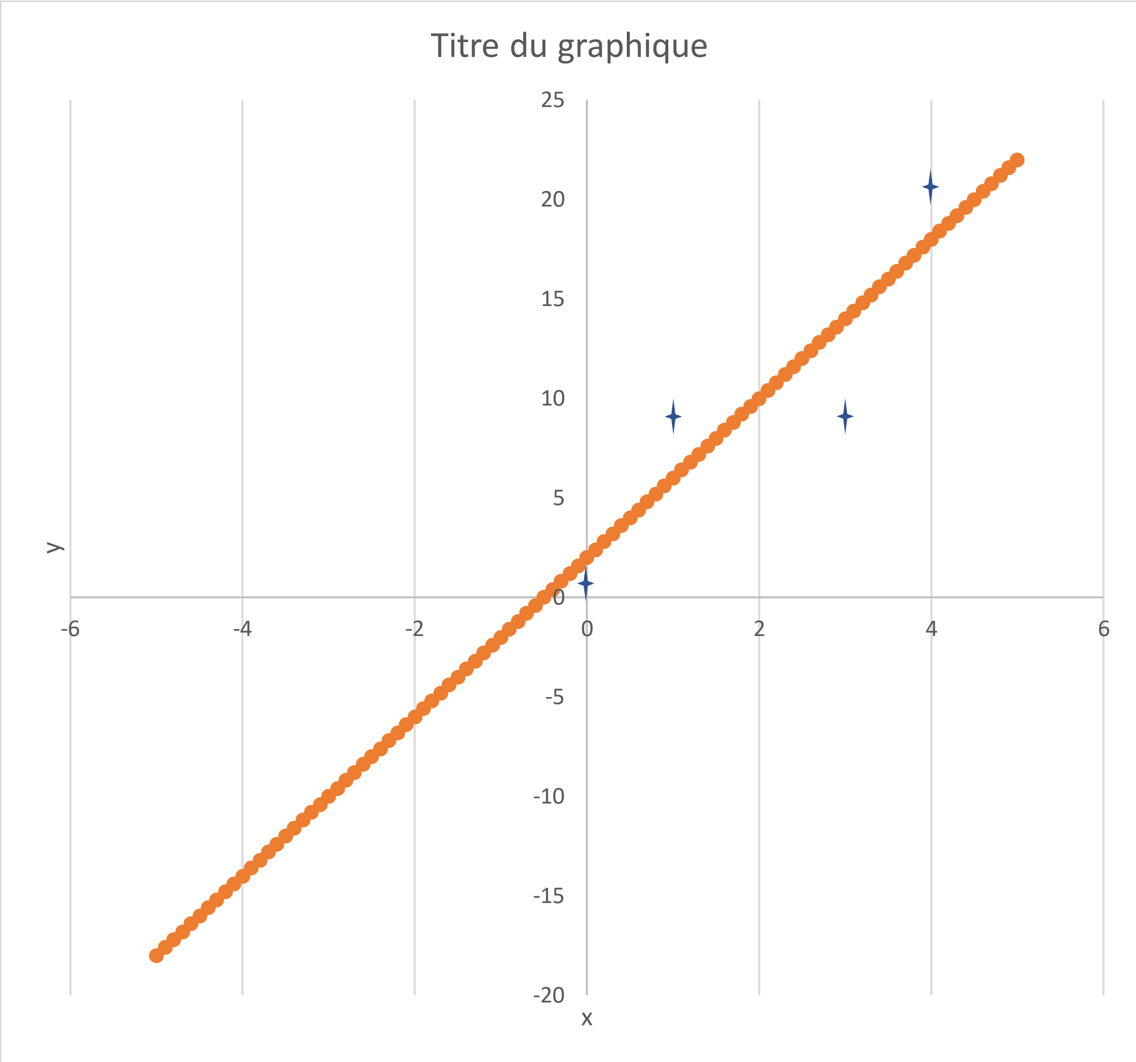
On appelle système d'équations normales, le système $A^T Ax = A^T b$.

6. **Ecrire les équations normales dans le cas de l'exemple de la question 1. et en déduire l'équation de la droite obtenue par moindres carrés, i.e., par résoluion de (1). Tracer les quatre points donnés à la question 1. Et la droite obtenue sur un graphique.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 120 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 26 & -8 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

   Et la droite est d'équation $t = 2 + 4s$



7. **Ecrire les équations normales dans le cas de l'exemple de la question 2. et vérifier que le système obtenu n'est pas inversible.**

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\5\end{bmatrix}$$

Les lignes 2 et 3 sont identiques donc le système n'est pas inversible

8. **Pour $y \in KerA$, on pose $g(y) = \|y + \bar{z}\|^2$, où $\bar{z}$ est la solution définie à la question 3. Montrer qu'il existe un unique $\bar{y} \in KerA$, tel que $g(\bar{y}) \leq g(y) \forall y \in KerA$. En déduire qu'il existe un unique $\bar{x} \in X_b$ tel que $\|\bar{x}\|^2 \leq \|x\|^2 \ \forall x \in X_b$. On appelle $\bar{x}$ pseudo-solution de (1).**

$KerA = \left\{ y = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ Ay = 0 \right\} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow KerA = \left\{ y = t \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \Longrightarrow f(y) = 2|t|^2$ donc le minimum est obtenu pour $y = 0$. Soit $E = verct\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$. On a $\mathbb{R}^3 = E + KerA$.

9. **Calculer $\bar{x}$ dans le cas des questions 1. Et 2.**

Dans la suite du problème, on considère, pour $\varepsilon > 0$ fixé, une version pénalisée du système (1). On introduit la fonction $f_\varepsilon(x) = \|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|A^T A x - A^T b\right\|^2$, et on cherche à trouver x_ε solution du problème de minimisation :

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq f_\varepsilon(x), \forall\, x_\varepsilon \in \mathbb{R}^m \qquad (2)$$

10. **Montrer que le problème (2) possède une unique solution x_ε.**

    On a f_ε est continue, $\lim\limits_{\|x\|\longrightarrow+\infty} f_\varepsilon(x) = +\infty$ et f_ε strictement convexe, d'où l'existence et l'unicité

11. **Calculer $\nabla f_\varepsilon(x)$ et en déduire l'équation satisfaite par x_ε.**

    $$\begin{aligned} f_\varepsilon(x+h) &= \|x+h\|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}\|A^T A(x+h) - A^T b\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}\|A^T A x - A^T b + A^T A h\|^2 \\ &= f_\varepsilon(x) + 2\langle x, h\rangle + \tfrac{2}{\varepsilon}\langle A^T A(A^T A x - A^T b), h\rangle + \|h\|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}\|A^T A h\|^2 \end{aligned}$$

    Et $\nabla f_\varepsilon(x) = 2x + \frac{2}{\varepsilon}A^T A(A^T A x - A^T b)$

12. **Montrer que x_ε converge vers $\overline{x}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.**

    x_ε est tel que $2x_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon}A^T A(A^T A x_\varepsilon - A^T b) = 0 \Longrightarrow 2\varepsilon x_\varepsilon + 2A^T A(A^T A x_\varepsilon - A^T b) = 0$

Délivrable

Un rapport contenant :

1- Une bibliographie sur la méthode
2- La Programmation de la méthode
3- Une discussion sur les résultats de la programmation