souji ノート

souji

aaaaaaaaaa

目 次

第I部

研究ノート

自分の研究についてまとめるノートです. 1 章の最初の節にて, 今後のこのノートの流れについて説明しています. またこれ以外の研究に関わる部・章と, その部・章の分け方の理由についてもそこに書いてあります.

第1章　帽子パズル概要

1.1　帽子パズルとは？

私の自身の研究テーマであるパズルを**帽子パズル**とよんでいます. 様々なバリエーションがありますが, 最も簡単なものは以下のようなものです. まずはこれを題材に話を進めていきます.

<u>Puzzle</u> 1.1.1.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子は黒白どちらかの色で塗られています. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています. また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人でもいれば囚人たちの勝利として 2 人とも釈放されます. もし 2 人とも不正解ならば囚人たちの敗北として 2 人とも処刑されます. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で作戦を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 囚人たちが勝利する作戦は存在するでしょうか？ ■

このパズルには少し不明瞭な部分があります. 答えが変わらない範囲で, 記述を少し変えたり加えたりしたり, ゲームのルールも分かりやすいように箇条書きに変えてみたものが以下のパズルです.

<u>Puzzle</u> 1.1.2.
看守は釈放を望む 2 人の囚人に対して, これから行うゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 看守は囚人たちに目隠しと耳栓をつけたあと, ある部屋へ連れていく.
2. 入室後, 看守は囚人たちを向かい合うように距離をあけて立たせる.
3. その部屋には白色・黒色どちらかで塗られた帽子が, それぞれ 2 つずつ置かれている.
4. 看守は帽子を 1 人に 1 つずつ囚人たちに被せていく. 囚人たちは目隠しによって, どの色の帽子を被ったのかも, 誰にも被せなかったものとして何色の帽子がいくつ残ったのかもわからない.
5. 全員に帽子を被せたあと, 看守は彼らの中から 1 人ずつ目隠しを外しては再装着する作業を全員分繰り返す.
6. 目隠しを外されたどの囚人も, もう 1 人の囚人が目隠しされたまま帽子を被って立っている様子が見え, 相変わらず自身の帽子の色は分からないが, 向かい合って立っていることによって, もう 1 人の囚人が被っている帽子の色は分かる.
7. 上記の作業後, つまり再度囚人たちが全員目隠しをしている状態に戻ったあと, 看守は彼らに考える時間を十分に与えたのち, 囚人たちの耳栓を全てとって, 帽子に塗られた色（黒か白）のうちいずれか 1 つを 2 人同時に発言させる.
8. 被っている帽子の色とその発言とが一致していれば, その囚人は正解扱いとなり, 2 人の囚人の中にそんな正解者が 1 人でもいれば, 囚人たちが勝利したことになり, 2 人とも釈放される. もし 2 人とも正解者でなければ, 囚人たちが敗北したことになり, 2 人とも即座に処刑される.

というものです. 当然ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには分かりません. このルールの説明を受けたあと, 看守はゲーム開始までに囚人たちに作戦を相談する十分な時間が与えました. しかし看守はその作戦相談の様子を盗聴するなどして, 囚人たちがどのような作戦でゲームに挑むか知っているとします. このとき囚人たちには, 入室後に看守が 2 人にどのように帽子を被せても 1 人以上が正解する, つまり囚人たちがゲームに必ず勝利する作戦は存在するでしょうか？存在するならば, それはどのような作戦でしょうか？ ■

このルールの書き方はこれからたくさんのパズルを紹介していくさいの 1 つのフォーマットとして使用します.

最初のパズルの何が不明瞭で, Puzzle 1.1.2 の記述方法にてそれが解消されたのかを解説します. まず 1 つは囚人たちが釈放を願っているという説明です. もし処刑を望む囚人がいたならば, そんな囚人は作戦を話し合う場面で不真面目になるか, もしくは作戦は承知しつつもゲーム開始後に裏切るかもしれません. パズルとしてなるべく状況を簡単にするためには, そのような面従腹背行為なども含めて非協力的な行動はしない, つまり釈放を願っていて, このような機会が得られたならば, ルールの範囲内で全ての囚人が全力を注ぐと分かるような記述があってもよいのではないかと思いました.
続く改良点はルール説明とそれを受けた後にどのようにゲームが始まるのかを明確にした点です. これによってゲーム開始前に囚人たちができるのはあくまで相談だけで, そしてその相談の時間は囚人たちが望むだけ与えられるということが分かります. またそれぞれの発言の前にも十分な時間が与えられることも追記しました. もし目隠しをとったあとに即答を求められれば, いくら良い作戦を考えていても慌てて使えない可能性を考えさせてしまう（少なくては私は考える）からです.
そして帽子の数についての言及が加わりました. よく帽子パズルを誰かに出題したときに受ける質問として, 帽子への色の塗り方に何かしらの規則があるのかと聞かれることがあります. 例えば「2 人の囚人たちの帽子は必ず白黒 1 つずつあるように被せるのか？」と具合にです. そういった疑問を出題側が先に回避するには, 帽子が各色それぞれ囚人分用意されていること, つまり帽子の被せ方は, 考えられる全ての組み合わせの数だけその可能性があることが伝わりやすくなったと思います. しかしこれだと被せなかった帽子がもし囚人たちに見られてしまった場合, 自分たちがどの帽子を被せられたのかヒントを与えてしまいます. たとえばもし白の帽子が 2 つ余っていることを囚人が分かってしまった場合, 相手の帽子を見るまでもなく自分たちは 2 人とも黒を被っていることが分かってしまいます. それを防ぐために目隠しをする設定とそれを外す適切なタイミングの説明を追加しています. これによってコミュニケーションがとれないことの状況想像への助力にもなったかと思っています. 目隠し設定の代わりに帽子はどの色もたくさんある, もっと細かくいえば最低 3 つずつ以上あるとすれば, 仮に被せた後に残った帽子を見られたとて, その情報は囚人たちには自身の色の推測にはなんら役立たないようにすることができます. しかしこの後で帽子のそれぞれの色の個数が重要になるパズルたちも登場します. なのでそんなパズルたちも考慮しなるべく同じ枠組みでパズルを紹介するためにも, 目隠しの設定を採用していきます.
また耳栓の設定を加え, 離れて立つことを明記したことで, 囚人たちでコミュニケーションを取りたくとも取れない状況が想像しやすくなったと思います. また部屋の中で立つときに向かい合って立つように書いたことで, どのように帽子が見えているのかも伝わりやすくなったのではないでしょうか.
ではパズルそのものについて考えていきます. まず看守がどのように帽子を被せるかは規則性も全くなく, 言うなれば看守のそのときの気分ということもありえます. そうなると以下にゲーム前に作戦を練っても, ゲーム開始後に得られる情報は, もう 1 人の帽子の色という自分の帽子の色とは関係のない情報だけで, 本当に自身の色を当てることができるのか疑問に思います.
しかし, このパズルの答えは, 囚人たちが勝利する, つまり「最低でも 1 人は正解する作戦は存在する」であり, その一例は「片方の囚人は相手と同じ色を, もう片方の囚人は相手と異なる方の色を発言する」というものです. このような役割で発言すれば, 囚人たちは看守がどのように帽子を被せようとも, 最低でも 1 人が正解することになります. つまり囚人たちはどちらがどの役割で発言するかをゲーム前に決めておけばよいだけになります. また囚人たちがどのようにしてゲームに臨むか（監視カメラとか盗聴とかで）看守は知ることができたとします. しかしこの作戦は仮に看守に聞かれたとて有効という, 看守の後出しさえ許さない非常に強い作戦です. これを確かめるために 2 人の囚人を a, b とおくことにします. たとえば a が（何色の帽子が見えてとしても）常に黒と発言する, b は常に白と発言する, という作戦で臨んだとします. もちろん看守は彼らの戦略を知らず, たまたま a に白を b に黒を被せた場合, どちらも正解せず囚人側の負けになります. また上記のように看守がその作戦を事前に知っていれば, そのように被せることで確実に囚人たちを負けさせることができます. しかし, このパズルの答えになっている作戦は, 仮にゲーム前に作戦が看守に漏れてしまったとしても, 囚人側は必ず勝つことができ, ゆえに必勝作戦とよぶにふさわしいものになっています.
ではこの作戦が必勝になるのか論理的な・数学的な理由を説明します.
まずは本当に必勝になっているかを確認してみます. 2 人の囚人に黒白の 2 色の帽子を被せる組み合わせは以下の表のように計 4 つです.

	f_1	f_2	f_3	f_4
a	黒	黒	白	白
b	黒	白	黒	白

Table 1.1: 2 人 2 色パズルの帽子の被せ方

4 つの帽子の被せ方にそれぞれ f_1, f_2, f_3, f_4 と名前を付けておきました．つまり f_1 は看守が 2 人ともに黒と被せた場合にあたります．
そして 2 人の相談によって, a は見えた色と同じ色を, b は見えた色と異なる色を発言することになったとします．
例えば f_1 では囚人 a は, 自分が見えた相手の帽子の色, つまり囚人 b が被っている帽子の色と同じ色を発言したいので, 「黒」と発言します．そして囚人 b は, 自分が見えた相手の帽子の色と違う色, つまり囚人 a が被っている帽子の色と違う方の色を発言したいので, 「白」と発言します．すると囚人 a は被っている帽子の色と発言した色が一致しているので正解となり, 残念ながら囚人 b は不正解でしたが, 勝利条件「1 人以上正解である」はみたしているので, 囚人側の勝利となります．
これは f_1 だから勝利できたわけではありません．その他の 3 つの状況においても, 必ず 1 人は正解することができています．各帽子の被せ方と, 各囚人がどのような色を発言したかをまとめた表は以下のようになります．正解した囚人の行には色が付いています．

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a	黒	黒	黒	白	白	黒	白	白
b	黒	白	白	白	黒	黒	白	黒

Table 1.2: 必勝戦略における 2 人 2 色パズルの帽子の被せ方とその発言

それぞれの場合を見てもらえれば, 確かに 1 人は正解していることがわかります．
ではこの作戦が必勝になる理由を 2 通りで説明します．

必勝の理由その 1

帽子の被せ方のパターン 4 つ（表 1.1）を見ると,

- 2 人が同じ色を被っているもの（f_1 と f_4）と
- 2 人が別々の色を被っているもの（f_2 と f_3）

の 2 つに分かれます．そして看守がどのように帽子を被せても, 2 人が同じ色を被っているか, 別々の色を被っているかのどちらかになります．つまり

- 見えた色と同じ色を答えていた囚人 a は, 2 人は同じ色を被っていると思って発言している
- 見えた色と違う色を答えていた囚人 b は, 2 人は違う色を被っていると思って発言している

ということになり, 必ずどちらかの思惑通りになるわけですから, 常に 1 人が正解することになります．
先ほどの表 1.1 に, 各囚人の思惑を書いたものが以下のようになります．

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a 2 人は同じ色	黒	黒	黒	白	白	黒	白	白
b 2 人は違う色	黒	白	白	白	黒	黒	白	黒

続けて先ほどの表 1.1 に, 発言した色の情報を一旦抜いて, 2 人の囚人の帽子の様子がどうなっているかの情報を最下段に追加した表が以下のようになります.

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a	黒		黒		白		白	
b	黒		白		黒		白	
色の状態	2 人は同じ色		2 人は違う色		2 人は違う色		2 人は同じ色	

この 2 つの表を合体させ, さらにその被せ方ごとに正解した囚人の行に色を付けたものが以下のようになります.

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a 2 人は同じ色	黒	黒	黒	白	白	黒	白	白
b 2 人は違う色	黒	白	白	白	黒	黒	白	黒
色の状態	2 人は同じ色		2 人は違う色		2 人は違う色		2 人は同じ色	

この表を見れば, その囚人の思惑と帽子の色の状態が一致したときに, その囚人が正解していることが分かります. なので, この戦略が必勝になる理由を改めて述べると, 色の状態は

- 2 人は同じ
- 2 人は違う（2 人は同じ色ではないともいえる）

の 2 つのパターンしかなく, 2 人の囚人でどちらのパターンになっていてもよいように役割を分けられているからです.

必勝の理由その 2

これまで 2 人の囚人を a, b と名付けてきましたが, ここからはあえて a_0, a_1 とすることにします. 別にそのまま a, b でも問題ないのですが, この変更の意図は, その添え字によって偶数か奇数かで区別できるからです（あとでも詳しく述べます）. そしてここからは色を黒・白ではなく, 数の $0, 1$ に置き換えます. ここまでの名前の置き換えによって, 先ほどの帽子の被せ方の表 1.1 は以下のように変わります.

	f_1	f_2	f_3	f_4
a_0	0	0	1	1
a_1	0	1	0	1

帽子の色が数に置き換わったことで, 囚人の発言した色という情報も数に置き換わります.

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a_0	0	0	0	1	1	0	1	1
a_1	0	1	1	1	0	0	1	0

そこから, 各囚人ごとにその見えていた色（数）と発言した色（数）の合計という情報を先ほどの表に追加します.

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

例えば, なぜ f_2 の a_0 部分の「合計」項目に 2 という数が入っているかというと, a_0 が見えた a_1 の被っている色（数）である 1 と, a_0 の発言した色（数）である 1 の和が 2 だからです．同様の理由ですが, 同じ f_2 の a_1 部分の「合計」項目に 1 が書かれているのは, a_1 が見えた a_0 の被っている色（数）である 0 と, a_1 の発言した色（数）である 1 の和が 1 だからです．他の部分にも同じように計算して書き込んであります．その計算過程を分かりやすいように色を付けたのが以下の表になります．

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

つまり f_1 の a_0 部分の「合計」項目は色が付いていませんが, それは f_1 内の色が付いていない数字を足したものになっています．逆に色が付いてある「合計」項目は, 同じく色が付いている数字を足したものになっています．
さらに各帽子の被せ方ごとに, その帽子の色（数）の合計という情報も最下段に追加したものが以下の表です．

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
帽子色の合計	0			1			1			2		

これについても, その計算過程が分かりやすくなるように色をつけたものが以下のようになります．

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
帽子色の合計	0			1			1			2		

つまり f_3 の「帽子色の合計」部分に 1 が書いてあるのは, その上にある色の付いた数字を足したからになっています．ここでは帽子色の合計に書かれている数字は, その合計は $0, 1, 2$ のいずれかになっていることを確認してください．
そして各帽子の被せ方における正解者を見ると, その正解者の先ほど追加した「合計」項目と, 「帽子色の合計」項目が一致しています．それが分かりやすくなるように, その被せ方においての正解者の「合計」項目と, 「帽子色の合計」項目に色を付けた表が以下のようになります．

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
帽子色の合計	0			1			1			2		

これはどういうことかというと, まず事実として数値に置き換えた帽子色の合計は必ず偶数（2 で割り切れる数）か奇数（2 で割って 1 余る数）のいずれかになります. そしてそれぞれ

- 囚人 a_0 は自分と相手の帽子色の合計が偶数になると思って発言している
- 囚人 a_1 は自分と相手の帽子色の合計が奇数になると思って発言している

ということになります.
先ほど囚人の名前を a, b から a_0, a_1 に変えたのは, それぞれの添え字 $0, 1$ が, 2 で割って 0 余る数・2 で割って 1 余る数, つまり偶数・奇数を表しています. よって囚人たちは作戦会議では, 各色への $0, 1$ の数の割り当てと, それぞれが偶数か奇数かの担当を決めておけばよい, ということになります. もっというと a_0 は帽子色の合計が 2 で割って余り 0 になる場合を担当し, a_1 は帽子色の合計が 2 で割って余り 1 になる場合を担当しています.
以上の理由で, 囚人たちには必勝作戦が存在します.
またその必勝である理由を見てもらえれば分かる通り, その理由は論理的・数学的です. またこれ以外の数学的理由でもって説明することもできると思います. ゆえにこのパズルは単なる論理パズルを超えて, さまざまな数学が役立つ可能性を持ったパズルの 1 つです.

Puzzle 1.1.2 はよく知られたパズルで, プレイヤーが囚人で, 彼らに帽子を被せる設定からか**囚人と帽子のパズル**と呼ばれています. 英語では **Hat Puzzle** や **Hat (Guessing) Game**, **Hat Problem** などと呼ばれています.

このパズルの一番の特徴は, 各プレイヤーは自身の帽子の色を言い当てる必要があり, その推理のために使える情報が自身の色とは直接は関係ない自分以外の帽子の色のみ, という点にあります. この特徴を際立たせるために, 部屋に入って以降は囚人同士はコミュニケーションがとれない設定になっています. コミュニケーションには会話だけでなく, アイコンタクトや手話などのボディランゲージも含めた, とにかく情報を伝達する術を全て封じています. これを禁止にしておかないと, 作戦を考えるさいに会話ではない囚人たちだけに伝わるサインを考案して使用することができるからです. また同時に発言しなくてはいけないというルールも, 仮に同時でなければ, 片方が相手の色を発言して教えてあげ, もう片方が言い当てるという, パズルとしては面白くない作戦が必勝になってしまいます. よってこの同時に発言しなくてはいけないというのも, コミュニケーションがとれないという制約の一種とも捉えられます.

Puzzle 1.1.2 ではプレイヤーが囚人となっていますが, 別に囚人でなくても構いません. ただプレイヤーたちが囚人たちならば, ゲームに対して（処刑を免れたいという）積極的になる理由が説明しやすい・想像させやすいでしょうし, またプレイヤーたちに命令しゲームを設定できる立場に看守という役割が使える点でも, この設定を選ぶ利点はあると思います. 似たような使いやすい設定として, 動画ですが [44] では, プレイヤーが捕えられた人というのは同じであるものの, 捕えたのは人間を食べようとした宇宙人で, 彼らの倫理では協調的かつ論理的行動ができる生物は食べないとしているため, 協調的かつ論理的かどうかを試すためにゲームを行う, みたいなものもあります. ただプレイヤーが開放を臨んでいる捕まえられた人であるという点は同じなので, やはりこのような設定がパズルの説明には便利なのかもしれません.

またプレイヤーに帽子を被せるという設定も必須ではありません. この設定がよく使われる理由は, 帽子に色がついていて, それを被っていれば, 被っている当人にとってその色が分からないということと, そして他人の色が向かい合って立つだけで分かるという場面も想像しやすくなります. 他の設定としては, この自分の色が分からないという点を強調するために, 背中に色付きのモノ, トランプや円盤をつけるというものもあります. しかしこれだとどのように立っていても, 全員が自分以外のプレイヤーの色が分かるように立つことはできません. なのでゲームの手順を追加するなどが必要になってパズルの説明が少し長くなってしまいます. 例えば額に色付きシールをつけるというものがありますが, Puzzle 1.1.2 をこの設定に変えても全く問題はありませんが, プレイヤーが向かい合って立たないことが重要なパズルもあります. 例えば全てのプレイヤーが階段の一段ずつに下の段に向かって立つというものがあります. つまり自分よりも下の段にいるプレイヤーが全て見えているという設定です. 視覚的に分かりやすいものとして, 先に挙げた [44] もそうですし, 同じ動画形式のものならば [1] もそのようなゲーム設定の帽子パズルの例になっています. このようなプレイヤーの配置だと, 額にシールを貼っていても他のプレイヤーからは見えないので, 帽子を被っているとした方が説明が楽になります. 逆にこの場合だと背中に何か色付きのモノをつける設定でもいいかもしれません. しかし色付きの帽子を被せるとした方が, Puzzle 1.1.2 のような向かい合って立つようなパズルでも, これから紹介

するどんな似たようなパズルでも, 共通して使える設定です. 英語にて似たようなパズルの名前として Hat がつくものが多いのも, そのような便利さがあるからなのかもしれません.

また帽子に色がついていて, その色を当てなくてはいけないという設定も必須ではありません. Puzzle 1.1.2 のように 2 色が色の候補でかつ帽子を被せる設定ならば, 「同じ帽子が 2 つあって, そのうち何個かに目印のような意味で飾りがついている」としてもよいです. つまり各プレイヤーは自分の帽子にその飾りがついているか否かを当てることが求められるというゲームに変わります. つまり 2 色ならば, 何かが有る無し（オンオフ）という設定と同じです. ゆえに似たようなパズルとして, プレイヤーの顔が泥や煤で汚れていてるという設定もあります. これだと自分自身では汚れているかどうかが確認できないという点で非常に伝わりやすくなります. これから研究するにあたって, このようなパズルを一般化していきます. その 1 つが色の候補を（無限も含めて）2 色より多く増やすというものがあります. よって上記のように何かの有り無しでは少し説明がめんどくさくなります. 帽子に色をつける設定ならば, つける色の候補を増やせば簡単にルールを拡張できるので便利です. 同様の設定として帽子に色をつけるのではなく, 数や記号を書いておくという案もあります. たとえば Puzzle 1.1.2 では $0, 1$ のどちらかが書いてあるとか, ◯×のどちらかが書いてあるとか , という風に設定を変えることができます. ただ一番便利なのは数字が書いてあるというものでしょうか. とくに帽子の色の候補が非常に大きな数ないし無限にあるという設定の場合は色よりも数の方が説明は容易いと思います.

よって Puzzle 1.1.2 にて, パズルとして一番大事だと思われる設定は,

- プレイヤーは何かが描かれている帽子を被せられて,
- プレイヤーは自分の帽子に何が描かれているかは分からず,
- プレイヤーは自分の帽子に何が描かれているかを, 自分の帽子を（脱いだりして）見ることなく当てなくてはいけない

というものです. この要素をもつパズルをこのノートでは**帽子パズル**と呼ぶことにします. そして上記の設定のうち「帽子を被せる」の部分のみを別のものに変えたパズルを, 雑ですが**帽子パズルっぽいパズル**と呼ぶことにします. 帽子パズルっぽいパズルも設定を上手に変えることで帽子パズルにすることができます. よってこのノートではこれらを区別することなく, **自分についての情報を, 自分以外の情報から推測しなくてはいけない**という性質のパズルをなるべく多く研究対象にしていきたいと思います. ちなみにこのようなパズルの別の総称として **Induction Puzzles** というものもあります. それについての Wikipedia[8] を参考にしてください.

1.1.1 この章の今後の流れの説明

Puzzle 1.1.2（5 ページ）は様々な種類のある帽子パズルの中で最もシンプルなものです. ここからルールや設定を変えることで様々なバリエーションが生まれます. どのような設定の変え方があるのか, それによってどのように考察方法が変わるのかなどを 1.2 節（12 ページ）で紹介します.

帽子パズルは最初から同じ設定で知られていたわけではありません. つまり帽子パズルっぽいものが先に現れ, それが人々に知られていくうちに帽子パズルの形になって登場しました. そんな帽子パズル・帽子パズルっぽいパズルの歴史についての調査・研究結果を 1.3 節（26 ページ）にてまとめます.

帽子パズルを数学的に研究するためには, パズルに登場する様々な概念, 例えばゲームのルールや囚人たちの作戦といったものを, 数学概念を使って書き直す必要がでてきます. こういった作業は「形式化」と呼ばれますが, そのやり方の一例を, 上記でまとめてバリエーションにも考慮しながら 1.4 節（38 ページ）にてまとめていきます.

そして形式化が完了すると, 帽子パズルについての様々な限界が見えてきます. たとえば Puzzle 1.1.2（5 ページ）では, どのような作戦で臨んでも常に 2 人正解させることはできません. そういった数学的事実のいくつかを, 形式化とそれに対しての数学的論証に慣れる例として 1.5 節（44 ページ）で紹介します.

帽子パズルは様々な方法で分類できますが, その 1 つに, Puzzle 1.1.2（5 ページ）のようにパズルに登場するプレイヤー数も帽子に付いている色の候補の数も有限なものか, そのどちらか一方が無限になっているものです．前者を単に**有限帽子パズル**と, 後者を**無限帽子パズル**と呼ぶことにします．それぞれについて様々な先行研究が既にあります．私の最も関心のある帽子パズルは無限帽子パズルですが, 有限パズルもその研究が無限パズルに応用出来る可能性はかなり高いです．なので有限帽子パズルについてもなるべく多く勉強していきたいと思っています．これらをまとめるために, 有限・無限とで研究動機や使用する概念・手法も異なることから, これらはある程度分けておいて, 有限パズルについては第 2 章（45 ページ）で, 無限パズルについては第 3 章（47 ページ）にてまとめていこうと思っています．

帽子パズル以外にも数学者が注目しているパズルはたくさんあります．帽子パズルを他のパズルと関連付けるような結果も見つかっています．そんな結果については第 4 章（49 ページ）で紹介します．

帽子パズルや, 関連性があるパズルについての論文はこれからたくさん読んでいくことになります．それらのメモや要約を文献ごとにまとめて紹介しているのが, 第 5 章（51 ページ）です．

そして帽子パズルを主にテーマにした数学書 [47] が存在します．そのテキストはとくに無限帽子パズルを研究するうえで最も重要なものになります．他の文献以上にこのテキストは精読してきたいので, もとの章構成そのままに自分で読んでみて考えたことなどもまとめていきたかったので, そのためのパートが第 II 部（55 ページ）です．

1.2 バリエーション

1.2.1 帽子パズルの構成要素

帽子パズル・帽子パズルっぽいパズルには様々なバリエーションがあります．今なお新しい設定のパズルが生まれている中で, 将来も見据えて網羅的にまとめることは難しいとは思いますが, 今時点での研究成果として, 帽子パズルがどのようなバリエーションが考えられるかまとめていきます．
他のバリエーションと比較するため, 前述した一番シンプルな帽子パズルを再掲します．これと新しいバリエーションと比較して, 違いがよりわかりやすくなると思います．

Puzzle 1.1.2 の再掲

看守は釈放を望む 2 人の囚人に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました．その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する．
2. 部屋に入ってからは囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない．
3. その部屋には白黒に塗られた帽子がそれぞれ 2 つずつ置かれている．
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる．また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない．
5. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えている．
6. 帽子を被せられたあと, 帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させる．
7. その発言とその被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人でもいれば囚人たちの勝利として 2 人とも釈放される．もし 2 人とも不正解ならば囚人たちの敗北として 2 人とも処刑される．

というものです．当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です．このルールの説明を受けた後, ゲーム開始までに囚人たちには作戦を相談する十分な時間が与えられました．このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 囚人たちが勝利する作戦は存在するでしょうか？

さっそく異なるタイプの帽子パズルを紹介します.

<u>Puzzle</u> 1.2.1.
看守は 3 人の囚人に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.
3. その部屋には白黒に塗られた帽子がそれぞれ 3 つずつ置かれている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 帽子を被せたあと他の全ての帽子を見てもらい黒色が 1 つでも見えたら手を挙げる.
7. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, 全員同時に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
8. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, 囚人全員に黒色の帽子を被せました. そしてルールに従って全員手を挙げました. そのあと全員が「分からない」と発言しました. しかしもう一度発言させると全員「黒」と発言し正解だったので釈放されました. なぜどの囚人も自分の色が分かったのでしょうか? ■

<u>Answer</u> 3 人の囚人たちを a, b, c とおく. まず囚人 a の立場にたって考えます. 1 回目の発言を終えたあと囚人 a は自分が白色を被っていると考えると, 見えている帽子の色とあわせて今自分たちの帽子の色の様子は以下のようになっていると考えるはずです.

a	b	c
白	黒	黒

こういう被せ方でも最初に全員が手を挙げたことに矛盾はしません.
そして囚人 a は囚人 b の立場にたって考えてみます. すると囚人 c が手を挙げたことと, b からは a の白と c の黒が見えていることから, 囚人 b は自分が黒を被っているとわかるはずです. しかし 1 回目の発言で b は「分からない」と発言したことから, 囚人 a は自身が白色でない, つまり自分は黒色を被っていると分かり, 2 回目の発言で黒を発言して正解しました. a 以外の囚人も 1 回目の発言後に同様に考えたことで自分が黒を被っていると分かりました. □

まず囚人たちに作戦があるかどうかを我々回答者に問うてきた Puzzle 1.1.2 とは, 問題の出題の仕方・出題内容が違うという点があります. しかしそもそも囚人たちが挑むゲームの内容が変わっています. それによって出題方法が変わっています. なぜ出題方法まで変わったのかという考察についてはこの節の最後に行いますが, 今後さらに出題内容は変わっていくので, それについては一旦気にせず進めていきます.

出題内容以外の, 囚人たちが挑むゲームの内容について注目して, Puzzle 1.1.2 と Puzzle 1.2.1 との違いをまとめてみると,

1. 囚人が 3 人になっていること.
2. 色以外に「分からない」という発言もできること.

3. 二度以上発言できることと, それによって 1 つ前の自分以外の発言という情報も, 自身の色の推測に使うことができること.
4. 発言前に「黒が手を挙げさせる」というルールの追加と, それによって自分以外の囚人から見て黒が見えるかどうかを知ることができること.

などがありますが, 私が考える最大の違いは, 囚人たちはチームでゲームに挑むのではなく, あくまで個人で挑む点です. なので入室前に作戦を相談するという行程が無くなっています. 詳しく説明すると, Puzzle 1.1.2 では仮に自分が不正解だったとしても, もう 1 人が正解すれば自分も助かります. つまり個人個人の不正解はその囚人の処刑と直接は関係しません. しかし Puzzle 1.2.1 では, 個人の不正解は直接その囚人の処刑につながります. この違いはこれから帽子パズルを分類するうえで最も大きな区分けになります.

続いて Puzzle 1.2.1 を少し変形させたパズルを紹介します. ゲームのルールにおいて Puzzle 1.2.1 から変更した部分は, テキストの色を変えて分かりやすくしています.

Puzzle 1.2.2.
看守は 3 人の囚人（以下彼らを a, b, c とおく）に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.
3. その部屋には白黒に塗られた帽子がそれぞれ 3 つずつ置かれている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 帽子を被せたあと他の全ての帽子を見てもらい黒色が 1 つでも見えたら手を挙げる.
7. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c の順に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
8. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c の順に 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, 囚人全員に黒色の帽子を被せました. そしてルールに従って全員手を挙げました. 最初の発言では 3 人は「分からない」と答えましたが, 2 度目の発言が回ってきた囚人 a は「黒」と発言して正解し釈放されました. なぜ囚人 a は自分の色が分かったのでしょうか？ ■

またこの後 b, c も順に発言させていっても, a と同じように考え発言することで, Puzzle 1.2.1 同様, 全員正解することができます.
Puzzle 1.2.1 と Puzzle 1.2.1 との違いは囚人たちの発言が全員同時ではなく順番になった点だけです.
もう 1 つ囚人たちが協力しないパズルの例を挙げます. Puzzle 1.2.2 をさらに変形させたものになります. こちらも Puzzle 1.2.2 との違いを分かりやすくするために, Puzzle 1.2.2 と異なる部分はテキストの色を変更しました.

Puzzle 1.2.3.
看守は 3 人の囚人（以下彼らを a, b, c とおく）に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.

3. その部屋には 5 つの帽子があり, うち 2 つは白色に, 残り 3 つは黒色に塗られている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 囚人たちにそれぞれ自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c の順に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
7. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c の順に 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, ルール通りに帽子を被せました. そのあと a, b は考えたのち順番に「分からない」と答えましたが, それを聞いた c は「黒」と発言して正解し釈放されました. なぜ囚人 c は自分の色が分かったのでしょうか? ■

Answer 囚人 c は, まず a が「分からない」と答えたことから b と自分の帽子の組み合わせの候補が以下のように絞れます.

b	c
黒	黒
黒	白
白	黒

なぜならもし b, c がどちらも白を被っていれば, a は自分が黒だと分かったはずだからです. なのでその可能性は無くなり上記のような組み合わせだけが候補に残ります. またこれは b も同じことを考えつくことになります.
続けて b も「分からない」と発言したことから, c は自分が黒だと分かります. なぜならば b も自分 (b) と c は以下の組み合わせしかないと a の発言から分かっており, そしてもし c が白を被っていれば自分が黒を被っていると発言できたはずです. しかし分からないと答えたということは, b から見て c は黒を被っていたことになります. □

一見するとここまでのパズルとの違いに見えるのは, 私たち回答者には最後まで全ての囚人が何を被っているかは分からないという点と, 帽子の数が色ごとに決まっているという点でしょうか. 1 点目はあくまで出題形式の違いです. これについては前述した通り, この節でのちに考察します. 2 点目についてですが, これまでのパズルのゲームでは, 色付きの帽子は各色それぞれ全囚人分用意されていました. しかしこれは Puzzle 1.2.1 と Puzzle 1.2.2 と比べると, 実は大した違いではありません. 上記 2 つのパズルではそのゲームの中で黒が見えたら手を挙げさせるというものがありました. そしてゲーム開始後に全員が手を挙げたことで, どの囚人も誰から見ても 1 つは黒色帽子が見えていることが分かります. つまり自分たちの帽子の被せ方として本来は $2^3 = 8$ パターンの可能性があったわけですが, 黒が最低でも 2 つは被せられていることが分かり, 帽子の被せ方の可能性は 4 パターンにまで減少しています. よって Puzzle 1.2.1 と Puzzle 1.2.2 の「発言前に黒が見えたら手を挙げる」というルールを無くし, そもそも部屋には「帽子は黒色が 3 つ, 白色が 1 つだけある」という風にルールを変更することと同じことになるからです. よって Puzzle 1.2.1・Puzzle 1.2.2・Puzzle 1.2.3 は, 帽子が全色囚人分用意されていないという点では同じであり, 異なるのはその色の配分だけということになります. つまり Puzzle 1.1.2 と, Puzzle 1.2.1・Puzzle 1.2.2・Puzzle 1.2.3 は, 各色の帽子が全囚人分用意されているか否かの視点でグループ分けすることができます.
さて, このパズルにはこれまでとは異なる最大の違いがあります. これまでのパズルでは自分以外の帽子が全て見えていました. しかし Puzzle 1.2.3 はその解答を見れば分かる通り, 実は囚人 b は a の, 囚人 c は a, b の帽子が見えている必要がありません. つまり c はどの発言が誰の発言なのか, そして各囚人がどのように見えているのかさえ知っていれば, 部屋に入ったあとそれ以外に何も情報を得られなくとも正解することができます.
これらのパズルは説明しやすいように私なりに設定を変えていますが, Puzzle 1.2.3 は物理学者の **Paul Dirac** が考案した可能性があり, Puzzle 1.2.2 はパズル作家でもあった数学者 **Martin Gardner** がその著作にて紹介したものです. この情報や証

拠となる文献については 1.3 節（26 ページ）で紹介します．上でも説明したとおり Puzzle 1.1.2 とこれら 3 つのパズルの最大の違いは, 囚人たちが協力するか・できるかという点にあると考えています．よって囚人たちが協力する帽子パズルをこれまで通り **Hardin-Taylor の帽子パズル**と呼ぶことにし, 新たに紹介した囚人たちが協力しない帽子パズルを 2 人の名前をとって, **Dirac-Gardner の帽子パズル**と呼ぶことにしました．

よって私はすべての帽子パズルは囚人が協力するか否かで, この Hardin-Taylor のものか, Dirac-Gardner のものかに大別可能だと考えています．

Hardin-Taylor の帽子パズルの方が Dirac-Gardner の帽子パズルよりもシンプルだと感じます．なぜならば後者では囚人は個人でゲームに挑んでおり, 自分以外の帽子が見えたところでそれだけでは自分の色を推測することは不可能なため, 追加の情報がいくつも必要になるからだと思います．つまり自分も含めた帽子の様子についての情報（誰から見ても最低 1 人は黒がいるとか, 帽子の個数は色ごとに同じではないなど）や, 他の囚人たちの推論の結果という情報などが必要になり, ゆえに問題文も長くなるということです．

Hardin-Taylor の帽子パズルでは協力しているゆえに, 最低でも 1 人は正解するというような「囚人たちの勝利条件」というものが必要になり, その部分では Dirac-Gardner の帽子パズルよりは複雑になります．

2 つのパズルでは帽子パズル特有の「見えない自分の帽子を色を推測する」という要素を持ちますが, 協力するか否かで, 囚人たちの正解者数に注目するか, ここの囚人の推論の推移に注目するかという違いが生まれています．そしてそれゆえにパズルを研究するさいの使用する学問分野も, またパズルの結果の応用先の学問分野も変わってきます．

私の興味をもっている数学の分野は数理論理学・数学基礎論, とくに公理的集合論であり, この数学が応用できるのは囚人たちが協力する Hardin-Taylor の帽子パズルだと考えています．それは先行研究が既にそうなっているからだということに他なりませんが, だからといって Dirac-Gardner の帽子パズルを調査対象から外すわけではありません．なぜならば協力しない点は除いても, それ以外の設定は Hardin-Taylor の帽子パズルにも導入できることがあるからです．またその逆もありえます．

上でも少し述べましたが, 各帽子パズルを構成する要素を, 今時点で私が知っている限り挙げてみます．ここにない要素も, 私が新たなパズルを知ることで追加されるかもしれませんし, 協力・非協力以外の分類方法も生まれるかもしれません．

各要素の具体例を分かりやすくするために, これまで登場したパズルではどうだったのかを以下の表のようにしてまとめてあります．

	Puzzle 1.1.2	Puzzle 1.2.1	Puzzle 1.2.2	Puzzle 1.2.3
協力	協力	非協力		
囚人数	2 人	3 人		
色の数	2 色			
帽子の見分け方	色			
帽子に付く色の個数	1 個			
帽子の見え方	自分以外全員見える			
帽子についての情報	黒白 2 つずつある	有（誰からも黒が 1 つは見える）		有（白 $\times 2$ 黒 $\times 3$）
発言方法	全員同時		1 人ずつ順番に	
色以外の発言	無	「分からない」も可能		
発言回数	全員 1 回	全員 2 度以上可能		

例えば要素の 1 つである囚人数を増やすと, Hardin-Taylor の帽子パズルでの勝利条件の変更の考察をすることができます．2 人の囚人がプレイヤーであった Puzzle 1.1.2（5 ページ）では, 囚人たちの勝利条件は最低でも 1 人が正解することでした．このままでもたとえば勝利条件を「2 人正解すること」にするとどうなるのか考察することができます．これはのちに示す定理より不可能であると分かります．

このようにして人数を増やすだけでも様々な勝利条件が考察対象に加わります．また単なる正解者の要求でない勝利条件も考案されています．そして Dirac-Gardner の帽子パズルでは囚人数や色数が増えても個々の囚人が自身の色を推測するようなものしかないと思われますが, たとえば「自分に被せられていない色を言い当てる」というものもあります．つまり個々の囚人の勝利条件を変えたものもあります．

よって「囚人たちが協力するかどうか」と以下のような要素をそれぞれ設定することで 1 つのパズルが生まれます．

$$\left\{\begin{array}{l}\text{囚人たちが協力する}\\ \text{囚人たちが協力しない}\end{array}\right. \times \left\{\begin{array}{l}\text{囚人数}\\ \text{色の数}\\ \text{帽子の見分け方}\\ \text{帽子に付く色の個数}\\ \text{帽子の見え方}\\ \text{帽子についての情報}\\ \text{発言方法}\\ \text{色以外の発言}\\ \text{発言回数}\\ \text{勝利条件}\end{array}\right.$$

ここからは各要素について具体例なども挙げながら, さらにどのような多様なパズルが作成可能か見ていきます.

1.2.2　囚人数・色の数と帽子をどう見分けるか？

囚人の人数や色の数というのはもっとも分かりやすいパズル間の違いで, また一般化も考えやすい要素になっています.
たとえば 2 人 2 色であった Puzzle **??**は, 2 人 3 色, 2 人 4 色, 2 人 5 色, . . . , 3 人 2 色, 3 人 3 色, 3 人 4 色, 3 人 5 色, . . . , 4 人 2 色, 4 人 3 色, 4 人 4 色, 4 人 5 色, . . . , という風に様々な組み合わせを考えることができます.
また囚人数・色の数は上記のように 2 人, 3 人, 4 人, . . . , 2 色, 3 色, 4 色, . . . という有限同士の組み合わせだけでなく, 囚人が無限にいる, 帽子に付いている色の種類が無限にある, というものも考えることができます.
改めて有限帽子パズル・無限帽子パズルという言葉について定義しておきます.

Definition 1.2.4.
帽子パズルのうち, 登場するプレイヤー（囚人）と, プレイヤーに被せる帽子の色の候補が共に有限なパズルを**有限帽子パズル**と, どちらか 1 つ以上が無限になっているパズルを**無限帽子パズル**とよぶ. ■

野暮なツッコミをすると, そもそも囚人が無限にいるとはどんな世界なのかというものでしょうか. ただ何度か説明しているとおり, ゲームのプレイヤーを囚人とするのは, 勝利することに全力を出す動機が説明しやすい, 想像しやすくなるから, が一番簡単に思いつく理由です. また帽子パズルのプレイヤーは当初囚人ではありませんでした. 帽子パズルを広めた第 1 人者と見てよい Gardner でさえ, その著作では単なる人間で, 囚人のような属性は付与されていません. いつから帽子パズルが「囚人と帽子のパズル」として紹介されたかの考察は, 1.3.1 節（35 ページ）についてすることにします.
ただ集合論ではこのような現実的に考えると突飛な例え話はたくさんあります. その例として挙げるなら「ヒルベルトの無限ホテルのパラドックス」（Wikipedia の該当ページとして [13]）で登場する, 無限の部屋を持つホテルがあります. これもツッコみだせばキリがない設定です. 無限に部屋があるということは無限に清掃員が必要とか.
しかし無限にいるという設定でも, 数学的な無限として扱うことは必要です. 必要ならば無限といっても, 可算無限なのか, それとも連続体濃度と同等の無限なのか, はたまたそれよりも大きい基数と同等の無限なのか, などなどです. これらについて厳密に議論にしていかないと禅問答になりかねません. この時点では曖昧さがありますが, 集合論を使って帽子パズルを形式化することで, 曖昧さは排除することができます. それについては 1.4 節（38 ページ）を見てください.
帽子に付ける色の候補の無限化に対しても同様なツッコミが可能です. 囚人たちは各帽子の違いを色で見分けています. そもそも色とは何か？という問いに対しては分かりやすい解説として [?] を挙げておきます. そのうえで（人間が見分けることのできる）色は何種類あるのか？という問いに対しての答えは一番大きいもので 1000 万です. 答えの理由として [?] を挙げておきます. 登場人物の囚人が単なる人間であるとするならば, 彼らに無限に色を見分けることもできないため, 帽子に付ける色の候補が無限にある無限帽子パズルは不思議な設定に感じます. 単に 2，3 色ならばそのままでもいいかもしれませんが, 10 色くらいになるとパズルとして説明するのも煩わしくなります.

