TD4 – Extrema libres

Exercice 1. Trouver les points critiques et discuter leur nature pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$

b) $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

c) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

d) $f(x, y) = x^3 y + x^3 - x^2 y$

e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

f) $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$

g) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3cxy.$

h) $f(x, y) = x^2 y^3.$

Solution. Toutes les fonctions $a), \cdots, h)$ sont de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$ parce que elles sont composition de fonctions C^2 ou des polynômes.

a) $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$ On calcule le gradient :

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 4y).$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = 0 \\ \partial_y f(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

La seule solution du système est donnée par le point $P = (1, 0)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne est constante :

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace de l'hessienne :

$$\det H_f(1, 0) = 8 > 0, \qquad tr(H_f(1, 0)) = 6 > 0$$

Dès que les déterminant (resp. la trace) est le produit (resp. la somme) des deux valeurs propres de $H_f(1, 0)$, on peut conclure que les valeurs propres de $H_f(1, 0)$ sont strictement positives. Cela c'est equivalent à dire que $H_f(1, 0)$ est semi-définie positive. Par consequence P est un point de minimum pour f.

b) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$
On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6y, -6x + 6y)$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

Les deux points critiques sont $P_1 = (1,1)$ et $P_0 = (0,0)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(0,0) = -36 < 0,$$

Dès que les déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas définie (ni négative ni positive) et donc P_0 est un point -selle.
Pour P_1 on trouve :

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace :

$$\det H_f(1,1) = 36 > 0, \qquad tr(H_f(1,1)) = 18 > 0$$

Dès que les déterminant et la trace sont > 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont strictement positives. Donc P_1 est un point de minimum pour f.

c) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x), e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y)\right)$$

Puisque l'exponentielle est strictement > 0 on cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Les deux points critiques sont $P_1 = (-4,-2)$ et $P_0 = (0,0)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2) & e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) & e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4) \end{pmatrix}$$

Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(0,0) = -8 < 0,$$

Dès que les déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas définie (ni négative ni positive) et donc P_0 est un point -selle. Pour P_1 on trouve :

$$H_f(-4,-2) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace :

$$\det H_f(-4,-2) = 8e^{-4} > 0, \qquad tr(H_f(-4,-2)) = -18e^{-2} < 0$$

Dès que les déterminant est > 0 et la trace est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont strictement négatives. Donc P_1 est un point de maximum pour f.

d) $f(x,y) = x^3y + x^3 - x^2y$

On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y) = (3x^2y + 3x^2 - 2xy, x^3 - x^2)$$

Les points critiques sont solutions du système :

$$\begin{cases} 3x^2y + 3x^2 - 2xy = 0 \\ x^3 - x^2 = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont $P_0 = (0,0)$, $P_k = (0,k)$, $k \neq 0$, $P_1 = (1,-3)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy + 6x - 2y & 3x^2 - 2x \\ 3x^2 - 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Pour P_1 l'on trouve :

$$H_f(1,-3) = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(1,-3) = -1 > 0, \qquad tr(H_f(-4,-2)) = -18e^{-2} < 0$$

Dès que les déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas définie (ni négative ni positive) et donc P_1 est un point -selle.
Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc on peut rien déduire sur la nature du point critique. On regarde f le long des direction $y = x$ et $y = -x$:

$$g(x) = f(x,x) = x^4$$

$$h(x) = f(x,-x) = -x^4 + 2x^3$$

On peut facilement vérifier que g(x) admet un minimum pour $x = 0$ et h admet un flex (point critique qui est ni minimum ni maximum) pour $x = 0$. Comme la fonction admet des comportement différentes le long des deux directions, P_0 ne peut pas être ni un maximum ni un minimum pour f. Il est un point-selle.
Le cas $k \neq 0$ conduit à un calcul plus fastidieux et on le traite pas ici.

e) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{-x^2-y^2}2x(1-x^2-y^2), e^{-x^2-y^2}2y(1-x^2-y^2)\right)$$

