SUP'COM
Ecole Supérieure des Communications de Tunis

Atelier 1

Mise en œuvre de La méthode

Support Vector Machine

Présentation du problème

Notations :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Nous notons par $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} = (x_1, \dots, x_n)$ où pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i \in \mathbb{R}$ est la $i-ème$ composante de $\boldsymbol{x}$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, nous notons par $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{y}$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et par norme de $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle}$.

Notons que la distance entre deux sous-ensembles E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^n$ est $d = \inf\limits_{x_1 \in E_1, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{E_2}} \|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|_2$.

Nous rappelons aussi qu'un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension $n-1$. D'une manière général, si $\mathcal{H}$ est un hyperplan, alors il existe $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{H}$, autrement dit $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n / \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} = 0\}$.

Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{R} = (O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ le repère qui lui est associé. Nous rappelons qu'un hyperplan affine de direction $\mathcal{H}$ et passant par le point M est $\mathcal{H}_M = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;/\; \left(\boldsymbol{x} - \overrightarrow{OM}\right) \in \mathcal{H}\right\}$

1. On considère pour $n = 2$ l'hyperplan d'équation $2x_1 - 3x_2 = 0$. Donner $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ orthogonal à tous les vecteurs de cet hyperplan.
2. Soit $\mathcal{R} = (O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ un repère orthonormé et K le point de coordonnées $(1,2)_{\mathcal{R}}$. Tracer sur une même figure $\boldsymbol{w}$, $\mathcal{H}_O$, $\mathcal{H}_K$, et l'hyperplan affine d'équation
$$2x_1 - 3x_2 - 8 = 0$$

Méthode SVM linéaire de classification :

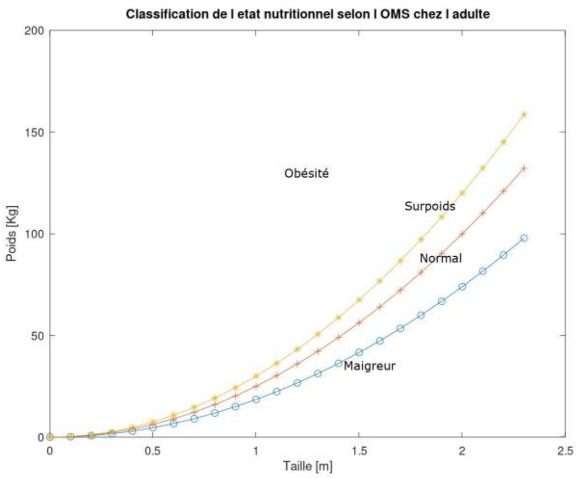
Soit une population d'individus décrits par un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de paramètres. L'objectif de la classification est de regrouper les individus selon des critères définis sur ces paramètres. Ceci revient à définir des frontières qui séparent entre les classes d'individus. Un exemple important est celui de la classification de l'état nutritionnel chez l'adulte selon l'OMS[1] :

Classification	IMC (Kg/m^2)	Risque
Maigreur (Dénutrition)	$< 18,5$	
Normal	$18,5 - 24,9$	

[1] OMS : Organisation mondiale de la Santé https://www.who.int/fr

Surpoids	$25 - 29{,}9$	Modérément augmenté
Obésité	> 30	Nettement augmenté

La figure ci-dessous décrit les frontières de cette classification :



Dans cette première partie nous nous proposons d'étudier la détermination de la frontière avec la méthode Support-Vector Machine (SVM) linéaire.

Soient quatre individus décrits par deux paramètres T et P selon le tableau suivant :

Individu	T	P
$\boldsymbol{I_1}$	1,5	72
$\boldsymbol{I_2}$	1,75	92
$\boldsymbol{I_3}$	1,6	60
$\boldsymbol{I_4}$	1,8	72

Les deux premiers sont hypertendus et les deux autres ne le sont pas. Nous affectons aux hypertendus la valeur 1 et aux autres la valeur -1.