これらの解決方法としては帽子には色が付いているのではなく数字が書いてあるとすればよいです．そうすると見分けも簡単につくと想像できますし, パズルの説明も楽になります．
またパズルによっては帽子に数字が書いてあることが重要なものもあります．たとえば囚人は 2 人で, その 2 つの帽子に書かれている数字が連続するようにするとか, 囚人は 3 人で, 1 つの帽子に書かれている数は他の 2 つの数の合計になっている, などです．これは色では表現できない情報です．これについては 1.2.5 節（22 ページ）で具体例をあげることにします．
他には帽子は全て赤色であるが, その濃さが違うというものもあります．しかもその濃さは各正の実数に対応しているという設定でした．つまりこの場合は囚人に被せる帽子の候補は実数の数だけあるという設定です．この設定を活かした帽子パズルとして

1.2.3　帽子に付く色の個数

1.2.1 節（12 ページ）で紹介した 4 つのパズルはどれも囚人たちに被せた帽子は色が 1 つだけ付いていました．
複数の色が付いているというのは右のようなイラスト[1] が想像できます．ただ 2 個よりも多いと, もう帽子では考えにくくなりそうです．
これについて Smullyan はあるパズルを提案しています．それは帽子を被るのではなく, 色付きのシールを複数枚額に貼るという設定のパズルです．これだと個々の囚人に 3 色以上の色を対応させることも簡単に説明できそうです．しかし無限枚, いや十分に大きな枚数を貼るとなると, シールで顔が埋め尽くされた囚人を想像することになるので, そこは囚人の顔の表面積は無限になっているとしましょう．Smullyan はそれまでの帽子パズルを拡張しようとしてこのパズルを考えたのかどうかは不明です．Gardner はその著作 [57] にて, Gardner が考えていた帽子パズルの設定の曖昧さを排除できたものとしてこのパズルを紹介していました．おそらく帽子が単色でないことには, その書籍の中ではとくに注目していなかったのかもしれません．

図 1.1: いらすとや「紅白帽を縦にかぶった男の子のイラスト」

Puzzle 1.2.5.
看守があるゲームをするために 3 人の囚人 a, b, c を同じ部屋に入れたあと, 以下のルールを説明します．そのルールとは,

1. 黒白のシールが 4 枚ずつある．全ての囚人の額に 2 枚ずつ貼っていく．自分がどの帽子を被っているのか知ることはできないが, 自分以外の囚人がどのシールを付けているかは見える．
2. そのあと自分に貼られた 2 つのシールの色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c の順に黒黒・黒白・白白か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる．
3. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c の順に 3 択の中から発言させる．これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色の組み合わせを発言すれば処刑される．

というものです．また囚人は自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします．
1 回目の発言では a, b, c は順番に「分からない」と答え, そのあとさらに a は「分からない」と発言しました．そのあと囚人 b は自分の色の組み合わせを言い当てることができました．なぜ囚人 b は自分の色が分かったのでしょうか？ ■

Answer　まず全員が 1 度発言した後とします．そして囚人 b の立場にたって考えます．囚人 b の額に貼ってあるシールの組み合わせは黒黒・黒白・白白のいずれかです．いま, 囚人 b は自身に黒黒とシールが貼ってあるとしてみます．そこから囚人 b は a の立場に立って考えると, 囚人 a は自身の額には黒白と貼ってあると発言するはずだと考えます．

> ∵ 囚人 a は自身が黒黒だったと考えてみます．しかしそれならば c からは黒が 4 つ見えていることになるので, c は自身が白白であると分かるはずですが, c は 1 度目に「分からない」と発言していたので, 囚人 a は自身が黒黒ではないと分かります．

[1] https://www.irasutoya.com/2020/08/blog-post_27.html より入手．

> 次に囚人 a は自身が白白だったと考えてみます．さらに囚人 c に立場にたつと，もし囚人 c が白白ならば，囚人 b から見て白が 4 つ見えています．しかし囚人 b が「分からない」と発言したことから，囚人 c は自身が白白ではないと分かります．つまり囚人 c は a と同じ理由で自身が黒黒でないとも分かっているはずなので，囚人 c は白白でも黒黒でもないことから黒白だと分かるはずです．しかし囚人 c は「分からない」と発言したことから，a は白白でないと分かります．
> よって残された候補から囚人 a は自身が黒白しかないと分かります．

しかし囚人 a が 2 度目の機会で「分からない」と発言したことから，囚人 b は自身は黒黒ではないと分かります．
同様に囚人 b が自身には白白と貼ってあると考えてみると，これも囚人 a が 2 度目の機会で「分からない」と発言したことから，この貼り方ではないと分かります．
よって残された可能性である黒白のみが残り，b は自身のシールの組み合わせが分かります． □

[57] に書いてある通り，この問題は上記のような（ややこしい）推論をしなくても解くことができます．

Answer この問題では黒と白のシールの数は同じである．もし囚人 b が自身の色が黒黒だと分かったのならば，黒黒だと分かった議論の中での白黒を反転させることで，白白も答えになるはずです．しかし b が一意な答えを見つけたことから黒黒も白白も候補から外れて，黒白だと分かったはずです． □

このパズルは非協力型の Dirac-Gardner の帽子パズルの拡張です．しかし複数の帽子を被せるという設定だけでも，協力型の Hardin-Taylor の帽子パズルへ応用可能です．Hardin-Taylor の帽子パズルにて，各囚人に 2 つ以上の色付き帽子を被せる帽子パズルのことを，考案者の名前をとって **Smullyan の帽子パズル**とよぶことにします．これについての考察は 2.1.1 節（45 ページ）ですることにします．今のところは Smullyan の名前を使っていますが，彼が別の彼由来らしきパズルを考案している可能性も高い（なにせ論理パズル多産者としても有名）ので，そのようなパズルが見つかれば，この名前は再考することにします．

1.2.4 帽子の見え方

ここまでに見てきたパズルは全て，どの囚人も自分以外の全ての帽子が見えていた．新たなバリエーションとしては，何人かの囚人がいくつかの帽子を見えなくする，というものです．一般的に見えない帽子が増えるということは，使える情報が減ることになるので，見えなくなる帽子が増えるほど（そして他のルールは変えなければ），それだけ囚人は不利になります．
たとえば Puzzle **??**を以下のように改造してみます．

Puzzle 1.2.6.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人 a, b を同じ部屋に入れ，帽子を 1 人に 1 つずつ被せます．その帽子は黒白どちらかの色で塗られています．囚人 a は b の帽子の色が分かりますが，囚人 b は（目隠しするなどして）a の帽子の色は分かりません．また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません．この状態で帽子の色のどちらかのみを，つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ，その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり，そんな正解者が 1 人でもいれば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます．もし 2 人とも不正解ならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます．当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは，囚人たちは入室するまで知りません．このゲームのルールや勝利条件については，部屋に入る前に囚人たちに伝えられ，ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です．このとき入室後にどのように帽子を被せられても，常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

もともとのパズルでは囚人側に必勝戦略が存在しましたが，このパズルでは存在しません．つまり看守は囚人たちの作戦を知っていれば，常に囚人 2 人ともが不正解になるように帽子を被せることができます．

Answer 囚人 b は部屋に入ってからとりうる行動は，常に黒と発言する，常に白と発言するのどちらかしかありません．テキトーにその時の囚人 b の気分で黒白の好きな方を発言するというのは，論理的な行動でもないので 2 人の作戦には組み込めないとしておきます．ちなみに囚人たちの戦略を数学的に定義した場合でも，このような作戦は排除でき，このように何も見えていないような囚人は，決まられた色を発言するくらいしか行動できないということも分かります．これについては 1.4 節（38 ペー

ジ）を見てください．
例えば囚人 b は常に黒と発言するという行動をすることにしたとします．すると看守は b に白の帽子を被せることに決めます．そうすることで b は必ず不正解になります．すると囚人 a がどのような作戦をとろうが，b の色が決まったことで a が何を発言するかも分かります．なので看守は a が発言しない方の色を被せれば a も不正解になります．
つまり看守はそのように被せたときには 2 人とも間違えることになり，囚人たちは常に 1 人以上正解させることは不可能になります． □

Puzzle **??**では囚人たちは看守に作戦がバレていても常に勝利することができましたが，このパズルでは看守は上記の答えのようにして囚人たちが勝利しないようにすることができますし，仮に作戦を知らなくてもたまたま上記の答えのように被せた場合でも囚人たちは敗北します．
さらに複雑な見え方をしているパズルは既にたくさん知られています．Dirac-Gardner の帽子パズルの例を 1 つあげます．

Puzzle 1.2.7.
看守があるゲームをするために 3 人の囚人 a, b, c, d を同じ部屋に入れたあと，以下のルールを説明します．そのルールとは，

1. 囚人 a, b, c は一列に並べて，a は b, c の帽子のみが，b は c の帽子のみが，c, d はどちらも自分も含めてどの囚人の帽子も見えないように立たせる．
2. 4 つある帽子のうち 1 つずつを囚人全員に被せていく．4 つのうち 2 つは白色に，残り 2 つは黒色に塗られている．
3. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに，a, b, c, d の順に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ，そのさい自分以外の発言は聞こえる．
4. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば，もう一度考えさせたあとに，同じように再度 a, b, c, d の順に 3 択の中から発言させる．これを繰り返していき，その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば，その囚人は釈放され，間違った色を発言すれば処刑される．

というものです．また囚人は自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします．
まず a は「分からない」と答えましたが，それを聞いた b は自身の色を言い当てることができて釈放されました．なぜ囚人 c は自分の色が分かったのでしょうか？ ■

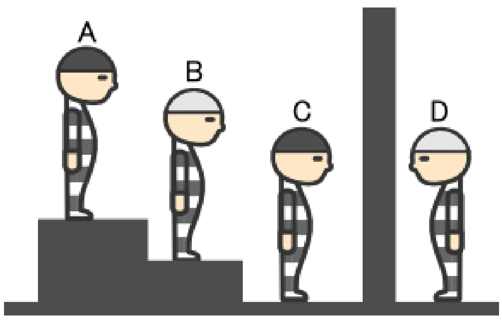

図 1.2: 囚人の立ち位置のイメージ画像

囚人たちは上の画像[2] のように立っていると考えられます．a, b, c の見え方は階段上に下の段に向かって立っているように表現できます．d は誰からも見えていないし誰の帽子も見えていないので，画像のように目の前に壁があるように捉えることができます．

Answer 囚人 a はもし b, c を見て同じ色が 2 つ見えていれば，自身が何色を被っているか分かるはずです．しかし「分からない」と発言したことから b, c は黒白を 1 つずつ被っていると分かります．よって c が見えている b は，c が被っていない方の色を被っていると分かります． □

[2] http://nazo-nazo.com/sp/cat400/post-78.html より入手．

続いて Hardin-Taylor の帽子パズルで例を 1 つ出します.

Puzzle 1.2.8.
看守があるゲームをするために 3 人の囚人 a, b, c, d を同じ部屋に入れたあと, 以下のルールを説明します. そのルールとは,

1. 囚人 a, b, c, d は一列に並べて, a は b, c, d の帽子のみが, b は c, d の帽子のみが, d は自分も含めてどの囚人の帽子も見えないように立たせる.

2. 各囚人に黒白どちらかの帽子を被せていく. この帽子はどちらも全囚人分あるとする.

3. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c, d の順に黒白どちらかの色を発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.

4. 全囚人の発言が終わったあと, 不正解者が 1 人以下, つまり 3 人以上が正解していれば囚人側の勝利として全員釈放される.

というものです. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 4 人で戦略を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

このパズルでは 1 つ前のパズルの a, b, c のように 4 人が階段上に並んで立っていると捉えることができます. この場合は a が最上段に, d が最下段に立っていて, ゆえに d は誰の帽子も見えていません.
このパズルは色の数は Puzzle **??**（**??**ページ）と同じ 2 色ですが, 囚人の数は倍になっていて, 自分以外の帽子が全て見えていた Puzzle **??**と比べれば, a 以外の囚人は多くの帽子が見えなくなっており, d にいたっては何も見えていません. 一見かなり不利になっているように思えますが, 順番に発言しかつ自分以前の発言が聞こえることを活かせば, Puzzle **??**の最低 1 人以上という勝利条件よりもより不利な勝利条件「最低 3 人は正解する」というものでも, 必勝戦略が存在します. それは以下のような作戦です.

Answer　このゲームでは必勝戦略が存在します. まず囚人 a は黒が奇数個見えたら黒と, 偶数個見えたら白と発言するようにし, そのことを他の囚人にも教えておきます. 囚人 b はその発言を聞けば自分含めた囚人たちに被せられた帽子の黒の数の偶奇を知ることができます. そして見えている c, d の帽子の黒の数から自分が黒か白か判定することができます. そして囚人 c は直前の b の発言が正解だったと仮定して（実際に正解していますが）, b と同じように自分含めた 3 人の囚人の黒の帽子の数の偶奇の情報と, b の発言と見えている d の色から自身の帽子の色が分かります. 最後に d は直前 2 人の発言と a の発言から黒の帽子の数について考えれば, d も自身の色が分かります.
黒の帽子の数は必ず偶数・奇数にどちらかになることから囚人 a は必ずその個数を伝えることができ, そして a 以外の囚人は上記のようにして必ず正解するため, この作戦は必勝になっています. □

つまり囚人 a は他の囚人へ彼らのための情報を伝える役に徹することで, 残りの囚人が正解するようにする作戦です. ただそのまま黒の偶奇を伝えることはできないので, 自分が発言できる色を使って, その情報を暗号にするわけです. 囚人たちはその暗号の意味さえ分かっていれば, 上記のように正解することができます. また別に黒の偶奇ではなく白の偶奇としても問題ありません. より分かりやすいのは帽子を白黒という色ではなく, $0, 1$ の数に置き換えて, 囚人 a は b, c, d の帽子の数を合計し, それを 2 で割った余り（必ず $0, 1$ どちらかになる）を発言する, というものすることができます. こちらの方が囚人にとっても覚えやすく間違えにくいと思われます. まぁ帽子パズルでは囚人はどのような作戦もきっちり暗記でき, ゲーム本番でも間違えることなく計算や判断をすることができると仮定されているわけですが.
上記の 2 つのパズルはどちらも発言に順番があるパズルでした. この要素については 1.2.6 節（23 ページ）にて解説しますが, 発言を全員同時にしなくてはいけないパズルでも, このような階段上に囚人が立っていると思えるようなパズルは考えることができます.
囚人が a, b という 2 人の場合は以下のような帽子の見え方の可能性があります.

1. 2 人とも互いに誰の帽子も見えていない.

2. a は b の帽子が見えているが, b は a の帽子が見えない.

3. b は a の帽子が見えているが, a は b の帽子が見えない.

4. 2 人とも互いに相手の帽子が見えている.

つまり 2 人という設定でもこれだけの見え方の候補があって, それにあわせてまた別のパズルを作ることができます.
一般的に囚人が n 人の場合は $2^{n(n-1)}$ パターンの帽子の見え方があります. この数だけ帽子パズルを考えることができるということです. さらにこれらはグラフ理論の言葉を使うことでより効率良く考察しやすくなります. それについては帽子パズルの用語を数学の言葉を使って定義していく, 1.4 節（38 ページ）を見てください.
また囚人が無限にいる場合では, 帽子の見え方のパターンも無限に増えます. そんな中でも特徴的なものを扱っていくとになります. たとえば囚人が自然数と同じだけいる, つまり各囚人に 1 つずつ自然数が割り振られているようなパズルにて, Puzzle **??**（**??**ページ）と同じように自分以外の帽子が全て見えているような設定とか, 自分より大きな番号を割り振られている囚人は全て見えて自分以下の番号の囚人は全て見えないような設定（これは階段上に並んでいるパズルの一般化です）とか, さらに自分が奇数なら自分より大きな偶数だけ見える, 自分が偶数なら自分より大きな奇数だけが見えるなんて設定も考えることができます. これらも日常言語ではなく数学の言葉を使うことで分かりやすくなると思います. どのような無限帽子パズルがあるかについては, 無限帽子パズルの概略説明の節, 3.1 節（47 ページ）に書くことにします.

1.2.5 帽子についての情報

帽子パズルにて「帽子についての情報」として基本的なものは, 色の付いた帽子がそれぞれいくつあるかというものです. またこの情報があればあるほど囚人たちは有利になります. 一番囚人たちにとって役に立ちづらい情報は, 全ての色の帽子が囚人の数だけ用意されている場合です. この場合は帽子の被せ方の全てのパターンがありえることになります. Hardin-Taylor の帽子パズルの一番シンプルな場合である Puzzle **??**（**??**ページ）がそのようなパズルの代表例です. 囚人たちが協力できない帽子パズルでは, この情報が重要になります. なぜなら被せ方の全てのパターンがありえるという情報だけならば, 囚人はもはや色の数だけ発言の可能性を持つことになり, 一向にその自身の色の繋がる推論をすることができないからです.
この情報が増えるだけで, 正解数という点で囚人たちが有利になることを, Puzzle **??**を改造することで確かめてみます.

Puzzle 1.2.9.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人 a, b を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子は黒白どちらかの色で塗られています. しかし黒で塗られた帽子は 1 つしかありません. 白のものは 2 つあります. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています. また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人ならば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます. もし正解者が 2 人ならば釈放した上に賞金がもらえます. もし 2 人とも不正解ならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 最低でも 1 人正解, 帽子の被せ方次第では 2 人が正解するような戦略は存在するでしょうか？ ■

つまりこのパズルは正解数に応じてボーナスが付くようになりました. もちろん囚人は最低限負けることはなく, あわよくばボーナスも得られるような作戦を考えるはずです. そしてそんな作戦はもとのパズルでの必勝戦略を改造することで得られます. ちなみに元のパズルでの必勝戦略とは a が見えた色と同じ色を, b が見えた色と違う方の色を発言するというものでした.

Answer 囚人たちは以下のように作戦を立てます. a も b も基本的には Puzzle **??**のときと同じように発言しますが, もし黒色が見えた場合は元の作戦は気にせず白と発言します. これは黒黒という組み合わせがありえないということを考慮したうえでの作戦です. すると個々の被せ方パターンにおける発言は以下のようになります. 比較のために元のパズル通りの作戦での発言も併記しておきます. ※は「Puzzle **??**での発言」の省略です.

	パターン 1			パターン 2			パターン 3		
	帽子色	Puzzle **??**での発言	発言色	帽子	※	発言	帽子	※	発言
a	黒	白	白	白	黒	白	白	白	白
b	白	白	白	黒	黒	黒	白	黒	黒

また Puzzle **??**ではありえた 2 人とも黒を被っているというパターンがなくなっています.
パターン 1 と 3 の場合は Puzzle **??**と同じような発言をするので, 正解者は 1 人のままですが, パターン 2 の場合に a が黒が見えたために, 元の作戦通りに黒と発言せず白と発言しています. そうすることでこの場合には 2 人が正解しています. よってこのような作戦で囚人たちは最低でも 2 人, パターン 2 のような場合だけ 2 人正解するような作戦を立てることができます. □

もし Puzzle **??**にも, 2 人正解した場合のボーナスを設定したとします. しかしどのような戦略で臨んでも, 最低 1 人の正解を保証しつつ上手くいけば 2 人が正解するような作戦は存在しないことを証明することができます. つまりどんな必ず釈放される作戦もパターンごとの平均正解者数は 1 人ちょうどになります. 上記のパズルでは平均正解者数は $\frac{4}{3}$ 人になっており, その観点からも囚人たちは有利になっています.
1.2.2 節（17 ページ）でも紹介した, 帽子に色ではなく数字が書いてあるという設定を考えると, 囚人たちに与える帽子について情報はより多彩になります. たとえば全ての囚人の数字は連続しているとかはどうでしょうか？また全ての囚人の数字の和は誰か 1 人の数字に一致するとか, 1 人の囚人の数字は他の囚人の和に等しいとか, 色では表現できなかった情報を囚人たちに与えることができます.
囚人も色の数も無限になれば, さらに数学的な情報も検討できます. たとえば各囚人に自然数が 1 つずつ割り振られていて, 帽子に書かれる数字の候補も全ての自然数から選ばれるとすれば, 全ての囚人に 1 つずつ帽子を被せれば, それは 1 つの自然数列を与えたことと同じ意味になります. ここで看守からその数列（つまり帽子の様子）は収束するというヒントを与えられたらどうでしょうか？このようにして無限の場合は数学概念を用いたより多彩で複雑な帽子パズルを考えることもできます.

1.2.6 発言方法

ここまでで発言方法は, Puzzle **??**（**??**ページ）や Puzzle **??**（**??**ページ）のように全員が同時に発言するものと, Puzzle **??**（**??**ページ）や Puzzle **??**（**??**ページ）のように順番に発言していくものがあった. このノートの作成段階ではもう 1 つの発言方法も知られている. なのでここでは主にこれら 3 つについて扱っていくことにする. まずは発言方法についてまとめて定義しておく.

Definition 1.2.10.
帽子パズルにて囚人たちの発言の仕方を**発言方法**と呼ぶ. よく知られている発言方法に以下のように名前をつける.

1. **同時発言型**
囚人たちは全員同時に発言する. 同時ゆえに他の囚人の発言を聞くことはできない.

2. **1 人先行型**
1 人が最初に発言し, そのあと残りの囚人が同時に発言する. 最初に発言する囚人を**先行発言者**と呼ぶことにする. 先行発言者以外の囚人は, 先行発言者の発言が聞こえている.
誰が先行発言者になるかはゲーム開始前のルール説明時点で看守より伝えられるものとする.

3. **順次発言型**
一列に整列できるように囚人たち全員に順番が割り振られており, その順番の中で一番小さい囚人から順に 1 人ずつ発言していく. どの囚人も自分より前の発言は全て聞こえている.
どのような順番で発言するかはゲーム開始前のルール説明時点で看守より伝えられるものとする. ■

つまり Puzzle **??**と Puzzle **??**は同時発言型をゲームに採用しており, Puzzle **??**と Puzzle **??**は順次発言型を採用している.
同時発言型以外は, 発言前の情報が増えるので協力型ならば正解者の数は増えやすい傾向があり, 非協力型ならば個々の囚人は正解しやすくなります. 1 人先行型における先行発言者と, 順次発言型における一番最初に発言する囚人は, 誰の発言を聞くことがないので, その意味では同時発言型の囚人たちと同じです. つまり正解のしやすさは同時発言と変わりない状況です.
Puzzle 1.2.8（21 ページ）も順次発言型の例ですが, この場合囚人たちの帽子の見え方と発言の順番が密接に関係していました. つまり自分が見えていない囚人の発言は全て聞こえるという関係がありました. よく一般に紹介される順次発言型のパズルではこの設定が多いですが, Puzzle **??**のように自分以外の囚人が見えていて, かつ順番に発言するというものも設定としてはありえます.

同時発言型と順次発言型は帽子パズルが現れた初期から登場する設定です．しかし最初に考案したのが誰かを特定するのは難しいと思います．なぜなら例えば Puzzle ??は同時発言型ですが, これは元々Puzzle ??を知った私が同時発言型になるように改良したものになります．そしてさらに元になったパズルはここまで細かくゲームについて説明されていませんでした．つまりパズルをより正確に伝えるためにどちらの発言型も採用できたということで, どちらの発言方法が先に考案されたかを考えることは難しいです．よくよく考えればこの区分を考えたのは私なので, これ以前のパズルに適用しにくいのは当然です．しかし 1 人先行型については最初に考案したのは Hardin と Taylor かもしれません．なぜならば彼らの著作にて [47] にて登場する以前の文献でまだ発見できていないからです．これについては 23 ページの Theorem 3.2.2 を見てください．ただこの本で登場するさいは無限帽子パズルに採用されており, 有限帽子パズルではもしかしたら彼ら以前に発表しているかもしれません．
また非同時発言型の 2 つでは, 誰がどの順番で発言するかはゲーム開始前に伝えられると定義しましたが, さらなるバリエーションとして「順番に発言するというルールは伝えるが, 誰がどの順番で発言するかは部屋に入った後に伝えられる」というものも考えることができます．つまり囚人たちは自分がどの順番で発言することになったとしても勝利条件を満たすような作戦を練っておく必要があります．ただこのルール変更は有限の場合ではどちらでも大差がないように思われます．それについて研究が進んだ場合にはここに結果への案内を書くことにします．

1.2.7　色以外の発言

これまでのパズルでは囚人たちの色以外の発言としては「（自分の色が）分からない」というものだけでした．またそのパズルではこの発言を他の囚人も聞くことができたため, これがヒントして役に立つこともありました．
色以外の発言である「分からない」は私が沈黙という行為を発言に置き換えたものです．もともと私がアレンジする前は, Puzzle ??（??ページ）は Gardner が紹介した以下のようなものでした（そのまま [57] の 138 ページより引用しています）．

<u>Puzzle</u> 1.2.11.
A, B, C の 3 人が目隠しされて, これから赤い帽子か緑の帽子を被せられると告げられる．彼らに帽子が被されたあとで目隠しが外される．そして彼らは, 赤い帽子を見たら手を挙げるように, また, 自分の帽子の色が確信できたら部屋を退出するように告げられる．帽子は 3 つとも赤だったので, 3 人とも手を挙げた．数分後, 他の 2 人より賢かった C は, 部屋を出ていった．彼は, どのようにして自分の帽子の色を推測できたのだろうか？ ■

このパズルは Gardner 自身がその本で指摘しているとおり曖昧な点が 2 つあります．1 つは数分後という部分です．つまりその間は誰も発言しない沈黙の時間帯だったということです．そしてその沈黙が全ての囚人にとってのヒントになっています．これを Puzzle ??では, 同時に「分からない」と発言し, その発言を他の囚人にも聞こえたことにしました．これ以外にも沈黙がヒントになっているものはたくさんあります．それらもこのように「分からない」という発言をしたことに変更可能だと思います．
いま話題にしている色以外の発言という要素とは関係ありませんが, 曖昧なもう 1 つの点は「他の 2 人より賢かった」という部分です．この曖昧さを排除するために全員が同じ賢さ（論理的思考力？）を持っているとして（もしくは賢さに言及しないで）, 全員が同時に自分の色が分かり部屋を出ていったというアレンジをしているものもあります．
どの囚人にとっても必要な情報は, 最初に帽子を見ただけでは自分も含めて誰も自分の帽子が分からなかったというものです．なので Puzzle ??（??ページ）では, それを聞いて推論していくようなイメージが付きやすいよう, 順番で発言させるという私のアレンジが入っています．
まとめると本来は色以外の発言しかできないようなルールにしておきながら, 囚人が沈黙してしまったという情報を色以外の発言という捉え方をすることにしました．おそらく私が初出なアレンジでも設定でもないとは思います．しかし他の帽子パズルでは沈黙という意味ではない, 色以外の発言をするものもあります．前置きが長くなりましたが, この節ではこのノート執筆時点で知られている色以外の発言をするパズルをいくつか紹介します．
まず Puzzle ??（??ページ）のルールを変えたものと捉えることができるパズルを紹介します．ルールの変更部分は色を変えておきます．

<u>Puzzle</u> 1.2.12.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます．その帽子は黒白どちらかの色で塗られています．囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています．また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません．この状態で帽子の色のどちらかか, 発言拒否を意味する「パス」を発言します．つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一

致していれば正解となり, そうでなければ不正解, 「パス」と発言した場合は正解にも不正解とも扱いません. 「そして正解者が 1 人以上いて, かつ不正解者が 0 人ならば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です. 囚人たちは勝利する確率を最大どれくらいまで上げることが可能でしょうか? ■

Puzzle **??**との違いは発言のパスが許されているところです. それゆえに囚人たちの勝利条件やパズルの問いも変わっています. 「パス」は正解にも不正解にもなりません. Puzzle **??**での必勝戦略では常に正解者も不正解者も 1 人ずる発生することが分かるので, このパズルでは必勝戦略にはなりません. そしてこのパズルには必勝戦略は存在しません. ゆえに確率は 100 %になることはありません. そして最大確率は 50 %です. そのときの戦略は 1 人は常に「パス」を発言し, もう 1 人は黒か白か決めた色を（もう一人の色がなんであろうと）発言するというものです.
一見囚人数が増えても, 1 人がどちらかの色を, それ以外の全員がパスをするという 50 %勝率の戦略が最適化と思われますが, 実は囚人数が $n = 2^k - 1$ 人ならば Hamming 符号を用いることで, 勝率 $n/n+1$ となる戦略を作ることができます. つまり 3 人ならば 75 %の, 7 人ならば 87.5 %という勝利の戦略が存在します.
よって以下の要素を持つパズルを **Eber の帽子パズル**と呼ぶことします.

1. 囚人たちは協力してゲームに臨む.
2. 色以外の発言として「パス」が可能.

ちなみにこのように考案者の名前を借りて帽子パズルを命名する行為は, [47] の 1 ページ目にて著者である Hardin と Taylor が「Ebert' Hat problem」という記述を参考にしています. 帽子パズルと総称するには種類が豊富過ぎると感じているので, 特徴的なものでかつ考案者が分かっており, そして考案者が特別な名前を付けていない場合に, このように勝手ではありますが名前を付けていきたいと思います. もし考案者が何か特別な名前を付けていれば, それに従うことにします. 例えば下の deterministic coin flip 帽子パズルとかがそれにあたります.

色以外の発言が可能なパズルは, 発言が多様になったことで勝利条件という要素が正解数とは違う多様性を持ちます. その例が以下のパズルです.

Puzzle 1.2.13.
看守があるゲームをするために 8 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子には実数が 1 つずつ書いてあります. どの囚人も自分以外の囚人が被っている帽子の数が見えています. そして部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. 部屋に入った後囚人たち全員に聞こえるように看守が 1 つの実数を発言します. そのあと囚人たちは同時に $0, 1$ のどちらかを発言します. 看守が発言した実数よりも大きい数の帽子を被った m 人の囚人たちの中で, 0 を発言した囚人と 1 を発言した囚人の数がそれぞれ $\lfloor m/2 \rfloor$ を超えていた場合, 囚人たちの勝利として全員釈放されます. そうでなければ敗北となって全員処刑されます. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかとどの実数を発現するかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 看守がどの実数を発現したとしても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか? ■

このパズルも私のアレンジが入っています. 元ネタは [34] の 15 ページにて紹介された「Hat Puzzle 2 (deterministic coin flip)」です. これまでの例では発現できるものの候補は, 色のみか, 色に色以外の「分からない」や「パス」を加えたものでしたが, このパズルでは色は発現できず数字の $0, 1$ しか発現できない点がこれまでのパズルと異なる点です. それにあわせてルールと勝利条件が変わっています.

1.2.8 発言回数

1.2.9 勝利条件

あるパズルがあったとき, その勝利条件を変えて別のゲームを作ることは容易です．協力型のゲームの場合, ある正解者数が囚人たちの勝利条件であり, かつその勝利条件に対して囚人側に必勝戦略が存在した場合, さらに要求される正解者数を（プレイヤーの人数を上限に）増やした新たなゲームに, 囚人側にまた必勝戦略があるか考察することは妥当な議論展開です．逆にその勝利条件に対して囚人側に必勝戦略が存在しない場合, 要求される正解者数を減らしてみて考察することもありえます．
すでに例にあげたとおり, Puzzle **??**（**??**ページ）を「最低 1 人正解」から「最低 2 人正解（つまりこの場合は全員正解と同意味）」へと変更できます．そしてその場合は必勝戦略はないことを示すことができます．看守より要求される最低正解者数を変更するパターンは, このパズルで他の要素を変えない限りはこれだけですが, 最低正解者数でない別の勝利条件も既に考えられています．勝利条件のみが変わったので, その部分だけ文字の色を変えておきます．

Puzzle 1.2.14.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます．その帽子は黒白どちらかの色で塗られています．囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています．また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません．この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 2 人もしくは 0 人のとき囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます．もし正解者・不正解者 1 人ずついるようならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます．当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません．このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です．このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

つまり正解数が全員か 0 人かの極端な場合のみが勝利するというものです．この勝利条件に対しても必勝戦略は存在します．1 つは 2 人とも見えた色と同じ色を発言するというものです．もう 1 つは 2 人とも見えた色を異なる方の色を発言するというものです．

1.3 帽子パズルの歴史

帽子パズルは数学的対象としてはまだまだ歴史は浅いものの, 単なるパズルとしては歴史はかなり長いです．誰がどのように興味をもってきたのか, 自分なりにまとめていきたいと思います．
1.3.1 節（26 ページ）では帽子パズルの要素をもつパズルが, いつから人々に楽しまれてきたのかまとめていきます．
1.3.2 節（38 ページ）では帽子パズルが数学的対象となり, どのように研究されてきたのかをまとめていきたいと思います．1.3.1 節があくまで一般の書籍を主に調べているならば, この節は学術的論文を対象に調べています．
帽子パズルはいつからかプレイヤーが囚人となり, 囚人と帽子のパズルと呼ばれるようになりました．**??**節（**??**ページ）では, いつからそうなったのかを上記の節をまとめる傍らまとめてみたいと思っています．

1.3.1 パズルとしての帽子パズルの歴史

ここでは帽子パズルの重要な要素, 自身の色とは直接関係のない情報から自身の色を推測する, という要素をもったパズルの歴史をまとめていきます．
帽子パズルのパズルとしての歴史を探るには泥んこの子供たちのパズルの歴史を追うのが最善かもしれません．なぜなら, 『100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル』[59] の 44 ページ, そしてこの本が引用している『The Freudenthal problem and its ramifications (Part III)』[37] を参考にすると, この著者たちは主に**泥んこの子供たちのパズル**（**Muddy Children Puzzle**）に注目しており, 帽子パズルはこれの亜種・変形であるという見方をしています．
泥んこの子供たちのパズルとは以下のようなものです．ここでは [59] を参考にします．この本では最初に一般的なパズルを紹介し, そのあと設定を簡略化したパズルを出して, 徐々に難しくしていくという形式をとっています．それに従って, まずは [59] の 27 ページの一般的なパズルを引用します．

<u>Puzzle</u> 1.3.1（[59]3 章「泥んこの子供たち」冒頭のパズル）.
外で遊んでいた子供の一団が, 父親に呼ばれて家に戻ってきた. 父親の周りに集まると, 思ってたとおり, 子供たちの中の何人かは, 遊んでいる間に汚れていて, とくに顔に泥がついている. 子供たちは, それぞれ他の子供の顔に泥がついているかどうかは見えるが, 自分自身の顔に泥がついているかどうかは見えない. このことは全員が分かっているし, 子供たちが完璧な論理的思考をすることは一目瞭然である. ここで, 父親はこう言う. 「君らのうち, 少なくとも一人は泥で汚れている」そして, こう続ける. 「自分が泥で汚れている分かった者は, 前に進み出なさい」これで誰も前に進み出なければ, 父親は, この指示を繰り返す. 何回かこれを繰り返した時点で, 泥で汚れた子供全員が前に進み出る. 全員で k 人の子供のうち, m 人が泥で汚れているとき, 何回目でこうなるか, そして, その理由は. ■

続けて同じ本から順に簡単バージョンのパズルを 2 つ紹介します.

<u>Puzzle</u> 1.3.2（[59] の **Puzzle 8**（**28** ページ））.
外で遊んでいたアリスとボブが家に戻ってくる. 二人の父親は, ボブの顔が汚れているのを見て, 二人が泥遊びをしていたことに気づく. 二人は, それぞれ相手の顔が泥で汚れているのを見ることはできるが, 自分自身の顔が汚れているかは見ることができない. もちろん, 鏡を覗き込めば自分の顔を見ることができる. ここで, 父親は「二人のうち一人の顔は泥で汚れている」と言う. ボブはすぐに顔を洗いに向かった. しかし, ボブは鏡を見たわけではない. ボブはどのようにして自分が泥で汚れていると分かったのか. ■

以降この本では顔が泥で汚れている子供のことを「泥んこ」と呼ぶことにしています.

<u>Puzzle</u> 1.3.3（[59] の **Puzzle 9**（**29** ページ））.
その翌日, アリスとボブはまた外で遊んでいたが, 今度は二人とも泥んこになった. 家に帰ったとき, 父親は, またしても, 「二人のうち少なくとも一人は泥んこだ」と言う. そして, 父親はボブにこう尋ねる. 「自分は泥んこかどうか分かるかな」ボブは「いや, 分からない」と答える. そこで, 父親はアリスにこう尋ねる. 「自分は泥んこか分かるかな」するとアリスは「ええ. 分かるわ. 私は泥んこね」どうして, 自分が泥んこだとアリスは分かったのに, ボブには分からなかったということが起こりうるのだろうか. ■

彼らが帽子パズルを泥んこの子供たちのパズルの亜種・変形と捉えている理由は, [59] に「泥で汚れているのではなく帽子を被っているという変形は, ある週刊誌に見ることができる」部分や, [37]216 ページの「この頃から, パズルコーナーや問題集に「泥んこ問題」が登場するようになった. 子供たちは哲学者, 囚人, 学生, 修道士に変身し, 泥だらけの額は塗り潰された顔, 黒い十字架, 緑の切手, 赤い帽子, 青い塊に変身することもある.」からも分かります. 彼らの帽子パズルは泥んこの子供たちのパズルの変形・亜種という見方は正しいと思います. なぜなら帽子パズルっぽい要素をもつものは 1832 年に現れており, そしてそれは泥んこの子供たちのパズルのように「顔が汚れる」という設定であり, 色付き帽子を被るという設定のものは, 今現在ではまだそれ以前には見つけられていないからです. つまり今現在, 1832 年のそれは帽子パズル・泥んこの子供たちのパズルの祖先です.

泥んこの子供たちのパズルの祖先「笑わずにつまむ」

ではそれはどのようなものだったのか. [37]（そしてそれを参考にしている [59]）によると, 1832 年にドイツの作家で翻訳家の Gottlob Regis（ゴットロープ・レジス）(1791-1854) が, フランス文学の古典である, François Rabelais（フランソワ・ラブレー）『ガルガンチュアとパンタグリュエル』（参考までに [10]）のフランス語からドイツ語への翻訳 [**?**] を完成させました. Regis は訳すさいにかなりの量の注釈をつけたようです. そしてその 103 ページには, フランス語の「pincer sans rire」をドイツ語の「ungelacht pfetz ich dich」と訳したことについて, 以下のような彼のコメントが掲載されています.

> Gesellschaftsspiel. Jeder zwickt seinenrechten Nachbar an Kinn oder Nase; wenn er lacht, giebt er ein Pfand. Zwei von der Gesellschaft sind nämlich im Complot und haben einenverkohlten Korkstöpsel, woran sie die Finger, und mithin denen, die sie zupfen, die Gesichter schw?rzen. Diese werden nun um sol?cherlicher, weil jeder glaubt, man lache über den anderen.

これを [37] で英語に訳し, それをさらに日本語に訳すと [59]44 ページにあるとおり以下のようになります.

「笑わずにつまむ」は室内遊戯の一つ．全員が右隣の人の顎か鼻をつまむ．笑ったら，その人は罰として何かをしなくてはならない．つまむ人の中の二人はこっそり指に消し炭をつけておくので，彼らの隣の人の顔が黒くなる．消し炭をつけられた二人は互いに，全員がもう一人を見て笑っているのだと考えるので，笑いものにされる．

消し炭を何人の指につけたのか全員が知っていれば，仮に汚れている他人が見えたとしても「自分も汚れているかも」と考えるので笑うのを躊躇いますが，彼らはそれを知らないので，汚れた 1 人以上を見て笑っているというわけです．そして一番笑いものにされているのは，自分も汚れているのに笑っている人ということです．
これはパズルではなく室内遊戯であり，それゆえにこれをパズルにしたとしても曖昧な点は多々あります．例えば個々の参加者が笑い出すのはいつなのか？という点です．[59] の著者はこれを「同期がとれていない」と表現しています．しかし顎であれ鼻であれ，自分に見えない汚れがついていて，それを各人見ることができない．そして他の人が汚れているかどうか分かるという点で，かなり帽子パズル・泥んこの子供たちのパズルと同様の要素を持っていることが分かります．
[59] の著者は，この遊びがフランスでいうところの「山羊ひげ」という，二人が互いにあごをつまんで見つめ合い，笑った方が負けという一種のにらめっこを装ったいたずらであると表現してます．そして彼らはこれがフランスの大人気漫画『Asterix the Gaul（アステリックスの冒険）』（参考までに [27]）シリーズの，第 1 巻 [?] に登場しているとも補足しています．確認してみると，確かに 19 ページにそのような遊びが登場しています．ちなみにこの第 1 巻は 1959 年に出版されたもののようです．
この室内遊戯がきっかけになったかどうか定かではありませんが，帽子パズル含めて似たようなパズルが後年たくさん登場します．
しかし現在見つかっているもので最も古いパズルの体裁を持っているものは，1935 年まで進みます．つまり「笑わずにつまむ」の登場から 100 年以上経ったあとのことです．もちろん調べられていないだけで・調べる手段がないだけで，「笑わずにつまむ」以前に，1832 年と 1935 年の間に似たパズルは紹介されていた可能性は大いにあります．後者の可能性が高いこと，もしくは紹介されていたであろうということは，その 1935 年に登場したパズルたちについて調べることで分かります．
そしてその 100 年の間にも似た遊びはいくつも登場していたようです．[37] はそんな例を 1 つ挙げています．その例は，当時のアメリカの子供たちに人気のあったゲームや歌のルールやメロディや動きなどを紹介している，1883 年に William Wells Newell が出版した『Games and Songs of American Children』[?] から引用されています．それは 77 番目の項目「Laughter games」で紹介されている以下のような遊びです．

Each child pinches his neighbor's ear; but by agreement the players blacken their fingers, keeping two of the party in ignorance. Each of the two victims imagines it to be the other who is the object of the uproarious mirth of the company.

訳すとまさしく上の「笑わずにつまむ」と同じ遊びになっています．違いはつまむ場所が耳になっているのと，何で指が黒くなっているのか分からない点くらいで，大した違いではありません．
私は同じ本から帽子パズルっぽい要素を持つ遊びを見つけました．それは 80 番目の項目「What Color?」です．ルールは以下のようなものです．

A tumbler of water and a thimble are required. One child is sent out of the room, and to each of the others a different color is allotted. The first is then expected to name the color of some child. If she succeeds in her guess, a thimbleful of water is thrown in her face. The guessing is continued till this takes place, when the thrower becomes the guesser for the next turn.

どういう遊びなのか私はあまり分かっていませんが，プレイヤーに色が割り当てられる点，そしてプレイヤーは割り当てられた色が分からず，それを当てなくてはいけない点が，帽子パズルと似ています．もし最初に帽子パズルっぽいものを考えた人の中には，上の遊びよりもこちらの影響を受けたということもありえそうです．またここから考えられることは，知ることのできない自分の状態について推測しなくてはいけないギミックをもつ遊びは，古今東西存在していたということかもしれません．

1935 年の 2 つのパズル

では 1935 年にどのようなパズルが登場したのかですが，実は帽子パズル的・泥んこの子供のパズル的なパズルが，この年に 2 つ同時に現れています．これらは [37] にて紹介されているものです．

まず 1 つ目は, 1901 年より出版されている, 学校現場での科学・数学の教育をテーマにした論文誌[3] 『School Science and Mathematics』に, 1935 年 2 月に, ピッツバーグ公立高校の Werner E. Buker が投稿した『A puzzler for the thinkers』[38] に登場します. そのパズルは以下のようなものです.

Puzzle 1.3.4.
ある王が 3 人の臣下に目隠しをし, それぞれの額を触った. 臣下たちは, 触った指がランプブラック[4] で覆われているかもしれないし, そうでないかもしれないことを知っていた. 目隠しをはずすと, 「黒い点が一つでも見えたら口笛を吹くように」との指示が出された. そして, 自分の額にランプブラックがついているかどうかがわかったら, すぐに口笛をやめるようにと指示された. 3 人全ての額に黒点がついたため, そのうちの 1 人はやがて口笛を吹くことを止めた. なぜ彼は自分の額に黒点があるとわかったのだろうか. ■

このパズルの答えは同じ雑誌の後の号に掲載されました [39]. またこのパズルを紹介したとき, Buker は以下のような文章を添えてありました.

> 発案者が誰かは知りませんが, それほど悪い問題ではないので, 「School Science and Mathematics」の読者で知らない人はやってみるのもいいかもしれませんね.