Puisque l'exponentielle est strictement > 0 on cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} 2x(1-x^2-y^2) = 0 \\ 2y(1-x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont $P_0 = (0,0)$ et toutes points de la forme $P_{h,k} = (h,k)$ telles que $h^2 + k^2 = 1$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}((2-4x^2)(1-x^2-y^2)-4x^2) & e^{-x^2-y^2}(-4xy(1-x^2-y^2)-4xy) \\ e^{-x^2-y^2}(-4xy(1-x^2-y^2)-4xy) & e^{-x^2-y^2}((2-4y^2)(1-x^2-y^2)-4y^2) \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que :

$$\det H_f(P_0) = \det H_f(P_{h,k}) = 0,$$

et donc on ne peut rien conclure sur la nature des points critiques à l'aide du signe de l'hessienne.
Les point P_0 est un point de minimum car :

$$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

et $f(x,y) = 0$ si et seulement si $(x,y) = (0,0)$. Donc dans le voisinage du point critique P_0 on a :

$$f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$$

et cela est la définition de minimum local. On peut voir facilement que les points critiques $P_{h,k}$ sont des points de maximum local. La fonction $f(x,y)$ est une fonction à symétrie radiale. Cela veut dire que si nous écrivons f en cordonnées polaires (r,θ) nous trouverons que elle ne depend que par le rayon r. Il existe une fonction d'une variable $g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r) = r^2 e^{-r^2}.$$

On calcule la dérivée de la fonction g :

$$g\prime(r) = 2re^{-r^2}(1-r^2).$$

La fonction g admet deux points critiques : $r = 0$ (correspondant à P_0) et $r = 1$ (correspondant aux points $P_{h,k}$). Si on etude le signe de $g\prime(r)$ pour $r \geq 0$ on trouve que $r = 0$ est un minimum local pour g et $r = 1$ est un maximum local pour g. Donc les points $P_{h,k}$ sont des points de maximum local pour f.

f) $f(x,y) = x^2 - \cos(y)$
On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y) = \left(2x, \sin y\right)$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont toutes points de la forme $P_k = (0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos k\pi \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(0,k\pi) = 2\cos(k\pi)$$

Le terme $\cos(k\pi)$ vaut -1 si k est impair et 1 si k est pair. Donc si k est impair ou trouve $\det H_f(0,k\pi) < 0$ et le point P_k est un point-selle. Si k est pair on trouve $\det H_f(0,k\pi) > 0$ et $trH_f(0,k\pi) > 0$ et le point critique est un point de minimum.

g) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3cxy$ On se pose dans le cadre $c \neq 0$.
On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 3cy, 3y^2 - 3cx\right)$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} 3x^2 - 3cy = 0 \\ 3y^2 - 3cx = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont $P_0 = (0,0)$ et $P_c = (c,c)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3c \\ -3c & 6y \end{pmatrix}$$

Pour P_0 l'on trouve :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3c \\ -3c & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(0,0) = -9c^2 < 0,$$

Dès que les déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas définie (ni négative ni positive) et donc P_1 est un point -selle.
Pour P_c l'on trouve :

$$H_f(c,c) = \begin{pmatrix} 6c & -3c \\ -3c & 6c \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(c,c) = 27c^2 > 0$$

Dès que les déterminant est > 0 le point critique peut être ou un point de minimum ou un point de maximum. Si $c > 0$ on trouve :

$$tr(H_f(c,c)) = 12c > 0,$$

et donc le point critique est un point de minimum. Si $c < 0$ on trouve :

$$tr(H_f(c,c)) = 12c < 0,$$

et le point critique est un point de maximum.

h) $f(x,y) = x^2y^3$.
On calcule le gradient :
$$\nabla f(x,y) = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right)$$
On cherche les points critiques comme solutions du système :
$$\begin{cases} 2xy^3 = 0 \\ 3x^2y^2 = 0 \end{cases}$$
Les points critiques sont de la forme $P_h = (0,h)$ et $P_k = (k,0)$.
On calcule la matrice hessienne :
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$
On calcule le déterminant :
$$\det H_f(x,y) = -24x^2y^4$$
Toutes les points critiques annulent le déterminant , donc on ne peut pas conclure de façon générale. Plaçons nous au point critique $(0,0)$. Pour $\varepsilon > 0$ petit on a :
$$f(\varepsilon, -\varepsilon) = -\epsilon^5 < 0$$
$$f(\varepsilon, \varepsilon) = \epsilon^5 > 0$$
ce qui permet d'affirmer que $(0,0)$ est un point-selle.