3. Nous nous proposons de trouver les paramètres $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ et $w_3 \in \mathbb{R}$ de la fonction frontière d'équation $g(\boldsymbol{x}) = 0$, où

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{w^T x} - w_3 \end{array}$$

et vérifie $g(\boldsymbol{I_i}) \geq 1$ pour $i = 1$ et 2, $g(\mathrm{I_i}) \leq -1$ pour $i = 3$ et 4 et telle que la distance entre l'ensemble des potentiellement hypertendus

$$HT_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ / \ g(\boldsymbol{x}) \geq 1\}$$

et l'ensemble des potentiellement non-hypertendus

$$HT_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) \leq -1\}$$

soit **maximale**.

a. Ecrire la contraintes g_i que doivent vérifier $\boldsymbol{w}$ et w_3 aux différents $\boldsymbol{I_i}$ pour $i = 1{,}2{,}3$ et 4

b. Montrer que la distance qui existe entre l'ensemble $D_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) = 1\}$ et l'ensemble $D_{-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) = -1\}$ est égale à $\frac{2}{\|\boldsymbol{w}\|_2}$.

c. Calculer la distance entre O, l'origine du repère, et $D_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) = 0\}$

d. Déduire de a. et de b. le problème de minimisation à résoudre pour déterminer $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \\ \overline{w_3} \end{pmatrix}$.

e. Donner, en appliquant le théorème de Kuhn & Tucker[2], le système à résoudre en explicitant les équations.

f. Les contraintes peuvent elles être simultanément non saturées. Justifier la réponse.

g. Donner le nombre de contraintes maximales qui soient saturées simultanément. Justifier la réponse

h. Donner les équations à résoudre si les contraintes 1, 2 et 3 sont saturées. (On ne demande pas de résoudre ces équations)

4. Tracer sur une même figure les points $M_i / \overrightarrow{OM_i} = \boldsymbol{I_i}$, pour $i = 1,2,3$ et 4 et la frontière en supposant que les contraintes 1, 2 et 3 sont saturées.
5. **Question subsidiaire** : Donner une formulation plausible pour retrouver les frontières relatives à la classification OMS de la figure ci-dessus.

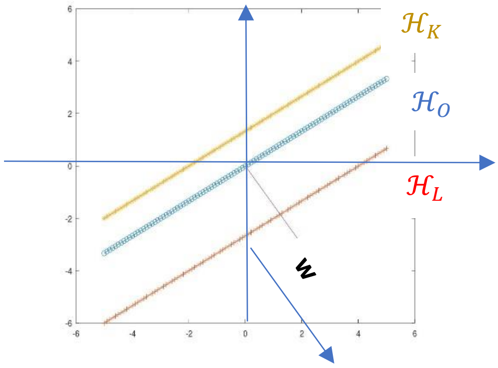
---

[2] **Théorème de Kuhn & Tucker.** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et soient $g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour $i = 1,2,\dots,p$. On pose $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)^t$ et on considère $K = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \le 0, i = 1,2,\dots,p\}$ et on considère $\bar{x} \in \mathbb{R}^n / f(\bar{x}) = \inf_{x \in K} f(x)$. On suppose que f est différentiable en $\bar{x}$ et que $\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I(\bar{x})}$ où $I(\bar{x}) = \{i \in \{1,2,\dots;p\} / g_i(x) = 0\}$ est une famille libre, alors il existe $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I(\bar{x})}$ de réels positifs tels que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