つまり彼は自身が発案者ではないと申告しており, 彼自身も誰かから・どこかで見知ったことが分かります. よって 1935 年以前のこのパズルないし, 同類のパズルを考えた人がいることを分かります.

2 つ目は, 数学者 Albert Arnold Bennett（このときはブラウン大学所属）[5] が, 雑誌『American Mathematical Monthly』に投稿したもの [35] です. American Mathematical Monthly の各号はいくつかのパートに分かれており, その 1 つに問題コーナーがあります. そこにはその名のとおり問題が投稿され, 誰か解答が思いつき, その解答を投稿したならば, 後の号にそれが載るという仕組みです. 無限帽子パズルの先駆けとなったと考えられている問題も, このコーナーに投稿されたものだったりします. この 2 つ目のパズルもそのように投稿されたもので, 以下のような内容でした.

Puzzle 1.3.5.
精神反応速度[6] の異なる $n > 2$ の乗客を乗せた車がトンネルを通過し, そのため各乗客は無意識に自分の額にすすが付くことがある. どの乗客も以下の条件を満たします.

(1). 他の乗客の額が汚れていると笑い出して止まらなくなってしまうこと.

(2). 他の乗客の額はすべて見えること.

(3). 正しく推論すること.

(4). 推論して自分の額に汚れがあると判断したときだけ自分の額を拭くこと.

(5). これまでの条件を他の乗客も満たすことを知っていること.

最終的にはどの乗客も自身の顔を拭くことを示せ. ■

さきほどの Puzzle 1.3.4 に比べれば, かなり一般的な問いになっていることが分かります. Bennett はこの問題のあとに, 以下のようなコメントを書いています.

> $n = 3$ の場合は, プリンストン大学の Church 博士との対談で提案されたものです.

つまり, Church との対談によって Bennett はこのパズルを知った, もしくは思いつき, より一般的なパズルの問題に昇華させたということになります. ちなみにこれを紹介した [37] では, この Church とは, 「プリストン大学の Church と書いてあるから, Alonzo Church のことだろうけど, 明確な証拠はない」というようなコメントを添えています. Bennett が誰とどのような対談

[3] `https://onlinelibrary.wiley.com/journal/19498594` の説明を参考にしました.
[4] 黒色絵の具のことらしい.
[5] 彼については `https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=4344&fChrono=1` をメモしておきます.
[6] 原文の speeds of mental reaction を訳すとこうなるのだけれど, 感度が違うということかな.

をしたのかはさておき, このようなコメントを書いたことからも, 彼が完全なる考案者というわけではなさそうです. このパズルに対する解答は, 2 年後同じ雑誌に投稿されています [36].

1935 年の Dirac 来日

1935 年にはもう 1 つパズルに関する逸話があります. それは、先の節のように論文などで紹介されたというものではなく, この年に人から聞いたという話が残っているものです. それは物理学者 Paul Adrien Maurice Dirac から, 日本の物理学者の竹内 時男（参考までに彼の Wikipedia[5] を）と, 大脳生理学者そして（推理）小説家であった木々 高太郎（参考までに彼の Wikipedia[33] を）に伝えられたというものです. ちなみに高太郎はたかたろうとよみ, 木々 高太郎はペンネームで本名は林 髞（はやし たかし）です.
Dirac が具体的にどのようなパズルを彼らに出題したかは不明ですが, 木々は 1956 年に『光とその影』という探偵小説の中で, そのパズルを出題し, このパズル（クイズ）は Dirac より, 友である竹内と一緒に聞いたものだとコメントしています. 以下がその『光とその影』に登場したパズルです（[?] の 228 ページを参考にしました）. 引用元との細かな違いは, 引用するさいに句読点をこのノートの記法にあわせてカンマとピリオドに変えたことだけです.

<u>Puzzle</u> **1.3.6.**
ここに三人の人が居る. 課長と係長と巡査部長としてもよい. トランプが 5 枚, そのうち三枚は黒で, 二枚は赤, 私が三人の人の背中に一枚ずつ貼りつける. 三枚入り用. 二枚はかくしてしまう. そこで, まず課長さんに, 係長と巡査部長の背中をみてくれ給え, そして自分の背中のトランプの色が判るかとたずねる. いいですかな. 課長は, かくした二枚を知っていればすぐ答えられるが, そうでないなら答えられない. じっくり考えて, よく考えたが判りませんと答えた. そこで今度は係長に, つまり神田さん, あんたに, 他の二人の背中をみて, 自分の背中のトランプの色が判りますか, と聞いた. すると係長は, 課長と巡査部長の背中をじっくりみて考えたが, 結局, 判りませんと答えた. よしかね. さて今度は巡査部長に, 他の二人のせなっかをみて下さい. キミの背中には既に二人の人に見られているが, あんたは他の二人の背中の色をみて, 自分の背中のトランプの色が判りますか, と聞いた. するてえと, 巡査部長はやがて眼をつむって, 課長さんと係長さんがよく考えて, 完全な推理の上で判らぬと仰言ったのがまちがいなければ, 私にはよく判る. 私の背中の色は X 色ですと答えた. よしかな. 何色でありましたか, そしてどうして判りましたかってんですよ. ■

パズルの中の神田さんは, 小説の登場人物の名前ですが, とくに気にしなくて大丈夫です. 上でも書いたととおり, 木々はこのパズルを紹介したすぐあとに小説内にて以下のようにコメントを書いています.

> （読者諸君はここで本をふせて, この問題を解いて下さい. これは実際にディラックが日本に来た時に著者及著者の一人の友に与えたもので, 著者は今までに知ったクイズのうち一番興味あるものと思っています. ）

この「著者の一人の友」は以下の内容から分かるとおり, 竹内 時男のことです.
『数学史研究』という雑誌にて 1970 年に『光と影と赤い帽子』[72] という論文が, パズル研究家である高木 茂男によって投稿されました. この論文は二部構成になっていて, 第一部が「「光とその影」の波紋」, 第二部が「赤い帽子の波紋」という題になっています. 第一部は, 『光とその影』出版後の, パズルの最初の考案者が誰かという争いをきっかけに, 高木がディラック来日以後のパズルの歴史を整理したものになっています.
その争いとは以下のようなものでした. まず高木の『光とその影』出版後の 1958 年, 推理小説雑誌『宝石』（参考までに Wikipedia[25] を）の昭和 33 年 6 月号に, 「推理小説早慶戦」と題する座談会記事 [?] が載りました. この記事は慶応大学の推理小説同会と, 新しくでき早大のワセダ・ミステリ・クラブの両メンバーが, 探偵小説について語り合うという趣向で, 探偵小説で有名な高木も参加していたのだろうか, この記事の中で高木はこのパズルについて以下のように述べたらしいです.

> （前略）このナゾはね. 僕が知っている限り最初にいったのはディラックというノーベル賞をとった物理学者ですが, これが戦前日本へきまして, 当時生きていた[a] 竹内時男というジャーナリズムでもちょっと名のあった物理学者ですが, この竹内がどっかへ案内したんですよ. なにかゆっくり山か何か上るようなところを歩きながら, ディラックが竹内君にこのナゾを解いてみろといって出した. ところがなかなかこれが解けない. ところが解けてしまっても非常にこれは面白いナゾなんだ. そのナゾをかけてみましょうね. 何日かかかってお解きになれば面白いだろう。（下略）
>
> [a] [5] によると, 竹内 時男は 1944 年に亡くなっている.

この記事は読者の反響を呼び, パズルの解答もいくつか寄せられましたが, その中に原寒（H.S）と名乗る人物から, 次のような投書があったそうです. 投書そのものの内容は不明ですが, 高木はその内容を以下のように要約しています.

> 今月号の『宝石』で, キミはまた『光と影』の謎を言い出している. ところが君が『光と影』を創作した 1,2 年前（或いは 3 年前か）の『宝石』の新人応募作品の一篇にこの謎と殆ど同様のものがあり, （中略）それを知らないで得々としているのは, 君が非常に無知で無恥に見える

仮に原寒の主張が正しいとすると, 彼が見た同様のパズルは 1955 年から 1957 年の間に存在したということになります. これに対して高木は反論として, 『宝石』の 1958 年の 9 月号に『光と影の謎』という題で一文を載せました [?]. その内容は 1955 年のはるかに前から, 同等のパズルは存在した証拠を 2 つ挙げて, 原寒の主張を否定したものです.
1 つ目の証拠は, 『光と影』よりもはるかに前に高木自身が同類のパズルを扱った小説を書いていることです. それは『海の見える窓』という短い小説で, 『大洋』という雑誌の 1940 年の 4 月号に掲載されたようです. この事実は 1957 年の 12 月出版の『宝石』別冊第 72 号の 267 ページの, 永瀬三吾のまとめた年譜から分かるそうです.
2 つ目の証拠は, 1943 年に出版された, 藤村 幸三郎が書いた『最新数学パヅルの研究』[58] です. 文献によっては「数学」が「数學」になっていたり, 「パヅル」が「パズル」になっていたりとはっきりしません. またこれは 1948 年に再販されているらしく, いまのところインターネットで見つかるのも, その再販されたものばかりです. ただどちらにせよ原寒の主張の否定になります. この本のなかで, 「赤い帽子と白い帽子」という題で, 似たようなパズルが紹介されています. その中で藤村はこのパズルのことを

> 最近友人から聞いたもので, その出典は不明

と書いているらしいです. こう書いた理由を高木は説明しており, 1 つ目の証拠にあった『海の見える窓』出版後に, 藤村は高木へ手紙を送っており, 自分がこのパズルについて研究していることと伝え, このパズルはどこで知ったのかと質問してきたようです.
ちなみに似たパズルならば, [72] でも挙げられているとおり, 海外でもこの時期に 2 つ発表されています. どちらも 1942 年の Maurice Kraitchik（参考までに Wikipedia[29] を）による『Mathematical recreations』[49][50]（和訳は『100 万人のパズル（上）』[73]）の, 第 1 章「Mathematics Without Numbers」で紹介されています. これらがどんなパズルだったかは 1.3.1 節（37 ページ）を見てください.
というわけで, 帽子パズルっぽいパズルは原寒が主張する年以前から存在することは分かりました. ではそれがいつからか気になりますが, この時系列で一番古い出来事は, Dirac が竹内・高木の二人にパズルを伝えたときになります. [59] の訳者あとがきでは, それは昭和 13 年, つまり 1938 年だとされています. しかし私はこれは間違っていると考えています. [59] は [72] を参考にしたと思われますが, [59] の訳者が 1938 年だと考えた理由は, おそらく [72] の以下の部分だと推測しています.

> この原寒の文に対する反論として, 「光と影の謎」という題で木々高太郎は「宝石」の昭和 33 年 9 月号に一文を載せた. それは要するに, （1）あの　は 20 年前に英国のノーベル賞受賞者ディラックが直接筆者と竹内時男（理博, 物理学者）とに出題したものであるから, 新人応募者が考えたものではないこと.

補足していくと, 昭和 33 年とは 1958 年になります. このコメント内の「筆者」とは高木を指しています. 「あの　は」部分は決して私の打ち損ねではなく, 資料でこう書かれているからです. おそらく空白の部分にはパズルという単語が入ると思われます. そして [59] の訳者は昭和 33 年の 20 年前ということで, 1938 年と考えたのではないでしょうか. しかしこの文章ではどの 20 年前かは少し曖昧に思われます. もちろんこの部分だけではそう考えても仕方ないとは思うのですが, 他の部分に対しても, この [72] はところどころ数字や文章に疑いを持ってしまう箇所が個人的にはあります. 例えば, この論文の 17 ページにて以下の文章があります.

> さて, このパズル入りの探偵小説が発表されてから 3 年たった. 「宝石」の昭和 33 年 6 月号に「推理小説早慶戦」と題する座談会記事が載った.

ここの「パズル入りの探偵小説」とは『光と影』のことだと思われますが, 他の箇所では『光と影』は 1956 年に出版されたことになっています. そして昭和 33 年とは 1958 年ですから, 年数は 2 年であるべきです.
さらに, 30 の「(前略)」で始まるコメントにおいて

> このナゾはね. 僕が知っている限り最初にいったのはディラックというノーベル賞をとった物理学者ですが, これが戦前日本へきまして, 当時生きていた竹内時男というジャーナリズムでもちょっと名のあった物理学者ですが, この竹内がどっかへ案内したんですよ. なにかゆっくり山か何か上るようなところを歩きながら, ディラックが竹内君にこのナゾを解いてみろといって出した.

において, ここでは高木・竹内二人に対して Dirac が教えたというよりは, 竹内 1 人にしか伝えていないように捉えられると思います. しかし他の部分でも, 『光と影』内でのコメントでも, まるで 2 人同時に Dirac から聞いたような書き方をしています. よって [72] は, よくよく読み込めば, 少し疑問に思ってしまう箇所があるので, 他の部分においてもある程度気を付けて読むべきだと思われます. なので私は上記の 20 年前もそのまま受け取ることはしませんでした.
もう 1 つ重大な疑問として, Dirac は 1938 年にはおそらく来日していないということです. つまりそもそも竹内とは日本では会っていない可能性が高いということです. Dirac の生涯をかなり細かく綴った『The Strangest Man -The Hidden Life of Paul Dirac, Quantum Genius-』[?], 和訳は『量子の海、ディラックの深淵　天才物理学者の華々しき業績と寡黙なる生涯』[?] がありますが, この本は Dirac の生涯を描く文献としては, かなり信頼がおけるものだと思っています. なぜなら Dirac の生涯を数か月・数年ごとに分け, それを章にあてて, 多くの文章をもって説明しているからです. なので彼の物理学者として充実していて, かつ彼の周りの人物から彼に対する証言を得やすかった時期においては, 彼がどこか外国に滞在したというような, 比較的大きなニュースは見逃していないと考えられます.
この文献では [?] の 211 ページには, Werner Karl Heisenberg（参考までに Wikipedia[30]）と 2 人で, 日本へ出発した話が始まります. 彼の来日はこれが 1 度目で, 日本での滞在は 1929 年 9 月上旬からです. これは [?] の 211 ページにて 8 月中旬にサンフランシスコ港から 2 週間かけて日本にたどり着いたことからも, 『長岡半太郎の新資料について』[?] の 10 ページにおいて, 「ハイゼンベルク・ディラック両氏最近物理学講演会日程」という資料に, 彼の最終公演の日にちが 1929 年の 9 月 7 日であったことからも分かります. 続く 2 度目の来日は [?] の 340 ページの以下の部分から 1935 年だったことが分かります.

> 一九三五年六月三日, ディラックはオッペンハイマーに別れを告げ, 大日本帝国海軍艦船に乗り込んだ.

彼は日本, 中国, に寄り道しながら, ソビエト連邦を目指していたようで, 出発から 6 週間後にはモスクワ駅に到着したらしいです. なのでこの期間の間に, Dirac の 2 度目の来日があったということになります. 『仁科記念財団案内』[?] という資料の「ディラックの逸話（仁科先生の帝大新聞への寄稿）」部分には, ディラックの 2 度目の来日についての新聞記事の切り抜きが提示されています. そして来日予定は 6 月 19 日であることも書いてあり, 上記の本とも矛盾しないと思います.
そして 1938 年までに, それ以降 Dirac が短期間滞在目的でも日本へ出発したような記述は [?] にはありませんし, また 3 度目の来日があった事実も見つけられていません.
よって戦前である 1938 年までの Dirac の来日は, まず 1929 年, そして 1935 年の 2 回のみです. つまり Dirac が日本にて誰かにパズルのことを伝えられた機会は, この 2 回のみ, また, 竹内の Wikipedia[5] によれば, 彼は 1928 年から 1930 年においては渡欧していたらしいので, 必然的に Dirac と竹内が日本で会えたのは 1935 年ということになります. ただ 1935 年に竹内が日本にいたという証拠もまだ見つけられていません. ただもしそんな資料が見つかれば, 高木の発言はすべて嘘になってしまいますので, そこまでは疑うことは止めておきます.
よって私は各資料を比較することで, Dirac は 1935 年に来日したさいに登山ないしハイキングに参加し, そのさい竹内にパズルを教える. そのあとに登山には参加していなかった高木に, 竹内から伝えたのではないかと考えています. これで 1938 年ということ以外は, これまでの資料とも一致する推測になっていると思います.
この推察の証拠をいくつか挙げます. まず私の疑問としては, この調査をする前の Dirac の印象は寡黙で, 物理学以外にはまり興味を持っていない人物というものでした. それはあながち間違っていなくて, 彼についての周囲の人の評判も似たようなものです. 寡黙であるということを表すエピソードとしては, [?] の 121 ページにケンブリッジ大学での彼の同僚が作った「ディラック」という単位です. これは 1 時間あたり 1 語という単位で, つまりそれくらい彼は話さなかった, もしくは無駄な会話はしなかったという評判だったと思われます. そんな彼が異国に来たからといって, 登山の最中にパズルを他人に話すということをしそうでしょうか. また, 登山・パズルという物理学以外のものに彼は興味は持っていたのでしょうか.
まず彼は散歩やハイキング・登山といったものは好きだったようです. [?] の 210 ページにはそれを示す以下のような箇所があります.

（前略）六月, 彼は趣味と実益を兼ねることにして, アイオワとミシガンで量子力学に関する一連の講演を行ったのと並行して, グランド・キャニオンの高低差の激しい地勢を歩きまわったり, ヨセミテ国立公園やカナディアン・ロッキーでハイキングしたりした. 北アメリカの壮大な景色に始めて触れたわけだが, ディラックはその後数十年のあいだに数回北アメリカを訪問する, その都度, そんな壮大な風景のなかを徒歩で探るのだった.

そして [?] の 212 ページによると, 当時の学者が日本に来たさいのおもてなしのお決まりのコースがあって, まず東京に滞在して, 続いて京都に訪れるというものだったそうです. なので, その旅程の中で, どこかでハイキングを行っても不思議ではありません. 事実, 『生命情報科学の源流『第 3 回　1937 年：仁科芳雄とニールス・ボーア』』[?] という WEB 記事によると, ディラックの 1 度目の来日では, 彼を日光に案内したことが書いてありますし, [?] の 13 ページには以下のような記述があります.

この物理学界の大立て者である Dirac は，昨年来米国プリンストン大学に招璃せられて居たのであるが，ケンプリッヂ, への帰途来る六月十九日の浅間丸でやって来る. 来朝はこれで二度目で，昭和四年の九月に Heisenberg と一緒に来て，わが理論物理学界を賑わした. その影響か文は偶然かどうか解らないが，その頃量子論を始めた人々は我国の新しい理論の方で最も活躍して居られる様に思う. 前に来られた時もやはり三週間の滞在ではあったが，伊勢神宮詣で迄やって日本の風物に余程興味を持って居た様であった. 比叡山に登った時,「富士山が見えるか」という聞から,「もし中間に遮るものが無いとした時に，富士を比叡の頂から見て，水平線に隠れるか隠れぬか」で，Dirac と Heisenberg とが議論したのもツイ昨日の様な気がする.（下略）

つまり彼は登山中においては上記のように饒舌に議論している様子から, 2 度目の来日のさいにも同様の滞在行程だったならば, 登山中にパズルについて説明したとしても不思議ではありません.
そして彼がパズルに興味を持っていたかどうかですが, これには直接的な証拠はありません. しかし彼は囲碁が非常に好きだったというエピソードがあります.
1 つは 1980 年の東京大学教養学部で催された第 26 回定例仁科記念講演会における, 戸田 盛和の講演資料『自然現象と非線形数理』[?] の, 「仁科先生と私」という朝永 振一郎と藤岡 由夫との対談記事です. この中で以下のような部分があります.

（前略）

藤岡 それで碁をネ, やったしネ．それからディラックは碁を自分で研究して, 右のはじと左のはじとつながる碁を発明した．

朝永 ところがネ, 実は今日, 学士院で水島三一郎さんとディラックの碁の話がでてネ, かれはどこかから聞いてきたらしいんですけど, ディラックが発明したんじゃないんだって．

藤岡 ああそう．

朝永 マックス・ニューマンとかいう数学者が, 考えたんだって．そう言ってましたヨ．

藤岡 そうですか．

朝永 だけど, ひろめたのはおそらくディラックでしょう．日本までやってきたんだから．

藤岡 それからネ, ディラックが, 二度目に日本に来るという電報があったけど, ベックと二人で来るより前に一人で来たのかしら．ディラックとベックと一緒だったかしら．

朝永 いや, あれは偶然一しょになった．だから, ディラック一人で来たんでしょ．あのときは碁ばかり打ってた．

藤岡 ええ, 仁科さんは宇宙線の話をしようと．予告は ̈cosmic rays ̈という演題なんだ．ところが宇宙線の話をいくらして見えても, フンフンと言っているだけで, ちっとも興味を示さないで, 碁ばかりやっていた．

朝永 そう．

藤岡 それが 1935 年だったですね．で, ベックとはこっちで一しょになった．

朝永 そう, そのときぼくおぼえているのは, ディラックは, 帝国ホテルに泊っていたんですが, 仁科先生がネ, ディラックがあそこに泊っている, 一緒にめしでもたべに行くから一緒に来ないかって言う．それで行ったんですが, そしてロビーでしばらく話をしていたら, 仁科さんに碁をうつかってディラックがきいたんです．仁科さんがキミはどうだいっていうけど, ぼくは全然だめですってことわるとディラックがやろうやろうって言うんで仁科さん断れない．そしてディラックはボーイ呼んで碁盤持って来いって言っちゃって, ボーイが持って来た．そしてサァやろうっていうわけで, 仁科さんもサスガ弱ったらしいんだけどね, そいじゃやる, とかなんとか言って, 仁科先生が先手黒を持って真ん中へポイと置いた．

藤岡 ハハハ

朝永 碁盤の真ん中へ置いた．ディラックがどこかへ置くとそれと対称のところに置く．そんなことやって, そして仁科さんニヤニヤしてる．

藤岡 そういう手があるんだネ．

朝永 あるんだ．太閤さんがやったとかいう．

藤岡 一つ先に打っておけば, きっと勝つという．

朝永 それでディラックもこれじゃダメだと思ったのか, しまいまでやったんじゃない, 途中でやめたんだと思いますがネ．

藤岡 仁科さん, そんなこと, 本当に太閤の碁の話を知っててやったんだな．

朝永 ディラックは, 理研へやってきてミナガワ（皆川理氏）とか杉浦（義勝）さんとかああいいう連中, それから西川（公治）先生も碁のお相手したらしいんだ．それで例のあの端のないのをやり, はじめ日本人はみな勝手がちがうんで負けてたらしいけど, そのうち勝ちだしたらいいですね。（下略）

彼が囲碁が好きだったというエピソードはもう 1 つあり, 物理学者田崎 晴明の彼の個人 HP の日記にあります．そのページの

3/6/2004（土）部分において, 以下のような記述があります.

> ただ, この話は, それほど華々しいものではなく,
>
> > 地球物理学者（だっけ？）の竹内均氏が Oxford に滞在したとき Dirac に碁を教えろと言われて教えた. 何度対戦しても竹内氏が勝つのだが, ある日, Dirac は周期境界の碁盤でやろうと提案し, それ以降は, ずっと Dirac が勝った.
>
> ということだそうです. これだと, 竹内氏の碁の腕がどれほどのものか, わからないので, どの程度 Dirac がすごいのかはわからない. （いや、Dirac はすごいんですけどね.）実際, 囲碁に詳しい K さんからは,
>
> > 初手を黒がど真ん中に打ち, それに白が絡んでいく, 天元碁というのがある. この場合, しばらくは境界の影響はないので, 周期境界碁と実質的には同じ. これは例外的な打ち方ではあるが, とうぜん, ある程度の定石などはある. すぐ攻め合いになってしまい, 「生き死に」ついての経験と知識がものを言うはずだ. いくら頭のよい人でも, 周期境界にしただけで, 経験者を負かすというのはきわめて考えにくい.
>
> という, ジャンプを毎週買いつづけ「ヒカルの碁」を読むことでのみ仕入れた知識にもとづく, ご意見をいただきました. もし, それが正しいとすると, 竹内氏の碁の腕前はそれほどではなかった, ということなのでしょうか？それとも, Dirac がゲームの天才でもあったのか？

この話は 1 つ上の逸話とあわせると, その内容からもかなりの信ぴょう性を持っています. しかし 1 つだけ疑問があります. 竹内均が Oxford にて Dirac に囲碁を教えたという部分です. 1 つ上の対談記事を参考にすると, Dirac は 1935 年の来日時点で碁を知っていたことになります. なので, 竹内 均が Dirac に碁を教えたのはそれ以前ということになります. ただ彼の Wikipedia[31] によると, 彼は 1920 年生まれです. なので 1935 年時点でも 15 歳です. そんな彼がそれ以前に Oxford に行き, Dirac に会って碁を教えたというのはかなり不思議に思えます.
上記の話はパズルを好んでいなかったという証拠にはならないでしょうし, またそれらのエピソードから, 彼は囲碁を誰かと楽しむことも好きだったことも分かっていますから, 彼がパズルなどを人に披露して, それについて対話することを行ったとしても不思議ではないような気がします.

もう一度まとめると, Dirac は 1935 年に来日したさいに登山ないしハイキングに参加し, そのさい竹内にパズルを教える. そのあとに登山には参加していなかった高木に, 竹内から伝えたのではないかと, 私は考えています.
最後の疑問は, 登山中に Dirac が竹内に教えたパズルは, Dirac が考えたものなのかどうかです. [72] によると, 高木は以下のようなコメントを, 何らかの文献（多分上記の「光と影の謎」のことだろうか）の中でしていたようです.

> ディラックがつくったものかどうかたしかめてはいない. 然し, それなら英国へ問合せの手紙を出すとよかったが, それはしてないし, 先年英国へ行った時は, 謎のことなど忘れていたのでさがしてみなかった.

ここで彼が問い合わせていれば, パズルの歴史についての調査も前進していたかもしれません.
さらに [72] では上記の藤村 幸三郎のコメントも引用しています.

> 年代的に正確なところは判明しないので, 私の憶測にすぎないが, これはどうもディラックの創作ではないかと思う.

そして [72] の著者の高木 茂男も, この論文のなかでディラック創作説を支持していました.
ただ前節の 2 つのパズルの登場があったことを考えると, 仮に Dirac が考えたものだったにせよ, 彼が最初だったか可能性はかなり低いです. Werner E. Buker の『A puzzler for the thinkers』[38] の出版は 1935 年の 2 月で, Dirac が来日した 6 月よりも前ですし, そして [38] の中で, Buker は自身が思いついたのではなく伝聞だったと書いてあるからです.

そのあとのパズル史概観

前の 2 つの節で分かったことは, 1935 年に 3 つの, パズルが世間に現れた話があったということです. しかし, そのどれもそれ以前にパズルを考えていた人, もしくはパズルを載せた出版物があった可能性を示唆しています. 今時点では, そんな文献やエピソードは見つけられていません.

次の節から 1935 年以降の帽子パズルや, それっぽいパズルに関する情報を年代順にまとめていくことにします. ただこの節では, 2 つのテーマがあって, 1 つは, 1935 年以降の論文でない文献の中で, とくにおさえておくべきと私が思うものを 4 つ挙げるものです. これで帽子パズルの歴史を概観しようと思います. 2 つ目は, 帽子パズルがいつから, 色付き帽子を被った囚人が主人公になったのかを考察するものです.

では 1 つ目のテーマとした, おさえておくべき文献を挙げていくことにします.
1 つ目はパズル作成者としても大変有名な数学者 Martin Gardner の, 1961 年の『The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions』[42] です. これに Gardner によって加筆されたものとして『Origami, Eleusis, and the Soma Cube Martin Gardner's Mathematical Diversions (The New Martin Gardner Mathematical Library, Series Number 2)』[43] が, そして [43] を岩沢 宏和と上原 隆平の 2 人が和訳したものとして『ガードナーの数学娯楽 (完全版 マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 2)』[57] があります. これを挙げる理由として, 多くの帽子パズル研究者が帽子パズルとは何かを紹介するさいに, この 1961 年の本を引用するからです. もちろん帽子パズルの歴史の中では, これまで説明したとおりかなり後発に位置するものですが, 彼のパズル作家として知名度もあって, この本をきっかけにさらにパズルが広まったのではないかと推測できます. Gardner がパズル作家として有名なことは, 例えば Wikipedia『List of Martin Gardner Mathematical Games columns』[28] に書いてある, 彼が 1957 年 1 月から 1980 年 12 月の 24 年間にわたって, 計 300 近いパズルに関するコラムを執筆していることからも分かります. ここでどのように帽子パズルが紹介されていたかは, 1.3.1 節（38 ページ）にて後述します. ちなみに泥んこの子供たちのパズルや帽子パズルのようなパズルは, Induction Puzzle と総称することもあるらしく, その Wikipedia[8] では帽子パズルは 1961 年のこの本にさかのぼると書いてありますが, ここまで書いたり説明してきたことからも, 帽子パズルはさらに昔までさかのぼることができます.

2 つ目は 2001 年 4 月 10 日の New York Times 誌に掲載された,『Why Mathematicians Now Care About Their Hat Color』[53] という記事です. これを書いたのは Sara Robinson という方ですが, この人についての情報はまだ得られていません. この記事の数年前に帽子パズルを扱った論文が執筆されており, それについて着目して, 関係者や学者にインタビューした記事です. これによって, 帽子パズルは再度ブームになったと思われます. また帽子パズルが単なるパズルではなく, 学者が研究対象にするようなものであることも, 一般の人たちに広まったはずです. その意味でも, この記事は帽子パズルの普及にとって, 大きな影響があったと思っています. これがどのような内容の記事だったかは, 1.3.1 節（38 ページ）にて後述します.

3 つ目は 2013 年 10 月 28 日に発売された『The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-』[47] です. 数理論理学・集合論研究者の 2 人, Christopher S. Hardin と Alan D. Taylor によって書かれた数学書です. なのでこれまで挙げた文献のように一般向けというわけではありません. しかし, このノート執筆時点で（そしておそらくしばらく先まで）唯一の, 帽子パズルだけをテーマに書かれた数学書です. また学術書としても唯一だと思われます. この本の登場で, 帽子パズルが研究テーマとして意義のあるものだということが世間にも伝わるはずです. またこれ以後の帽子パズルがテーマの論文では大抵これが引用されています. またこの本によって無限化した帽子パズルという研究テーマが存在することが, とくに数学者には広まるきっかけになったのではないかと思います. この本は私の研究にとっても重要なもので, かつ内容もかなり豊富なので, そのためのパートを作ってまとめていくことにしています. そのパートは第 II 部（55 ページ）です. ちなみに, 現在帽子パズルを扱う学術書として唯一であることを利用して, 私や指導教官である先生はこの本を「帽子パズル本」と呼んでいます. この本との出会いや帽子パズルが私の研究テーマになったきっかけについては, 1.3.1 節（38 ページ）にて書いてあります.

4 つ目は 1 つ上と同じ年の 2013 年の 11 月 30 日に出版された『チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題』[56] です. これは数理論理学者である田中 一之によって書かれたもので, 帽子パズル以外にも様々なパズルが取り上げられています. 日本語で書かれた帽子パズルを紹介しているものは, これ以前にもたくさんありましたが, この本が重要な点は, この本が日本語で書かれた, 囚人の人数を無限人に拡張した結果を紹介した最初の本であるということです. この本によって, 囚人と帽子のパズルは無限に拡張できること, それが単なる禅問答で終わるのではなく, 数学を用いて厳密に研究できることを日本の人たちに知らせる機会を与えたと思います. 現在調査中ではありますが, 無限な帽子パズルを紹介した一般向けの本として, 日本を除いても最初だった可能性があります. この本では有限・無限含めて多くの帽子パズルが紹介されているので, それがどのようなものであったかは, 1.3.1 節（38 ページ）にて書くことにします.

以上までで, 帽子パズルの歴史の中で私が重要だと思う文献を挙げました. もちろん学術的な論文として重要なものは多々ありますが, それについては 1.3.2 節（38 ページ）に書くことにします.

次のテーマは帽子パズルのようなパズルにて, プレイヤーが色付き帽子を被った囚人になったのは, いつが初めてなのかという疑問に対する考察です.
まずプレイヤーが囚人になったパズルはいつ登場したかというと, 1942 年の Maurice Kraitchik（参考までに Wikipedia[29] を）による『Mathematical recreations』[49][50]（和訳は『100 万人のパズル（上）』[73]）の, 第 1 章「Mathematics Without Numbers」で紹介されたパズルが, いま現在見つかっているもので一番古いものです. 具体的にどんなパズルだったかは, Puzzle 1.3.8（37 ページ）を見てください. このパズルは確かにプレイヤーは囚人でしたが, 色付き帽子を被せるのではなく, 色付きの円盤を背中に貼り付けるというものでした. ちなみにこのパズルは, 囚人たちがなぜ逮捕されたのかのストーリーまで説明されていたりします.

続いてプレイヤーに被せるものが色付きの帽子になったパズルがいつ登場したのかというと, 1943 年に出版された, 藤村 幸三郎が書いた『最新数学パヅルの研究』[58] に登場した, 「赤い帽子と白い帽子」として紹介されたパズルが, いま現在見つかっているもので一番古いものです. ただ現在この文献は入手できていないのですが, [72] ではプレイヤーに色付きの帽子を被せたと書かれています.

1936 年から 1960 年

1.3.1 節（28 ページ）と 1.3.1 節（30 ページ）に書いた内容とも被るところもありますが, 1936 年以降に現れた帽子パズルっぽいものたちを紹介している文献を年代順にまとめていきます.
まずは 1940 年の木々 高太郎によって書かれた短編探偵小説『海の見える窓』です. これは Dirac ないし竹内 時男から聞いたパズルを木々がこの小説に登場させたというものです. この事実は [72] に書かれています. しかし木々の Wikipedia[33] によると, このような短編を書いた事実は見当たりません. ただ Wikipedia には短編集の出版もいくつか明記されているため, そのようなものに含まれているのかもしれません. またこの短編は [72] によると, 『大洋』という雑誌の昭和 15 年 4 月号にて発表されたということであり, どのような内容か知るのは難しくとも存在したのは間違いなさそうです.

続いては, 1942 年の Maurice Kraitchik（参考までに Wikipedia[29] を）が書いた『Mathematical recreations』[49][50]（和訳は『100 万人のパズル（上）』[73]）です. その第 1 章「Mathematics Without Numbers」では帽子パズルのようなパズルが 2 つ紹介されています. 1 つ目はその章の 3 番目のパズル「**the problem of the three philosophers**」, いわゆる「**3 人の哲学者の問題**」という呼ばれているパズルです.

Puzzle 1.3.7.
ギリシャの 3 人の哲学者は, 論争に疲れ, 夏の暑さに耐えかねて, アカデミーの木の下で少し昼寝をしていた. ところが, ある悪戯者が彼らの顔に黒いペンキを塗ってしまった. やがて彼らは一斉に目を覚まし, それぞれ相手を笑い始めた. 突然, 一人が自分の顔にペンキが塗られていることに気づき, 笑うのをやめました. 彼はなぜ笑うのをやめたのでしょうか. ■

2 つ目は, 上のパズルに続く無題のパズル（和訳版だと「白は自由の色」と名付けられています）で, 以下のような内容です.

Puzzle 1.3.8.
革命に失敗した 3 人が国境を越えて脱出し, ある小さな町の留置場に収容された. 保安官は囚人たちに同情し, 彼らを自由にする方法を探した. ある日, 保安官は白い円盤を 3 枚, 黒い円盤を 2 枚持って刑務所に入り, 囚人たちに言った. 「お前たちの背中に, この円盤を一枚ずつ貼ろう. お前たちは仲間の円盤を見ることができるが, 自分の円盤は誰も見ることができない. 白い円盤を貼られた者が, 自分の円盤が白であることを正しく当てることができれば, 彼は自由を得ることができる. そうでなければ, その者は無期限に拘留される。」こう言って, 彼はそれぞれの背中に白い円盤を貼り付け, 彼らを監視係の部下に預けた. 3 人の囚人 A, B, C は, それぞれ自分の円盤が白いかどうかをどのように推論すれば言い当てることができるだろうか？ ■

つまりこの本では泥んこの子供たちのパズルと帽子パズルの 2 つが同時に収録されていたことになります.

1961 年から 1999 年

2000 年から現在まで

1.3.2　数学的対象としての帽子パズルの歴史

1.4　帽子パズルの形式化

では帽子パズルを数学的対象にするため, 帽子パズルに登場する用語たちを, 数学概念を使って定義していきます.
しかしいきなり全てのパズルを対象にしてしまうと分かりにくくなりそうなので, 一番シンプルな Hardin-Taylor の帽子パズルを形式化して, Hardin-Taylor の帽子パズルになかった要素を続けて形式化していくことにします.
まず, 1.2.1 節（12 ページ）でも紹介したとおり, 帽子パズルの要素とは以下のものでした.

$$\begin{cases} \text{囚人たちが協力する} \\ \text{囚人たちが協力しない} \end{cases} \times \begin{cases} \text{囚人数} \\ \text{色の数} \\ \text{帽子の見分け方} \\ \text{帽子に付く色の個数} \\ \text{帽子の見え方} \\ \text{帽子についての情報} \\ \text{発言方法} \\ \text{色以外の発言} \\ \text{発言回数} \\ \text{勝利条件} \end{cases}$$

そして再掲しますが, Hardin-Taylor の帽子パズルとは以下のようなものでした.

Puzzle ??の再掲

看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子は黒白どちらかの色で塗られています. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています. また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人でもいれば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます. もし 2 人とも不正解ならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？

このパズルがシンプルだと私が思う理由は, 帽子に付く色の個数は帽子 1 つにつき 1 つであり, 帽子についての情報はなく, 色以外の発言は不可能で, 発言回数も全員 1 回のみという点です. つまり特別な定義が他のパズルに比べて一番少ない点にあります.
またこのパズルは囚人たちが協力するタイプですが, 囚人たちが協力しないタイプのパズルを研究するさい, 協力するタイプとは研究目的も変わることがあり, それによってその形式化も大きく異なります. 協力しないタイプのパズルを研究するうえで, どのように形式化するのかについては 1.4 節（44 ページ）で書いてみることにします.

Hardin-Taylor の帽子パズルの形式化

では Hardin-Taylor の帽子パズルのようなパズルを形式化していきます. ここでは『The mathematics of Coordinated Inference』[47] の 2 ページの形式化をベースにして個人的な考えから少し手を加えていきます.
まず囚人たち, 帽子に付ける色たちの範囲を定めるために集合を使います.

Definition 1.4.1（囚人と色の集合）．
集合 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{K}$ と書いたとき, A を**囚人集合**といい, A の要素を**囚人**（**prisoner**）または **agent** とよぶ. K を**色集合**といい, K の要素を**色**（**color**）とよぶ. ■

agent という呼び方は [47] にあったものです. 囚人の集合ならば A ではなく P とすべきだと思いますが, [47] の意図としては P はのちに predictor という重要な概念に使用するために, P という記号が先に予約されたのではと思います. 同様に色の集合ならば K ではなく C とすべきでしょうが, これも同じテキストではのちに coloring の集合という概念のために使用するからだと思います. しかし, 例えば素直に囚人集合に P, 色集合に C を使っている文献もあります. 例えば [40] などです.
補足すると色集合とは, 囚人に被せる帽子に付く色の候補の集合というべきかもしれません.
Puzzle **??**の場合は, 囚人が二人なので, 囚人 2 人を a, b で表現すると $A = \{a, b\}$ となります. 帽子には白黒の色がつくので, $K = \{$ 白, 黒 $\}$ となります.
ゲームに参加する囚人の人数, 使用する帽子の色の数は, それぞれ A と K の濃度で表現できます. ゲームに参加する囚人が 1 人のものは考える意義があまりありません. なぜならとくに追加要素などがなければ, その囚人は運でしか勝敗が決まらないからです. 同様にどれだけたくさん囚人がゲームに参加しても, 帽子につく色が 1 つだけなら（その色を答えるだけでいいので）ゲームが成立しません. なので, とくに断らなくともいつでも A, K は一元集合でないとしておきます. 同じことですが, いつでも A, K の濃度は 2 以上だとしておきます.

ゲームにおいて部屋に入ったあとに, 全囚人に色付きの帽子を 1 つずつ被せますが, この操作は A の各要素に対して K の中から 1 つずつ選ぶ操作に等しいです. これは A から K への写像を 1 つ与えることと同じことです. すなわち, 各帽子の被せ方 1 つ 1 つは, それぞれ何らかの写像 $f : A \to K$ で表現できます. それに対して呼び名を与えることにします.

Definition 1.4.2（coloring）．
A, K に対して写像 $f \colon A \to K$ を **coloring** とよぶ. あるゲームにおいて, 囚人たちが被せられる可能性のある帽子の被せ方, つまり coloring の集合を C で表す. ■

再度 Puzzle **??**を例に出します. 囚人の集合を $A = \{a, b\}$ と, 色の集合は白と黒の集合なので $K = \{\mathrm{W}, \mathrm{B}\}$ とおきます. このパズルでは全ての帽子の被せ方があり得るので, A から K への写像全ての集合が C になります. 集合 X, Y に対して X から Y への写像全ての集合 $\{ f \mid f \colon X \to Y \}$ を ${}^{X}Y$ で表すことがあります. なので Puzzle **??**の場合は, $C = {}^{A}K$ です. 一般的にどんな帽子パズルでも $C \subseteq {}^{A}K$ となりますが, Hardin と Taylor の帽子パズルではいつでも $C = {}^{A}K$ です. Puzzle **??**における coloring は 4 種類あります. その 4 種類の coloring を f_1, f_2, f_3, f_4 とおき, それぞれの coloring の対応規則を以下の表に定めます.

	f_1	f_2	f_3	f_4
a	B	B	W	W
b	B	W	B	W

Table 1.3: Puzzle **??**における coloring の一覧

たとえば f_1 は a, b 二人とも黒色を被せたものになります.

各囚人がどのように他の囚人が見えているかを表現するためには, 有向グラフという概念が便利です.

Definition 1.4.3（視野グラフ）．
囚人集合 A に対して, A 上の有向グラフ $\boldsymbol{V}$ がループを持たないとき, V を（A 上の）**視野グラフ**（**visibility graph**）とよぶ. $a, b \in A$ と A 上のなんらかの視野グラフに対して,

- V において a から b への辺が存在するとき, a は b の**帽子が見えている**, もしくは単に a は b が**見えている**といい, $a \overrightarrow{\boldsymbol{V}} b$ と表す.
- V において a が見えている囚人全体の集合を $V(a)$ で表す. つまり $V(a) = \{b \in A : a \overrightarrow{V} b\}$ であり, この $V(a)$ を囚人 a の**視野**と呼ぶ. ■

[47] では, $a\overrightarrow{V}b$ ではなく単に $a \to b$ や aVb などと書いていたりしますが, このノートでは, どの視野グラフで, どちらが見えているのかが分かりやすいと思ったので, 私が考えた $a\overrightarrow{V}b$ で統一します.

あるパズルにおいて囚人たちがどのように他の囚人を見えているかを定めるとは, その囚人集合上の視野グラフを 1 つ与えることに対応します. V を A 上の二項関係と捉えれば, ループを持たないとは二項関係 V が非反射的, つまり以下を満たすと表現できます.

$$\forall a \in A(\ \langle a, a\rangle \notin V\ ).$$

なぜ視野グラフがいつでもループが存在しないと仮定するかというと, もし $a\overrightarrow{a}$ な囚人 $a \in A$ がいたとすると, そんな囚人は自分自身の帽子が見えています. そんな囚人は必ず自身の色を言い当てることができるので, 正解数という観点では考える意味のない存在になってしまいます. よってどのようなパズルでももつ「全ての囚人は自分自身の帽子が見えない」という設定を表現するために, どんな視野グラフもループをもたないとします.