Correction

1. **On considère pour $n = 2$ l'hyperplan d'équation $2x_1 - 3x_2 = 0$. Donner $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ orthogonal à tous les vecteurs de cet hyperplan.**
   Tout vecteur $w = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$est orthogonal à $\{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x_1 - 3x_2 = 0\}$
2. **Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ un repère orthonormé et K le point de coordonnées $(1,2)_{\mathcal{R}}$. Tracer sur une même figure w, $\mathcal{H}_O$, $\mathcal{H}_K$, et l'hyperplan affine d'équation $2x_1 - 3x_2 - 8 = 0$**
   $\mathcal{H}_K = \{x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 3x_2 + 4 = 0\}$, et $\{x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - 3x_2 - 8 = 0\}$ est l'hyperplan $\mathcal{H}_L$ où K est le point $(4{,}0)_{\mathcal{R}}$. Nous avons alors la figure



Remarque : Les hyperplan de même direction restent parallèles

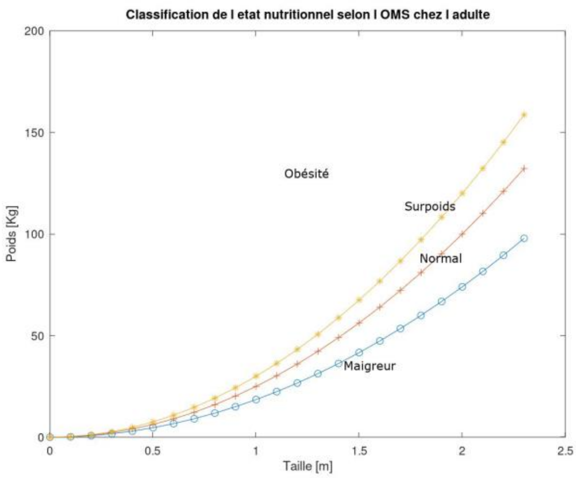
Méthode SVM linéaire de classification :

Soit une population d'individus décrits par un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de paramètres. L'objectif de la classification est de regrouper les individus selon des critères définis sur ces paramètres. Ceci revient à définir des frontières qui séparent entre les classes d'individus. Un exemple important est celui de la classification de l'état nutritionnel chez l'adulte selon l'OMS[3] :

Classification	IMC (Kg/m^2)	Risque
Maigreur (Dénutrition)	$< 18{,}5$	
Normal	$18{,}5 - 24{,}9$	
Surpoids	$25 - 29{,}9$	Modérément augmenté
Obésité	> 30	Nettement augmenté

La figure ci-dessous décrit les frontières de cette classification :

[3] OMS : Organisation mondiale de la Santé https://www.who.int/fr



Dans cette première partie nous nous proposons d'étudier la détermination de la frontière avec la méthode Support-Vector Machine (SVM) linéaire.

Soient quatre individus décrits par deux paramètres T et P selon le tableau suivant :

Individu	T	P
$\boldsymbol{I_1}$	1,5	72
$\boldsymbol{I_2}$	1,75	92
$\boldsymbol{I_3}$	1,6	60
$\boldsymbol{I_4}$	1,8	72

Les deux premiers sont hypertendus et les deux autres ne le sont pas. Nous affectons aux hypertendus la valeur 1 et aux autres la valeur -1.

3. Nous nous proposons de trouver les paramètres $\boldsymbol{w} = \binom{w_1}{w_2} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ et $w_3 \in \mathbb{R}$ de la fonction frontière d'équation $g(\boldsymbol{x}) = 0$, où

$$\begin{array}{rcl} g: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} - w_3 \end{array}$$

et vérifie $g(\boldsymbol{I_i}) \geq 1$ pour $i = 1$ et 2, $g(\mathrm{I_i}) \leq -1$ pour $i = 3$ et 4 et telle que la distance entre l'ensemble des potentiellement hypertendus

$$HT_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ / \ g(\boldsymbol{x}) \geq 1\}$$

et l'ensemble des potentiellement non-hypertendus

$$HT_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / g(\boldsymbol{x}) \leq -1\}$$

soit **maximale**.

i. **Ecrire la contraintes $\boldsymbol{g_i}$ que doivent vérifier $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w_3}$ aux différents $\boldsymbol{I_i}$ pour $\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$ et 4**

Nous avons $g(\boldsymbol{I_1}) \geq 1$, $g(\boldsymbol{I_2}) \geq 1$, $g(\boldsymbol{I_3}) \leq -1$ et $g(\boldsymbol{I_4}) \leq -1$ ceci implique que nous avons $\boldsymbol{w^T I_1} - w_3 \geq 1$, $\boldsymbol{w^T I_2} - w_3 \geq 1$, $\boldsymbol{w^T I_3} - w_3 \leq -1$ et $\boldsymbol{w^T I_4} - w_3 \leq -1$ ou encore $1 - \boldsymbol{w^T I_1} + w_3 \leq 0$; $1 - \boldsymbol{w^T I_2} + w_3 \leq 0$, $\boldsymbol{w^T I_3} - w_3 + 1 \leq 0$ et $\boldsymbol{w^T I_4} - w_3 + 1 \leq 0$ ou encore $g_1(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$, $g_2(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$, $g_3(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$ et $g_4(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$ avec $g_1(\boldsymbol{w}, w_3) = 1 - \boldsymbol{w^T I_1} + w_3$, $g_2(\boldsymbol{w}, w_3) = 1 - \boldsymbol{w^T I_2} + w_3$, $g_3(\boldsymbol{w}, w_3) = \boldsymbol{w^T I_3} - w_3 + 1$ et $g_4(\boldsymbol{w}, w_3) = \boldsymbol{w^T I_4} - w_3 + 1$

j. **Montrer que la distance qui existe entre l'ensemble $\boldsymbol{D_1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1}\}$ et l'ensemble $\boldsymbol{D_{-1}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{1}\}$ est égale à $\frac{2}{\|w\|_2}$.**

$$d(D_1, D_2) = \inf_{x_1 \in D_1, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_2}} \|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|_2$$

Il s'agit donc de minimiser $\|x_1 - x_2\|_2$ avec $w^T x_1 - w_3 = 1$ et $w^T x_2 - w_3 = -1$. C'est un problème de minimisation avec deux contraintes d'égalité. Comme la norme est positive le problème devient à minimiser $\frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_2^2$sous les contraintes $w^T x_1 - w_3 = 1$ et $w^T x_2 - w_3 = -1$ou encore, en faisant un changement de variable $(y = x_1 - x_2)$, de minimiser $f(y) = \frac{1}{2}\|y\|_2^2$ sous les contraintes $w^T x_1 - w_3 = 1$ et $w^T(x_1 - y) - w_3 = -1 \Leftrightarrow w^T x_1 - w_3 - w^T y = -1 \Rightarrow w^T y - 2 = 0$.

D'après le théorème de Lagrange, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que:

$\begin{cases} y + \lambda w = 0 \\ w^T y - 2 = 0 \\ w^T x_1 - w_3 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ en multipliant la première équation par w^T et en tenant compte de la deuxième on a $\lambda = \frac{-2}{\|w\|_2^2} \Rightarrow y = \frac{2}{\|w\|_2^2} w$ et pour cette valeur, la distance est $\|y\|_2 = \sqrt{\langle y|y \rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{2}{\|w\|_2^2} w \middle| \frac{2}{\|w\|_2^2} w \right\rangle} = \frac{2}{\|w\|_2^2}\|w\|_2 = \frac{2}{\|w\|_2}$

k. **Calculer la distance entre $\boldsymbol{O}$, l'origine du repère, et $\boldsymbol{D_0} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$**

$d(O, D_2) = \inf_{x_1 \in D_1} \|\boldsymbol{x}\|_2$. Il s'agit donc de minimiser $\|\boldsymbol{x}\|_2$ avec $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} - w_3 = 0$, ou encore comme précédemment, Il s'agit donc de minimiser $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|_2$ avec $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} - w_3 = 0$. Encore une fois par Lagrange, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$\begin{cases} \boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{w} = 0 \\ \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} - w_3 = 0 \end{cases}$, et de la même manière on obtient $\lambda = \frac{-w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2}$ et$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2} w \middle| \frac{w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2}\boldsymbol{w} \right\rangle} = \frac{w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2}\|\boldsymbol{w}\|_2 = \frac{w_3}{\|\boldsymbol{w}\|_2}$

l. **Déduire de a. et de b. le problème de minimisation à résoudre pour déterminer $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w_1} \\ \boldsymbol{w_2} \\ \boldsymbol{w_3} \end{pmatrix}$.**