視野グラフを導入する最大の利点として考えられるのは, 帽子の見え方をグラフ理論の言葉で表現できるからだと思います. 例えば Puzzle **??**の帽子の見え方は「自分以外の帽子が全て見えている」と表現できます（2 人しかいないので自分以外全員といってもたった 1 人なので少し強めの主張に見えてしまいますが）. 見えているというのは視野グラフにおいて有向辺があるということでしたから, グラフ理論の言葉で言い換えると「その視野グラフにおける全ての頂点は他の頂点へ有向辺がある」となります. そしてあるグラフが「全ての頂点は他の頂点へ有向辺がある」を満たすとき, そんなグラフはグラフ理論では**完全**グラフであると呼ばれます. すなわち, Puzzle **??**は「視野グラフが完全グラフであるような帽子パズルである」と表現できます.
別の見方として Puzzle **??**には, $a \to b \to a$ という始点と終点が同じになっている path が存在します. このような path のことを **cycle** といい, 1 つの cycle からなるグラフのことを**閉路**グラフと呼ぶそうです（[**?**] を参考にしました）. なので Puzzle **??**は「視野グラフが閉路グラフであるような帽子パズルである」とも表現できます. もちろん頂点数（囚人数）が 2 のときに完全グラフと閉路グラフが同じ意味になるので, Puzzle **??**ではたまたまこのようになりました.
このほかにも例えばグラフ理論には**独立集合**という言葉があります. これはある有向グラフにおいて, 自分からの有向辺がない頂点の集合（ないし部分グラフ）のことを指します. つまりある帽子パズルの視野グラフにおける独立集合とは, そのゲームにおいてどの囚人の帽子も見えていない囚人たちの集合を意味します. 上の定義を借りると, ある視野グラフ V における独立集合 X とは $X = \{a \in A \mid V(a) = \emptyset\}$ と表現できます. Puzzle **??**では独立集合は存在しません. たとえば, このパズルで囚人 a を b の帽子が見えなくする（つまり何も見えなくなる）と, そんな視野グラフにおいて集合 $\{a\}$ は独立集合です.
その定義からいつでも $V(a) \subsetneq A \setminus \{a\}$ なので, どの囚人の視野 $V(a)$ も A の真部分集合になります.

Table 1.4 において, f_1 と f_3 は関数として異なりますが, 囚人 a から見て黒が見えていることに変わりにはなく, 囚人 a は黒が見えたとしても, 自分たちの帽子の様子がどちらの coloring になっているかは判定できません. こういった状況を 1 つ上の視野の定義を借りて定義します.

Definition 1.4.4（coloring の「見分けがつかない」関係）.
囚人集合 A と $a \in A$, A 上の視野グラフ V に対して, C 上の二項関係 $\equiv_a$ を

$$\begin{aligned} f \equiv_a g &\overset{\text{def}}{\iff} \forall b \in V(a)\big(\ f(b) = g(b)\ \big) \\ &\iff f{\restriction}V(a) = g{\restriction}V(a) \end{aligned}$$

と定義する. 2 つの coloring $f, g \in C$ に対して, $f \equiv_a g$ であるとき, f, g は a にとって**見分けがつかない**という. ■

$\restriction$ は関数の定義域の部分集合への制限を表す記号です.
Table 1.4 を参考にすると, Puzzle **??**では, $f_1 \equiv_a f_3$, $f_2 \equiv_a f_4$ であり, $f_1 \equiv_b f_2$, $f_3 \equiv_b f_4$ です. この定義はこのあとのそれぞれの囚人の戦略を定義するときに役立ちます.

Example **??**（**??**ページ））のように, 全ての囚人が同時に発言する様式のことを**同時発言型**と呼びます. Example **??**（**??**ページ）のように, 囚人の集合 A がなんらかの順序関係によって整列順序付けされているとき, その順序で最小な囚人から発言していく様式のことを**順次発言型**と呼びます. 例えに出しませんでしたが, ある決まった 1 人が先に発言しその次に残りの囚人が同

時に発言するような様式を 1 **人先行型**と呼んでいます．同時でない発言様式では各囚人は発言前に聞いた他の囚人の発言も自身の発言の参考にすることができます．発言様式は囚人数・色数・視野グラフといったこれまでの定義と絡めて形式化するのは難しいですが, 戦略を定義するさいには意識することになります．

ここまでの用語を用いれば Example **??**（**??**ページ）は 2 人 2 **色視野完全同時発言型パズル**, Example **??**（**??**ページ）は 5 人 2 **色前方完全順次発言型パズル**と（ちょっと長いですが）一言で言いあわらすことができます．このように呼称しているのは私だけですが, 個人的にはパズルの結果を体系的に分類するために便利だと考えています．

部屋に囚人が入れられ帽子を被せられているような状況だとします．ここから各囚人は見えている帽子の様子, つまり coloring から自身の色を推測して発言するわけですが, その作業は C から K への関数で表現できます．A, K, C, V を固定します．$a \in A$ の**戦略**（**(guessing)strategy**）G_a とは関数 $G_a : C \to K$ のことで

$$\forall f, g \in C\big(\ f \equiv_a g\ \to\ G_a(f) = G_a(g)\ \big)$$

を満足するとします．囚人 $a \in A$ にとって見分けがつかない 2 つの coloring に対して, エスパーでもない限り別々の色を発言することは出来ないので満たすべき条件はそれを表現しています．この戦略の定義は同時発言型パズルの囚人や, 順番がついていて 1 番最初に発言する囚人にしか当てはまりません．発言前に 1 人の発言, つまり色をヒントに使えるような囚人の戦略 G は $G : C \times K \to K$ で

$$\forall f, g \in C\ \forall k_1, k_2 \in K\big(\ (f \equiv_a g \land k_1 = k_2)\ \to\ G_a(\langle f, k_1\rangle) = G_a(\langle g, k_2\rangle)\ \big)$$

を満たすものと定義できます．同様にして発言前に n 人の発言を聞ける囚人の戦略も定義することができます．一般化されても聞いたヒントが同じで見え方が同じような coloring に対して, 同じ色を発言しなければいけないことは変わりません．囚人 a が戦略 G_a で $f \in C$ の下で**正解**しているとは $G_a(f) = f(a)$ で, **不正解**であるとは $G_a(f) \neq f(a)$ で表現できます．f とは A から K への関数でしたから $f(a)$ とは f において a が被っている帽子の色を表しています．

A, K, C, V と各囚人 $a \in A$ それぞれに戦略 G_a が固定されているとします．**predictor**（あえて和訳するならば**発言予測**とかだろうか）とは写像 $P : C \to C$ で $\forall a \in A\big(\ P(f)(a) = G_a(f)\ \big)$ を満たすものとします．なぜこれを予測と呼ぶのかですが, 各囚人 $a, b, c, \cdots$ の戦略 $G_a, G_b, G_c, \cdots$ が定まっていれば $f \in C$ が一つ与えられたとき各発言 $G_a(f)$, $G_b(f)$, $G_c(f)$, $\cdots$ が定まります．すると $\{\langle a, G_a(f)\rangle \mid a \in A\}$ は 1 つの coloring でもありますし, 囚人たちの発言の様相という見方もできます．なので perdictor とは「各囚人が△△な戦略で来て, この状況（coloring）ならば, こういう発言をするはず」という予測を形式化したものなります．このことから定義にある $\forall a \in A\big(\ P(f)(a) = G_a(f)\ \big)$ とは

$$\forall f \in C\big(\ P(f)\ =\ \{\langle a, G_a(f)\rangle \mid a \in A\}\ \big)$$

とも言えます．
predictor を C から C への写像という見方ではなく, 単に戦略の集合と捉えて $P = \{G_a \mid a \in A\}$ や $P = \{\langle a, G_a\rangle \mid a \in A\}$ と扱うこともあります．帽子パズルとは「△△なパズルに対して◇◇な predictor は存在するか？」と問われていると考えられます．この時点では説明するのは難しいですが, なにゆえ個々の戦略と, 戦略の集合に対して別の用語を与えているかというと, Example **??**（**??**ページ）の解答となる predictor は最初に発言する囚人以外の全員が（きちんと形式化すれば）同じ戦略をとっているので個々の戦略の区別が特になく, 個々の戦略 G_a に注目せず predictor で議論した方が証明が見やすくなります．しかし Example **??**（**??**ページ）の解答になる predictor のようにそれぞれの囚人が異なる戦略を取るならば, それぞれの戦略 G_a に注目する必要があります（しかしこの戦略も上手く形式化すれば同じように記述できたりします）．predictor と戦略 $G_a, G_b, G_c, \cdots$ は互いに依存しています．つまり「個々の戦略が定まっているならば発言も予測出来るだろうし, 発言が予測できるならば個々の戦略が特定出来る」ということです．よってこれから証明などにおいて「**任意に predictor をとる**」とは「各囚人の戦略を固定する」の言い換えとも思えます．視野グラフと同様に特徴的な predictor には名前が付いています．例えば example 1.1.1 で求められたようなどのように帽子を被せても必ず 1 人以上が正解するような predictor を **minimal predictor** と呼びます．predictor P が minimal であることは

$$\forall f \in C \exists a \in A\big(\ P(f)(a) = f(a)\ \big)$$

や

$$\forall f \in C\big(\ |\{a \in A \mid P(f)(a) = f(a)\}|\ \geq\ 1\ \big)$$

などとより具体的に書けます．次に example 1.1.2 で求められたどのように帽子を被せても不正解者が 1 人以下になるような predictor を **up to one errror predictor** と呼んでいます．その定義は同様に

$$\forall f \in C\big(\ |\{\ a \in A \mid P(f)(a) \neq f(a)\ \}|\ \leq\ 1\ \big)$$

と具体的に記述できます．

パズルに対する共通な定義はこれで終わりです．これで十分な理由は**??**節（**??**ページ）において, 各パズルの特徴, つまり違いは以下の 5 つであると述べたからです．

- 囚人数
- 色数
- 各囚人の帽子の見え方
- 発言方法
- どのように帽子を被せた場合でも要求される正解者数, もしくは不正解者数

ここまでの用語を用いれば Example **??**（**??**ページ）の結果は「2 人 2 色視野完全同時発言型パズルに minimal predictor が存在する」, Example **??**（**??**ページ）の結果は「5 人 2 色前方完全順次発言型パズルに up to one errror predictor が存在する」と言い換えられます．このようにパズルに関する数学的定理の基本的な形は「△△なパズルに対して◇◇な predictor は存在する（しない）」となります．

ここまで抽象的な定義だけだったので, 最後に example 1.1.1 を題材に形式化してみます．

囚人の集合を $A = \{a, b\}$ と, 色の集合は赤と白の集合なので $K = \{\mathrm{R}, \mathrm{W}\}$ とおきます．

4 種類の coloring を $f_1, f_2, f_3, f_4, : A \to K$ とおき, 各 coloring の対応規則を

Table 1.4:

	f_1	f_2	f_3	f_4
a	R	R	W	W
b	R	W	R	W

とします. つまり f_1 は二人とも赤色が被せられています．coloring の集合 C は $\{f_1, f_2, f_3, f_4, \}$ となります．

視野グラフ V は $V = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$ となっていて, それぞれの視野は $V(a) = \{b\}, V(b) = \{a\}$ です．すると f_1 と f_3 は a から見て両方 R なので見分けが付きません．つまり $f_1 \equiv_a f_3$ です．同様に $f_2 \equiv_a f_4$, $f_1 \equiv_b f_2$, $f_3 \equiv_b f_4$ です．

a,b がとれる戦略は 4 つずつあります．a の 4 つの戦略を G_a^1 , G_a^2 , G_a^3 , G_a^4 と, b の 4 つの戦略を G_b^1 , G_b^2 , G_b^3 , G_b^4 とおきます．戦略を単なる関数として表現してしまうと, その戦略の意味が分かりづらいので表にして意味を付け加えました．

Table 1.5:

	f_1, f_3	f_2, f_4	戦略の意味
G_a^1	R	R	いつでも赤を宣言
G_a^2	R	W	見えた色と同じ色を宣言
G_a^3	W	R	見えた色と違う色を宣言
G_a^4	W	W	いつでも白を宣言

Table 1.6:

	f_1, f_2	f_3, f_4	戦略の意味
G_b^1	R	R	いつでも赤を宣言
G_b^2	R	W	見えた色と同じ色を宣言
G_b^3	W	R	見えた色と違う色を宣言
G_b^4	W	W	いつでも白を宣言

$f_1 \equiv_a f_3$ なのでどの G_a も f_1, f_3 に対しては同じ色を返します．なので表でも他の戦略も同様にまとめて書いています．G_a^1 と f_1, f_3 の位置に R が書いてあるのは, f_1, f_3 に対して戦略 G_a^1 で a は R と発言することを表しています.
先の coloring の表と見比べれば, coloring f_1 の下で戦略 G_a^1 で $G_a^1(f_1) = \mathrm{R} = f_1(a)$ より a は正解しています．しかし $G_a^1(f_3) = \mathrm{R} \neq \mathrm{W} = f_3(a)$ より, f_3 の下で G_a^1 では a は不正解です.

このとき戦略の組み合わせは $4 \times 4 = 16$ パターンあるので predictor も 16 個あります.

Table 1.7:

	G_a^1	G_a^2	G_a^3	G_a^4
G_b^1	P_1	P_2	P_3	P_4
G_b^2	P_5	P_6	P_7	P_8
G_b^3	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
G_b^4	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}

表の見方ですが G_a^1 と G_b^1 の位置にある P_1 は囚人 a が戦略 G_a^1 を, 囚人 b が G_b^1 をとるような predicotr $\{G_a^1, G_b^1\}$ であることを表しています.

最後に各 predictor がそれぞれの coloring に対してどのような発言をするか, すなわち C から C への関数と考えたときにどのような coloring を返すかを表にします.

Table 1.8:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3	f_1	f_1	f_3	f_3	f_2	f_2	f_4	f_4	f_2	f_2	f_4	f_4
f_2	f_1	f_3	f_1	f_3	f_1	f_3	f_1	f_3	f_2	f_4	f_2	f_4	f_2	f_4	f_2	f_4
f_3	f_1	f_1	f_3	f_3	f_2	f_2	f_4	f_4	f_1	f_1	f_3	f_3	f_2	f_2	f_4	f_4
f_4	f_1	f_3	f_1	f_3	f_2	f_4	f_2	f_4	f_1	f_3	f_1	f_3	f_2	f_4	f_2	f_4

f_1 のとき predictor の値が f_1, f_2, f_3 のいずれかであれば一人でも正解者がいることになります．f_2 のときは f_1, f_2, f_4, f_3 のときは f_1, f_3, f_4, f_4 のときは f_2, f_3, f_4 です．するといかなる coloring でも一人以上正解者がいる, つまり minimal な predictor は P_7, P_{10} だけです．表 1.7 より P_7 は G_a^3, G_b^2, P_{10} は G_a^2, G_b^3 という戦略を組み合わせた predictor でした．各戦略の意味を表 1.5, 1.6 を参考にすれば, パズルの答えである「一人は見えた色と同じ色を, もう一人は見えた色と違う色を発言する」と一致します．

Hardin-Taylor の帽子パズルにない要素の形式化

非協力的な帽子パズルの形式化

1.5　帽子パズルの限界

第2章　有限な帽子パズル

2.1　Hardin-Taylor の帽子パズル

2.1.1　Smullyan の帽子パズル

第 3 章　無限な帽子パズル

3.1　概略と節案内

第 4 章　他のパズルとの関係

第5章　論文精読と文献調査

説明文です.

5.1　100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル

基本情報

タイトル：100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル

著者・作者：川辺 治之

年月日：2016 年 11 月 22 日, 出版元：日本評論社

所持 ?: 所持, 公式 HP または入手場所：ここ, Amazon の URL：ここ

メモ：[55] の和訳版.

タグ：Puzzle009, 文献番号：[59]

非数学的情報まとめ

この本は『One Hundred Prisoners and a Light Bulb』[55] の和訳です．動的認識論理を応用できる, 様々な論理パズルが扱われています．構成としては, まずいろいろなパズルが紹介され, 個々にその解答や発展問題などが続きます．最後にこれまでのパズルを振り返りつつ, 形式化しながら動的認識論理の入門事項の説明が始まります．単なるパズル本に見えて, 後半いきなり記号論理学が始めるのは, パズル本と思って買った人はビックリするかも.
この本の特徴はもう 1 つあって, どのパズルにも, その歴史がかなり詳細に調べられている点です．また和訳にあたって訳者の川辺氏がさらに帽子パズルについて調べた結果を訳者あとがきに載せています．これがあったからこそ日本にてどのようにパズルが知られていったかが調べやすくなりました.
著者の 2 人がオランダ人かどうかは分かりませんが, この本は最初オランダ語で書かれています．そのことは [55] の商品レビュー欄にも書かれています．そのタイトルは『Honderd Gevangenen en een Gloeilamp』[54] でした．これは訳すとそのままこの本のタイトルになります．そのあと英訳されたものが『One Hundred Prisoners and a Light Bulb』[55] であると思います．そしてそれを和訳したのがこの本であると思われます（時系列的に判断すると）.
著者や訳者についての情報をまとめておくと, Hans van Ditmarsch（ハンス・ファン・ディトマーシュ）氏は専門は多岐に渡るようで, 認識論理の研究もその 1 つだと思われます．それはロレーヌ計算機科学・応用研究所において認識論理に関する研究チームを率いていることからも判断できます．彼は博士号をオランダ北部の University of Groningen（フローニンゲン大学）[14] で取得しています．エルデシュ数 [9] は 2 らしい．彼の個人 HP はこちら [?] です.
もう 1 人の著者 Barteld Kooi（バーテルド・クーイ）氏は University of Groningen にてモンティホール問題について修士論文を書いています．おそらくその中でディトマーシュ氏とも知り合ったのかもしれない．彼の個人サイト [?] には彼との出会いについては書かれていないので, はっきりしたことは分からなかったです.
訳者の川辺 治之氏は個人サイトを持っていないと思われるので, 詳しいことは分からないが 1985 年に東京大学理学部数学科卒業, そして 2016 年時点では日本ユニシス株式会社上席研究員だったようです．日本ユニシス株式会社は金融系を主とするシステムインテグレータらしい（[32] によると）．つまり何か学位を持っているわけでないっぽい．しかし彼の Twitter アカウント（`https://twitter.com/p314159265`）には, 彼の出版歴へのリンクが書いてあり, かなりの量のパズルに関する本を和訳していることが分かります.

ちなみに訳者あとがきにて, 川辺氏は編集にあたってお世話になった人として, 日本評論社の飯野 玲氏を挙げているが, この方は数学セミナーにて帽子パズル記事（[68]）を書くときに私もお世話になった.
この本では主に 1 章「連続する自然数」, 3 章「泥んこの子供たち」, 7 章「和と積」を読みました. 3 章はまさに帽子パズルと同様のパズルですし, それ以外も帽子パズルと同じ要素を持っています. 各節では発展問題なども出題されますが, 1 章・7 章では帽子パズル的にアレンジされた問題も出されています.

数学的事実まとめ

得られた知見・考察

各節では, そのパズルの歴史も詳細に書かれています.
3 章「泥んこの子供たち」では, このパズルの起源について書かれていますが, この部分は主に [37] を参考にしていると思われます. ただ [37] の方がさらに詳しいので, 「泥んこの子供たち」パズルの起源を知るには, こちらの方がいいと思います. 訳者あとがきではさらに帽子パズルの歴史について追記されていますが, この部分で川辺氏はおそらく [72] を参考にしていると思われます. この部分で得た歴史に関する知識は 1.3.1 節（26 ページ）で活かされています.

第 II 部

帽子パズル本精読ノート

第 III 部

不完全性定理勉強会ノート

このノートは@souji04261 が作った, 学問の啓蒙について考える団体『裏難波大學』の「不完全性定理勉強会」という勉強会にて使用したものです. 勉強会の活動記録は Google スプレッドシートで管理していて, ここから見ることができます.
勉強会は数学科のゼミ形式で行い, 発表は基本的には souji が担当しました.
この勉強会の目標は不完全性定理の証明（の理解）であり, テキストは数理論理学の入門書である [41], またはその和訳である [62] をベースにしています. ただ時折他のテキストを参考にしたりしてます.
ノートの見方としては, 基本的には課題図書に沿って進めていますが, 節をスキップしたり, また行間を埋めたり, 数理論理学を学んだ立場から補足を入れたりしています. またそれに伴って, テキストにない定義や定理・補題, 記法の導入をしています. 例えば地の文にて「○○は明らか」とか書いてあった場合, ○○という主張に Proposition や Corollary のどちらかで名前を付けて証明したりしています. Theorem や Lemma は元のテキストでも使われているので, 自分でこの言葉を使うと著者が名付けた意味が薄れてしまうので使いません. 自分で証明したことに Proposition や Corollary のどちらかを付けるかは, [70] の 76 ページからを参考にしています. ただ自分で用意した Proposition や Corollary にも採番しているので, テキストにある定理の番号とはズレていることがあります. それだとテキストと一緒に勉強するのは大変だと思い, テキストにも載っている定義・定理などは, テキストのどの定義・定理に対応してるか, そして原著（E）・和訳（K）のどのページに載っているか記載しています. このノートを参考にする方は, 是非テキストを購入して見比べてもらえればと思います.
また基礎的な数学知識の補足は, 自分用の基礎知識学習まとめノートの第 IV 部（97 ページ）から引用しています.

第0章　集合についての予備知識

Notation 0.0.1（ジャーゴン (E:p1 2, K:p1 2)）.
数学用語になかで, このノートを通じて用いるものを 4 つ挙げる.

1. 定義や定理の主張の終わりを表す記号として ■ を, 証明の終わりを表す記号として □ を用いる. [1]

2. 「○○ならば××である」という含意を表す文章を「○○ $\Rightarrow$ ××」と略記する．[2] 逆向きの含意を表すのに $\Leftarrow$ を使うこともあります.
「○○であるのは, ××であるとき，かつそのときに限る」を「○○は××と同値である」と述べたり，記号 $\Leftrightarrow$ を, 「○○ $\Leftrightarrow$ ××」のように使ったりする．

3. 「したがって」という言葉の代わりに省略記号 $\therefore$ を, 「なぜなら」という言葉の代わりに省略記号 $\because$ を用いる. とくに証明中に $\because$ を用いる場合はぶら下げを使って, その理由部分を書く. [3]

4. 関係を表す記号に斜線を重ねることでその関係の否定を表すことがある. 例えば「$x = y$」の否定として「$x \neq y$」や「$x \in y$」の否定として「$x \notin y$」と書く. このテキストで新たに導入する記号, 例えば $\models$ に対しても同様に $\not\models$ のようにして, このルールを適用する. ■

Definition 0.0.2（集合 (E:p1 2, K:p2)）.
ものの集まりのことを **set**（集合）という.
ここでいう「もの」のことを **member**（要素）または **element**（元）と呼ぶ. この「もの」のことをオブジェクトとも呼んだりする. [4] オブジェクト x, y が同一のものであるとき, $x = y$ と表す.
もの t が集合 A の要素であることを $t \in A$ で表す.
集合 A, B に対して

どのオブジェクト t についても, $t \in A$ であれば $t \in B$ であり, かつ $t \in B$ であれば $t \in A$ である

（論理式で書けばたとえば $\forall t(\ t \in A \to t \in B\ \wedge\ t \in B \to t \in A\ )$ や, $\forall t(\ t \in A \Leftrightarrow t \in B\ )$ となる）をみたすとき, 集合 A, B は等しいと言い, $A = B$ で表す. ■

Definition 0.0.3（E:p2, K:p2）.
オブジェクト t と集合 A に対して, その要素が t か A に属する要素のみであるような集合を $A; t$ で表す.
のちに定義する和集合記号 $\cup$ を用いて定義しなおせば, $A; t \overset{\text{def}}{=} A \cup \{t\}$ となる. 「$\overset{\text{def}}{=}$」という表記に関してはすぐ下の Notation を参照のこと. [5] ■

Notation 0.0.4（定義するための記号）.
もの（数学的対象）を定義するさいに「$\overset{\text{def}}{=}$」, [6] （数学的な）述語を定義するさいに「$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$」を用いる. 使い方としてはこれら

[1] 原書でも和訳でも ⊣ となっていますが, 私が普段使わないので □ にさせてもらうことにしました.
[2] 「○○ $\Rightarrow$ ××」のような形の命題があったとき，○○の部分をこの命題の前件, ××の部分をこの命題の後件と読んだりします．原著でも和訳でも「... ならば... である」と前件も貢献も「...」で表現されていますが, 細かいことをいうと, これだと前件も後件も同じ主張が入るのかなと誘導しそうだと思い, 自分では○○と××を使ってみました．
[3] $\therefore$ は普段から使わないのでこのノートでも使わないと思います. それとは別に $\because$ は普段から積極的に使っているので, ここに載せました. また $\because$ を使ったときにどこからどこまでがその理由であるか, 理由が長ければ長いほど分かりにくくなるので, ぶら下げを使うことにしています. これの利点は証明を読む場合にその理由を読む必要がなければ, ぶら下げ部分全体を目で飛ばしてしまえばいいからです. これと同じで証明中の場合分けや, 同値証明を含意方向別に見やすくするため, つまり必要条件確認と十分条件確認を分けて見やすくするために, その各部分にぶら下げを使ったりしています.
[4] 個人的には「元」というと, その集合に演算が入っているようなイメージがあるので, 単なる集合の属するものに対しては「要素」を使っていきます.
[5] この $A; t$ という記法はここで初めて見た. どこまでメジャーなんだろうか.
[6] この記号はテキストでは導入されていないが, ほかの数学書でもよく使うし表現を簡略化するためにも積極的に使っていく. また「$\overset{\text{def}}{=}$」の代わりに「:=」はよく使われている印象がある. ただこれは証明内での一時的な定義にも使用している人もいるような気がする.

に記号の左側に変数などを利用した新たなものや述語を記述し，右側に日常言語で書かれたそれらの定義を書く．ここまでの定義を使用例を出すと

- $A;t \overset{\text{def}}{=}$ その要素が t か A に属する要素のみであるような集合（Definition 0.0.3）
- $A = B \overset{\text{def}}{\iff}$ どのオブジェクト t についても，$t \in A$ であれば $t \in B$ であり，かつ $t \in B$ であれば $t \in A$ である（Definition 0.0.2） ■

Proposition 0.0.5.
オブジェクト t と集合 A に対して，$t \in A \;\Leftrightarrow\; A;t = A$. ■

Proof 同値であることを示すので，$t \in A \;\Rightarrow\; A;t = A$ と $A;t = A \;\Rightarrow\; t \in A$ の 2 つを示す必要がある．

$t \in A \;\Rightarrow\; A;t = A$ の証明
$t \in A$ とすると，t はすでに A の要素であるため，$A;t$ のどの要素も A の要素であり t も含めてそれ以外の要素が含まれることがない．つまり $A;t = A$.

$A;t = A \;\Rightarrow\; t \in A$ の証明
$A;t = A$ とすると，集合 $A;t$ のどの要素も A の要素であるから，$A;t$ に属する t もまた A の要素でなくてはならない．つまり $t \in A$. □

Definition 0.0.6（空集合 (E:p2, K:p2 3)）.
要素を全く持たない集合を **empty set**（空集合）といい，$\emptyset$ で表す．集合 A が空であることは $A = \emptyset$ で表せ，（論理式で書けば例えば $\forall x(\ x \notin A\ )$ となる）空集合でない集合を **non empty** な（空でない）集合と呼ぶ. ■

Notation 0.0.7（E:p2, K:p3）.
自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ で，[7] 整数全体の集合 $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{Z}$ で，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す．[8] ■

Definition 0.0.8（外延的記法 (E:p2, K:p3)）.
オブジェクト $x, x_1, \ldots, x_n$ に対して，

1. x のみを要素にもつ集合を $\{x\}$ で表す．
2. $x_1, \ldots, x_n$ のみを要素にもつ集合を $\{x_1, \ldots, x_n\}$ で表す．
3. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を表し，$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ は整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を表す． ■

集合は要素の表現の順番を変えても同じ集合である．

Proposition 0.0.9（E:p2, K:p3）.
オブジェクト x, y に対して，$\{x, y\} = \{y, x\}$ である． ■

Proof 証明略. □

Definition 0.0.10（内包的記法 (E:p2, K:p3)）.
$\{\, x \mid \_x\_ \,\}$ と書いて $\_x\_$ をみたす全てのオブジェクトの集合を表す．[9] [10] ■

[7] ところで「$\mathbb{N}$ を自然数の集合とする」だと，自然数の集合というものを定義して，それに $\mathbb{N}$ という記号を割り当てたという定義の主張に見えますが，ここにあるように「自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す」だと，単に今後その記号を使うという記法の導入にも見える．なのでここでは定義ではなく記法としてみました．

[8] 実数全体集合は今後も必要なので導入しておいた．

[9] ここはテキストにならったのだけど，$\_x\_$ はかなり曖昧だと思いました．x に関する命題とか文と言ってしまえば，これから命題や文という単語を対象につけることがあるような当分野においては避けたい表現ではある（そして表現という単語も今後登場する………）．$\_x\_$ の代わりに $P(x)$ や $\varphi(x)$ などを使って，x を変数とする命題かのように表現することもありますが，それもこの場合は意図的に避けたのだろうと思います．避けた理由としては，今度は主張における変数とは何かを説明しなくてはならないからでしょうか．

[10] テキストでは「この書き方はめいっぱい柔軟に用いることにする」とあり，その使用例として $\{\, \langle m, n\rangle \mid m, n$ は $\mathbb{N}$ の要素で $m < n \,\}$ が挙げられています．論理記号を使って書けば $\{\, \langle m, n\rangle \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n \,\}$ となります．ここにおいて「柔軟」という言い方も曖昧だと思います．定義にある書き方になぞるならこの集合は $\{\, x \mid \exists m, n \in \mathbb{N}(\ x = \langle m, n\rangle \wedge m < n \,\}$ と書くべきでしょうか．ちなみに [61] では内包的記法における | の左に変数一文字ではなく，いくつかの変数を用いた表現が使われている記法を，内包的記法と区別して置換型記法と呼んでいたりします．たしかにこの 2 つの記法は同じではないので，区別する必要があると思われます（普通の数学書でそう区別はしないことは多いと思うが）．なのでここの柔軟さはかなり曖昧に思えました．

Definition 0.0.11（部分集合 (E:p2, K:p3)）．
集合 A, B に対して集合 A の要素がすべて B の要素でもあるとき, A は B の **subset**（部分集合）であるといい, $A \subseteq B$ で表す．（論理式で書けば $\forall x(x \in A \to x \in B)$ となる） ■

Proposition 0.0.12（(E:p2, K:p3)）．
$\emptyset$ はどんな集合に対しても部分集合となる． ■

Proof 証明略. □

Definition 0.0.13（べき集合 (E:p2, K:p3)）．
集合 A に対して A のすべての部分集合からなる集合を A の **power set**（べき集合）とよぶ, $\mathcal{P}(A)$ で表す．より正確には $\mathcal{P}(A) \overset{\text{def}}{=} \{\, X \mid X \subseteq A \,\}$. [11] ■

Example 0.0.14（E:p3, K:p4）．

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$
$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

■

Definition 0.0.15（和集合と共通部分 (E:p3, K:p4 5)）．
A, B を集合, $\mathcal{A}$ を全ての要素が集合であるような集合とする. [12] [13] さらに各自然数 n に対して集合 A_n が定まっているとする．

1. $A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A$ または $x \in B \,\}$（$= \{\, x \mid x \in A \lor x \in B \,\}$）とし, これを A と B の **union**（和集合）という．
2. $A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A$ かつ $x \in B \,\}$（$= \{\, x \mid x \in A \land x \in B \,\}$）とし, これを A と B の **intersection**（共通部分）という．
3. $A \cap B = \emptyset$ であるとき, A と B は **disjoint**（交わらない）という．$\mathcal{A}$ のどの 2 個の要素も交わらないとき, $\mathcal{A}$ は **pairwise disjoint**（互いに交わらない）という．
4. $\bigcup \mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid x$ は A のいずれかの要素に属する $\}$（$= \{\, x \mid \exists A(x \in A \land A \in \mathcal{A}) \,\}$）とし, これを $\mathcal{A}$ の **union**（和集合）という．
5. $\bigcap \mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid x$ は A のすべての要素に属する $\}$（$= \{\, x \mid \forall A(x \in A \land A \in \mathcal{A}) \,\}$）とし, これを $\mathcal{A}$ の **intersection**（共通部分）という．
6. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup \{\, A_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ とする．これを単に $\bigcup_n A_n$ と表すこともある. [14] ■

Example 0.0.16（E:p3, K:p4 5）．
t をオブジェクト, A, B を集合, $\mathcal{A} = \{\{0,1,5\}, \{1,6\}, \{1,5\}\}$ という集合族とする．

1. $A; t = A \cup \{t\}$.
2. $\bigcup \mathcal{A} = \{0,1,5,6\}$.
   $\bigcap \mathcal{A} = \{1\}$.
3. $A \cup B = \bigcup \{A, B\}$.
4. $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$. ■

Definition 0.0.17（順序対 (E:p3 4, K:p5)）．
オブジェクト $x, y, z, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ に対して

---

[11] テキストでは $\mathcal{P}A$ だが個人的には $\mathcal{P}(A)$ が好きなのでこちらを使っていくことにしました．
[12] テキストではいきなりこんな集合が登場したけど, なんで「集合族」のような語を用意しなかったのだろうか．
[13] テキストでは集合でも集合族でも単なる A で表現していた．個人的には集合族には記号の衝突が起こらない（つまり理論を展開するさいに必須な記号と被らない）かぎり, 集合族には筆記体（カリグラフィーとどう違うのか分からないけれども………）を使うのが好み．
[14] これは添え字付き集合族の和集合ともいえるものだけど, なぜ添え字付き集合族の共通部分は定義しなかったのだろう（単に今後使わないだけ？）．

1. $\langle x, y\rangle \overset{\text{def}}{=} \{\{x\},\{x,y\}\}$ とし，これを x と y の **ordered pair**（順序対）という．[15] 順序対 $\langle x, y\rangle$ における x, y をこの順序対の成分といい，とくに x を第一成分，y を第二成分と呼んだりする．[16]

2. $\langle x, y, z\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$ とし，より一般的に $n > 1$ に対して $\langle x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle$ と帰納的に定義する．

3. とくに $\langle x\rangle = x$ と定義する．[17] ■

Definition 0.0.18（有限列 (E:p4, K:p5)）．
集合 A に対して

1. S が A の要素からなる **finite sequence**（有限列）（あるいは **string**（列））であるとは，ある正の整数 n について $S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ で各 x_i が A の要素であるときとする．（論理式で書くと $\exists n \in \mathbb{Z}(\ n > 0\ \wedge\ x_1, \ldots, x_n \in A\ \wedge\ S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle\ )$）
   またこのときの n を有限列 A の**長さ**とよぶ．[18]

2. A の要素からなる有限列 $S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ に対し，$1 \le k \le m \le n$ な k, m でもって $\langle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m\rangle$ な形の有限列を S の **segment**（区間）という．とくに $k = 1$ な区間を S の **initial segment**（始切片）といい，$m \ne n$ な始切片を S の **proper initial segment**（真の始切片）という． ■

Proposition 0.0.19（E:p4, K:p6）．
オブジェクト $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ に対して $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ ならば，$1 \le i \le n$ な各 i について $x_i = y_i$． ■

Proof　示すべきことを論理式で書くと

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(\ \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\ (\ \langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle\ \rightarrow\ \forall i(\ 1 \le i \le n \rightarrow x_i = y_i\ )\ )\ )$$

となる．よって $n \in \mathbb{N}$ について数学的帰納法を用いて証明する．

（Basis）
その定義より $\langle x\rangle = x$ だから，$\langle x_1\rangle = \langle y_1\rangle$ ならば $x_1 = y_1$ である．

（Induction step）
n のときに成立しているとする．任意に取った $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ に対して，$\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\rangle$ だったとする．一般的な順序 n 個組の定義から

$$\begin{aligned}\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle &= \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle,\\ \langle y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\rangle &= \langle\langle y_1, \ldots, y_n\rangle, y_{n+1}\rangle\end{aligned}$$

であり，今順序対の定義から第一成分・第二成分同士が等しいので，

$$\begin{aligned}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle &= \langle y_1, \ldots, y_n\rangle,\\ x_{n+1} &= y_{n+1}\end{aligned}$$

となる．今に任意に取られた n 個の要素たちについては

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle\ \rightarrow\ \forall i(\ 1 \le i \le n \rightarrow x_i = y_i\ )$$

が成立しているので，$x_{n+1} = y_{n+1}$ とまとめると，$\forall i(\ 1 \le i \le n+1 \rightarrow x_i = y_i\ )$ となるので，$n+1$ の場合も OK． □

[15] これは順序対の Kuratowski 流の定義と言われています．他の流儀などは Wikipedia『順序対』[3] も参考に．
[16] 定義されていなかった言葉遣いだったのでなんとなく定義しておいた．
[17] これの妥当性として，すぐ後ろで $\langle x, y\rangle$ とは x, y とオブジェクトが並んだ列と見なすので，$\langle x\rangle$ とは $x1$ つが並んでいる初項のみの列と思えば $\langle x\rangle = x$ であるほうが自然に見える．また Kuratowski 流の定義によれば $\langle x, x\rangle = \{\{x\}\}$ となりこれと単なる x とを区別しやすくなる．
[18] テキストにおいて写像における有限列の定義について言及しているが，これは例えば長さ n の A の有限列 S は $\{1, \ldots, n\}$ から A への写像として定義できる．

Lemma 0.0.20（E:p4 LEMMA 0A, K:p6 補題 0A）.
$\langle x_1,\dots,x_m\rangle=\langle y_1,\dots,y_m,\dots,y_{m+k}\rangle$ ならば $x_1=\langle y_1,\dots,y_{k+1}\rangle$. ■

Proof 示すべきことを論理式で書けば

$$\forall k\in\mathbb{N}\,\big(\,\forall m\in\mathbb{N}\forall x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{m+k}\big(\,\langle x_1,\dots,x_m\rangle=\langle y_1,\dots,y_m,\dots,y_{m+k}\rangle\ \rightarrow\ x_1=\langle y_1,\dots,y_{k+1}\rangle\,\big)\,\big)$$

となる．任意に $k\in\mathbb{N}$ をとる．このあとの主張に対して $m\in\mathbb{N}$ についての数学的帰納法を用いる．

（Basis）
$m=1$ を仮定に代入すると $\langle x_1\rangle=\langle y_1,y_2,\dots,y_{1+k}\rangle$ となり, 定義より $\langle x_1\rangle=x_1$ から成立.

（Induction step）
m のときに成立しているとする．$\langle x_1,\dots,x_{m+1}\rangle=\langle y_1,\dots,y_m,\dots,y_{m+1+k}\rangle$ を仮定する．一般順序組の定義から

$$\begin{aligned}\langle x_1,\dots,x_{m+1}\rangle &= \langle\langle x_1,\dots,x_m\rangle,x_{m+1}\rangle,\\ \langle y_1,\dots,y_m,\dots,y_{m+1+k}\rangle &= \langle\langle y_1,\dots,y_{m+k}\rangle,x_{m+k+1}\rangle\end{aligned}$$

となっている．つまり各第一成分が等しいということなので

$$\langle x_1,\dots,x_m\rangle = \langle y_1,\dots,y_{m+k}\rangle$$

が分かり, m のときに成立していたことから $x_1=\langle y_1,\dots,y_{k+1}\rangle$ であることが分かる． □

テキストでは例えとして「たとえば, A は集合で, A のどの要素も他の要素からなる有限列とは一致しないと仮定します．そのとき, $\langle x_1,\dots,x_m\rangle=\langle y_1,\dots,y_n\rangle$ であって, x_i や y_i それぞれが A に属する場合, 上の補題によって $m=n$ です．さらに, 結果的に, それぞれの i について $x_i=y_i$ となります.」とありますが個人的に分かりづらかったので具体例を挙げる．

Example 0.0.21.
集合 A を $A=\{0,1,\langle 2,3\rangle\}$ とすると, この A の要素で（集合として）等しくなるようなどんな 2 つの n 個組を作っても, それが等しい限りはその長さも構成成分の順番も等しくなる．
逆に $A=\{0,1,\langle 0,1\rangle,\langle 0,1,0\rangle\}$ として, A の有限列 S_1,S_2 を

$$\begin{aligned}S_1 &= \langle\langle 0,1,0\rangle,1\rangle,\\ S_2 &= \langle\langle 0,1\rangle,0,1\rangle\end{aligned}$$

とすると, この 2 つは（集合として）$S_1=S_2$ ではあるが, S_1 の長さは 2 で S_2 の長さは 3, よって長さは一致せず, ゆえに構成成分も一致しない． ■

ここで有限列の長さの定義の曖昧さが少し影響がでてくる．たとえば Example 0.0.21 の S_1 は $\langle\langle 0,1,0\rangle,1\rangle=\langle\langle 0,1\rangle,0,1\rangle$ でもあるから, これの長さとして 2 か 3 のどちらを採用すればよいか混乱する．テキストに書いてある注意事項のように, 写像で定義すれば問題は解決できる．関数の定義の先取りにはなってしまうが, たとえば S_1 を $S_1\colon\{1,2\}\to A$ として, $S_1(1)=\langle 0,1,0\rangle$, $S_1(2)=1$ とすればよい．すると S_1 と S_2 はそもそも定義域が違う別の関数となるので混乱がなくなる．しかしながら 1 章以降は $\{0,1,\langle 0,1\rangle,\langle 0,1,0\rangle\}$ のような集合から有限列を構成したりはしない．つまり $\{0,1,\langle 2,3\rangle\}$ のような「どの要素も他の要素からなる有限列とは一致しない」集合を扱うときには, 長さの定義に曖昧さがでることはないので, 特に長さの定義を意識する必要はないということである．最初にこれの注意に該当することは Theorem 0.0.36（67 ページ）や, Definition 1.1.1（76 ページ）下の注意事項 7 があてはまる．

Definition 0.0.22（直積集合 (E:p4, K:p6)）.
集合 A,B と $n>1$ な $n\in\mathbb{N}$ に対し

1. $A\times B\overset{\mathrm{def}}{=}\{\,\langle a,b\rangle\mid a\in A$ かつ $b\in B\,\}$ とし, これを A と B の **Cartesian product**（直積集合）という．
2. $A^n\overset{\mathrm{def}}{=}A^{n-1}\times A$ と帰納的に定義する．たとえば $A^3=(A\times A)\times A$ である． ■

Definition 0.0.23（関係 (E:p4 5, K:p6 7)）.
集合 A, B, R と $n > 0$ な $n \in \mathbb{N}$ に対し

1. R のすべての要素が順序対であるとき, R を **relation**（関係）という.
2. 関係 R に対して $\mathrm{dom}(R) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid$ ある y について $\langle x, y\rangle \in R \,\}$ とし, これを関係 R の **domain**（定義域）という.
   さらに $\mathrm{ran}(R) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, y \mid$ ある x について $\langle x, y\rangle \in R \,\}$ とし, これを関係 R の **range**（値域）という.
   さらに $\mathrm{fld}(R) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$ とし, これを関係 R の **field**（領域）という. [19] [20]
3. $R \subseteq A^n$ であるとき, そんな R を A 上の n 項関係という.
4. $B \subseteq A$ かつ R が A 上の n 項関係であるとき, $R \cap B^n$ を R の B への **restriction**（制限）という. ■

Example 0.0.24（E:p4 5, K:p6 7）.
集合 $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{N}^2$ に対し

1. $R_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ とおくと, R_1 は 0 から 3 までの数の間の大小関係となる. さらに $\mathrm{dom}(R) = \{0,1,2\}$, $\mathrm{ran}(R) = \{1,2,3\}$, $\mathrm{fld}(R) = \{0,1,2,3\}$ となる.
2. $R_2 = \{\, \langle m, n\rangle \mid m < n \,\}$ とおくと, R_2 は $\mathbb{N}$ 上の大小関係となり, $B = \{0,1,2,3\}$ とすれば $R_1 = R_2 \cap B^2$ となるから R_1 は R_2 の B への制限である. ■

Definition 0.0.25（写像 (E:p5, K:p7 8)）.
集合 A, B と関係 F に対して

1. F が「$\mathrm{dom}(F)$ のそれぞれの要素 x について, $\langle x, y\rangle \in F$ なる y がただひとつ存在する」（論理式で書くと $\forall x \in \mathrm{dom}(F) \exists! y(\langle x, y\rangle \in F)$）をみたすとき, F は **function**（写像）であるという. [21] このとき $x \in \mathrm{dom}(F)$ に対して一意的に存在している y のことを $F(x)$ で表し, F の x における **value**（値）という.
2. 写像 F が $\mathrm{dom}(F) = A$ かつ $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$ をみたすとき, F は A を B に**写す**といい, $F\colon A \to B$ で表す. [22]
3. $F\colon A \to B$ であるとき, $\mathrm{ran}(F) = B$ をみたすとき, F は A から B への **surjection**（全射）[23] であるといい, $F\colon A \xrightarrow{\text{onto}} B$ で表す. [24]
   「$\mathrm{ran}(F)$ のそれぞれの要素 y について, $\langle x, y\rangle \in F$ をみたす x がただひとつ存在する」（論旨式で書くと $\forall y \in \mathrm{ran}(F) \exists! x(\langle x, y\rangle \in F)$）[25] をみたすとき, F は A から B への **injection**（単射）[26] であるといい, $F\colon A \xrightarrow{\text{1-1}} B$ で表す. [27]
   全射かつ単射な写像を **bijection**（全単射）といい, [28] $F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ で表す. [29]
4. オブジェクト x, y とその順序対 $\langle x, y\rangle$ と写像 F に対して, $\langle x, y\rangle \in \mathrm{dom}(F)$ であるとき $F(\langle x, y\rangle)$ を単に $F(x, y)$ で表す. より一般的に $F(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ を $F(x_1, \ldots, x_n)$ で表す. [30]

[19] テキストでは $\mathrm{dom}(R), \mathrm{ran}(R), \mathrm{fld}(R)$ ではなく $\mathrm{dom}\, R, \mathrm{ran}\, R, \mathrm{fld}\, R$ と「()」が付いていないですが, 個人的な好みから「()」をつけることにします.
[20] $\mathrm{fld}(R)$ というものはここで初めて見た.
[21] 個人的には map は写像, function は関数と訳すのが好みですが, ここはテキストとその和訳に合わせて function を写像と訳すことにします.
[22] これを見たときもしかしたら $\mathrm{ran}(R)$ の部分集合関係に合わせて $\mathrm{dom}(F) \subseteq A$ としなくてはいいのかと, 疑問に思う人もいるかもしれません. もしそうすると定義域に対応要素のない要素が存在することを許してしまいます. それを許したうえで $\mathrm{dom}(F) = A$ なる写像に**全域写像**と名付ける流儀もあります. たとえば [61] では $\mathrm{dom}(F) \subseteq A$ かつ $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$ なるものを「A から B への部分写像」, F による x の値が存在しないとき「$F(x)$ は未定義」といい, 部分写像が $\mathrm{dom}(F) = A$ を満たした場合にそれを全域写像もしくは単に写像と呼んでいます.
[23] このテキストでは「B 全体へ写す」と表現しています. それならまだしも「上への写像」という言い方もありますが, これは何が「上」なのか個人的にイメージしづらく使わないようにしています.
[24] これはテキストでは導入されていなかったけれど, あると便利なので導入しました.
[25] ここでの単射の定義は初見では違和感がありました. なぜなら普段私は $F \subseteq A \times B$ かつ $\forall a \in A \exists! b \in B(\langle a, b\rangle \in F)$ をみたすものを, A から B への写像とよび $F\colon A \to B$ と表し, $\mathrm{ran}(F) = B$ としていたためです. ここでの定義ならこれでよいと思われるが, 個人的にはやはり「$\forall x_1, x_2, y(\, \langle x_1, y\rangle \in F \wedge \langle x_2, y\rangle \in F \to x_1 = x_2\,)$」もっと分かりやすくして「$\forall x_1, x_2(\, F(x_1) = F(x_2) \to x_1 = x_2\,)$」か, 「$\to$」部分で対偶をとった「$\forall x_1, x_2(\, x_1 \neq x_2 \to F(x_1) \neq F(x_2)\,)$」の方が好みです.
[26] このテキストでは「F が 1 対 1 である」と表現している. しかし全単射に対してこの言い方を使うテキストもあるし, 個人的には全単射の方が 1 対 1 なるイメージを持っているためここでは「単射」を使うことにしました.
[27] これも上に同様.
[28] テキストでは定義されていなかったので用意しておいた.
[29] 同上.
[30] つまり普段 2 変数関数で使う記法を導入したことになるのだろう.

5. $F = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$ であるとき, F を A 上の **identity function**（恒等写像）といい, この F を id_A で表す. [31] ■

Definition 0.0.26（演算 (E:p5, K:p8)）.
集合 A, B と関係 f, g に対して

1. $f\colon A^n \to A$ であるとき f を A 上の $\boldsymbol{n}$**-ary operation**（$\boldsymbol{n}$ **項演算**）であるという.

2. A 上の n 項演算 f と $B \subseteq A$ な集合 B に対して, $g = f \cap (B^n \times A)$ をみたす g を f の B への **restriction**（制限）という. [32]

3. A 上の n 項演算 f に対して, 集合 $B \subseteq A$ が f について閉じているとは, どの $b_1, \ldots, b_n \in B$ についても $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ をみたす（論理式で書くと $\forall b_1, \ldots, b_n \in B\big(f(b_1, \ldots, b_n) \in B \big)$）ときをいう. ■

Example 0.0.27（E:p5, K:p8）.
$S_1\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ と $S_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して

1. S_1 が任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $S_1(m, n) = m + n$ をみたすとすると, S_1 は $\mathbb{N}$ 上の加法という $\mathbb{N}$ 上の 2 項演算となる.

2. S_2 が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $S_2(n) = n + 1$ をみたすとすると, S_2 は $\mathbb{N}$ 上の直後の自然数を与えるという $\mathbb{N}$ 上の 1 項（単項）演算となる. [33]

3. $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対し $p(r_1 + r_2) = r_1 + r_2$ をみたすとすると, P は $\mathbb{R}$ 上の加法という $\mathbb{R}$ 上の 2 項演算となり, 1. の S_1 は P の $\mathbb{N}$ への制限, つまり $S_1 = P \cap \mathbb{N}^3$ となっている. ■

Example 0.0.28（E:p5, K:p8）.
集合 A, B に対して

1. f を A 上の n 項演算, $B \subseteq A$ とし, g を f の B への制限とする. g が B 上の n 項演算となることと, B が f について閉じていることは同値である.

2. A 上の恒等写像 id_A は（何もしない・作用しないという）A 上の単項演算である. ■

Proof 1. のみ示す. 主張「g が B 上の n 項演算となること」を (1),「B が f について閉じている」を (2) とおいて, (1) $\Rightarrow$ (2) と (2) $\Rightarrow$ (1) の 2 つを示す.

(1) $\Rightarrow$ (2)
f の B への制限 g が今 B 上の n 項演算であることから, $\mathrm{dom}(g) = B^n$ かつ $\mathrm{ran}(g) \subseteq B$ をみたしている, もっというと $g = f \cap B^{n+1} = f \cap (B^n \times B)$ をみたしている, これはつまり (2) をみたしていることになる.

(2) $\Rightarrow$ (1)
B が f について閉じている, つまり $g = f \cap B^{n+1} = f \cap (B^n \times B)$ となっているので, $\mathrm{dom}(g) = B^n$ かつ $\mathrm{ran}(g) \subseteq B$ をみたしている, これはつまり (1) をみたしていることになる. □

普段閉じている演算ばかりを見ているので, 逆に閉じてない演算とはどんな例があるかという議論があったのでここにまとめる.
$\mathbb{R}$ 上の 2 項演算 $+, -, \times$ にて $\mathbb{R}$ は閉じている. 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ とすると, $\mathbb{Q}$ 上のこれらの演算は $\mathbb{R}$ の演算の $\mathbb{Q}$ への制限となる. そして $\mathbb{Q}$ についても, そして $\mathbb{Z}$ についても閉じている. しかし演算 $-$ は $\mathbb{N}$ については閉じていない.
$\div$ についてはそもそもどう定義するか（0 で割ることをどう避けるか）によって議論が変わりそうであるが, どのように定義したとしても $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ については閉じているが, $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ については閉じていないであろう.

Definition 0.0.29（同値関係と順序関係 (E:p5 6, K:p8 9)）.
集合 A と関係 R に対して

[31] テキストでは Id と書いているが「A 上の」というからにはせめて Id_A と書く方が好き. そして Id より id が好きなのでこのように定義しました.
[32] この g のことを $f{\restriction}B$ や $f|_B$ で表すことがあります. 個人的には $f{\restriction}B$ が好き（初めて見た記法がこれだったからという理由で）.
[33] これはよく**後者関数**と呼ばれています.

1. R が A 上で **reflexive**（反射的）とは, 任意の $x \in A$ について $\langle x, x\rangle \in R$ であるこという.
2. R が **symmetric**（対称的）とは, 任意の x, y に対して $\langle x, y\rangle \in R$ ならば $\langle y, x\rangle \in R$ であることという.
3. R が **transitive**（推移的）とは, 任意の x, y, z に対して $\langle x, y\rangle \in R$ かつ $\langle y, z\rangle \in R$ ならば $\langle x, z\rangle \in R$ であることという.
4. R が A 上で **trichotomy**（三分律）をみたすとは, 任意の x, y に対して $\langle x, y\rangle \in R,\ x = y,\ \langle y, x\rangle \in R$ のいずれか 1 つをみたすことという.
5. R が A 上の **equivalence relation**（同値関係）であるとは, R が A 上の 2 項演算でかつ A 上で反射的・対称的・推移的であるときをいう.
6. R が A 上の **ordering relation**（順序関係）であるとは, R が A 上の 2 項演算でかつ推移的であり A 上で三分律をみたすときをいう. ■

Definition 0.0.30（同値類 (E:p6, K:p9)）.
集合 A 上の同値関係 R と $x \in A$ に対して $[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \mid \langle x, y\rangle \in R \,\}$ とし, これを x の **equivalence class**（同値類）という.
さらに集合 $\{\, [x] \mid x \in A \,\}$ を $A \backslash R$ で表し, 集合 A の同値関係 R による **quotient set**（商集合）という. [34] ■

Proposition 0.0.31（E:p6, K:p9）.
集合 A 上の同値関係 R に対して, A の各要素の同値類全体は A の分割となる. ■

Proof $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が A の分割であるとは, $\mathcal{A}$ が互いに素でかつ $\bigcup \mathcal{A} = A$ をみたすこととし, これを $\{\, [x] \mid x \in A \,\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, つまり先に定義した $A \backslash R$ に対してこれを示す.

$\mathcal{A}$ が互いに素であること

任意に $X \neq Y$ な $X, Y \in A \backslash R$ をとると, それぞれに対し $x, y \in A$ が存在して $X = [x],\ Y = [y]$ となっている.
$[x] \cap [y] = \emptyset$ であることを示すため, $z \in [x] \cap [y]$ なる z が存在したとする. $z \in [x]$ より $\langle x, z\rangle \in R$, 同様に $\langle y, z\rangle \in R$.
$\langle y, z\rangle \in R$ と R が A 上の同値関係より対称的であることから $\langle z, y\rangle \in R$. さらに $\langle x, z\rangle \in R$ と R が推移的であることから $\langle x, y\rangle \in R$.
ここで $\forall a, b \in A(\ \langle a, b\rangle \in R\ \rightarrow\ [a] = [b]\ )$ である. （この証明には必要ないが $\forall a, b \in A(\ [a] = [b]\ \rightarrow\ \langle a, b\rangle \in R\ )$, つまり $\forall a, b \in A(\ \langle a, b\rangle \in R\ \Leftrightarrow\ [a] = [b]\ )$ も示せる）

> $\because$ 任意に $a, b \in A$ をとり $\langle a, b\rangle \in$ とする. $[a] \subseteq [b]$ を示すためさらに任意に $c \in [a]$ をとる. $\langle a, b\rangle \in R,\ \langle a, c\rangle \in R$ より R が対称的かつ推移的なので $\langle b, c\rangle \in R$, つまり $c \in [b]$. 同様にして $[b] \subseteq [a]$ であることもわかる. つまり $[a] = [b]$.

よって $\langle x, y\rangle \in R$ から $[x] = [y]$ であるが, これは仮定の $[x] \neq [y]$ に矛盾.

$\bigcup A \backslash R = A$ であること

$\bigcup A \backslash R \subseteq A$ であることは明らか. $A \subseteq \bigcup A \backslash R$ を示すため任意に $x \in A$ をとる. R が A 上反射的であることから $x \in [x]$, つまり $[x] \neq \emptyset$ で, そして $[x] \subseteq A \backslash R$ より $x \in \bigcup A \backslash R$. □

ここからはテキスト通り, 集合の濃度の話に移る（可算までしかでてこないが）.

Notation 0.0.32（E:p6, K:p9）.
自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ で表す[35] ■

ここに「個々の自然数そのものを集合を使って定義する方法もあります」とあって, テキストにある通り, それに触れている○○節を見ると, ZF 公理系からの数学展開でよくやる Neumann 流の順序数の定義の仕方を使うものだった.

[34] テキストでは定義してなかったですが, すぐ下の補題を示すときに記法として欲しかったので定義しておきました.
[35] テキストではなぜか二度目の記法の導入でした.

Definition 0.0.33（E:p6, K:p9）.
集合 A に対して

1. 集合 A が **finite**（有限）であるとは, ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と A から $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 写像 f があって, f が全単射になっていることをいう（論理式で書くと $\exists n \in \mathbb{N} \exists f(\ f\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \{0,1,\ldots,n-1\}\ )$）.
2. 集合 A が **infinite**（無限）であるとは, 有限でないときをいう. つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して A から $\{0,1,\ldots,n-1\}$ への全単射写像が存在しないことをいう. 言い換えればどんな A から $\{0,1,\ldots,n-1\}$ の写像も全単射にならないともいえる. [36]
3. 集合 A が **at most countable**（高々可算）であるとは, A から $\mathbb{N}$ への単射写像が存在するこという.
4. 集合 A が **countable**（可算）であるとは, A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在するこという. [37] ■

Proposition 0.0.34（E:p6, K:p9）.
有限集合は高々可算. ■

Proof A を有限集合とすると, その定義より A に対し存在する $n \in \mathbb{N}$ と $f\colon A \to \{0,1,\ldots,n-1\}$ をそれぞれ固定します. $f_{\mathbb{N}}\colon A \to \mathbb{N}$ を $f_{\mathbb{N}}(a) = f(a)$ で定義すれば, $f_{\mathbb{N}}$ は確かに A から $\mathbb{N}$ への写像であり, f が単射であることから $f_{\mathbb{N}}$ が単射であることも明らかである. □

Proposition 0.0.35（E:p6, K:p9）.
高々可算な無限集合 A に対して A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在する. ■

Proof 高々可算な無限集合 A に対して, その定義から存在する単射写像 $f\colon A \to \mathbb{N}$ を 1 つ固定する. f は全射でない, つまり $\mathrm{ran}(f) \neq \mathbb{N}$ とする. $n_i \in \mathbb{N}$ を $\mathrm{ran}(f)$ の中での i 番目に小さい数, つまり $n_0 = \min \mathrm{ran}(f)$, $n_{i+1} = \min(\ \mathrm{ran}(f) \setminus \{n_0,\ldots,n_i\}\ )$ と帰納的に定義する. ここで A が無限であることと f が単射であることから, $\mathrm{ran}(f)$ は無限集合なので, n_i をとる操作が有限で止まったりはしないことに注意.
そして $\mathrm{ran}(f) = \{\, n_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ である. $g\colon \mathbb{N} \to A$ を $g(i) = f^{-1}(n_i)$ で定めると, g はその作り方から全単射であり, $f'\colon A \to \mathbb{N}$ を $f'(a) = g^{-1}(a)$ で定めると, これもその作り方から A から $\mathbb{N}$ への全単射である. [38] □

Theorem 0.0.36（E:p6 THEOREM 0B, K:p10 定理 0B）.
A を高々可算集合とするとき, A の要素からなる有限列全体の集合も高々可算. ■

Proof $\mathcal{S}$ を A の要素からなる有限列全体の集合とすると, 有限列の定義 Definition 0.0.18（62 ページ）から $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{n+1}$ となる. A が高々可算集合であるから, A から $\mathbb{N}$ への単射 f を 1 つ固定する. $\mathcal{S}$ から $\mathbb{N}$ への写像 g を, $s = \langle a_0,\ldots,a_m\rangle \in \mathcal{S}$ に対して

$$g(s) \;=\; \min\{\, 2^{f(b_0)+1} \cdot 3^{f(b_1)+1} \ldots p_n^{f(b_n)+1} \mid s = \langle b_0,\ldots,b_n\rangle \wedge \langle b_0,\ldots,b_n\rangle \in \mathcal{S} \,\}$$

で定める. ここで p_i は i 番目の素数を表しているとする.
ここで $g'\colon \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ を, $g'(\langle a_0,\ldots,a_m\rangle) = 2^{f(a_0)+1} \cdot 3^{f(a_1)+1} \ldots p_m^{f(a_m)+1}$ と定めると, g はこの g' を用いて, $g(s) = \min\{\, g'(s') \mid s' \in \mathcal{S} \wedge s' = s \,\}$ や, $g(s) = \min g'[\{\, s' \mid s' \in \mathcal{S} \wedge s' = s \,\}]$ と書くことができる.

そして g は well-defined である（これについてのさらなる議論は証明後に）.

[36] よくよく見てみれば「無限」であるということはキチンと定義されていなかったので追加しました. 一般的には無限とは有限でないという定義なので（それゆえに説明する必要がなかったのかも）, ここでいう有限の定義の否定をその定義とすることにしました.
[37] テキストではここでいう「高々可算」を「可算」と呼んでいます. つまり「高々可算」と「可算」を区別してません. 個人的には高々可算は便利な言葉だと思っているのと, 他のノートとの整合性をとるためにも高々可算と可算は区別しておこうと思います. ちなみに高々可算の「高々」は数学特有の言葉として説明しているものもあります. もし「高々有限」をこれと同じように定義すると, $\exists n \in \mathbb{N} \exists f(\ f\colon A \xrightarrow{1\text{-}1} \{0,1,\ldots,n-1\}\ )$ となるでしょう. なので個別に「高々○○」を定義することも可能でしょうし, 「高々」は特有の言葉遣いとして説明する方法もありそうです. 「高々」を説明しているものとしては, 例えば [4] や [70] の 37 ページなどです.
[38] テキストの口語的な説明の方が分かりやすいとは思ったけれど, あえて厳密に書くとこんな感じなのかなと.

∵ $\mathcal{S}$ のような集合は, Example 0.0.21（63 ページ）の 2 つ目の A のように $s_1 = \langle a_0, \ldots, a_m \rangle, s_2 = \langle b_0, \ldots, b_n \rangle \in \mathcal{S}$ で, その長さが異なる, つまり $m \neq m$ であるにも関わらず,（集合として）$s_1 = s_2$ となる場合がある. そのような場合でも $g(s_1) = g(s_2)$ となることを確かめればよい. そしてそんな s_1, s_2 に対しても

$$\begin{aligned} g(s_1) &= \min\{\, g'(s) \mid s \in \mathcal{S} \land s = s_1 \,\} \\ &= \min\{\, g'(s) \mid s \in \mathcal{S} \land s = s_2 \,\} \\ &= g(s_2) \end{aligned}$$

となって, $g(s_1) = g(s_2)$ である.

写像 g は単射である.

∵ 任意に $s_1 \neq s_2$ なる $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ をとり, $g(s_1) = g(s_2)$ だったとする. $g(s_1) = g(s_2)$ より $\min g'[\{\, s \in \mathcal{S} \mid s = s_1 \,\}] = \min g'[\{\, s \in \mathcal{S} \mid s = s_2 \,\}]$ だから, $n \in g'[\{\, s \in \mathcal{S} \mid s = s_1 \,\}] \cap g'[\{\, s \in S \mid s = s_2 \,\}]$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在することになる. そんな n に対して $g(s) = n$ かつ $s = s_1$ かつ $s = s_2$ なる $s \in \mathcal{S}$ が存在することになる. するとこの s を介して $s_1 = s_2$ となるが, これは矛盾.

よってそんな単射写像 g の存在から S は高々可算である. □

証明に関するさらなる議論として, テキストでは $g(s) = g(\langle a_0, \ldots, a_m \rangle) = 2^{f(a_0)+1} \cdot 3^{f(a_1)+1} \ldots p_m^{f(a_m)+1}$ と定義してしまうと, つまり g' を g の定義としておくと,（こちらの方が各有限列を 1 つの自然数に対応させようと, 素数を使ってコーディングしようとしている意図が伝わって分かりやすいものの）, g は well-defined にならないことが書いてある. どのような場合に well-defined にならないか具体的な例を挙げてみると, well-defined 性を確かめている部分にも書いてある通り, $A = \{0, 1, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle\}$ とし, その要素からなる以下のような 2 つの有限列 s_1, s_2 を,

$$\begin{aligned} s_1 &= \langle \langle 0, 1, 0 \rangle, 1 \rangle, \\ s_2 &= \langle \langle 0, 1 \rangle, 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

としてみる. すると 2 つの列は見かけ（の長さ）は違うものの, Example 0.0.21（63 ページ）で説明した通り, 集合としては同じものである. そして $\mathbb{N}$ への単射を

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\langle 0, 1 \rangle) = 2,\ f(\langle 0, 1, 0 \rangle) = 3$$

のように定めてみれば,

$$\begin{aligned} g(s_1) &= 2^{f(\langle 0,1,0 \rangle)+1} 3^{f(1)+1} &= 2^4 3^2, \\ g(s_2) &= 2^{f(\langle 0,1 \rangle)+1} 3^{f(0)+1} 5^{f(1)+1} &= 2^3 3^1 5^2 \end{aligned}$$

となり $g(s_1) \neq g(s_2)$ となるが, 集合としては $s_1 = s_2$ であるため, $g(s_1) = g(s_2)$ とならなくてはならず, 口語的には写る先が 1 つに定まらないとも言えて, これでは g が写像としては矛盾している.

Example 0.0.21（63 ページ）のすぐ下でも書いたが, 有限列は写像でもって定義することもできる. 例えば上の例にだした s_1, s_2 も, $s_1 \colon \{0, 1\} \to A, s_2 \colon \{0, 1, 2\} \to A$ で,

$$\begin{aligned} s_1(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle,\ s_1(1) = 1, \\ s_2(0) = \langle 0, 1 \rangle,\ s_2(1) = 0,\ s_2(2) = 1 \end{aligned}$$

と定めれば,（写像として）$s_1 \neq s_2$ である. すると写像 g を, $s \colon \{0, \ldots, m\} \to A$ に対し $s(i) = a$ なる $a \in A$ を a_i と表すことにすれば,

$$g(s) = 2^{s^{-1}(a_0)+1} \cdot 3^{s^{-1}(a_1)+1} \ldots p_m^{s^{-1}(a_m)+1}$$

と定めれば, [39] $g(s_1) \neq g(s_2)$ となって写像としても well-defined となり, 上のように min を使う必要もなくなる. つまり写像で定義すれば順序対の入れ子構造で定義したときのように, 長さが違うがモノとして異なるような例は, A がどんな集合でも生まれることはない. なぜなら写像で定義した場合の「列の長さ」とは定義域の要素の数のことであり, つまり長さが違えば, それはつまり写像として定義域が異なることになって, その対応規則がどうあれ一致することはないからである.

そうは言い切ったものの, そのあとで本当にそうなのか疑問に思ってしまった. なぜなら写像も順序対の集合であり, そうなると順序対を集合で書き直せば, 集合だけを用いて書き直すことができる（順序対よりも構造がかなり複雑にはなっていると思うが）. そうなると長さが異なるが集合として一致する順序対の例があるように, 定義域が異なる（つまり含まれる順序対の数が一致しない）が, 集合としては一致することはあるのだろうか？今後の課題としてまとめておく.

今後の課題

対応規則（の数や内容）が異なる（写像としては異なるように見える）が, 要素になっている順序対も全て集合に書き直したとき, 集合として一致するような写像の組み合わせは存在するか？

ここから **tree**（木）についての話題が始まるが, 今後どれほど大事なのか分からないので, 一旦飛ばすことにする.

続いて選択公理の話題が入る. テキストでは「問題となる定理を可算な言語の場合に制限することで, 選択公理の使用はたいてい回避できます」とある.

Definition 0.0.37（E:p7 , K:p12）.
集合族 $\mathcal{C}$ が **chain**（鎖）であるとは, 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $X \subseteq Y$ か $Y \subseteq X$ のいずれかが成立することをいう. ■

Lemma 0.0.38（E:p7 ZORN'S LEMMA, K:p12 ツォルンの補題）.
集合族 $\mathcal{A}$ が

$$\text{任意の } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ が鎖ならば } \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$$

を満たすとき, $\mathcal{A}$ には超集合関係にて極大な要素 A が存在する, つまり A はどの $X \in \mathcal{A}$ に対しても $A \subsetneq X$ となることはない. ■

基数

Definition 0.0.39（E:p8 , K:p12）.
集合 A, B に対して A から B への全単射写像が存在するとき, A と B は **equinumerous**（対等）であるといい, $A \sim B$ で表す. ■

Proposition 0.0.40（E:p8 , K:p12）.
$\mathbb{N}$ と整数全体の集合は対等である. ■

Proposition 0.0.41（E:p8 , K:p12）.
任意の集合 A, B, C に対して以下の 3 つが成立する.

1. $A \sim A$.
2. $A \sim B$ ならば $B \sim A$.
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$. ■

テキストでは単純に「対等である関係が反射的, 対称的かつ推移的であることは容易に確かめられる」と書いてある. この記述は少し雑である. 前の定義を見ると「関係○○が反射的」であるというのは本来ある集合 A を用いて「関係○○が集合 A 上で反射的」という風に, 何の集合上でかと一緒に語られるべき述語である. 対称的と推移的は「どの集合上かは」記述する必要は

[39] テキストでは導入されていないけれど, s^{-1} は s の逆写像を表しています.

ない．もちろん何を証明すればよいかが伝わるかどうかで見えれば, 伝わるとは思う．なので雑というのは, この「反射的」という言葉遣いに対しての感想であるが, なぜ何故書かなかったかも推測することはできる．かなり細かいことをいえば, オブジェクトな「関係」とメタな「関係」が公理的集合論には存在する．実際に存在を保証されている集合 A を用いて $R \subseteq A^2$ となっているような R は, 集合でもあるからオブジェクトな「関係」である．一方この対応関係 $\sim$ というのは, 同値関係と同じような論理式を満たしはするものの, 上の R における集合 A に相当するものが存在しない．なぜなら対等関係とはある意味「全ての集合の集合」上の同値関係であるが, 公理的集合論において「全ての集合の集合」とは集合にはならない（こういうのは真のクラスと呼んだりする）．なのでそのような説明を避けるために, ある意味雑に書くしかなかったのでは推測する．

Definition 0.0.42（E:p8，K:p13）．
集合 A に対して $\mathrm{card}(A)$ を, 任意の集合 B に対して

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \leftrightarrow A \sim B$$

を満たすものとし, [40] これを A の **cardninal numger**（**基数**）または **cardinality**（**濃度**）という． ■

ここの基数の定義は（数学的な）基数を始めて見る人にとってはかなり分かりにくいのではないだろうか？また逆に一度でも具体的なモノとして基数を定義したことがあるならば, それこそここに書いてあるように順序数を厳密に定義した上で, その中で特別な順序数として基数を定めたことがあるならば, この定義は本当に自分が知っている基数と同じものなのか不安に思うかもしれない．著者自身はこの定義で問題ないと書いてある．ならば, この定義のやり方で納得できるよう, もう少し補足してみる．この定義の最大の不満点は基数というモノを, 具体的に構成することなく, その性質でもって定義していることだと思われる．テキストにある通り, よくよく考えれば, 私たちは 2 が「何か」は具体的に知らないのに, 2 のその性質「1 の次の数である」とか, 関係する事実「$1+1$ の演算結果」といったものから捉えて, 上手に 2 を利用できている．「数」はある種極端な例としても, そのようなことは数以上に抽象的な数学の議論の中でも行われている．私が思い浮かぶ例としては「順序対」である．このテキストでは x と y の順序対 $\langle x, y\rangle$ を, $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ でもって具体的に（集合でもって）定義している．しかし, テキストによっては

$$\forall x'\ y'\ (\ \langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle\ \rightarrow\ x = x' \wedge y = y'\ )$$

をみたす組 $\langle x, y\rangle$ のこととして, つまり順序対が満たしてほしい性質でもって定義しているものもある（例えば [61] の 50 ページ, [69] の 14 ページ, [64] の 75 ページなど）．単純に平面の 1 点の座標の表現としてとか, 直積集合の要素としてとかで順序対を必要としている場合は, これで十分である．著者の専門分野的に基数の理解が浅いということはありえないので, このテキストにおける基数の扱いも, 先の [69] での順序対と同じようなもので, 著者なりの基数についての必要最低限がこの定義だと思われる．

Definition 0.0.43（E:p8，K:p13）．
集合 A, B に対して, ある $B' \subseteq B$ があって $A \sim B'$ であるとき, A **dominated by** B（A は B **でおさえられている**）といい, $A \preceq B$ で表す． ■

Proposition 0.0.44（E:p8，K:p13）．
$A \preceq B$ であるとき, A から B への単射写像が存在する． ■

Definition 0.0.45（E:p8，K:p14）．
集合 A, B に対して $A \preceq B$ であるとき, $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ であるとする． [41] ■

原著では上記の定義は「$\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$」で, 和訳では「$A \leqslant B$」になっている．これはおそらくこの部分だけでなく, 原著は前者で統一されており, 和訳は後者で統一されている．これはなぜかと和訳者である嘉田氏に聞いたところ, 版元の仕様らしい．つまり嘉田氏のソースファイルでは「$\leq$」となっているが, 印刷物として出力したときに「$\leqslant$」となるようになっているようだ．今後このノートでは原著にあわせて（特に不都合もなさそうなので）$\leq$ で統一することにする．

[40] テキストでは「$\mathrm{card}(A)$」は「$\mathrm{card}\, A$」と書いていますが, 手書きでの見やすさも考慮して, また普段の自分の記法ともあわせて, このノートでも「$\mathrm{card}(A)$」と書くことにしました．

[41] 欧米では「大きい（小さい）かまたは等しい」という記号を書くとき, イコールを表す部分が「$\leqq$」のように二重線になっているものは使わないと聞いたことがあります．Wikipedia にもそう書いてあったり（例えば [24] とか）．また同じ二重線でないものとして「$\leqslant$」も使われるようです．これは使用者の好みに寄るのかな．

Proposition 0.0.46（E:p9 , K:p14）.
任意の集合 A, B, C に対して以下の 2 つが成立する.

1. $A \preceq A$.
2. $A \preceq B$ かつ $B \preceq C$ ならば $A \preceq C$. ■

Proposition 0.0.41（69 ページ）と同様ここもテキストでは,「「おさえられる」という関係は反射的かつ推移的」と書いてある. しかし Proposition 0.0.41（69 ページ）下の注意事項が同じように当てはまることに注意.

Proposition 0.0.47（E:p9 , K:p14）.
$A \preceq \mathbb{N}$ であることと, A が高々可算であることは同値. ■

Theorem 0.0.48（E:p9 SCHÖDER-BERNSTEIN THEOREM, K:p14 シュレーダー・ベルンシュタイン（Schröder-Bernstein）の定理）.
集合 A, B と, 基数 κ, λ に対して,

(a) $A \preceq B$ かつ $B \preceq A$ ならば $A \sim B$.

(b) $\kappa \leq \lambda$ かつ $\lambda \leq \kappa$ ならば $\kappa = \lambda$. ■

Theorem 0.0.49（E:p9 THEOREM 0C, K:p14 定理 0C）.
集合 A, B と, 基数 κ, λ に対して,

(a) $A \preceq B$ または $B \preceq A$ の少なくとも一方が成り立つ.

(b) $\kappa \leq \lambda$ または $\lambda \leq \kappa$ の少なくとも一方が成り立つ. ■

Notation 0.0.50（E:p9, K:p14）.
$\mathrm{card}(\mathbb{N})$ を $\aleph_0$ で, $\mathrm{card}(\mathbb{R})$ を $2^{\aleph_0}$ で表す. ■

Definition 0.0.51（E:p9, K:p15）.
集合 A, B とその基数 $\mathrm{card}(A) = \kappa, \mathrm{card}(B) = \lambda$ に対して, その演算 $+, \cdot$ を以下のように定める.

1. $A \cap B = \emptyset$ のとき, $\kappa + \lambda \ = \ \mathrm{card}(A \cup B)$.
2. $\kappa \cdot \lambda \ = \ \mathrm{card}(A \times B)$. ■

Theorem 0.0.52（E:p9, K:p15）.
選択公理を仮定する. どんな無限集合も可算な無限部分集合をもつ. ■

Proof 任意に無限集合をとり, それを A とおく. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ とおくと, $\mathcal{A}$ は空でない集合の空でない集合族である. よって選択公理より $\mathcal{A}$ には選択関数 $f \colon \mathcal{A} \to A$ が存在する, つまり $\forall X \in \mathcal{A}(\ f(X) \in X\ )$ をみたす f が存在するので, そんな f を 1 つとって固定する. $a_i \in A$ を帰納的に以下のように定める.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(A), \\
a_{i+1} &= f(\ A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_i\}\ )
\end{aligned}
$$

$A' = \{\, a_i \mid i \in \mathbb{N}\,\}$ とおくと, A が無限集合であることから A' も無限集合であり, 明らかに A' は可算な A の部分集合である. □

Theorem 0.0.53（E:p9 CARDINAL ARITHMETIC THEOREM, K:p15 基数算術の定理）.
$\kappa \leq \lambda$ かつ λ が無限な基数 κ, λ に対して,

1. $\kappa + \lambda \ = \ \lambda$.

2. $\kappa \neq 0$ ならば $\kappa \cdot \lambda \;=\; \lambda$.

3. κ が無限ならば $\aleph_0 \cdot \kappa \;=\; \kappa$. ■

Theorem 0.0.54（E:p10 THEOREM 0D, K:p15 定理 0D）.
無限集合 A に対して, A の要素からなる有限列全体の集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{n+1}$ の濃度は $\mathrm{card}(A)$ と同じ. ■

Proof 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{card}(A^{n+1}) = \mathrm{card}(A)$ である.

$\because$ これは $n \in \mathbb{N}$ についての数学的帰納法から示せる.

（Basis）$A^{0+1} = A$ より明らか.

（Induction step）
ある $n \in \mathbb{N}$ について $\mathrm{card}(A^{n+1}) = \mathrm{card}(A)$ が成立しているとする. その定義から $A^{(n+1)+1} = A^{n+1} \times A$ であり, Definition 0.0.51（71 ページ）から

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A^{n+1} \times A) &= \mathrm{card}(A^{n+1}) \cdot \mathrm{card}(A)\\ &= \mathrm{card}(A) \cdot \mathrm{card}(A^{n+1})\end{aligned}$$

Theorem 0.0.53（71 ページ）における κ, λ を $\kappa = \mathrm{card}(A), \lambda = \mathrm{card}(A^{n+1})$ とすると,

$$= \mathrm{card}\, A^{n+1} \;=\; \mathrm{card}(A)$$

よって $\mathrm{card}(A^{(n+1)+1}) = \mathrm{card}(A)$ である.

すると $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{n+1} = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$ より,

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{n+1}) &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(A^2) + \mathrm{card}(A^3) + \ldots\\ &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(A) + \ldots\\ &= \aleph_0 \cdot \mathrm{card}(A)\end{aligned}$$

そしてもう一度 Theorem 0.0.53（71 ページ）より

$$= \mathrm{card}(A).$$ □

Example 0.0.55（E:p10, K:p16）.
実数における代数数的数全体の集合の濃度は $\aleph_0$ である. ■

普段研究対象とするようなものでないので, ここで代数的数について定義しておく（定義は [18] を参考にした）.

Definition 0.0.56.
複素数 α が **algebraic number**（**代数的数**）であるとは, ある整数係数 n 次多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$（$a_n \neq 0$ かつどの a_i も整数）があって, α が $f(x)$ の根になっている, つまり $f(\alpha) = 0$ をみたすことをいう. 代数的数でない複素数は **transcendental number**（**超越数**）とよぶ. ■

ただテキストでは実数の中での複素数にだけ注目しているように思われるので, 実数の中での代数的数のみに注目して, そんな数の集合が可算であることを示す.

<u>**Proof**</u>　実数かつ代数的数全ての集合を $\mathcal{A}$ とおく．この $\mathcal{A}$ が可算であることを示す．ある $n \in \mathbb{N}$ に対して, 全ての n 次多項式の全ての実数根を集めた集合を A_n とおく．つまり,

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) = a_0(\ f(\alpha) = 0\ )\,\} = \mathbb{Z}, \\ A_1 &= \{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) = a_1 x + a_0(\ f(\alpha) = 0\ )\,\}, \\ &\ \ \vdots \\ A_n &= \{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0(\ f(\alpha) = 0\ )\,\}, \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

と定めると, $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)$ となる．そして各 A_n は可算集合である．

$\because$ n 次多項式は $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$（ただし $a_n \neq 0$）の組み合わせの数だけ存在する．つまり n 次多項式全体の集合の濃度は $\mathrm{card}(\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-1})$ であり, これまでの定理を用いて計算を進めると

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-1}) &= \mathrm{card}(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cdot \mathrm{card}(\mathbb{Z}^{n-1}) \\ &= \mathrm{card}(\mathbb{Z}) \cdot \mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \end{aligned}$$

であり, つまり n 次多項式はどれも可算無限に存在する．

そして各 n 次多項式の実数根は高々n 個であり, つまり $\mathrm{card}(A_n) \leq \aleph_0^n = \aleph_0$．よって $\mathrm{card}(A_n) = \aleph_0$ である．すると $\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \aleph_0 \cdot \mathrm{card}(A_n) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ より, $\mathcal{A}$ も可算集合である． □

第1章　文論理

1.0　形式言語についての, 非形式的な注意

とくにテキストの内容に対してコメントすることはありませんでした（そもそも節名通り、厳密な数学的議論を展開する箇所でもないわけで）。

1.1　文論理の言語

この章は文論理が対象である．ではそもそも sentential logic（**文論理**）とはなにものだろうか？ さらに何を学べば文論理を学んだことになるのか？またこれ以降に登場する一階述語論理（もっといえば他の論理と）とは何が違うのか・何が共通しているのか？そもそも論理を対象にした学問は何をやるべきなのだろうか？これには私はまだ自分の言葉で答えることはできない．よって私が好きな本である [75] から引用する．論理学がどのような学問なのかという問いにはこの本の 1 章にて多くの言葉を用いて答えている．続く 2 章にて 1 章で説明したような学問である（現代）論理学がなぜ人工言語を用いるのかが最初から書いてある．全てを引用すると長くなるので大事な部分だけ 17 ページから引用するならば（句読点はこちらに合わせたが, 強調は引用元まま）

> 「**自然言語では命題の論理形式が文法形式におおい隠されてしまうことがある**．したがって, 自然言語をそのまま使って論理学を展開することは得策ではない．これに対し, 記号論言語は, 命題内容に気を取られずにその形式を浮かび上がらせるのに好都合だ．なぜなら, 記号言語はこれから作るのだから, 我々の目的に応じて好きにつくってよいからだ．自然言語を使って我々はいろいろなことをやっている．その様々な用途のうち, 「**論証の妥当性とは何かを明確にする**」という目的だけに役立るように思い切って単純化した言語をつくってしまえばいいわけだ．

さらにこの本によれば「現代論理学とは記号論理学ともよばれるくらいにやたらと記号を使う」とある．すなわち「○○論理」という対象があったとき, それが記号論理学の対象ならば, 上記にあるようにその論理を検証するのに最適な人工言語を用意するところから始まる．また二つの全く別な論理という対象があったとき, この論理たちの最大の違いはその言語にある（と思われる）．だからこそ上記の本でも「命題論理（このテキストでいう文論理のこと）」という言葉が初めて導入されるのは, 一階述語論理という二つ目の人工言語が登場し, それとの違いを比較できるようになってからだ．
改めて先の問いに答えると「そもそも文論理とはなにものだろうか？」には他の論理と比較することで初めて答えれるようになると思われる．もちろんこの時点で上記の本を参考にして「単純命題の内部構造は問わない論理」と（単純命題とは何かを説明したうえで）答えることもできるが, これはやはりそうでない論理と比較して初めてより分かりやすい答えに近づくと思われる．続いて「何を学べば文論理を学んだことになるのか？」に答えると, まずは文論理に適した言語を定め, さらにその言語について構文論・意味論を定める．記号論理学もしくは数理論理学ならばそこからさらに演繹体系を定める．そして構文論・意味論・演繹体系それぞれに関する数学的な定理や, それらを横断するような（たとえば完全性定理など）数学的な定理を証明していくことになる．このステップを踏めば文論理について学んだことになると思われる．そして最後の問い「これ以降に登場する一階述語論理（もっといえば他の論理と）とは何が違うのか・何が共通しているのか？」に答えるならば, まず共通しているのは 1 つ上の問いの答えにあるステップの踏み方であると思われる．もちろん言語によって出てくる定理の数や内容は異なるであろうが, テキストの進め方は順番を除いて共通している（と個人的経験から推測する）．そして異なる点は先にも述べた通り, 議論の最初に用意する人工言語になると思われる．

学ぶ動機などについてもう一度再確認した理由は, 例えばこのテキストでは文論理から一階述語論理へと進むが, その際に用意する言語には共通の名前（たとえば整式など）を用いることがある．つまり整式といったときどの論理の（ないし言語の）整式なのか意識する必要があると思われた．そして例えば「これは文論理の整式だ」と書くときに, 「ではその文論理とは？」と聞

かれたときに答える用意も必要に思われた．もちろん自分できちんと答えたわけでもないし, 明確に答えたわけでもないが, 勉強会の参加者へ道しるべは示せたと思う．数理論理学の数学的な分析・議論が目的の 1 つである当勉強会においていささか寄り道に思われる話題ではあったものの,（数学的な議論ではないにしろ）参加者へ向けて答える必要があったのでここに書いておいた．

ではここから定義する言語についての定義や定理にはすべて「文論理の」という言葉がつくことを注意しておく．

まずはこれから使う記号という単語を定義する．

Definition 1.1.1（記号 (E:p13 14, K:p20)）.
互いに区別できる無限個のオブジェクトの列を用意し固定する．その列の成分となっているオブジェクトをそれぞれ **symbol**（記号）とよぶ．
これらの記号のどれもが他の記号の有限な長さの列とは一致しないと仮定したうえで, 列の第一成分から以下の表の通りに記号に名前をつける．

記号	名称	注意
(	**left parenthesis**（左括弧）	区切り記号
)	**right parenthesis**（右括弧）	区切り記号
$\neg$	**negation symbol**（否定記号）	日本語でいう「〜でない」
$\wedge$	**conjunction symbol**（連言記号）	日本語でいう「かつ」
$\vee$	**disjunction symbol**（選言記号）	日本語でいう「(包含的な）または」
$\to$	**conditional symbol**（条件記号）	日本語でいう「○○ならば××」
$\leftrightarrow$	**biconditional symbol**（双条件記号）	日本でいう「○○のとき, かつ, そのときに限り××
A_1	1 個目の **sentence symbol**（文記号）	
A_2	2 個目の **sentence symbol**（文記号）	
$\dots$		
A_n	n 個目の **sentence symbol**（文記号）	
$\dots$		

Table 1.1: (E:p14 TABLE II, K:p21 表 II)

■

ここでテキストにあるものも含めていくつか注意を述べる．順番や内容はテキストとは異なっている．

1. Table 1.2 の「(」や「)」における注意事項「区切り文字」について
   これはこの記号を区切り文字として使うということである．区切り文字とは日常言語における「,」や「、」のことで, 文の読みやすさや文意が伝わりやすくするために用いる文字のことである．すなわちこの文論理の言語においては読みやすくするために「(」や「)」を使うということである．

2. Table 1.2 の「∨」の注意事項における「包含的な」について
   これは日本語における「または」にも排他的なものと包含的なものと二種類あり, この場合の「または」はそのうちの包含的なものの方であるという意味である．排他的な「または」とは, つなげられた 2 つの主張が同時に満たされることのない「または」の用法である．たとえば「このランチにはコーヒーまたは紅茶がつきます」といったときの「または」を聞いてコーヒーと紅茶両方を注文する人はいない．つまり注文者はこの「または」を聞いてどちらか 1 つだけしかもらえないことを理解しているのである．一方銀行 ATM での通帳とカードのどちらでもできる操作（たとえば入金とか）において「通帳またはカードを入れてください」といわれたとき, 片方だけでも両方入れても同じように動作する（もちろん記帳するかどうかの結果は違いはあるかもしれないけれど）．よってこのときの「または」は包含的な方の「または」で

ある. [1]

3. いくつかの記号の総称について
   Table 1.2 の中の 5 つの記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ を **sentential connective symbol（文結合記号）**とよぶ.