Comme le but est de maximiser la distance entre HT_+de frontière D_1 et entre HT_-de frontière D_{-1} et que la distance entre ces deux frontières est égale à $\frac{2}{\|w\|_2}$, alors le problème revient à minimiser $f(\boldsymbol{w}, w_3) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|_2$ sous les contraintes $g_1(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$, $g_2(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$, $g_3(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$ et $g_4(\boldsymbol{w}, w_3) \leq 0$ avec $g_1(\boldsymbol{w}, w_3) = 1 - \boldsymbol{w^T I_1} + w_3$, $g_2(\boldsymbol{w}, w_3) = 1 - \boldsymbol{w^T I_2} + w_3$, $g_3(\boldsymbol{w}, w_3) = \boldsymbol{w^T I_3} - w_3 + 1$ et $g_4(\boldsymbol{w}, w_3) = \boldsymbol{w^T I_4} - w_3 + 1$

m. **Donner, en appliquant le théorème de Kuhn & Tucker, le système à résoudre en explicitant les équations.**

Le théorème de Kuhn et Tucker implique que si $(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3})$ est un minimum, alors ils existent des réels positifs λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \nabla g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) = 0 \\ \lambda_i g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) = 0 \; pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4 \\ g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) \leq 0 \quad pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -I_{11} \\ -I_{12} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -I_{21} \\ -I_{22} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} I_{31} \\ I_{32} \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} I_{41} \\ I_{42} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \lambda_i g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) = 0 \; pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4 \\ g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) \leq 0 \quad pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4 \end{cases}$$

où I_{i1} et I_{i2} sont les composantes de I_i.

n. Les contraintes peuvent elles être simultanément non saturées. Justifier la réponse.

Si les contraintes sont simultanément non saturées alors, par les équations $\lambda_i g_i(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) = 0 \; pour \; i = 1,2,3 \; et \; 4$, on obtient que les multiplicateurs sont tous nuls et par conséquent que $w_1 = w_2 = 0$ ce qui est impossible.

o. Donner le nombre de contraintes maximales qui soient saturées simultanément. Justifier la réponse

La matrice $[\nabla g_1(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}), \nabla g_2(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}), \nabla g_3(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}), \nabla g_4(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3})] = \begin{bmatrix} -I_{11} & -I_{21} & I_{31} & I_{41} \\ -I_{11} & -I_{21} & I_{31} & I_{41} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ est de rang égal à 3. Ceci implique qu'il existe au plus trois contraintes simultanément saturées.

p. Donner les équations à résoudre si les contraintes 1, 2 et 3 sont saturées. (On ne demande pas de résoudre ces équations)

Comme les quatre contraintes ne peuvent être saturées simultanément. La saturation des contraintes 1, 2 et 3 implique que $g_4(\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{w_3}) < 0$ et par conséquent $\lambda_4 = 0$. Les équations à résoudre sont alors :

$$\begin{gathered} w_1 - \lambda_1 I_{11} - \lambda_2 I_{21} + \lambda_3 I_{31} = 0 \\ w_2 - \lambda_1 I_{12} - \lambda_2 I_{22} + \lambda_3 I_{32} = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -w_1 I_{11} - w_2 I_{12} + w_3 + 1 = 0 \\ -w_1 I_{21} - w_2 I_{22} + w_3 + 1 = 0 \\ w_1 I_{31} + w_2 I_{32} - w_3 + 1 = 0 \\ w_1 I_{41} + w_2 I_{42} - w_3 + 1 < 0 \\ \lambda_1 \geq 0; \; \lambda_2 \geq 0; \; \lambda_3 \geq 0 \end{gathered}$$

4. Tracer sur une même figure les points $M_i / \overrightarrow{OM_i} = I_i$, pour $i = 1, 2, 3$ et 4 et la frontière en supposant que les contraintes 1, 2 et 3 sont saturées.