   とくに $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ たちを **2 項結合記号**とよぶ. [2]

   さらに括弧記号 2 つを総称して単に**括弧記号**とよぶ. [3]

   括弧記号と文結合記号をあわせて **sentential connective symbol（論理記号）**とよぶ.

   文記号は **parameter（パラメータ）**（または **nonlogivcal symbol（非論理記号）**）ともよぶ.

   また文記号 A_n を **n 番目の命題記号**とよぶこともある. 個人的にはこのテキストのように文論理ではなく命題論理の方がよくみてきたものではあるが, このテキストに従い命題記号という単語は使わず文記号とよぶことにする. [4]

4. 「互いに区別できる」部分について
   ここでの「互いに区別できる」とは数学用語ではなく日常言語的な意味であろう. ではどのような意味で用いられているかと考えると, 「それらの記号の運用者によって区別ができる」と意味であると思われる. この運用者とは今まさに紙とペンを持って記号を書きながら勉強している私たちのことかもしれないし, 文論理の言語をプログラミング言語のように実装されたマシン（とそれを処理するアプリケーション）のことを指している. [5]

5. オブジェクトについて
   このオブジェクトとはテキストにある通りなんでもよく文論理の展開には無限個あるならばなんでもよいと思われる. [6]
   文論理の展開とは今テキストでやっていることを「実装する」ということを意味している. 実装するとはすなわちこの文論理の記号たちとそれの使い方などを, プログラミング言語を用いて別のプログラミング言語を作るように実装するといったことを意味する. べつにプログラミング言語同士の話だけでなく例えば「ZFC から自然数論を展開可能」ということを簡単に証明するときに, 集合（のように人間にとって思われる）という ZFC におけるオブジェクトを使ってペアノの公理を満たす集合たちとその上の演算や述語を作って自然数（と人間にとって思われている）を構成する作業も, その作業が似ていることから「ZFC における自然数論の実装」ともよべるだろう.
   自然数を使った文論理の簡単な（雑な）実装方法を挙げると, 自然数列 $0, 1, 2, 3, \ldots$ を用意して, $0, 1$ に括弧記号, 2 から 6 に論理記号, 7 以降にパラメータを割り振る. [7] すると記号列 $\langle \neg, A_2 \rangle$ は対応した自然数が並んだ $\langle 2, 9 \rangle$ となる. つまり人にとっては単なる数字の羅列ではあるが, その解釈は私たちにとって目的としている文論理の記号列と思うわけである.
   こういうことは世の中にありふれたことだと思われる. 現代のコンピュータは $0, 1$ のバイナリ情報しかやりとりできない（と思うことができる）わけで, [8] 画像ファイルも音楽ファイルも $0, 1$ が大量に書き込まれたテキストファイルでしかなく, どのアプリで開くかによって出力が変わってくる（だからこそどのアプリで開くべきかを教えてくれる拡張子に存在意義

[1] とはいえ昔とある銀行 ATM に同じように案内されて通帳とカード両方を入れてみたら「最初からやりなおしてください」と言われたことがあったり. つまりこの機械はおそらくいまでは珍しい？排他的な ATM だった.

[2] テキストでは定義していない言葉でしたが, なんとなく意味はわかるし不要かとも思ったけどもあえて定義しておきました. また $\neg$ は 1 項結合記号とよぶべきかもですが, そんな記号は 1 つしかないため, そのような総称は必要ないと判断しました.

[3] これも 2 項結合記号同様テキストでは定義していない言葉ではあるけれど, なんとなく意味はわかるし不要かとも思ったけどもあえて定義しておいた.

[4] テキストに書いてある命題記号の方の呼び名を使いたい理由はさておき, このノートの説明事項（57）にも書いた通り, 新たに自分で証明した内容については proposition（命題）や corollary（系）など名前と番号を付けていくことになっています. とくに proposition は訳すと「命題」なため「命題」を対象の名前につける数理論理学とは相性が悪いのかもしれません. ただここでの proposition は証明すべき主張にしか使わないようにして, このノートでは他の定義や定理たちと同じように下線を引いていたり太字になっていたりするので紛らわしさはないから, 併用しても問題はないと思います, 脚注部分のような理由で「命題記号」という言葉は使わないようにしておきます.

[5] とは書いてみたもののあまり自信がありません. なぜなら人によって区別できない記号って「字が汚い」場合以外どんなことがあるのだろうかと. でも外国人からすると日本語の漢字の似たものの区別はつきにくいとも聞くし, そんな場合を指しているのだろうか. よくよく考えると数学の手書きの議論において小文字と大文字の c は同時に使うことを避けるか, どちらかにアレンジを加えると思われるので, こういうときに区別がつきにくい記号の用意の仕方といえるのかも. でもマシンによって区別がつきにくい記号とはいったいなんなのだろうか. 画像認識しながら数学をやっている機械ならまだしも, それだって画像の解像度や画像処理アプリの性能の問題だと思うし.

[6] そういう意味ではテキストに書いてある通りおはじきは, 現実のものに限れば無限個用意できないため不適と思いました. 仮に無限個用意できても別の注意にある「互いに区別できる」部分が人にとっては難しそうに感じました. 日本語での色の名前が有限しかない（[6]）ことから, 人間が見分けできる色が高々有限種類しかないのでは？名前のない色は RGB 値で表現できるのかもしれないけれどそれでもたかだけ有限でしょう？（256^3 くらい？）また色以外で違いをつけようにも大きさや形にも限度はあろうし. まぁ野暮なツッコミかもしれません.
そんなことをする人がいたらかなり変人だと思うが, 文論理の言語にある記号をオブジェクトとして使ってもいいと思う. そのままの対応では当たり前すぎるので例えば記号「(」に「A_1」を割り当てるといったように. これもやってもよいとはいってもやる人はまずいないと思うかなり天邪鬼な例え話.

[7] 運用者が人間の場合は, その自然数をその記号だと「思い込む」「頭の中では数を記号に変換する」といった方がいいだろうか. マシンだとその対応でもって変換してくれるアプリケーションを用意するといった感じだろうか.

[8] もちろん 3 進法コンピュータとかもあるんだろうけどあんまり聞かないし…だからここらへんの例え話もコンピュータに関する教養が足りず少し自信がありません.

がある）．
そうなると $\langle 2,9\rangle$ と $\langle 29\rangle$ は人間にとってはかなり見分けがつきにくいが, 機械にとってそもそも列の成分数も違うことから簡単に見分けがつき, そしてその記号の解釈も別のものになる（この実装方法で行くと $\langle 29\rangle$ は 22 番目の文記号 A_{22} となるから）．
集合による実装は, まず集合論内の議論によって自然数を構築する．よく知られた方法としては順序数理論を展開し順序数の中でも特別なものを自然数とする方法である．すると集合としての自然数を得ることができたので, それを使って（雑なものでよければ）さきの自然数を使ったものと同様にすればよい．
大事なことはこのテキストでは, 定義にある条件をみたしていればどのようなオブジェクトが使われているか, もしくはどのようなオブジェクトで実装されているかは意識しないし, またそれに依存しない理論の話が続いていく．
ではなぜするかどうかも分からない「実装する上での注意」なんて著者は併記したのだろうか？それはつまり実際に自然数論や集合論を使って文論理の理論を展開することがあるからである．また今後記号が割り振られたオブジェクトとその記号をとくに区別せず割り振られた方の記号を使って使っていく．つまり仮に自然数を使って上記のように実装したとしていても, オブジェクトとしての 0 は使わず, それに割り振られた記号「(」を議論のさいには使っていくということである．

6. 「無限個のオブジェクトの列」部分と「列の第一成分から」部分について
単に「無限個のオブジェクト」でも問題なさそうに見えるが, なぜ「無限個のオブジェクト**の列**」としたのだろうか．これも注意事項 5 と同じように実装上の注意事項だろうと思われる．列にすると並んだ記号たちに 0 から自然数を全て使って番号が付属していると思える．それこそ数学における数列やプログラミングにおけるハッシュ関数の返り値のように．[9]
もし使いたい記号（というかその概念や名称）が有限個しかない言語ならば, 無限個のオブジェクトも要らず, また列でないなくともよいのかもしれない．しかし今から私たちが用意したい記号は無限個の文記号を含むため, オブジェクトも無限個必要である．よってそんな文記号用に無限の空きが必要なので, さきに有限個で済む文記号以外をオブジェクトの番号の小さいものから割り当てていき, 残った無限個のオブジェクトにその番号が小さいものから文記号についている番号の小さいもの順に割り当てていく．そうすれば一番分かりやすいと思われるため, だからこそ Definition 1.1.1 においても「列の第一成分から」とテキストにはないものを追加した．1 つ上の注意に書いた通り実装方法にはこだわらないのだから別にこの注意は不要でもあるのだが, この時点で勉強会で話した「お気持ち」を伝えるためにも付記しておいた．
また別の実装方法もいくつも存在することを注意しておく．自然数を用いた実装方法として $0,1,2,3,\ldots$ を使って, それぞれに $(, A_1,), A_2, \neg, A_3, \wedge, A_4, \vee, A_5, \rightarrow, A_6, \leftrightarrow, A_7, A_8, \ldots$ と実装してもよい．だがこれよりは最初の例の方が分かりやすいし実装しやすいとも思われる．

7. 「これらの記号のどれもが他の記号の有限な長さの列とは一致しない」部分について
この条件も注意事項 5 と同じように実装上の注意事項だろうと思われる．例えば Example 0.0.21 に出したものを使って, こちらで用意したオブジェクトの列を（有限ではあるがいまは気にしない）$\langle 0,1,\langle 0,1\rangle,\langle 0,1,0\rangle\rangle$ として, これに $\neg, \rightarrow, A_1, A_2$ を割り当ててたとすると, $A_1 = \langle 0,1\rangle = \langle\neg,\rightarrow\rangle$, $A_2 = \langle 0,1,0\rangle = \langle\neg,\rightarrow,\neg\rangle$ となってしまい, $S_1 = \langle\langle 0,1,0\rangle,1\rangle = \langle A_2,\rightarrow\rangle$, $S_2 = \langle\langle 0,1\rangle,0,1\rangle = \langle A_1,\neg,\rightarrow\rangle$ となる．つまり意図としては列 S_1, S_2 は異なる列であってほしいが, この列を集合として扱う運用者からすれば, この 2 つの列は集合として一致しているので同じものとして扱わなくてはいけない．よってこのようなことが起こらないためにはこの条件は必要である．この条件と Lemma 0.0.20（63 ページ）や Example 0.0.21（63 ページ）の議論もあわせて, もし 2 つの記号の列が $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle = \langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ で Definition 1.1.1 の条件をみたす記号ならば, $m = n$ かつ $a_i = b_i$ となる．

8. 無限の文記号を用意しない方法
テキストでは無限個の文記号を使う以外の方法が提示されている．1 個の文記号 A とプライム記号 $\prime$ を使って $A_1, A_2, A_3, \ldots$ の代わりに $A, A', A'', \ldots$ とするのである．こうするとたった 2 個の記号の無限個の記号を用意することができる．これはなるべくコンパクトな定義をしようとするならば良い方法に思われる．ただ実装するときになると各文記号に「A にどれだけのプライム記号をつけたのか」という情報を追加しなくてはならないようにも思えるので, どれほど他の実装方法と比べて楽になるのかはこの時点では分からない．
今後議論するときに「任意の文記号をとる」ということをするが, そのさいにその任意に取った文記号を表すための記号

[9] プログラミングを知っている人に向けて用意した例え話なのだけれど, もしかしたらハッシュを使えないプログラミング言語ってあったりするのかな．かりに基本文法になかったとしてもライブラリや自作関数などで対応できそうだけれども．ちなみにハッシュ関数という言葉は Wikipedia『ハッシュ関数』[12] より拝借した（自分は普段は単にハッシュと呼んでるけれども）．

として $A_1, A_2, \ldots$ などは使えないので, A や A_n または A' などを使うことにする. ちなみに A_n は定義を書くためのメタ的な表現であって実際に n という文字を使った A_n のような記号は文論理の記号ではない.

9. **オブジェクトの数について**
この定義によると文記号として用意すべきは可算無限個のオブジェクトが必要である. そして文記号以外の記号（つまり論理記号）の数は有限なので全ての記号を定めるのに必要な個数は結局可算無限個で十分である. しかし可算無限個でなくてはいけないというわけではない. 例えば文記号全てを濃度が可算より大きい集合 $\mathbb{R}$ を使って定めてもよい. つまり各実数を文記号だと扱うわけである.

テキストにはないが便利のため以下の記法を用意しておく.

Notation 1.1.2.
その文論理の文記号の集合を PVAR で表す. ■

上の注意事項より何が文記号なのかはその時の議論によって変わるので, $\mathrm{PVAR} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ や $\mathrm{PVAR} = \{A, A', A'', \ldots\}$ となったりする. また文記号は常に無限個用意されるので, $\mathrm{card}(\mathrm{PVAR}) \geq \aleph_0$ である.
つぎに「表現」という言葉を定義するため, 以降日常言語としての表現は使わないよう気をつける.

Definition 1.1.3（表現 (E:p15, K:p23)）.
Definition 0.0.18（62 ページ）の用語を用いる.

1. 文論理の記号の集合を以降 SIMB で表すことにする.

2. SIMB の要素からなる有限列を **expression**（表現）とよぶ.

   またすべての表現の集合を EXPR で表すことにする.
   また表現 $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$（ここで各 s_i は SIMB の要素である）をその成分を順番に並べて $s_1 s_2 \ldots s_{n-1} s_n$ と書くこともある.
   以降どちらの使い方も柔軟に使っていくことにする.

3. $\alpha, \beta \in \mathrm{EXPR}$ に対してそれぞれ $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle,\ \beta = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ とするとき, $\alpha\beta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \rangle$ として, これを α と β の **string concatenation**（文字列連結）とよぶ. [10] ■

明らかに $\mathrm{PVAR} \subseteq \mathrm{SIMB}$ であり, $\mathrm{EXPR} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{SIMB}^n$ である.
表現の 2 通りの表し方についてだが当然私たちにとって分かりやすいのは $s_1 s_2 \ldots s_{n-1} s_n$ の方である. だからその定義に踏み込んで議論する必要がないときには $s_1 s_2 \ldots s_{n-1} s_n$ の方を優先的に使っていく.

この文字列結合は EXPR 上の 2 項演算, つまり演算結果 $\alpha\beta$ も表現である. またその意味もその名前のごとく α の列の後ろに β の列をそのまま並べたものになっている.

Example 1.1.4（E:p15, K:p23）.
表現 α, β に対して

1. $(\neg A_1)$ という（私たちにとって見やすい表し方をした）表現は厳密には有限列 $\langle (, \neg, A_1,) \rangle$ のことである.

2. $\alpha = (\neg A_1),\ \beta = A_2$ とおくとその文字列結合 $\alpha\beta$ は $(\neg A_1)A_2$ に, $(\alpha \to \beta)$ は $((\neg A_1) \to A_2)$ となる. ■

例の 2 つ目における $((\neg A_1) \to A_2)$ とは, $(\alpha \to \beta)$ の α, β 部分にその表現を代入したものである. Definition 1.1.3 でも使ったが改めて注意すると, α, β は文論理の記号ではなく, 文論理について議論している表現を変数のように使いたいための私たちの記号である. プログラミングでいうところのマクロのようなものともいえる.

Definition 1.1.5（式構成操作 (E:p17, K:p25)）.
$\alpha, \beta \in \mathrm{EXPR}$ と論理記号に対して

[10] これはテキストでは定義されていない言葉ではありますが, 定義しておくと便利かと思ったのでプログラミングにおける文字列結合演算（例えば [7]）を参考に定義しておきました.

- $\mathcal{E}_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$ と定める．より厳密には $\mathcal{E}_\neg(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \langle(,\neg\rangle\alpha\langle)\rangle$ であり，これは Definition 1.1.3 で定義した表現の文字列連結である．つまり $\mathcal{E}_\neg$ は EXPR 上の 1 変数関数である．
- $\mathcal{E}_\wedge(\alpha,\beta) = (\alpha \wedge \beta)$ と定める．より厳密には $\mathcal{E}_\wedge(\alpha,\beta) \overset{\text{def}}{=} \langle(\rangle\alpha\langle\wedge\rangle\beta\langle)\rangle$ であり，$\mathcal{E}_\wedge$ は EXPR 上の 2 変数関数である．同様にして EXPR 上の 2 変数関数として $\mathcal{E}_\vee, \mathcal{E}_\to, \mathcal{E}_\leftrightarrow$ を定義する．

これらの 5 つの演算をあわせて **formula-building operation**（式構成操作）とよぶ． ■

Definition 1.1.6（（素朴な）整式の定義 (E:p16 17, K:p25)）．
well-formed formula（整式）とは以下のように帰納的に定義される．[11]

(a) 個々の文記号は整式である．

(b) α, β が整式ならば, $(\neg\alpha), (\alpha\wedge\beta), (\alpha\vee\beta), (\alpha\to\beta), (\alpha\leftrightarrow\beta)$ は整式である．

(c) (a)(b) にあてはまるものだけが整式である． ■

(b) はつまりすでに整式があったとき, それらの式構成操作の結果もまた整式であると主張している．
この定義は別に数学的に間違っているわけではない．しかしより厳密に定義することもできる．そうしたとき式構成操作を EXPR 上の関数として捉えることにも意味がでてくる．
簡単にいうと整式とは文記号から始めて式構成操作を有限回適用して構成できる表現のことと言えるが, この「有限回適用して」の部分を構成列というものを使って厳密に定義できる．

Definition 1.1.7（構成列と整式 (E:p17 18, K:p26 27)）．
表現の集合 EXPR の有限列 $\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\rangle$ が **construction sequence**（構成列）であるとは, 各 $i \le n$ に対して (1) から (3) のいずれかをみたすときをいう．

(1) ε_i は文記号.

(2) ある $j < i$ があって $\varepsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)$.

(3) ある $j,k < i$ があって $\varepsilon_i = \mathcal{E}_\square(\varepsilon_j,\varepsilon_k)$.
ここで $\square$ は 2 項結合記号のいずれかを表す．

ある表現 α で終わる（つまり末項が α である）ような構成列が存在するとき, そんな表現を **well-formed formula**（整式）とよぶ．
すべての整式の集合は今後 WFF で表すことにする．[12] ■

明らかに WFF $\subseteq$ EXPR である．
$\mathcal{E}_2$ を 2 項結合記号の集合とするとき, 有限列 $\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\rangle$ が構成列であることは論理式で

$$\forall i < n\big(\ \varepsilon_i \in \mathrm{PVAR}\ \vee\ \exists j < i(\varepsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j))\ \vee\ \exists j,k < i\exists\square \in \mathcal{E}_2(\varepsilon_i = \mathcal{E}_\square(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ \big)$$

と書ける．ここで $\mathcal{E}_\square$ という書き方は直感的にはわかりやすいが, まるで $\mathcal{E}_\square$ という $\square$ を変数とした関数のようにも見えてしまうので, $\exists j,k < i\exists\square \in \mathcal{E}_2(\varepsilon_i = \mathcal{E}_\square(\varepsilon_j,\varepsilon_k)$ の部分は本当は

$$\exists j,k < i\big(\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_\wedge(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ \vee\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_\vee(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ \vee\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_\to(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ \vee\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_\leftrightarrow(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ \big)$$

と書くべきだろうが, ここで初めて $\mathcal{E}_\vee$ に含まれている $\vee$ と, 各論理式をつないでいる $\vee$ とで記号の衝突が起きている．これが頭の中で完全に区別できている人たちの中で, 議論のさいにこう書くなら問題はないが（それでも多分良い顔はしないと思うけれど）, 初学者には余計な誤解やそれによる遠回りを与える可能性がある．ゆえにテキストでは（おそらく意図的に）一貫して（第 0 章（59 ページ）のような別に論理学に直接関係する概念でなくても）何かを定義するさいには, 日常言語で述べることにしたのであろう．

[11] テキストでは単に「式（formula）」とか, 原著だと「wff」などの呼び方も提示されていますが, 個人的な理由で整式のみで統一しようと思います．
[12] これもテキストではこの記号を与えたりはしていませんが, 個人的に便利なことが多かったので定めておきました．

Example 1.1.8.
整式 α を $((A_1 \land A_{10}) \to ((\neg A_3) \lor (A_8 \leftrightarrow A_3)))$ とすると, 以下の有限列は

$$\langle\ A_1,\ A_3,\ A_8,\ A_{10},\ (A_1 \land A_{10}),\ (\neg A_3),\ (A_8 \leftrightarrow A_3),\ ((\neg A_3) \lor (A_8 \leftrightarrow A_3)),\ \alpha\ \rangle$$

その構成列の一例である. ■

ここでテキストでは系統樹による説明がある（これより前から何度か登場しているけれど）. 第 0 章（59 ページ）によると木概念は非形式的な議論にしか使わないと書いてある. つまり系統樹を使って説明されている事柄はすべて定義に戻ればより厳密な数学的議論をすることができるということなので, このノートでは系統樹を使った説明は必要だと思ったときにします. [13]
Example 1.1.8 で私が書いた構成列には「先に使う文記号は列先頭からすべて書いておく」という個人的な好みが現れている. だがある整式に対する構成列は 1 つではない. 例えば（私の好みに反する）以下のような（必要になったときに文記号を挿入するような）整式の有限列も

$$\langle\ A_1,\ A_{10},\ (A_1 \land A_{10}),\ A_3,\ (\neg A_3),\ A_8,\ (A_8 \leftrightarrow A_3),\ ((\neg A_3) \lor (A_8 \leftrightarrow A_3)),\ \alpha\ \rangle$$

整式 α の構成列である.

ここからさらに（この時点で）テキストにない注意を例え話を入れながら追加する.

1. たとえば整式 $(A_1 \land A_2)$ の構成列として最も単純なものは $\langle A_1, A_2, (A_1 \land A_2)\rangle$ であろうが, 別に $\langle A_2, A_1, (A_1 \land A_2)\rangle$ でもよい. つまり構成列の定義をみたす範囲で文記号が現れる順番を変えてもよい. また構成列の定義をみたす範囲で余計な整式を構成列に混ぜてもよい. たとえば

$$S_1 = \langle A_1, A_2, A_3, (A_1 \land A_2)\rangle,$$
$$S_2 = \langle A_1, A_2, A_3, (\neg A_3), (A_1 \land A_2)\rangle$$

   とおくと, S_1, S_2 どちらも $(A_1 \land A_2)$ の構成列である. しかし $\langle A_1, A_2, A_3, (A_1 \land A_2), A_3\rangle$ は整式 A_3 の構成列である. さらに $\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ も $\langle A_3, A_3, A_3\rangle$ も A_3 の構成列である.

2. ある構成列の始切片もまた構成列で, ゆえになんらかの整式に対応した構成列となる. 例えば

$$S'_1 = \langle A_1\rangle,$$
$$S'_2 = \langle A_1, A_2\rangle,$$
$$S'_3 = \langle A_1, A_2, A_3\rangle,$$
$$S'_4 = \langle A_1, A_2, A_3, (\neg A_3)\rangle$$

   とおくと, それぞれ S_2 の始切片で, S'_1 は A_1 の, S'_2 は A_2 の, S'_3 は A_3 の, S'_4 は $(\neg A_3)$ の構成列である. これは単なる観察ではなく, つまりこの整式だけにあてはまる現象ではなくすべての整式に対して成立する. これは Proposition 1.1.9（82 ページ）で示した.

3. また例えば $\langle A_1\rangle$ は A_1 という整式の構成列であるが, 1 つ組の定義から $\langle A_1\rangle = A_1$ でもあるから, A_1 そのものは整式でもあり, かつ自分自身の構成列でもある. 当然これは他の文記号に関しても同様である.

4. A_3, $(\neg A_3)$ という $(A_1 \land A_2)$ に含まれていない文記号からなる整式を S_2 から取り除いても, つまり構成列 $\langle A_2, A_1, (A_1 \land A_2)\rangle$ は依然として $(A_1 \land A_2)$ の構成列のままである. 例えば Example 1.1.17（87 ページ）にて, 似たような問題を解いている. 上記の事をより一般的に証明してみたいので, 今後の課題としておく.

   今後の課題

   ある整式の構成列があったとき, その末項整式に含まれていない文記号を持つ整式が, その構成列に含まれていた場合に, そのような整式全てを構成列から除いても, その末項整式の構成列であることには変わらない.

[13] 決して系統樹を LaTeX で書くのがめんどくさいとかそういうことではない……もちろん視覚的には系統樹の方が分かりやすいのは知っているのだけれど.

5. またこの注意たちの前に整式に対応する構成列は 1 つではないと述べたが, もっといえば無数にある．例えば単に A_1 という整式の構成列でも長さが 2 のものに限っても, $\langle A_1, A_1\rangle$, $\langle A_2, A_1\rangle$, $\langle A_3, A_1\rangle, \dots$ など無限にある．つまりある整式に対しての構成列は無限に存在するが, ある構成列はそれぞれ 1 つの整式に対応している．これを使えば「任意の整式に対して」という形の主張の証明に役立てることができる．どういうことかというと「任意の整式に対して○○」ということを示す代わりに,「任意の構成列に対して○○」を示してもよいということである．[14] もちろん最初の○○部分が整式のみしか扱えないならば, それを構成列に関するものへ変更する必要はある．
そして構成列は有限列ゆえにすべての構成列にはその「長さ」という情報が備わっている．これを利用して「任意の構成列に対して○○」を示す代わりに,「任意の長さの構成列に対して○○」を証明してもよい．こういう風に証明内容を変更する最大のメリットは長さという 0 より大きい自然数に対しての主張に変わったことにより, 種々の自然数に関する帰納法を用いられるようになったことである．もっと具体的にどのように示すかというと「任意の $n \in \mathbb{N}$ と構成列に対して, その構成列の長さが n ならば○○」を示す形になる．つまり証明の最初は任意に長さ n の構成列をとるところからはじまる．
このほかにも表現や整式の単なる長さや整式に含まれる文記号の個数など, 表現・整式に備わる様々な「数」を使って証明していくことになる．

6. Definition 1.1.6（80 ページ）にある定義を採用するテキストも多い．これのメリットとしては「任意の整式に対して○○」という主張に対して**構成に関する帰納法**を使うことができることである．構成に関する帰納法は **structural induction**（**構造的帰納法**）と呼ばれることもある．なので以降は（カッコいい方の）構造的帰納法という呼び名を使っていく．[15] これは次の 2 つのことを示るやり方である．

   (Basis) すべての文記号が○○をみたすことを示す．

   (Induction step) 整式 α, β が○○をみたしているとして, $(\neg\alpha), (\alpha \land \beta), (\alpha \lor \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ が○○をみたしていることを示す．

   証明すべきことの名前（Basis とかのこと）は [75] から拝借した．もちろん [75] では整式の定義は Definition 1.1.6（80 ページ）と同じようになされている．
   ときどき余裕があればこちらのやり方でも証明してみることにする．もしかしたら主張によってはこちらの方が証明がやりやすくなることもあるかもしれない．

では練習がてら色々と自分で簡単な主張を用意して証明してみる．

Proposition 1.1.9.
構成列のどのその真の始切片もまた構成列である． ■

Proof 証明すべきことは「任意にとった構成列に対して, さらに任意にその構成列の始切片をとると構成列になっている」である．任意に構成列をとるかわりに任意の長さの構成列をとることにすると証明目的は「任意にとった $n \in \mathbb{N}$ と構成列に対して, その構成列の長さが n ならば, さらに任意にその構成列の始切片をとると構成列になっている」となる．この任意にとる n に対して, つまり構成列の長さに関して累積帰納法を使って示す．任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる．この帰納法の仮定は「長さが n 未満であるような全ての構成列が, そのどの始切片も構成列になっている」である．いま任意に長さ n の構成列 $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\rangle$ をとり, さらにその真の始切片として $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\rangle$ をとる．つまり $m < n$ である．ここで ε_m は構成列 $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\rangle$ の成分の 1 つなので,

(1′) $\varepsilon_m \in \mathrm{PVAR}$.

(2′) $\exists j < m\big(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ \big)$.

(3′) $\exists j, k < m\big(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\square(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ \big)$. ここで $\square$ は 2 項結合記号のいずれかを表す．

を満たしている．つまり「ε_m は (1′) または (2′) または (3′) をみたす」となっている．
いま有限列 $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}\rangle$ は $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\rangle$ の真の始切片でかつ帰納法の仮定から構成列なので, 任意の $i \le m-1$ に対して

[14] これまでの観察により構成列の個数は整式の個数よりもはるかに多いため, この証明は整式に対して証明するものと加えるとかなり無駄が多いように思ってしまう．でも証明のやりやすさが上がることもあるし, まぁダブっていても足りなくなっていないのならばそれで OK なのだ．
でも「任意の構成列に対して○○」という形の主張を示すときに,「任意の整式に対して○○」という主張を証明してはいけない．これは明らかに構成列をすべて取りつくしていないから, ということになる．
[15] この呼び方は Wikipedia『構造的帰納法』[16] より知りました．

(1″) $\varepsilon_i \in \mathrm{PVAR}$.

(2″) $\exists j < i(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$.

(3″) $\exists j,k < i(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\square(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ )$. ここで □ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

を満たしている. つまり「任意の $i \leq m-1$ に対して (1″) または (2″) または (3″) をみたす」となっている. ここまでの議論をまとめて「」で囲った 2 つの主張を合わせると, 任意の $i \leq m$ に対して

(1) $\varepsilon_m \in \mathrm{PVAR}$.

(2) $\exists j < m(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$.

(3) $\exists j,k < m(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\square(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ )$. ここで □ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

を満たしていることになり, これは $\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m \rangle$ が構成列になっていることを表している. □

Theorem 1.1.10.
帰納法の原理 (E:p18 INDUCTION PRINCIPLE, K:p27 帰納法の原理) すべての文記号が属し, かつすべての式構成操作について閉じている整式の集合は, すべての整式からなる集合である. ■

証明の前にいくつか注意事項を書いておく

1. 定理の主張の条件をみたしている整式の集合を $\mathcal{A}$ で表すことにすると, 集合として $\mathcal{A} = \mathrm{WFF}$ を示すことが証明の目的となる. $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{WFF}$ であることは明らかなので $\mathrm{WFF} \subseteq \mathcal{A}$ を示すだけでよい. 部分集合の定義に戻ると, これは「任意の整式 α に対して $\alpha \in \mathcal{A}$」を示すことになったため, Example 1.1.8 下の注意事項 5 にある通り, 構成列の長さに関する帰納法, とくにこの場合は累積帰納法を用いて証明する.

2. $\mathcal{A}$ がすべての文記号が属するとは, 論理式で書けば $A \in \mathrm{PVAR}(A \in \mathcal{A})$ となる.
また全ての式構成操作について閉じるということをもう少し厳密に見ると, $\mathcal{E}_\neg$ は EXPR 上の 1 項演算, それ以外の式構成操作は EXPR 上の 2 項演算であり, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{EXPR}$ である. たとえば $\mathcal{E}_\neg \colon \mathrm{EXPR} \to \mathrm{EXPR}$ について, この演算の $\mathcal{A}$ への制限と考えることもできる. さらにこの $\mathcal{A}$ は $\mathcal{E}_\neg$ について閉じている, つまり $\forall \alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_\neg(\alpha) \in \mathcal{A})$ と表すことができる. 2 項演算である $\mathcal{E}_\wedge$ についても $\mathcal{A}$ が $\mathcal{E}_\wedge$ について閉じているとは, $\forall \alpha,\beta \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_\wedge(\alpha,\beta) \in \mathcal{A})$ と表すことができる. 他の 2 項演算についても同様である.

Proof 証明すべきことは「任意にとった $n \in \mathbb{N}$ と任意にとった構成列に対して, その構成列の長さが n ならば, その構成列に対する整式（構成列の末項）は $\mathcal{A}$ に属する」である. 任意にとる n に対して累積帰納法を用いて示す.
任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる. 帰納法の仮定は「長さが n 未満であるような全ての構成列に対して, それに対応する整式が $\mathcal{A}$ に属する」となる. いま長さ n な任意の構成列 $\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \rangle$ をとる. この ε_n が $\mathcal{A}$ に属することを示すことが目的である.
構成列の定義から ε_n は以下のいずれかをみたす.

(1) $\varepsilon_n \in \mathrm{PVAR}$.

(2) $\exists j < n(\ \varepsilon_n = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$.

(3) $\exists j,k < n(\ \varepsilon_n = \mathcal{E}_\square(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ )$. ここで □ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

それぞれの場合について $\varepsilon_n \in \mathcal{A}$ であることを示す.

(1) $\varepsilon_n \in \mathrm{PVAR}$ のとき.
整式 ε_n は文記号一文字の整式であり, 仮定より $\mathrm{PVAR} \subseteq \mathcal{A}$ だから $\varepsilon_n \in \mathcal{A}$ である.

(2) $\exists j < n(\ \varepsilon_n = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$ のとき.
そのような ε_j を固定する. $\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j \rangle$ は, 構成列 $\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \rangle$ の真の始切片であり, Proposition 1.1.9（82 ページ）より構成列である. この構成列は ε_j に対応する構成列でその長さは n 未満なので, 帰納法の仮定より $\varepsilon_j \in \mathcal{A}$ である. そして仮定より $\mathcal{E}_\neg$ が $\mathcal{A}$ 上閉じていることから $\mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j) \in \mathcal{A}$ である. つまりこれは $\varepsilon_n \in \mathcal{A}$ を表す.

(3) $\exists j,k<n\big(\ \varepsilon_n=\mathcal{E}_\square(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\ \big)$（□ は 2 項結合記号のいずれか）のとき．
たとえば □ を $\wedge$ として，そんな $\varepsilon_j,\varepsilon_k$ を固定する．$\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j\rangle,\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\rangle$ は，構成列 $\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\rangle$ の真の始切片であり，Proposition 1.1.9（82 ページ）より構成列である．この 2 つの構成列はどちらも長さが n 未満なので，帰納法の仮定より $\varepsilon_j,\varepsilon_k\in\mathcal{A}$ である．そして仮定より $\mathcal{E}_\wedge$ が $\mathcal{A}$ 上閉じていることから $\mathcal{E}_\wedge(\varepsilon_j,\varepsilon_k)\in\mathcal{A}$ である．つまりこれは $\varepsilon_n\in\mathcal{A}$ を表す．
ほかの 2 項結合記号について同様である． □

この証明を構造的帰納法にて証明することも可能であるので確かめてみる．

Theorem 1.1.10 の構造的帰納法による証明　Theorem 1.1.10 の下に書いた注意事項を参考にして，WFF $\subseteq\mathcal{A}$，つまり任意に取った整式が $\mathcal{A}$ に属することを示す．これについて構造的帰納法を用いる．

（Basis）
任意に文記号 A をとる．仮定より $A\in\mathcal{A}$.

（Induction step）
任意に整式 α,β をとり，$\alpha,\beta\in\mathcal{A}$ とする．仮定よりすべての式構成操作について $\mathcal{A}$ が閉じているので $(\neg\alpha),(\alpha\wedge\beta),(\alpha\vee\beta),(\alpha\to\beta),(\alpha\leftrightarrow\beta)$ はすべて $\mathcal{A}$ に属する． □

整式全体に関する定理の証明に対して帰納法の原理を使うことができる．

Example 1.1.11（E:p18 EXAMPLE, K:p28 例）．
どの整式もそれに含まれる右括弧・左括弧の個数は同じである．[16] ■

Proof　$\mathcal{A}$ を含まれる両括弧記号の数が同じな整式の集合とする．$\mathcal{A}$ が全ての整式の集合であることを示せばよい．以下の 2 点を示せば

1. $\mathcal{A}$ には全ての文記号（1 つのみの整式）を含むこと
2. $\mathcal{A}$ は全ての式構成操作について閉じていること

Theorem 1.1.10（83 ページ）より $\mathcal{A}=$ WFF であることがわかる．

1. （$\mathcal{A}$ には全ての文記号（1 つのみの整式）を含むこと）
任意に $A\in$ PVAR をとる．A はそれぞれの括弧記号の数は 0 個，つまり両括弧記号の数は同じなので $A\in\mathcal{A}$ である．
2. （$\mathcal{A}$ は全ての式構成操作について閉じていること）
任意に $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$ をとり，それぞれの左括弧記号の個数を k_α,k_β とおくと，$\alpha,\beta\in\mathcal{A}$ より右括弧記号の個数も k_α,k_β 個である．
$\mathcal{E}_\neg(\alpha)=(\neg\alpha)$ より整式 $\mathcal{E}_\neg(\alpha)$ の左右の括弧の数はどちらも $k_\alpha+1$ となって，つまり両括弧記号の数は同じであるので，$\mathcal{E}_\neg(\alpha)\in\mathcal{A}$ である．つまり演算 $\mathcal{E}_\neg$ について $\mathcal{A}$ は閉じている．
次に $\mathcal{E}_\wedge(\alpha,\beta)=(\alpha\wedge\beta)$ より整式 $\mathcal{E}_\wedge(\alpha,\beta)$ の左右の括弧の数はどちらも $k_\alpha+k_\beta+1$ となって，つまり両括弧記号の数は同じであるので，$\mathcal{E}_\wedge(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}$ である．つまり演算 $\mathcal{E}_\wedge$ について $\mathcal{A}$ は閉じている．他の 2 項結合記号に関しても同様に証明できる． □

演習問題

Exercise 1.1.12（E:p19 1., K:p29 1.）．
日本語の文をみっつ挙げ，それらの文を私たちの形式言語に翻訳しなさい．文は，なんらかの意味のある構造を持つように，また，翻訳が 15 個以上の記号からなる列になるように選びなさい． ■

Answer　5 つの文記号とその日本語での意味を以下のように定める．

[16] テキストでは「左括弧の数が右括弧の数より多い表現は整式ではない」となっていますが，実際に証明している，テキストにて証明末尾に書いてある主張は，同じ意味ではあるものの，ここに書いたものになっていたので，こちらに合わせました．この例は後で Lemma 1.3.1（93 ページ）にて再度登場するけれど，そのときの主張の書き方はこちらの書き方に変わっているので，この書き方でも問題ないと思いました．

P_1：○○月××日の△△小学校周辺の天気は晴れ
P_2：○○月××日に△△小学校には運動場がある
P_3：○○月××日に△△小学校には生徒が 1 人以上いる
P_4：○○月××日に△△小学校には教師が 1 人以上いる
Q：○○月××日に△△小学校にて運動会が開催されている

これらを使って以下のように 3 つの整式を作る

$$\varphi_1 = ((((P_1 \land P_2) \land P_3) \land P_4) \to Q)$$
$$\varphi_2 = ((\neg Q) \to ((((\neg P_1) \lor (\neg P_2)) \lor (\neg P_3)) \lor (\neg P_4)))$$
$$\varphi_1 = ((((P_1 \land P_2) \land P_3) \land P_4) \land (\neg Q))$$

すると φ_1 は「○○月××日に△△小学校周辺の天気は晴れで，△△小学校に運動場があり, △△小学校に生徒も教員も 1 人以上いれば, 運動会が開催されている」となり, φ_2 は「○○月××日に△△小学校にて運動会が開催されていないならば，同日に△△小学校周辺の天気が晴れでないか, △△小学校に運動場・生徒・教員のいずれかが存在しない」となり, φ_3 は「○○月××日に△△小学校周辺の天気は晴れで, △△小学校に運動場・生徒・教員も存在するが, 運動会は開催されていない」となる. [17] □

次の Exercise を証明するために 2 つの Proposition を証明しておく.