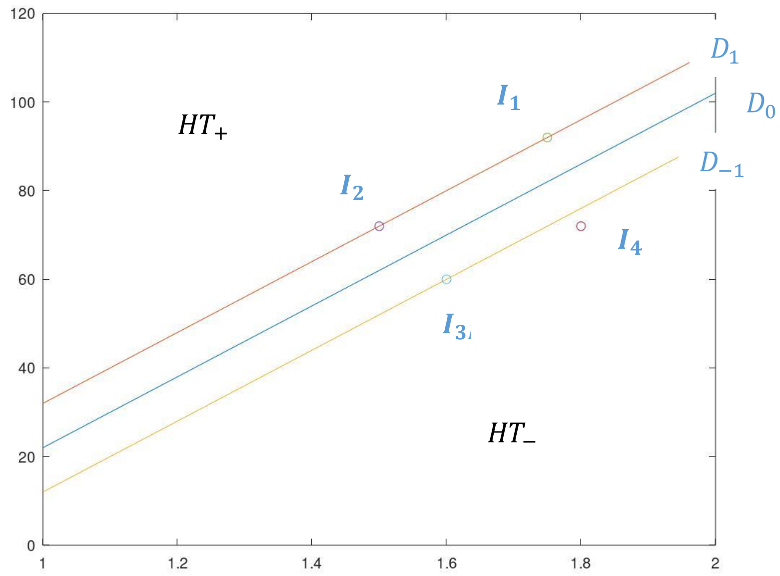
1ère méthode pour le calcul de $\overline{w}$ et de $\overline{w_3}$:

Les équations 4, 5 et 6 de la question précédente donnent un système $\begin{bmatrix} -I_{11} & -I_{12} & 1 \\ -I_{21} & -I_{22} & 1 \\ I_{31} & I_{32} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui peut être inversé pour donner $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0.1 \\ -\frac{29}{5} \end{pmatrix}$.

2ème méthode pour le calcul de $\overline{w}$ et de $\overline{w_3}$:

Si les contraintes 1 et 2 sont saturées ceci implique que la droite D_1 est de direction le vecteur $\boldsymbol{I_2} - \boldsymbol{I_1} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 20 \end{pmatrix}$ où encore que $D_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} - w_3 = \boldsymbol{1}\}$ avec $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} -20 \\ 0,25 \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $w_3 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{I_1} - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{I_2} - \boldsymbol{1} = (-20 \times 1,5\alpha + 0,25 \times 72\alpha) - 1 = (-20 \times 1,75\alpha + 0,25 \times 92\alpha) - 1 = -12\alpha - 1$. α est alors déterminé en écrivant que $g_4(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w_3}) = 0$, autrement dit $w^T \boldsymbol{I_3} - w_3 = -1 \Longrightarrow (-20 \times 1,6\alpha + 0,25 \times 60\alpha) + 1 + 12\alpha = -1 \Longrightarrow \alpha = \frac{2}{5} \Longrightarrow \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ et $w_3 = -\frac{29}{5}$

Ceci nous donne la figure suivante :



Remarque : Cette solution n'est pas bonne, car $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ et $w_3 = -\frac{29}{5}$ font que $\lambda_2 < 0$

5. **Question subsidiaire** : Donner une formulation plausible pour retrouver les frontières relatives à la classification OMS de la figure ci-dessus.

Délivrable

Un rapport contenant :

1- Une bibliographie sur la méthode
2- La Programmer de la méthode
3- Une discussion sur les résultats de la programmation