Proposition 1.1.13.
いずれかの式構成操作の結果となっている整式は長さが 4 以上である. つまり文記号 1 文字という表現でない整式は, その長さは 4 以上となる. ■

Proof α は文記号 1 文字という表現でないとする. ある表現 β_1, β_2 があって, $\alpha = \mathcal{E}_\neg(\beta_1)$ となっていたとすると, β_1 の長さは 1 以上であるから, α の長さは $(,), \neg$ の 3 つ分長さが増えて 4 以上となる.
$\alpha = \mathcal{E}_\land(\beta_1 m \beta_2)$ となっていたとすると, β_1, β_2 のいずれの長さも 1 以上であるから, α の長さは $(,), \neg$ の 3 つ分と β_1, β_2 を合わせて 5 以上となる. つまりこの場合でも長さは 4 以上となり, 他の 2 項結合記号による式構成操作でも同様である. □

Proposition 1.1.14.
整式でない表現に式構成操作を行っても整式にはならない.
もっというと α を整式でない表現とすると $\mathcal{E}_\neg(\alpha)$ は整式でない.
2 つの表現 α, β のどちらか 1 つは整式でないとすると, $\mathcal{E}_\Box(\alpha, \beta)$（□ は 2 項結合記号のどれか）のいずれも整式でない. ■

Proof α を整式でない表現とする. すると整式でないということは α を末項とするようないかなる表現の有限列も構成列とはならない.
$\mathcal{E}_\neg(\alpha)$ が整式となるとすると, 構成列 $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle$ が存在して $\varepsilon_n = \mathcal{E}_\neg(\alpha)$ となっている. 構成列の定義 Definition 1.1.7（80 ページ）から $\exists j < n\big(\varepsilon_n = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\big)$ となっているから, そのような j を固定すると, $\varepsilon_j = \alpha$ である. すると $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j \rangle$ は $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle$ の真の始切片であり, Proposition 1.1.9（82 ページ）から $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j \rangle$ も構成列である. $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j \rangle$ という構成列の存在から α が整式となるが, これは矛盾.
2 つの表現 α, β のどちらか 1 つは整式でないとする. $\mathcal{E}_\land(\alpha, \beta)$ が整式となるとすると, 同様に構成列の定義から $\exists j, k < n\big(\varepsilon_n = \mathcal{E}_\land(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\big)$ となっているから, そのような j, k を固定すると,$\varepsilon_j = \alpha,\ \varepsilon_k = \beta$ である. もし α が整式でないとすると, $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j \rangle$ は $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle$ の真の始切片であり, 先ほどと同様の理由で矛盾する. β が整式でなかった場合も同様に, またそれ以外の 2 項結合記号に関する式構成操作に関しても同様に示せるので省略する. □

Exercise 1.1.15（E:p19 2., K:p29 2.）.
長さが 2,3,6 の整式は存在しないこと, そして, それら以外のすべての正整数の長さをもつ整式は存在することを示しなさい. ■

Proof 以下のように細かく分けて証明する.

[17] 問題文によれば, 何も同じ記号で 3 つの文章を作れとはなっていないが, めんどくさかったので……また意味のある文章を作るためにもすでに作った φ_1 の, φ_2 はその対偶に, φ_3 はその否定とすることで楽をさせてもらった. こういうのはそれこそ教養があると面白い回答を出せるのだろう.

- 長さが 2 または 3 のどんな表現も整式でないこと
  α を長さが 2 である表現とする．α はその長さから文記号 1 文字だけの表現ではないため, 何らかの式構成操作の結果であるが, Proposition 1.1.13（85 ページ）よりいずれの式構成操作の結果も長さが 4 以上になり, 長さが 2 である α は整式ではない．
  α の長さが 3 である場合も同様なので省略する．

- どんな長さが 6 の表現も整式でないこと
  α を長さが 6 である表現とする．α はその長さから文記号 1 文字だけの表現ではないため, 何らかの式構成操作の結果である．
  なんらかの表現 β があって $\alpha = \mathcal{E}_\neg(\beta)$ となっていたとする．すると α は $(\neg\beta)$ という形の表現であり, β の長さは 3 である．しかし長さが 3 の整式は存在しないため, β も整式でない．そして Proposition 1.1.14（85 ページ）より α も整式とならない．
  続いてなんらかの表現 β_1, β_2 があって, $\alpha = \mathcal{E}_\wedge(\beta_1, \beta_2)$ となっていたとする．すると α は $(\beta_1 \wedge \beta_2)$ という形の表現であり, β_1, β_2 の長さはどちらかは 1, どちらかは 2 という配分になっている．かりに β_1 の長さを 2 とすると, 長さが 2 の整式は存在しないため β_1 は整式でない．そして Proposition 1.1.14（85 ページ）より α も整式とならない．他の 2 項結合記号に関しても同様なので省略する．

- 長さが $1, 4, 5$ の整式が存在すること
  A, A' を文記号のいずれかとする．表現 $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ を, $\alpha_1 = A,\ \alpha_4 = (\neg A),\ \alpha_5 = (A \wedge A')$ とおくと, それぞれ長さが $1, 4, 5$ で, いずれも構成列を構築できることから整式である．

- 長さが $7, 8, 9$ の整式が存在すること
  1 つ上で示したことより長さが $1, 4, 5$ の整式が存在するので, それらの中から 1 つとり $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ とおく（添え字はその長さを表している）．表現 $\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$ を, $\alpha_7 = (\neg\alpha_4),\ \alpha_8 = (\neg\alpha_5),\ \alpha_9 = (\alpha_1 \wedge \alpha_5)$ とおくと, それぞれ長さが $7, 8, 9$ で, いずれも構成列を構築できることから整式である．

- 10 以上の任意の長さの整式が存在すること
  任意に 10 以上の自然数 n をとる．n に対してある自然数 m があって, $n = 7 + 3m$ また $n = 8 + 3m$ または $n = 9 + 3m$ のいずれかである．$n = 7 + 3m$ な n に対しては, 表現 α を $\alpha = \mathcal{E}_\neg^m(\alpha_7)$ とおく．ここで α_7 は 1 つ上で示したことにより存在する長さが 7 の何らかの整式で, $\mathcal{E}_\neg^m(\alpha_7)$ は α_7 に $\mathcal{E}_\neg$ 演算を m 回施したものとする．すると表現 α は長さが n であり, 構成列を構築できることから整式である．
  $n = 8 + 3m$ または $n = 9 + 3m$ であっても長さが $8, 9$ の整式を用いることで同様に示せるので省略する． □

Exercise 1.1.16（E:p19 3., K:p29 3.）.
α を整式として, α の中で 2 項結合記号が出現する箇所の数を c で, α の中で文記号が出現する箇所の数を s で表します．（たとえば, α が $(A \to (\neg A))$ の場合は, $c = 1,\ s = 2$ です．）帰納法の原理を使って, $s = c + 1$ であることを示しなさい． ■

Proof 整式の集合 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} = \{\alpha | s_\alpha = c_\alpha + 1\}$ とする．ここで s_α は α の中で文記号が出現する箇所の数, c_α は α の中で 2 項結合記号が出現する箇所の数とする．以下の 2 つのことを示せば帰納法の原理である Theorem 1.1.10（83 ページ）より証明完了となる．

- $\mathcal{A}$ にはすべての文記号が属すること
  任意に文記号をとり A とおく．A1 文字だけという表現は整式でもある．A という整式の 2 項結合記号の数は 0, 文記号の数は 1 より $\mathcal{A}$ に属する条件をみたす．

- $\mathcal{A}$ がすべての式構成操作について閉じていること
  任意に $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ をとる．それぞれの整式に対する $\mathcal{A}$ の条件にある数を $c_\alpha, s_\alpha,\ c_\beta, s_\beta$ とおくと, $s_\alpha = c_\alpha + 1,\ s_\beta = c_\beta + 1$ をみたしている．整式 γ に対して同様に c_γ, s_γ を定めておく．
  $\gamma = \mathcal{E}_\neg(\alpha)$ とすると, γ は α から 2 項結合記号も文記号も増えていない, つまり $c_\gamma = c_\alpha,\ s_\gamma = s_\alpha$ であり, 仮定より $s_\gamma = c_\gamma + 1$ をみたし $\gamma \in \mathcal{A}$, つまり $\mathcal{A}$ は式構成操作 $\mathcal{E}_\neg$ について閉じている．
  続けて $\gamma = \mathcal{E}_\wedge(\alpha, \beta)$ とすると, γ はその作り方から 2 項結合記号の出現する箇所の個数は α, β の 2 つのものに加えて

$\wedge$1 つが増えているので, $c_\gamma = c_\alpha + c_\beta + 1$ である. γ は α, β の 2 つに含まれるもの以外には文記号が増えていないので, $s_\gamma = s_\alpha + s_\beta$ である. すると

$$\begin{aligned} s_\gamma &= s_\alpha + s_\beta \\ &= (c_\alpha + 1) + (c_\beta + 1) \\ &= (c_\alpha + c_\beta + 1) + 1 = c_\gamma + 1 \end{aligned}$$

より $\gamma \in \mathcal{A}$, つまり $\mathcal{A}$ は式構成操作 $\mathcal{E}_\wedge$ について閉じている.
他の 2 項結合記号に関する式構成操作について同様なので省略する. □

Exercise 1.1.17（E:p19 4., K:p29 4.）.
φ で終わる構成列があって, φ は記号 A_4 を含んでいないとします. この構成列から A_4 を含む表現をすべて取り去ったとしても, その結果はやはり正しい構成列になっていることを示しなさい. ■

Proof $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ を $\varepsilon_n = \varphi$ な構成列とし, φ は記号 A_4 を含んでいないとする. $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ を $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ から A_4 を含む表現をすべて取り去った表現の有限列とする. 仮定より $\varepsilon'_m = \varphi$ である. ここで $m = n$ ならば「$\forall i(\varepsilon_i = \varepsilon'_i)$」となって, もともと $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ のどの表現にも A_4 が含まれていなかったことになり, 証明することがなくなってしまうので, $m < n$ としておく.
Definition 1.1.7（80 ページ）より $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ は「$\forall i \le n(\ (1) \vee (2) \vee (3)\ )$」をみたしている. いま, $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ が構成列でなかったとする. つまり「$\exists i' \le m(\ \neg(1') \wedge \neg(2') \wedge \neg(3')\ )$」として, そんな i' を 1 つ固定する. ここで

$\neg(1')$ $\varepsilon'_{i'} \notin$ PVAR.

$\neg(2')$ $\forall j < i'(\ \varepsilon'_{i'} \ne \mathcal{E}_\neg(\varepsilon'_j)\ )$.

$\neg(3')$ $\forall j, k < i'(\ \varepsilon'_{i'} \ne \mathcal{E}_\Box(\varepsilon'_j, \varepsilon'_k)\ )$.
ここで □ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

である. $\varepsilon'_{i'} = \varepsilon_i$ なる $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ に含まれる表現が存在するので, それも固定する.
ε_i が (1) をみたす, つまり文記号だったとすると, $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ の作り方から文記号だったものがそうでない表現に変わることはないので, $\varepsilon'_{i'}$ も文記号となるが, これは $\varepsilon'_{i'}$ が $\neg(1')$ をみたすことに反する.
つぎに ε_i が (2) をみたす, つまり $\exists j < i(\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$ だったすると, $\varepsilon'_{i'}$ が $\neg(2')$ をみたすことから, $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ のときに存在していた ε_j が $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ を作ったさいに取り去られた, つまりそのような ε_j は A_4 を含んでいたことになる. すると $\varepsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)$ より ε_i も, そして $\varepsilon'_{i'}$ も A_4 記号を含んでいることになるが, これは $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ の作り方に矛盾.
ε_i が (3) をみたすときも同様に示せるので省略. □

Exercise 1.1.18（E:p19 5., K:p29 5.）.
α は否定記号 $\neg$ を含まない整式とします.

(a) α の長さ（記号列を構成する記号の個数）は奇数であることを示しなさい.

(b) α を構成する記号のうち, 文記号が占める割合が 1/4 を超えることを示しなさい. ■

Proof (a)(b) に関してテキストのヒントを使って同時に示す.
$\mathcal{A} \subseteq$ WFF を否定記号 $\neg$ を含まない整式の集合とする. 整式に含まれる左括弧記号の個数[18] に関する累積帰納法を用いる. 任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる. 帰納法の仮定は「n 個未満の左括弧記号を含む任意のの整式に対して, ある $k \in \mathbb{N}$ があって, その長さは $4k + 1$ で, 文記号の数は $k + 1$ になっている」とする.
任意に左括弧記号の個数が n 個な整式 $\varphi \in \mathcal{A}$ をとる. いま $n = 0$, つまり φ が文記号 1 文字という形の整式ならば明らか.
よって $n > 0$ とすると, φ は否定記号以外の記号による式構成操作によって出来上がったものであるため, ある $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ があって $\varphi = \mathcal{E}_\wedge(\alpha, \beta)$ となっていたとすると, φ は $(\alpha \wedge \beta)$ という形になっている. φ の左括弧記号の個数が n 個であることから, α, β

[18] 別の言い方をすれば, その整式に対して施された否定記号以外の式構成操作の回数ともいえる. また Example 1.1.11（84 ページ）にある通り, どんな整式に含まれる左括弧と右括弧記号の数は同じということを知っていれば, 別に右括弧記号の個数でも一緒である.
また個人的にはもう少し証明に有利になるような帰納法の回し方はないものかとも思っている.

はそれぞれそれ未満, つまり n 個未満であるため, 帰納法の仮定からそれぞれに対してある $k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{N}$ があって, α, β のそれぞれの長さは $4k_\alpha + 1, 4k_\beta + 1$ となっていて, それぞれに含まれる文記号の個数は $k_\alpha + 1, k_\beta + 1$ 個である. すると φ の長さは, その形から α と β の長さに加えて, $(, \neg,)$ の 3 つの記号があることから, $k \in \mathbb{N}$ を $k = k_\alpha + k_\beta + 1$ とおけば,

$$\begin{aligned}(4k_\alpha + 1) \ + \ (4k_\beta + 1) \ + \ 3 \ &= \ 4(\ k_\alpha + k_\beta + 1\ ) \ + \ 1 \\ &= \ 4k + 1\end{aligned}$$

である.
φ に含まれる文記号の個数は α, β に含まれるものから増えていないので, $(k_\alpha + 1) + (k_\beta + 1) \ = \ (k_\alpha + k_\beta + 1) + 1 \ = \ k + 1$ である. よってそんな k の存在から左括弧記号が n 個のときも成立. そして φ が他の式構成操作によって出来上がったものであっても同様に示せるので省略する.
これまでに示したことにより, $\mathcal{A}$ に属する任意の整式 φ の長さは何らかの自然数 k をもって $4k + 1$ となっているので, その長さは奇数, つまり (a) は成立する.
そして φ を構成する記号の個数とはその長さと同じだから $4k + 1$ 個, そして文記号の個数は $k + 1$ であるから, 文記号の占める割合とは

$$(\varphi \text{ に含まれる文記号の個数})/(\varphi \text{ を構成する記号の個数}) \ = \ (k+1)/(4k+1) \ > 1/4$$

となって 1/4 を超えているため (b) も成立している. □

1.2 真理値割り当て

Definition 1.2.1（真理値割り当て (E:p20 21, K:p30 32)）.
$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{PVAR}$ とする.

1. Definition 1.1.1（76 ページ）とは別に新たに 2 つの記号を用意する. それらを F（これを **falsity**（偽）とよぶ）, T（これを **truth**（真）とよぶ）とする.
2. $v\colon \mathcal{A} \to \{F, T\}$ なる v を文記号の集合 $\mathcal{A}$ に対する **truth assignment**（真理値割り当て）という.
3. $\bar{A}$ を $\mathcal{A}$ から始めて 5 種類の式構成操作を使って構成できる整式全体の集合とする.
4. 真理値割り当て $v\colon \mathcal{A} \to \{F, T\}$ に対して, $\bar{v}\colon \bar{A} \to \{F, T\}$ を各 $A \in \mathcal{A}$ と $\alpha, \beta \in \bar{A}$ について以下の 6 条件をみたすものとする.

   4-0. $\bar{v}(A) = v(A)$

   4-1. $\bar{v}((\neg\alpha)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = F \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-2. $\bar{v}((\alpha \wedge \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = T \text{ かつ} \bar{v}(\beta) = T \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-3. $\bar{v}((\alpha \vee \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = T \text{ または} \bar{v}(\beta) = T \text{（もしくはその両方）のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-4. $\bar{v}((\alpha \to \beta)) = \begin{cases} F & \bar{v}(\alpha) = T \text{ かつ} \bar{v}(\beta) = F \text{ のとき} \\ T & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-5. $\bar{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta) \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$ ■

テキストにあるなし関わらず気になったことを注意しておくと,

1. 上記定義 1. では新たな記号が定義されたが, Definition 1.1.1（76 ページ）では記号を割り当てるもの（それを今後記号と同一視して使っていくもの）として, オブジェクトの列を使用したが, ここでは列であるようなことは書かれていない. それは Definition 1.1.1（76 ページ）の注意事項 6 でも書いたように, 今から無限個の記号を用意するわけでもないので, 列でもなくともよいということなのかもしれない.
もっというともし議論の進め方次第では先にすべての使う記号を定義しておく流儀もありえて, そのような場合には表 1.2 の括弧記号の前にこの T, F を追加してやればよい. ただその場合, 記号の有限列であるという表現の定義にて「真理値を表す記号は除く」と付け加えなくてはいけないだろう. これ以外にも定義や議論の中で煩わしい問題が増えるのかもしれない. ならばこのタイミングて新たな記号として用意するのが妥当なのかもしれない.

2. **真理値は記号なのか？**
このテキストでは文記号の表現を構成するモノも, 真理値として使用するモノもどちらも初めに用意された「記号」という同じ種類のものである. 他のテキストだと真理値とは何と定めているかを, 勉強会運営時点で所持していたロジックの入門書などをまとめて眺めてみた結果をこれから記す. 文論理の記号としては真理値を定めていないもの, つまり文記号や論理記号と真理値を同じ種類のものである（このテキストのようにどちらも記号であるなどと言い切っている）としていないものとして, [75], [71], [74], [63], [67] があった. 細かく見ていくと [75] ではここでいう文論理の記号を記号とは呼ばず語彙と呼んでいる. そして真偽を表すものとして 1, 0 を使うとしている. [71] でも真偽を表すものとして 1, 0 を使っているが, ここでいう文記号を命題変数, それ以外の記号を論理記号と呼ぶ流儀で, 文論理の表現を構成するものは全て記号であるというこのテキストと異なる点が興味深い. [74],[63] ではこのテキストとほぼ同じ形で文論理の記号を記号として導入している. しかし特徴的なのは, 真偽を表すものとして 1, 0 といった数学の記号ではなく, 日本語の漢字そのまま真, 偽を使っている点だろうか. ある種英語圏の人が 1, 0 ではなく T, F を使うような感覚と似たようなものかもしれない. ただしこのテキストは真理値割り当てをこのテキストのように変数記号から真理値への関数であるというような数学的に厳密な定義をしていない（なんなら真理値割り当てという言葉の定義も明瞭でない）. そんな議論の進め方をするテキストだからこそ, とくに真理値が漢字であっても困らないのであろう. むしろそれによって日本人にとって分かりやすい部分もあるように思える. [67] では真理値とは記号であると書いている. そして単なる記号でもないと表すためか T, F ではなく $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ としている. ただここでいう文記号とは何らかの集合の要素であるとし, 記号とは捉えず命題変数と呼んでいる. 「文記号や論理記号と真理値を同じ種類のものであるとしていない」という共通点はあれど, それ以外の定義の仕方も様々なことが分かる. これはいま気になっていることがそこまで大きな問題でないことを表しているし, そのときの議論の進めやすさや, その人それぞれのキャラクター・教育的配慮の表れに過ぎないのかもしれない.
ちなみに私がこの時点で所持していた本の中で明確に「文記号や論理記号と真理値を同じ種類のものである」という議論の進め方をしているものはなかった. [19]

3. **真理値が 2 値でない論理**
テキストでは「このテキストでは 2 値論理だけを考える」としているが, 別の, つまりもっと真理値が多い論理についても言及されている. 例えば 3 値論理, 真理値が $\aleph_0$ 個の論理, さらには真理値の集合を単位区間 $[0, 1]$ や適当な空間とするものなどがある.

4. 3. ではテキストの書き方に合わせたが, 「式構成操作を**有限回**施した整式全体」などと言ってもよいと思われる. そうすると 0 回の操作をした（なにもしていない）, つまり文記号 1 文字だけの整式も $\bar{\mathcal{A}}$ に属することが明瞭になる. そうすると $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$ であり, $\mathcal{A} = \operatorname{dom} v \subseteq \operatorname{dom}(\bar{v}) = \bar{\mathcal{A}}$ となって, $v = \bar{v} \restriction \mathcal{A}$ と分かるから, v は $\bar{v}$ の $\mathcal{A}$ への制限であるし, $\bar{v}$ は v の拡大である. [20]

5. テキストにあるとおり, 条件 4-1. から 4-5. までは以下のような表で表すこともできる.

[19] 私は初めてこの本を読んだとき, 真理値を文論理の記号として扱うことに驚きました. それは単にそのような流儀を初めて見たからです. 使い方として真理値以外の記号は文論理の表現を構成するためのもので, 真理値はそれらを充足関係などで評価するためのものという印象がありました. しかしこれまで何度か意識してきた通り, これから何らかの公理系の上にこれから文論理を実装していこうしているならば, 例えば集合論の公理系から文論理の議論を展開しようとしているのならば, 文論理の定義を記述するためのモノも全て同じ集合になる（集合論の公理系で扱えるものは集合だけなのだから）から, もともとから特に身分差を付け辛いという点では, 真理値も同じ記号（の仲間）としてしまう方が分かりやすいのかもと思いました. そうなると 1 つ上の注意事項後半の事柄を意識する必要があるとも思います.

[20] テキストでは拡張と書いてありますが, 写像の拡張概念はこのテキストでは定義されているわけではありません. もちろん単なる日常会話として十分に理解はできるのだけれど, 私が拡大とよぶ概念を拡張とよぶ流儀もあるので, 言葉として使うならば定義しておくべきだと思いました. かなり揚げ足ぎみなツッコミではあるとは承知しつつ, そのセットとして語られそうな制限概念については定義していたので, なおさら書いた次第です.

α	β	$(\neg\alpha)$	$(\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \to \beta)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Table 1.2: (E:p21 TABLE Ⅲ, K:p32 表 Ⅲ)

Example 1.2.2（E:p21 23, K:p32 34）.
整式 α を

$$((\ A\ \to\ (A_1 \to A_6)\ )\ \leftrightarrow\ (\ (A_2 \wedge A_1)\ \to\ A_6\ )\ )$$

とし, $\mathrm{dom}(v) = \{A_1, A_2, A_6\}$ な真理値割り当て v を, $v(A_1) = T,\ v(A_2) = T,\ v(A_6) = F$ で定めると, $\bar{v}(\alpha) = T$ である. ■

この例はテキストにて木を用いて解説されているし, とくに付け加えることもないので次の話題に移る.

Theorem 1.2.3（E:p23 THEOREM 12A, K:p34 定理 12A）.
集合 $\mathcal{A} \subseteq$ PVAR へのどんな真理値割り当て v についても, Definition 1.2.1（88 ページ）の条件 4-0. から 4-5. までに合致する写像 $\bar{v}\colon \bar{\mathcal{A}} \to \{T, F\}$ がただひとつ存在する. ■

次の記法は今後便利に思えたので導入する.

Definition 1.2.4.
$\Sigma \subseteq$ WFF に対して, その全ての要素である整式に含まれる文記号の集合を PVAR(Σ) で表す. またある $\alpha \in$ WFF でもって $\Sigma = \{\alpha\}$ となっていた場合は, PVAR$(\Sigma) =$ PVAR$(\{\alpha\})$ を単に PVAR(α) と略記する. ■

例えば $\Sigma = \{\ (A_1 \wedge A_2), (\neg A_2), A_3, (A_1 \to A_9)\ \}$ だったとき, PVAR$(\Sigma) = \{A_1, A_2, A_3, A_9\}$ となる. これを用いるとテキストよりは（記号は増えるものの）以下の定義の主張が少しは見やすくなるのではと考えた.

Definition 1.2.5（充足関係 (E:p23 24, K:p34 36)）.
整式の集合 Σ と整式 τ, σ に対して,

1. PVAR$(\tau) \subseteq \mathrm{dom}(v)$ な真理値割り当て v に対して $\bar{v}(\tau) = T$ であるとき, v **satisfies** τ（v は τ **を充足する**）という.

2. PVAR$(\Sigma) \cup$ PVAR(τ) を定義域として含むすべての真理値割り当てに対して, それが Σ のすべての要素を充足するならば τ をも充足するとき, Σ **tautologically implies** τ（Σ は τ を**トートロジー的に含意する**）といい, $\Sigma \models \tau$ で表す.

3. $\emptyset \models \tau$ であるとき, つまり PVAR(τ) を定義域として含むどんな真理値割り当ても τ を充足するとき, τ は **tautology**（**トートロジー**）であるといい, 単に $\models \tau$ で表す.

4. Σ が一元集合であるとき, つまり $\{\sigma\} \models \tau$ であるとき単に $\sigma \models \tau$ と表すことにする.
   $\sigma \models \tau$ かつ $\tau \models \sigma$ であるとき, σ と τ は **tautologically equivalent**（**トートロジー的に同値**）であるといい, $\sigma \models\!\!\!\!\models\!\!\!\dashv \tau$ で表す. ■

Example 1.2.6（E:p23, K:p35 36）.
$A, B \in$ PVAR とする.

1, Example 1.2.2（90 ページ）で挙げた整式 α と真理値割り当て v について, v は α を充足すると述べたが, それ以外のどの真理値割り当ても α を従属する. つまり α はトートロジーである.

2. $\{A, (\neg A)\} \models B$ である.

3. $\{A, (A \to B)\} \models B$ である. ■

Proof テキストより少し詳しく解説・証明する.

1. 改めて, 整式 α は

$$(\,(\,A\ \to\ (A_1 \to A_6)\,)\ \leftrightarrow\ (\,(A_2 \wedge A_1)\ \to\ A_6\,)\,)$$

となっていた. $\{A_1, A_2, A_6\} \subseteq \mathrm{dom}(v)$ な真理値割り当て v は, $v{\restriction}\{A_1, A_2, A_6\}$ を考えると, 以下の v_1 から v_8 のいずれかになるので,

	A_1	A_2	A_6
v_1	T	T	T
v_2	T	T	F
v_3	T	F	T
v_4	T	F	F
v_5	F	T	T
v_6	F	T	F
v_7	F	F	T
v_8	F	F	F

α がトートロジーであることを示すには v_1 から v_8 のいずれも α を充足することを確かめればよい. 1.2 節（92 ページ）を参考にして真理値表を書いて作業的に確かめることもできるが, ここではあえて真理値表を使わずに確かめてみる.
α_1 を $(A \to (A_1 \to A_6))$ と, α_2 を $((A_2 \wedge A_1) \to A_6)$ とおくと, α は $(\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$ で表せる. もし真理値割り当て v が $\bar{v}(\alpha) = T$ ならば $\bar{v}(\alpha_1) = \bar{v}(\alpha_2)$ でなくてはならない.
いまある真理値割り当て v が $v(A_2) = F$ ならば A_1, A_6 の値に関わらず $\bar{v}(\alpha_1) = T = \bar{v}(\alpha_2)$ となることが分かるので, v_3, v_4, v_7, v_8 は OK.
つぎに $v(A_2) = T$ とすると, $\bar{v}(\alpha_1) = T$ とするには $v(A_1) = F$ か, $v(A_1) = T$ かつ $v(A_6) = T$ とすればよい. $v(A_1) = F$ な v は $\bar{v}(\alpha_2) = T$ であるし, $v(A_1) = T$ かつ $v(A_6) = T$ な v も $\bar{v}(\alpha_2) = T$ である. よって $v(A_1) = F$ な v_5, v_6 も, $v(A_1) = T$ かつ $v(A_6) = T$ な v_1 も OK.
残るは v_2 だが, これは Example 1.2.2（90 ページ）で確かめているので OK.

2. 示すべき $\{A, (\neg A)\} \models B$ を定義に戻って論理式も使って書くと, $\{A, B\} \subseteq \mathrm{dom}(v)$ な任意の真理値割り当て v に対して

$$\forall \varphi \in \{A, (\neg A)\}\big(\ \bar{v}(\varphi) = T\ \to\ \bar{v}(B) = T\ \big) \tag{†}$$

となる. そして $\{A, B\}$ に対するどのような真理値割り当ても, $\{A, (\neg A)\}$ の全ての要素を同時に充足することはない, つまり式 (†) の前件は常に成立しないので, v が B を充足するかどうかに関係なく, $\{A, (\neg A)\} \models B$ である.

3. $A, (A \to B)$ のどちらも充足する真理値割り当て v は, $v(A) = v(B) = T$ となるものだけである.

> ∵ $\models$ の左右に現れる整式に含まれる文記号は A, B だけなので, A, B に関する割り当てだけ, つまり 4 種類だけに注目すればよい. そのすべてについて真理値表などで確かめてもよいが, 議論だけで確かめると, まず $\models$ の左の集合に A という整式があるので, 探すべき割り当て v は $v(A) = T$ でなくてはならない. そして $v(A) = T$ かつ $\bar{v}((A \to B)) = T$ とするには $v(B) = T$ でなくてはならない. そして他の値の組み合わせはどれも $A, (A \to B)$ を同時に充足することはない.

そしてそんな v はすでに $v(B) = T$ であるから, $\{A, (A \to B)\} \models B$ である. □

ここで以下の定理が紹介されていますが, テキストにある通りこの定理の証明は 1.7 節（94 ページ）にて出てきます.

Theorem 1.2.7（コンパクト性定理 (E:p24 COMPACTNESS THEOREM, K:p36 コンパクト性定理)）.
Σ は無限個の整式からなる集合で, いかなる Σ の有限な部分集合 Σ_0 についても, Σ_0 のすべての要素を同時に充足する真理値割り当てが存在するとする．このとき, Σ のすべての要素を同時に充足する真理値割り当てが存在する． ■

真理値表

主要なトートロジーの一覧

1. $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ の結合律と交換律. [21] ここでは $\wedge$ のみ記す
   associative laws（結合律）: $(\ ((A \wedge B) \wedge C) \ \leftrightarrow\ (A \wedge (B \wedge C))\ )$.
   commutative laws（交換律）: $(\ (A \wedge B) \ \leftrightarrow\ (B \wedge A)\ )$.

2. distributive laws（分配律）

$$(\ (A \wedge (B \vee C)) \ \leftrightarrow\ ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))\ ).$$
$$(\ (A \vee (B \wedge C)) \ \leftrightarrow\ ((A \vee B) \wedge (A \vee C))\ ).$$

3. 否定

   $(\ (\neg(\neg A)) \ \leftrightarrow\ A\ )$.

   $(\ (\neg(A \to B)) \ \leftrightarrow\ (A \wedge (\neg B))\ )$.

   $(\ (\neg(A \leftrightarrow B))\ ((A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B))\ \ )$.

   de Morgan' laws（ド・モルガンの法則）

$$(\ (\neg(A \wedge B)) \ \leftrightarrow\ ((\neg A) \vee (\neg B))\ ).$$
$$(\ (\neg(A \vee B)) \ \leftrightarrow\ ((\neg A) \wedge (\neg B))\ ).$$

4. その他

   excluded middle（排中律）: $(A \vee (\neg A))$.

   contradiction（矛盾律）: $(\neg(A \wedge (\neg A)))$.

   対偶 : $(\ (A \to B) \ \leftrightarrow\ ((\neg B) \to (\neg A))\ )$.

   移出 : $(\ ((A \wedge B) \to C) \ \leftrightarrow\ (A \to (B \to C))\ )$.

演習問題

Exercise 1.2.8（E:p27 1., K:p41 1.）.
■

Exercise 1.2.9（E:p27 2., K:p41 2.）.
■

Exercise 1.2.10（E:p27 3., K:p41 3.）.
■

[21] テキストでは結合律と交換律と書いてあるだけでした．いくらある程度数学に慣れている学部 3 年から 4 年の学生向け（このことは原著のまえがきに書いてあります）とはいえ, 一例だけでも書いてあげた方が丁寧かなと思い, 追記しました.

<u>**Exercise**</u> **1.2.11（E:p27 4., K:p42 4.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.12（E:p27 5., K:p42 5.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.13（E:p27 6., K:p42 6.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.14（E:p28 7., K:p42 7.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.15（E:p28 8., K:p43 8.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.16（E:p28 9., K:p43 9.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.17（E:p28 10., K:p43 10.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.18（E:p28 11., K:p44 11.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.19（E:p29 12., K:p44 12.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.20（E:p29 13., K:p44 13.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.21（E:p29 14., K:p45 14.）.**

■

<u>**Exercise**</u> **1.2.22（E:p29 15., K:p45 15.）.**

■

1.3 構文解析のアルゴリズム

構文解析のアルゴリズム

<u>**Lemma**</u> **1.3.1（E:p30 LEMMA 13A, K:p46 補題 13A）.**
どの整式もそれに含まれる右括弧・左括弧の個数は同じである. ■

<u>**Lemma**</u> **1.3.2（E:p30 LEMMA 13B, K:p46 補題 13A）.**

■

ポーランド記法

括弧の省略

演習問題

<u>Exercise</u> 1.3.3（E:p33 1., K:p51 1.）.

■

<u>Exercise</u> 1.3.4（E:p33 2., K:p52 2.）.

■

<u>Exercise</u> 1.3.5（E:p34 3., K:p52 3.）.

■

<u>Exercise</u> 1.3.6（E:p34 4., K:p52 4.）.

■

<u>Exercise</u> 1.3.7（E:p34 5., K:p52 5.）.

■

<u>Exercise</u> 1.3.8（E:p34 6., K:p52 6.）.

■

<u>Exercise</u> 1.3.9（E:p34 7., K:p52 7.）.

■

1.4 帰納法と再帰

帰納法

再帰

演習問題

1.5 文結合記号

演習問題

1.6 スイッチング回路

演習問題

1.7 コンパクト性と実効性

帰納法

再帰

演習問題

第 IV 部

基礎固めノート

色々な基礎的なことをまとめるノートです．また他のノートの参照先としても機能させるつもりです．

第2章　基礎数学

ここではある程度テキストなどでまとまっている, 学部レベルの分野を勉強したものをまとめています.

2.0　素朴集合論

ここでは（素朴）集合論の範囲内の知識や用語を整理します. 基本的には [61] や [60] を参考にしています.

2.0.1　集合の基礎

2.0.2　関係

あとでまとめるけど今は必要なものだけ.

Definition 2.0.1（帰納的半順序集合と Zorn の補題）.
半順序集合 $(X, \leq)$（つまり反射律, 推移律, 反対称律を満たす）に対して

- $(X, \leq)$ が**帰納的** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての全順序部分集合（上記 3 つに加えて三分律が成立）が上界をもつ
- $a \in X$ が $(X, \leq)$ において**極大** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\neg\exists x \in X(\ a \leq x\ \wedge a \neq x\ )$

Zorn の補題とは「帰納的半順序集合は少なくとも 1 つの極大元をもつ」という主張のこと. ■

2.0.3　写像・関数

Definition 2.0.2.
集合 X, Y に対して, 「f が X から Y への**写像**（**mapping** または **map**）」であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことをいう.

(f1) $f\ \subseteq X \times Y$.

(f2) $\forall x \in X\ \exists! y \in Y\big(\ \langle x, y\rangle \in f\ \big)$.

「f が X から Y への写像」であることを $f : X \to Y$ で表す.
$f : X \to Y$ のとき

- X を写像 f の**定義域**（**domain**）, または**始域**（こちらも **domain**）と呼び, $\mathrm{dom}(f)$ で表す.
- Y を写像 f の**値域**（**range**）, または**終域**（**codomain**）と呼び, $\mathrm{ran}(f)$ で表す. ■

文献によっては（どの文献かは忘れた）, $f : X \to Y$ で値域である Y が $\mathbb{N}$ や $\mathbb{R}$ といった数の集合であるときに**関数**（**function**）と呼んで, 写像と関数を使い分けたりするが, このノートでは特に使い分けせず, どちらも混ぜて使います（でも関数が多いと思う）.

上の順序対での写像の定義に, 普段よく使う記法を適用します.

Notation 2.0.3.
$f : X \to Y$ であるとき,「$\langle x, y\rangle \in f$」を「$f(x) = y$」で表し「$f$ は x を y へ写す」や「x の f による値は y」と言ったりする.
$f(x)$ を「x の f による値」と呼ぶ.
この記法を用いれば写像の定義 (f2) は以下のように書き換えられる.

$$\forall x \in X\ \exists! y\big(\ f(x) = y\ \big)$$

つまり定義域の任意の要素は一意的な値域の要素に対応していると言える. ■

ここでは写像を（順序対の）集合として定義したため, 集合に関する記法を使って議論することができます. それを踏まえて, 様々な用語を定めておきます.

Definition 2.0.4.
2 つの関数 f, g に対して, この 2 つを単なる順序対の集合とみて, $f \subseteq g$ が成立しているとき f を g の**部分関数**, g を f の**拡大**と呼ぶ.
さらに集合として f と g が等しいとき, つまり $f \subseteq g$ かつ $g \subseteq f$ なとき（写像として）f と g は**等しい**といい, 集合と同じで $f = g$ で表す.
定義域や値域にまで踏み込んだ定義が続きます.

(1) 関数 $f : X \to Y$ と $A \subseteq X$ に対し $f\restriction A = (A \times Y) \cap f$ とおく. つまり $f\restriction A$ は f の対応規則はそのままに定義域を A へ狭めた A から Y への関数のことです. $f\restriction A$ は関数 f の A への**制限**と呼びます.
つまり $f\restriction A$ は f の部分関数, f は $f\restriction A$ の拡大といえます.

(2) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ な 2 つの関数 f, g があったとき, $f \triangle g \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq g(x)\}$.

(3) ${}^{X}Y$ は $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$ なる関数全体の集合を表します. つまり ${}^{X}Y \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : X \to Y\}$. ■

写像が集合として表現できれば, 2 つの写像に集合演算を適用することができます. しかしその演算結果もまた写像になるかどうかはわかりません. 例えば $f(x) \neq g(x)$ な $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ が存在したときです. f, g の定義域が互いに素なとき, つまり $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \neq \emptyset$ なとき, $f \cup g$ は $\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)$ から $\mathrm{ran}(f) \cup \mathrm{ran}(g)$ への関数になります. つまり対応規則が

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathrm{dom}(f) \\ g(x) & x \in \mathrm{dom}(g) \end{cases}$$

な関数です.

2.0.4 集合族

2.0.5 色々な用語

様々な分野で現れる用語をまとめておきます.

Definition 2.0.5.
集合 X と X の部分集合の族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が X の**分割**（**partition**）であるとは以下の 3 つの条件を満たすことをいう.

- $\emptyset \notin \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.
- $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda(\lambda \neq \lambda' \to Y_\lambda \cap Y_{\lambda'} = \emptyset)$.
- $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. ■

Definition 2.0.6.
集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**有限交叉性**（**finite intersection property**）をもつ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall L \in [\Lambda]^{<\omega}\big(\ \bigcap_{i\in L} X_i \neq \emptyset\ \big)$. ■

compact 位相空間について述べる時のための定義を用意します.

Definition 2.0.7.
集合 X, $A \subseteq X$, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して

- $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の**被覆（covering）** $\overset{\text{def}}{\iff} A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.
- A の被覆 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\Lambda' \subseteq \Lambda$ に対して, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ もまた A の被覆のとき $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ を $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**部分被覆**という. とくに $|\Lambda'| < \omega$ のとき, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ は $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**有限部分被覆**とよぶ. ■

2.0.6 選択公理と直積の一般化

有限個の集合の直積を一般化する.

Definition 2.0.8.
Λ を添え字集合とした集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を以下のように定義する.

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{\ f : \lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda\big(\ f(\lambda) \in X_\lambda\ \big)\ \}.$$ ■

$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の要素は**選択関数**と呼びます. $\forall\lambda \in \Lambda(\ X_\lambda \neq \emptyset\ )$ であれば $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ も空にならないように思えますが, それについては選択公理で保証しなくてはいけません. また $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が空でないという主張は選択公理と同値になります.

Lemma 2.0.9.
集合族 $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ はどの要素も空でないとする. つまり $\forall\lambda \in \Lambda(A_\lambda \neq \emptyset)$. このとき以下は同値.

(1) （選択公理）$\mathcal{A}$ に選択関数が存在する.

(2) （直積定理）直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が空でない. ■

Proof (1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathcal{A}$ 上の選択関数を $f_{AC} : \mathcal{A} \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とおく. つまり $\forall\lambda \in \Lambda(f_{AC}(A_\lambda) \in A_\lambda)$ が成立しています. $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{\ f : \mathcal{A} \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda(\ f(A_\lambda) \in A_\lambda\ )\}$ という定義から $f_{AC} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1)
$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ よりある $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ が存在するが, これは $\mathcal{A}$ 上の選択関数です. □

よって以降は選択公理は常に仮定します. ですが, その公理を明記した場合には明記するようにします.

Definition 2.0.10.
Λ を添え字集合とした集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とその直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ があったとき, $\lambda \in \Lambda$ に対して, $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を $p_\lambda(f) = f(\lambda)$ で定義して, p_λ を $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の λ 成分への射影と呼ぶ. ■

簡単に分かることを示しておきます.

Lemma 2.0.11.
$\forall\lambda \in \Lambda(\ X_\lambda \neq \emptyset\ )$ ならば, どの射影 p_λ は全射. ■

Proof 選択公理によって $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ です．よって 1 つ $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ をとり固定します．全射であることを示すため, 任意に $x_\lambda \in X_\lambda$ をとります．関数 $g : \lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

$$g \ = \ \{\langle \lambda, x_\lambda \rangle\} \ \cup \ f \restriction (\Lambda \setminus \{\lambda\})$$

で定義すると, $g \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で, $p_\lambda(g) = x_\lambda$ です．そんな g の存在から p_λ は全射です． □

2.1 位相空間論

この節では位相空間の基本事項をまとめていきます．基本的には [60] を（かなり）参考にしています．ゆえにここに書いている証明は, そのノートを自分なりに整理したものになっています．

2.1.1 距離空間入門事項

ここでは距離空間に関する定義をまとめておく．

Definition 2.1.1.
集合 X に対して,$d : X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の**距離関数**（**metric**）であるとは, 以下の 3 条件を満たすことをいう．

(d1) (i) $\forall x, y \in X \big(\ d(x,y) \geq 0\ \big)$
(ii) $\forall x, y \in X \big(\ d(x,y) = 0 \ \leftrightarrow \ x = y\ \big)$

(d1) $\forall x, y \in X \big(\ d(x,y) = d(y,x)\ \big)$

(d1) $\forall x, y, z \in X \big(\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\ \big)$

d が X 上の距離関数のとき, 組 (X,d) を**距離空間**（**metric space**）という．d が文脈から明らかならば単に「距離空間 X」と呼ぶ． ■

続いて部分空間について定義しておく．

Definition 2.1.2.
距離空間 (X,d) と $A \subseteq X$ に対して, 組 $(A, d{\restriction}A \times A)$ を (X,d) の**部分距離空間**（**metric subspace**）, あるいは単に**部分空間**という． ■

続いて距離空間の構造を調べるための写像を定義します．

Definition 2.1.3.
距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) に対して,

- $f : X \to Y$ が**距離を保つ**, あるいは**等長写像**（**isometry**）
  $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, x' \in X \big(\ d_X(x,x') = d_Y(f(x), f(x'))\ \big)$
- X と Y が距離空間として**等長**（**isometric**）, あるいは**同型**（**isomorphic**）であるとは, X から Y への全射等長写像が存在することをいう． ■

通常「同型」とは構造（この場合は距離）が同じで, 全単射写像が存在する場合に使う言葉ですが, 上記の定義では全射であることしか要求していません．これは等長写像が常に単射であることが示せるからです．それを含めた細かな主張をまとめておきます．

Proposition 2.1.4.
距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) と $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して

(1) f が等長写像ならば単射.

(2) f,g が等長写像ならば, その合成 $g \circ f : X \to Z$ も等長写像

(3) f が全射等長写像ならば, その逆写像も等長写像

(4) f が全射等長写像ならば, X と $f[X]$ は距離空間として等長, つまり同型.

(5) X と Y が同型ならば, 等長写像 $f' : X \to Y,\ g' : Y \to Z$ が存在して $g' \circ f' = id_X,\ f' \circ g' = id_Y$ が成立する.

(6) $A \subseteq X$ に対して, 包含写像 $i_A : X \to X$ は (X, d_X) から部分空間 $(A, d{\restriction}A \times A)$ への等長写像. ■

Proof

(1) $f(x) = f(x') \wedge x \neq x'$ なる $x, x' \in X$ が存在したとします. x' より $d(x,x') > 0$,$f(x) = f(x')$ より $d_Y(f(x), f(x')) = 0$ ですが, これは f が等長写像であることに矛盾.

(2) 任意に $x, x' \in X$ をとります. $d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d_Z(\ g(f(x)), g(f(x'))\ )$ で, g が等長写像であることから $d_Z(\ g(f(x)), g(f(x'))\ ) = d_Y(\ f(x), f(x')\ )$. そして f が等長写像であることから $d_Y(\ f(x), f(x')\ ) = d_X(x, x')$. まとめると $d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d_X(x, x')$ より $g \circ f$ は等長写像.

(3) (1) より f は単射でもあるので,f は全単射より逆写像 f^{-1} が存在. ある $y, y' \in Y$ に対して $d_Y(y, y') = d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y'))$ でなかったとします. f は等長写像なので $d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = d_Y(\ f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(x'))\ ) = d_Y(y, y')$ となって矛盾.

(4) $f' : X \to f[X]$ を $f'(x) = f(x)$ とすれば, f' は X から $f[X]$ への等長写像で,f' はその作り方から全射. そんな全射等長写像の存在から X と $f[X]$ は同型です.

(5) X と Y が同型なので, その間の等長写像を f とおく. (1) より f は単射, X と Y が同型なので f は全射, 故に逆写像 f^{-1} が存在する. (3) より f^{-1} も等長写像で, f^{-1} が逆写像であることから $f^{-1} \circ f = id_X,\ f \circ f^{-1} = id_Y$ です. 等長写像 $f' : X \to Y,\ g' : Y \to Z$ が存在して $g' \circ f' = id_X,\ f' \circ g' = id_Y$ が成立する.

(6) 包含写像の定義と, 恒等写像が明らかに等長写像であることから, ここまでの議論より明らか. □

Definition 2.1.5.
距離空間 (X,d),$x \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して

- $U_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \{\ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\ \}$ として, これを x を中心とする半径 ε の**開球（open ball）**, **開円盤（open disc）**あるいは **ε 近傍**と呼ぶ.
- $S_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \{\ y \in X \mid d(x,y) = \varepsilon\ \}$ として, これを x を中心とする半径 ε の**球面（sphere）**と呼ぶ. ■

Definition 2.1.6.
距離空間 (X,d) と空でない $A \subseteq X$ に対して, $\delta(A) \overset{\text{def}}{=} \sup\{\ d(x,y) \mid x, y \in A\ \}$ として, これを A の**直径（diameter）**と呼ぶ. 必要ならば $\delta(\emptyset) = -\infty$ と約束する.
$\delta(A) < +\infty$ のとき,A は**有界（bounded）**という. ■

Proposition 2.1.7.
距離空間 (X,d) と $A, B \subseteq X$,A は空でないとするとき

(1) $A \subseteq B$ ならば $\delta(A) \leq \delta(B)$.

(2) A が有界 $\leftrightarrow \forall x \in X \exists r > 0(\ A \subseteq U_r(x)\ )$

(3) A が有界 $\leftrightarrow \exists x \in X \exists r > 0(\ A \subseteq U_r(x)\ )$

(4) $A \in [X]^{<\omega}$ ならば A は有界.

(5) $\forall x \in X \forall r > 0\big(\ \delta(U_r(x)) \leq 2r\ \big)$ ■

Proof

(1) 実数の 2 つの部分集合 R, R' に対して $R \subseteq R'$ ならば $\sup R \leq \sup R'$ です．$A \subseteq B$ だから $\{\ d(x,y) \mid x,y \in A\ \} \subseteq \{\ d(x,y) \mid x,y \in B\ \}$ なので, 両方の sup をとれば $\delta(A) \leq \delta(B)$ です.

(2) $(\rightarrow)$ A が有界なので, ある $s \in \mathbb{R}$ でもって $\delta(A) = s$ です．任意にとった x に対して, もう 1 つ $a \in A$ をとっておく．$r = s + d(x,a) + 1$ とおくと, $A \subseteq u_r(x)$ です．なぜならば任意に $b \in A$ をとると

$$\begin{aligned} d(x,b) &\leq d(x,a) + d(a,b) && \text{(d3) より} \\ &\leq d(x,a) + s \\ &\leq r \end{aligned}$$

つまり $b \in U_r(x)$ なので,$A \subseteq U_r(x)$ です.

$(\leftarrow)$ 任意に $x \in X$ をとり, それに対して存在する $r > 0$ を固定します．$A \subseteq U_r(x)$ より (1) より $\delta(A) \leq \delta(U_r(x))$, そしてその定義から $\delta(U_r(x)) \leq 2r$, つまり $\delta(A) \leq 2r < +\infty$ より A は有界です.

(3) (2) より明らか.

(4) A は有限なので, 集合 $\{\ d(x,y) \mid x,y \in A\ \}$ も有限です．するとこれは実数の有限集合なので最大元が存在し, 故に有界です.

(5) 任意の $y, z \in U_r(x)$ に対して

$$d(y,z) \ \leq\ d(y,x) + d(x,z) \ <\ r + r \ =\ 2r$$

より, その定義から $\delta(U_r(x)) \leq 2r$. □

(5) についてですが, これは距離空間やその r の取り方によって等号が成立したりしなかったりします. 例えば n 次元ユークリッド空間（Example 2.1.10）ならば, $\delta(U_r(x)) = 2r$（Proposition 2.1.11(8)）となり, 離散距離空間（Example 2.1.12）ならば, ある r に対して $\delta(U_r(x)) < 2r$（Proposition 2.1.13(3)）となります.

Definition 2.1.8.
距離空間 (X,d) と空でない $A, B \subseteq X$ に対して, $d(A,B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\ d(a,b) \mid a \in A \land b \in B\ \}$ として, これを A と B の**距離**と呼ぶ.
とくに A が一元集合のとき $A = \{a\}$ とおくならば, $d(\{a\},B)$ を単に $d(a,B)$ と書いて,a と B の距離という．つまり $d(a,B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\ d(a,b)$
$B\ \}$ ■

Proposition 2.1.9.
距離空間 (X,d) と空でない $A, B \subseteq X$ に対して,$A \cap B \neq \emptyset$ ならば $d(A,B) = 0$. ■

Proof $A \cap B \neq \emptyset$ なので $x \in A \cap B$ を 1 つ取れば, $d(x,x) \in \{\ d(a,b) \mid a \in A \land b \in B\ \}$, そして $d(x,x) = 0$ より,$d(A,B)$ の定義から $d(A,B) = 0$ です. □

しかしこの命題の逆は一般的には成立しません. Proposition 2.1.11(7) を見てください.

2.1.2 距離空間の例

ここでは 2.1.1 節の用語を使いながら, 距離空間の例をいくつか挙げていきます.

Example 2.1.10.
$n \in \omega$, $\mathbb{R}^n = \{\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \}$,$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$d(x, y)\ =\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

とおくと, d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.
$(\mathbb{R}^n, d)$ は ***n* 次元ユークリッド空間**（**n-dimensional Euclidian space**）と呼ばれる. ■

Proof 距離空間の 3 条件を d が満たすか確かめる.

(d1) (i) 各 $(x_i - y_i)^2$ は 0 以上, 非負なので, 故に $d(x, y)$ もいかなる $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対しても $d(x, y) \geq 0$ である.

(ii) ある $x, y \in \mathbb{R}^n$ があって $d(x, y) = 0$ とすると, 各 i に対して

$$0\ \leq\ (x_i - y_i)^2\ \leq\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\ = 0$$

より $(x_i - y_i)^2 = 0$, つまり $x_i - y_i = 0$ だから $x_i = y_i$. これが各 i について成立し, ゆえに $x = y$.

(d2) 各 i に対して $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ だから, d の定義より明らか.

(d3) 任意に $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ をとって, z も $z = (z_1, \cdots, z_n)$ とおく. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, つまり $d(x, y) + d(y, z) - d(x, z) \geq 0$ を示すことが目標になりますが, (d1) より $d(x, z), d(x, y), d(y, z)$ は非負なので, $\big(\ d(x, y) + d(y.z)\ \big)^2 - \big(\ d(x, z)\ \big)^2 \geq 0$ を示せば, 目標の証明になっている. $a_i = x_i - y_i$,$b_i = y_i - z_i$ とおくと, $x_i - z_i = a_i + b_i$ となる. すると

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\ ,\ d(y.z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}\ ,\ d(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2}$$

となって

$$\begin{aligned}
&\big(\ d(x, y) + d(y.z)\ \big)^2 - \big(\ d(x, z)\ \big)^2 \\
&= \big(\ d(x, y)^2 + 2d(x, y)d(y, z) + d(y, z)^2\ \big) - \big(\ d(x, z)\ \big)^2 \\
&= \left(\ \textstyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \right) - \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \\
&= \left(\ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \right) - \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2) \\
&=\ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 - \big(\ \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \big) \\
&=\ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}\ -\ 2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\ =\ 2\left(\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}\ -\ \sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)
\end{aligned}$$

より,$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}\ -\ \sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\ \geq\ 0$ を示す. そのために

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)^2\ \leq\ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\right)$$

を示します. 上記の式は **Schwarz の不等式**（の別表現）と呼ばれています.
$\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 = 0$ ならば, 全ての b_i が 0 だと分かり, 両辺 0 になって成立.

$\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \neq 0$ とする．どの b_i^2 も非負なので, $\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 > 0$ です．任意に $t \in \mathbb{R}$ をとり, $\sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)^2$ を考えるとこれも非負, そして

$$0 \ \leq \ \sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)^2 \ = \ \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2t\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) + t^2\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2$$

で, $\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 > 0$ より, これを t を変数とした不等式とすると, その判別式は

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \right) \ - \ 4\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \right) \ \leq 0$$

つまり

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \right) \ - \ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \right) \ \leq 0$$

よって, $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \right)^2 \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \right)$ が証明できた. □

この空間について前節の用語を振り返ります.

Proposition 2.1.11.
1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d)$ と $x, y \in \mathbb{R}$,$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$

(2) $U_\varepsilon(x) \ = \ (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

(3) $S_\varepsilon(x) \ = \ \{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}$

(4) 何らかの $r \in \mathbb{R}$ に対して, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x_r$,$g(x) = x - r$ とすれば, f, g は 1 次元ユークリッド空間から自身への等長写像になっている.

(5) $d{\restriction}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ や $d{\restriction}\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ 上の距離関数となり, この距離により $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ は 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分距離空間になる.

2 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ と $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$（$\mathbb{R}$ の要素を (x, y) と書くと区間に見えるので, ここでは $\langle x, y\rangle$ と書くことにした）, $\varepsilon > 0$ に対して

(6) $U_\varepsilon(\langle x, y\rangle) \ = \ \{ \ \langle x', y'\rangle \mid (x'-x)^2 + (y'-y)^2 < \varepsilon^2 \ \}$

(7) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を $A = \{\langle 0, x\rangle | x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{\langle x, \frac{1}{x}\rangle | x \in \mathbb{R}\}$ とおくと, $A \cap B = \emptyset$ かつ $d(A, B) = 0$ が成立.

n 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ と $x \in \mathbb{R}^n$,$r > 0$ に対して

(8) $\delta(U_r(x)) = 2r$. ■

Example 2.1.12.
集合 X に対して,$d : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) \ = \ \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

で定めると, d は X 上の距離関数で, 距離空間 (X, d) は**離散距離空間**（**discrete metric space**）と呼ぶ. ■

Proof (d1), (d2) はその定義より明らか. (d3) に関しては任意にとった 3 点 $x, y, z \in X$ を, $x = y \wedge y = z$, $x \neq y \wedge y = z, \cdots$ など場合分けすれば, その全てにおいて成立することが確かめられる. □

Proposition 2.1.13.
離散距離空間 (X, d) と $x \in X$,$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $U_\varepsilon(x) \ = \begin{cases} \{x\} & \varepsilon \leq 1 \\ X & \varepsilon > 1 \end{cases}$

(2) $S_\varepsilon(x) \ = \begin{cases} \emptyset & \varepsilon \neq 1 \\ X \setminus \{x\} & \varepsilon = 1 \end{cases}$

(3) $r \leq 1$ のとき, $\delta(U_r(x)) = 0$, つまり $\delta(U_r(x)) < 2r$. ■

2.1.3 位相空間の定義と閉集合

位相空間を以下のように定義する.

Definition 2.1.14.
空でない集合 X に対して, そのべき集合の部分集合 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X 上の**位相**（**topology**）であるとは, 以下の 3 条件をみたすことである.

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\ O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\ )$.

(O3) $\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}(\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}\ )$.

X と X 上の位相 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**（**topological space**）という.
$(X, \mathcal{O})$ が位相空間であるとき, $\mathcal{O}$ の要素を（その位相空間の）**開集合**（**open set**）という. ■

また位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における $\mathcal{O}$ のことを位相ではなく, その空間の**開集合系**（**system of open sets**）とよぶこともある.

ある集合に位相を入れるとか, 位相を定めるというのは, 上の 3 条件をみたす集合たちを定めること, つまり開集合全体を定めるという意味になる.
位相を入れられた集合, つまり $(X, \mathcal{O})$ における X のことを, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の**台集合**（**underlying set**）と呼ぶこともある[1]
.
位相空間によっては開集合はなんであるかを提示しにくい場合もあるそのために位相の定め方は他にもいくつかある.

開集合の双対概念として閉集合がある.

Definition 2.1.15.
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, $F \subseteq X$ が**閉集合**（**closed set**）であるとは, $X \setminus F$ が X の開集合, つまり $X \setminus F \in \mathcal{O}$ となることである.
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合全体の集合をその位相空間の**閉集合系**（**system of closed sets**）とよび, $\mathcal{F}$ や $\mathcal{C}$ などで表す[2] . ■

閉集合が開集合の双対概念である由縁は以下のような開集合と似た（対照的な）性質を持つことにある.

Proposition 2.1.16.
$\mathcal{F}$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合系とするとき, $\mathcal{F}$ は以下の 3 つの性質をみたす.

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.

(F2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\ F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}\ )$.

(F3) $\forall \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}(\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}\ )$. ■

Proof 証明は省略する. □

[1] 台集合とは Wikipedia の「数学的構造」[21] によると, (何の構造も持たない) 単なる「はだか」の集合という意味で使い, とくにその構造は位相でなくても使うことができる. 個人的には便利な言葉だと思うので以降も使っていく.
[2] ここらへんはテキストによっても変わるので, 自分もその時々の記号の使われ具合によって変えることにする.

集合 X に位相を定めるとき, 開集合が何かを定めるのではなく, 閉集合とは何かを定めた上でその補集合全体を開集合と定める方法もある．これは Definition 2.1.14（107 ページ）の下の文章にも書いた, 開集合を直接定める以外の位相を定める方法の 1 つである．これは以下のような定理を示すことで分かる．

Theorem 2.1.17.
集合 X に対して $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が Proposition 2.1.16（107 ページ）の (F1)〜(F3) をみたしているとする．このとき $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を

$$\mathcal{O} = \{ O \subseteq X \mid X \setminus O \in \mathcal{F} \}$$

で定めると,

(1) $\mathcal{O}$ は X の位相となり,

(2) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{O}$ の閉集合系になっている．

(3) また位相空間の開集合系から定めた位相はもとの位相と一致する． ■

Proof (1) と (2) の証明は省略する．
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ とその閉集合系 $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \{ O \subseteq X \mid X \setminus O \in \mathcal{F} \}$ とおく．証明すべきことは $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ である．
$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ を示すため任意に $O \in \mathcal{O}$ をとる．$F = X \setminus O$ とおくと, $X \setminus F = X \setminus (X \setminus O) = O$ より $X \setminus F \in \mathcal{O}$, つまり F は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合より $F \in \mathcal{F}$．すると $X \setminus O = F \in \mathcal{F}$ より $O \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$．
$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{O}$ も同様に示せるので省略する． □

2.1.4 開基と準基

Definition 2.1.18.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**開基**（**open base**）であるとは, 任意の開集合が $\mathcal{B}$ に属する集合の和集合で表現できるときをいう．論理式で書くと $\forall O \in \mathcal{O} \exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B} \big(O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \big)$ です． ■

Definition 2.1.19.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間が**第二可算公理**（**second axiom of countability**）を満たすとは, $(X, \mathcal{O})$ に高々可算な開基が存在するときをいう． ■

Definition 2.1.20.
集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{G}$ が生成する位相とは, $\mathcal{G}$ を含む位相全ての共通部分, すなわち $\mathcal{G}$ の元が全て開集合になるような最弱の位相のことをいい, $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ で表す． ■

Definition 2.1.21.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**準基**（**sub base**）であるとは, $\mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の開基になること, つまり $\{ \bigcap_{i \in [n]} B_i \mid \{B_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{B} \}$ が $\mathcal{O}$ が開基になっているということです． ■

$\mathcal{B}$ の 0 個の元の共通部分は X であると決めておきます．
ある集合族で生成される位相は, どんな集合が開集合になっているか分かりにくい．以下の補題で少しは分かりやすくなると思います．

Lemma 2.1.22.
集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{G}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ の準基になっている．つまり $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ における開集合とは,「$\mathcal{G}$ の元の有限個の共通部分」たちの和集合で表せます． ■

Proof $\mathcal{G}$ の有限個の元の共通部分として表せる集合全体を $\hat{\mathcal{G}}$ と表す, つまり

$$\hat{\mathcal{G}} = \{ \bigcap_{i \in [n]} G_i \mid \{G_i\}_{i \in n} \subseteq \mathcal{G} \}$$

です．さらに $\hat{\mathcal{G}}$ の元の和集合全体として表せる集合全体を $\mathcal{O}$ で表す，つまり

$$\hat{\mathcal{O}} = \{ \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \mid \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \hat{\mathcal{G}} \}$$

示すべきをここまでの定義を使って書けば $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{G})$ です．

- $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$
  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$ で,$\mathcal{O}(\mathcal{G})$ は定義から位相です．すると位相は，有限共通部分で閉じているから $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$，そしてそれらの和集合で閉じているから $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$ です．

- $\mathcal{O}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{O}$
  その定義から $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}$ なので，$\mathcal{O}$ が位相であることを示せば OK です．なぜならば $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$ を含む最小の位相だからです．

  - $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
    $\emptyset$ は $\hat{\mathcal{O}}$ の 0 個の元の和集合として表現できます．X は $\mathcal{B}$ の 0 個の元の共通部分として $\hat{\mathcal{O}}$ に属し，それの 1 つの和集合として $\mathcal{O}$ に属します．
  - 有限共通部分で閉じること
    任意に $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ をとると，$\{O^1_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$，$\{O^2_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$ があって，$O_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_i} O^i_\lambda$（$i = 1,2$）です．$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda_1\times\Lambda_2} O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}$ で，$\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ とおけば,$\{O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}\}_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda}$ は，各 $O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}$ が $\hat{\mathcal{G}}$ に属することから，$\hat{\mathcal{G}}$ の部分集合族であり，つまり $O_1 \cap O_2$ は $\{O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}\}_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda}$ の和集合なので $\mathcal{O}$ に属します．
  - 和集合で閉じること
    任意に $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ をとります．各 O_λ に対し,Λ^λ を添え字集合とした集合族 $\{O_\mu\}_{\mu\in\Lambda^\lambda} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$ があって $O_\lambda = \bigcup_{\mu\in\Lambda^\lambda} O_\mu$ です．$\Lambda' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Lambda^\lambda$ とおくと,$\{O_\mu\}_{\mu\in\Lambda'}$ も $\hat{\mathcal{G}}$ の集合族で $\bigcup_{\mu\in\Lambda} O_\mu \in \mathcal{O}$ です．そして $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\mu\in\Lambda} O_\mu$ より,$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ です．□

開基の双対概念として閉基というものがあります．これについて性質も含めて簡単にまとめておきます．

Definition 2.1.23.
X を位相空間とし，$\mathcal{C}$ をその閉集合全体の集合とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の**閉基**（**base for the closed sets**）であるとは，任意の閉集合が $\mathcal{B}$ に属する集合の共通部分で表現できるときをいう．[3] ■

定義だけなら [66] にも載っていましたが，閉基にどのような性質があるかは Wikipedia の『開基』のページ [2] を参考にしました．以下の命題はそれに載っていたものです．

Proposition 2.1.24.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{C}$ をその閉集合全体の集合とするとき，以下は同値．

(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の閉基である．

(2) $\mathcal{F} = \{F | \exists C \in \mathcal{B}(F = X \setminus C)\}$ が $\mathcal{O}$ の開基． ■

Proof

(1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathcal{F}$ がその定義から開集合の族であることは明らか．開基であることを示すため，任意に開集合 $O \in \mathcal{O}$ をとる．$C = X \setminus O$ とすると，C は閉集合であることと $\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の閉基であることから，

$$\exists \{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(C = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda)$$

が成立するので，そんな $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を 1 つとって固定する．そして $X \setminus O = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ より，$O = X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X \setminus C_\lambda)$．ここで $F_\lambda = X \setminus C_\lambda$ とおくと，各 F_λ は $\mathcal{F}$ に属し，これは O が $\mathcal{F}$ の要素の和集合で表せた，つまり $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることを示したことになる．

[3] 開基が open base なので閉基は closed base なのかと思ったが，どうやらそのような呼び方は定着していないっぽい．

(2) $\Rightarrow$ (1)
(1) $\Rightarrow$ (2) の議論を反転させることで同様に示すことができるので省略する. □

開基・閉基について成り立つことで, 証明がパラレルに済みそうなものをまとめてみます.

Proposition 2.1.25.
位相空間 X の開集合全体を $\mathcal{O}$, 閉集合全体を $\mathcal{C}$ とおき, さらに $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して, 以下の (1-1) と (1-2), (2-1) と (2-2) はそれぞれ同値である.

(1-1) $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基.

(1-2) 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して, ある $U \in \mathcal{B}$ が存在して, $x \in U$ かつ $U \subseteq O$ となる.

(2-1) $\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の閉基.

(2-2) 任意の $C \in \mathcal{C}$ と $x \notin C$ に対して, ある $F \in \mathcal{B}$ が存在して, $A \subseteq F$ かつ $x \notin F$ となる. ■

Proof

(1-1) $\Rightarrow$ (1-2)
任意に $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ をとる. この O に対して $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから, $\mathcal{B}_O \subseteq \mathcal{B}$ があって $O = \bigcup \mathcal{B}_O$ となっている. すると $x \in O$ より $x \in \bigcup \mathcal{B}_O$ より, ある $U \in \mathcal{B}_O$ があって $x \in U$. そして $U \in \mathcal{B}_O$ より $U \subseteq O$. そんな U の存在から (1-2) は成立.

(1-2) $\Rightarrow$ (1-1)
任意の $O \in \mathcal{O}$ をとる. (1-1) より各 $x \in O$ に対して存在する $\mathcal{B}$ の要素を U_x とおく. すると $O = \bigcup_{x \in O} U_x$ であり, $\{U_x\}_{x \in O} \subseteq \mathcal{B}$ の存在から $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基である.

(2-1) $\Rightarrow$ (2-2)
任意に $C \in \mathcal{C}$ と $x \notin C$ をとる. $\mathcal{B}\mathcal{C}$ の閉基であることから, ある $\mathcal{B}_C \subseteq \mathcal{B}$ があって $C = \bigcap \mathcal{B}_C$ となっている. ここで $\exists B \in \mathcal{B}_C (x \notin B)$ が成立する.

> $\because$ もし $\forall B \in \mathcal{B}_C (x \in B)$ とすると, $x \in \bigcap \mathcal{B}_C$ より, $C = \bigcap \mathcal{B}_C$ と $x \notin C$ に矛盾する.

そんな B を 1 つとると, $C = \bigcap \mathcal{B}_C \subseteq B$ と $x \notin B$ より, そんな B の存在から (2-2) が成立.

(2-2) $\Rightarrow$ (2-1)
任意に $C \in \mathcal{C}$ をとる. 各 $x \in X \setminus C$ に対して (2-2) より存在する F を F_x とおく. すると $\{F_x\}_{x \in X \setminus C}$ は $C = \bigcap_{x \in X \setminus C} F_x$ をみたす. そんな $\{F_x\}_{x \in X \setminus C} \subseteq \mathcal{B}$ の存在から $\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ の閉基. □

さきの命題を利用して集合族が開基・閉基になる別の同値条件を紹介する.

Proposition 2.1.26.
$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して以下の (1) と「(2-1) かつ (2-2)」は同値. さらに (3) が成立する.

(1) $\mathcal{B}$ は集合 X のある位相の開基である.

(2-1) $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(2-2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \in B_1 \cap B_2$ に対して, ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \in B$ かつ $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

(3) 「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を開基とする集合 X の位相は一意的である. ■

Proof

(1) ⇒ (2-1) かつ (2-2)
$\mathcal{B}$ を X の位相 $\mathcal{O}$ の開基とする.

(2-1) であること.
$X \in \mathcal{O}$ より $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから, $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{B}$ があって $X = \bigcup \mathcal{B}_X$ となっている. $\bigcup \mathcal{B}_X \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ より $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(2-2) であること.
任意に $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ をとると, $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから $B_1, B_2 \in \mathcal{O}$ より $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{O}$. このときある x が $x \in B_1 \cap B_2$ ならば $\exists B \in \mathcal{B}(\ x \in B\ \wedge\ B \subseteq B_1 \cap B_2\ )$. これは Proposition 2.1.25（110 ページ）より明らか.

(2-1) かつ (2-2) ⇒ (1)
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が (2-1) かつ (2-2) をみたしているとする.

$$\mathcal{O}\ =\ \{\ \bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\ \} \tag{†}$$

するとこの $\mathcal{O}$ は X の位相になっている. それを確かめるため位相の定義の 3 条件（Definition 2.1.14（107 ページ））を示す.

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ を $\mathcal{A} = \emptyset$ とすれば, $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \emptyset = \emptyset$ より, そんな $\mathcal{A}$ の存在から, $\emptyset \in \mathcal{O}$.
$X = \bigcup \mathcal{B}$ より $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ とすれば, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ で $\bigcup \mathcal{A} = X$ より, そんな $\mathcal{A}$ の存在から, $X \in \mathcal{O}$.

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\ O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\ )$.
任意に $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ をとると, $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$ があって $O_i = \bigcup \mathcal{A}_i$ となっている（$i = 1, 2$）. x を $x \in O_1 \cap O_2$ とすると, $x \in O_i = \bigcup \mathcal{A}_i$ より, ある $B_i \in \mathcal{A}_i$ があって $x \in B_i$ かつ $B_i \subseteq O_i$ となっている. そんな B_1, B_2 を 1 つ固定する. すると $x \in B_1 \cap B_2$ となっていて, (2-2) よりある $B_x \in \mathcal{B}$ があって $x \in B_x$ かつ $B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq O_1 \cap O_2$ である. 各 x ごとに存在するそんな B_x を集めた集合を $\mathcal{A}$ とおくと, つまり

$$\mathcal{A}\ =\ \{\ B_x \mid x \in O_1 \cap O_2\ \wedge\ x \in B_x\ \wedge\ B_x \subseteq O_1 \cap O_2\ \}$$

であり, その定義から $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ であり, $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x \in O_1 \cap O_2} B_x$ であることに注意すれば, $\bigcup \mathcal{A} = O_1 \cap O_2$ である. そんな $\mathcal{A}$ の存在から, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) $\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}(\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}\ )$.
任意に $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ をとると, $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって, 各 $\mathcal{A}_\lambda$ が $\mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$ かつ $O_\lambda = \bigcup \mathcal{A}_\lambda$ となっている. すべての $\mathcal{A}_\lambda$ が $\mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$ より, $\mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とおくと $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ である. すると $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup \mathcal{A}_\lambda = \bigcup \mathcal{A}$ となるので, $\mathcal{A}$ の存在から, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

明らかに $\mathcal{B}$ はこの位相 $\mathcal{O}$ の開基である.

(3)
「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を開基とする位相を $\mathcal{O}$ とおくと, 開基の定義から $\mathcal{O} = \{\ O \mid \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(O = \bigcup \mathcal{A})\ \}$ である. これは † での $\mathcal{O}$ と同じもの, つまり $\mathcal{B}$ を開基とする位相はこの $\mathcal{O}$ のみである. □

同様の事実が閉基についても成立する.

Proposition 2.1.27.
$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して以下の (1) と「(2-1) かつ (2-2)」は同値. さらに (3) が成立する.

(1) $\mathcal{B}$ は集合 X のある位相の閉基である.

(2-1) $\emptyset = \bigcap \mathcal{B}$.

(2-2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \notin B_1 \cup B_2$ に対して, ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \notin B$ かつ $B_1 \cup B_2 \subseteq B$.

(3) 「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を閉基とする集合 X の位相は一意的である. ■

Proof 「(1) $\Rightarrow$ (2-1) かつ (2-2)」は Proposition 2.1.26（110 ページ）と同様にできるので省略する．

(2-1) かつ (2-2) $\Rightarrow$ (1)

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が (2-1) かつ (2-2) をみたしているとする．

$$\mathcal{F} \;=\; \{ \bigcap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \} \tag{†}$$

するとこの $\mathcal{F}$ は X の閉集合系になっている．それを確かめるため閉集合系の 3 つの性質（Proposition 2.1.16（107 ページ）の (F1)〜(F3)）を確かめる．

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
$\emptyset = \bigcap \mathcal{B}$ より $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ とおけば, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ かつ $\emptyset = \bigcap \mathcal{A}$ より, そんな $\mathcal{A}$ の存在から $\emptyset \in \mathcal{F}$.
なんらかの $\mathcal{A}$ に対して集合族の共通部分の定義から $\bigcap \mathcal{A} = \{ x \in X \mid \forall A \in \mathcal{A}(x \in A) \}$ より, $\mathcal{A} = \emptyset$ とおくと, $\forall A \in \emptyset(x \in A)$ はどんな x についても成立する, つまり $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \emptyset = X$ となる．そんな $\mathcal{A}$ の存在から $X \in \mathcal{F}$.

(F2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\ F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}\ )$.
任意に $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ をとると, $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$ があって $F_i = \bigcap \mathcal{A}_i$ となっている（$i = 1, 2$）．x を $x \notin F_1 \cup F_2$ とすると, $x \notin F_i = \bigcap \mathcal{A}_i$ より, ある $B_i \in \mathcal{A}_i$ があって $x \notin B_i$ かつ $F_i \subseteq B_i$ となっている．そんな B_1, B_2 を 1 つ固定する．
すると $x \notin B_1 \cup B_2$ となっていて, (2-2) よりある $B_x \in \mathcal{B}$ があって $x \notin B_x$ かつ $F_1 \cup F_2 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq B_x$ となっている．各 x ごとに存在するそんな B_x を集めた集合を $\mathcal{A}$ とおくと, つまり

$$\mathcal{A} \;=\; \{ B_x \mid x \notin F_1 \cup F_2 \ \wedge\ x \notin B_x \ \wedge\ F_1 \cup F_2 \subseteq B_x \}$$

であり, その定義から $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ であり, $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{x \notin F_1 \cup F_2} B_x$ であることに注意すれば, $\bigcap \mathcal{A} = F_1 \cup F_2$ である．

> $\because$ どの B_x も $F_1 \cup F_2 \subseteq B_x$ より $F_1 \cup F_2 \subseteq \bigcap \mathcal{A}$ は明らかである．
> $\bigcap \mathcal{A} \subseteq F_1 \cup F_2$ を示すために $X \setminus F_1 \cup F_2 \subseteq X \setminus \bigcap \mathcal{A}$ を確かめる．任意に $x \in X \setminus F_1 \cup F_2$ な x, つまり $x \notin F_1 \cup F_2$ な $x \in X$ をとると $x \notin B_x$ かつ $B_x \in \mathcal{A}$ なる B_x がある．そんな B_x の存在から $x \in \mathcal{A}$ である．

そんな $\mathcal{A}$ の存在から, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

(F3) $\forall \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}(\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}\ )$.
これは Proposition 2.1.26（110 ページ）の (O3) を反転させればできるので省略する．

Theorem 2.1.17（108 ページ）のようにこの $\mathcal{F}$ を用いて位相を定めれば, 明らかに $\mathcal{F}$ はその位相の閉基である．

(3)

すぐ上のように X に位相を定めたとすると, あとは Proposition 2.1.26（110 ページ）と同様にできる． □

2.1.5 直積位相

有限個の集合の直積集合には以下のように位相を入れるのが一般的です．

Definition 2.1.28.
$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．X と Y の**直積空間**（**product space**）とは, $X \times Y$ に $\{ O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathcal{O}_X, O_Y \in \mathcal{O}_Y \}$ が生成する位相を入れた位相空間のことで, この位相を**直積位相**（**product topology**）という． ■

より一般的な直積集合に対しては以下のように位相を定義します．**??**節（**??**ページ）の Definition 2.0.8 とそのあとの議論も参考にしてください．

Definition 2.1.29.
$\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする．この集合族の**直積空間**とは, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に $\{ p_\lambda^{-1}[O] \mid O \in \mathcal{O}_\lambda \}$ が生成する位相を入れた空間のこと, この位相を**直積位相**という． ■

直積空間を構成する X, Y や X_λ のことを**因子空間**と呼びます.
直積位相は以下の補題から, どのような集合が開集合になっているか分かりやすくなります.

Lemma 2.1.30.
直積位相空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に対して

$$\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \mid \exists L \in [\Lambda]^{<\omega}\big(\ \lambda \in L \to B_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\ \vee\ \lambda \notin L \to B_\lambda = X_\lambda\ \big)\ \}$$

は直積位相の開基になっている. ■

Proof 証明は Lemma 2.1.22 より明らかです. □

2.1.6 compact な位相空間

被覆の定義,Definition 2.0.7 も参考にしてください.

Definition 2.1.31.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間として

- $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ が $A \subseteq X$ の被覆のとき, $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の**開被覆(open covering)**とよぶ.
- $(X, \mathcal{O})$ が **compact** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: X の開被覆 ($\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が有限部分被覆をもつ)
- $A \subseteq X$ が **compact** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 A が compact. ■

その定義からどんな有限集合上の位相も compact になります.

Lemma 2.1.32.
集合 X が $|X| < \omega$ ならば, 任意の X 上の位相 $\mathcal{O}$ に対し $(X, \mathcal{O})$ は compact. ■

Proof $|X| < \omega$ より $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ とおきます. 任意に X の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとると, X の被覆なので各 $i \leq n$ に対して $x_i \in O_\lambda$ なる λ が存在するので, それを λ_i とおき, $\Lambda' = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\}$ とします. $X = \bigcup_{0\leq i\leq n}\{x_i\} \subseteq \bigcup_{\lambda_i\in\Lambda'} O_{\lambda_i}$ より $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ は $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆だから, その存在から $(X, \mathcal{O})$ は compact. □

有限交叉性と compact 性の関係について述べます.

Lemma 2.1.33.
位相空間 X に対して, 以下は同値.

(1) X が compact.

(2) $\forall\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: 閉集合の族 $\big(\ \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: FIP をもつ $\to$ $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset\ \big)$. ■

Proof

(1) → (2)
任意に有限交叉性をもつ閉集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$ だったとすると, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^C = X$ より $\{F_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆です. ここで F^C とは F の補集合を表しています. (1) より $\{F_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限部分被覆をもつので, それを $\{F_i^C\}_{i\in L}$ とおけば $X = \bigcup_{i\in L} F_i^C$, つまり $\emptyset = \bigcap_{i\in L} F_i$ となりますが, これは $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限交叉性に矛盾.

(2) → (1)
任意に X の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる. X が有限部分被覆を持たなかった, つまり $\forall L \in [\lambda]^{<\omega}\big(\ X \neq \bigcup_{i\in L} O_i\ \big)$ です. 任意に $L \in [\lambda]^{<\omega}$ をとると, $X \neq \bigcup_{i\in L} O_i$ より $\exists x \in X\big(\ \forall i \in L(x \notin O_i)\ \big)$ です. そんな x を 1 つとれば $\forall i \in L(x \in O_i^C)$ が成立, つまり $x \in \bigcap_{i\in L} O_i^C$ なので $\bigcap_{i\in L} O_i^C \neq \emptyset$ です. これは閉集合の族 $\{O_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性を持つことを表しているので, (2) より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda^C \neq \emptyset$ でなくてはいけませんが, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda^C = \emptyset$ よりこれは矛盾, つまり X は有限交叉性をもちます. □

因子空間が有限個であるような直積空間は, 因子空間全てが compact ならば compact になります.

Theorem 2.1.34.
位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が共に compact ならば, 直積位相空間 $X \times Y$ も compact ■

Proof $\mathscr{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $X \times Y$ の開被覆として, $\mathscr{O}$ の有限部分被覆を構成します.

$$\mathcal{A} = \{O_\lambda^X\}_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{A}}} = \left\{\ O_\lambda^X \in \mathcal{O}_X \mid \exists G_1, \cdots, G_n \in \mathscr{O} \left(O_\lambda^X \times Y \ \subseteq \bigcup_{1 \le i \le n} G_i \right) \right\}$$

とおくと,$\mathcal{A}$ は X の開被覆です.

∵ 各点 $x \in X$ が何らかの $\mathcal{A}$ の要素に属することを示す. 任意に $x \in X$ をとる. この x に対し Y の部分集合族 $\mathcal{B}_x$ を以下のように定義する.

$$\mathcal{B}_x = \{\ O^Y \in \mathcal{O}_Y \mid \exists O^X \in \mathcal{O}_X\ \exists G \in \mathscr{O} \left(\ x \in O^X \ \wedge \ O^X \times O^Y \subseteq G\ \right) \}$$

このとき $\mathcal{B}_x$ は Y の開被覆.

∵ 各点 $y \in Y$ が何らかの $\mathcal{B}_x$ の要素に属することを示す. 任意に $y \in Y$ をとる. この y と先に固定されている x に対して, $\mathscr{O}$ は $X \times Y$ の開被覆だから $\langle x, y \rangle$ はある要素 $G \in \mathscr{O}$ に属するのでその 1 つを改めて G として固定する. つまり $\langle x, y \rangle \in G$. ここで G は $X \times Y$ の開集合なので直積位相の定義から, ある $O^X \in \mathcal{O}_X$, $O^Y \in \mathcal{O}_Y$ があって $G = O^X \times O^Y$ となっている. この O^Y は O^X, G の存在から $O^Y \in \mathcal{B}_x$ で, $y \in O^Y$.

Y の compact 性より

$$\exists V_1, \cdots, V_m \in \mathcal{B}_x \left(Y = \bigcup_{1 \le i \le m} V_i \right)$$

この V_i を固定すると, それぞれに対して $\mathcal{B}_x$ の定義から $U_i \in \mathcal{O}_X$, $G_i \in \mathscr{O}$ ($1 \le i \le m$) があって $U_i \times V_i \subseteq G_i$ となっている. $U_x = U_1 \cap \cdots \cap U_m$ とおけば, $x \in U_x$ と $U_x \in \mathcal{O}_X$ が成立する.

$$\bigcup_{1 \le i \le m} (U_x \times V_i) \ = \ U_x \times \left(\bigcup_{1 \le i \le m} V_i \right) \ = \ U_x \times Y$$

そして $\forall i(\ U_x \times V_i \subseteq G_i\ )$ が分かるから

$$U_x \times Y \subseteq \bigcup_{1 \le i \le m} G_i$$

よって $u_x \in \mathcal{A}$ で, この U_x が x が属する $\mathcal{A}$ の要素になる.

X の compact 性より

$$\exists O_1^X, \cdots, O_m^X \in \mathcal{A} \left(X = \bigcup_{1 \le i \le m} O_i^X \right)$$

が成立. 各 O_i^X に対して $\mathcal{A}$ の定義から

$$\exists O_{i_1}, \cdots, O_{i_n} \in \mathscr{O} \left(O_i^X \times Y \subseteq \bigcup_{1 \le j \le n} O_{i_j} \right).$$

すると

$$\begin{aligned} X \times Y &= \left(\bigcup_{1 \le i \le m} O_i^X \right) \times Y = \bigcup_{1 \le i \le m} (O_i \times Y) \\ &\subseteq \bigcup_{1 \le i \le m} \left(\bigcup_{1 \le j \le n} O_{i_j} \right) \end{aligned}$$

よって $X \times Y$ が $m \times n$ 個の, すなわち有限個の $\mathscr{O}$ の要素で被覆できた. □

しかし上記の定理の一般系（Tychonoff の定理）を示すには選択公理が必要です．またその主張は選択公理と同値になります．この証明は [69]（117 ページあたりから）を参考にした.

Lemma 2.1.35（選択公理は Tychonoff の定理と同値）.
以下は同値.

(1) 選択公理

(2) （Tychonoff の定理）
$\{ (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) \}_{\lambda \in \Lambda}$ を compact 位相空間の族とし, $(Y, \mathcal{O})$ をその直積位相空間とすれば,Y は compact. ■

Proof

(1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ を有限交叉性をもつ閉集合の族として, $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ であることを示す.

$$\mathcal{F} = \{ \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(Y) \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \ \wedge \ \mathcal{A}' : \text{有限交叉性をもつ} \}$$

と定義すれば, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は帰納的半順序集合です.

> ∵ $(\mathcal{F}, \subseteq)$ が半順序集合であることの確かめは省略します．任意に全順序部分集合 $C \subseteq \mathcal{F}$ をとれば, その和集合 $\bigcup C$ は C の上界になっています．その存在から $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は帰納的です.

選択公理より Zorn の補題をこの $(\mathcal{F}, \subseteq)$ に適用できるので $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は少なくとも 1 つの極大元を持つから, それを $\mathcal{B}$ とおきます．この $\mathcal{B}$ に対して以下の 2 つが成立.

(i) $\forall F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{B}(\ F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathcal{B} \ )$

(ii) $\forall A \subseteq Y(\ \forall F \in \mathcal{B}(A \cap F \neq \emptyset) \ \rightarrow \ A \in \mathcal{B} \ )$

> ∵ (i) は $\mathcal{B}$ が有限交叉性を持つ範囲で $\mathcal{A}$ を大きくしていった集合であることから, (ii) は $\mathcal{B}$ の極大性より明らかです.

$p_\lambda : Y \rightarrow X_\lambda$ を射影とすると以下が成立.

$$\exists y = \langle x_\lambda \in X_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda} \in Y \big(\ \forall F \in \mathcal{B} \ \forall \lambda \in \Lambda \ (\ x_\lambda \in (p_\lambda[F])^a \ ) \ \big)$$

$\because$ ある $\lambda\in\Lambda$ に対して $\mathcal{B}_\lambda\subseteq\mathcal{P}(X_\lambda)$ を

$$\mathcal{B}_\lambda \;=\; \{\ (p_\lambda[F])^a \mid F\in\mathcal{B}\ \}$$

と定義すれば $\mathcal{B}_\lambda\subseteq X_\lambda$ で, 閉包の定義から閉集合の族になっていて, 有限交叉性をもちます.

$\because$ 任意に $\mathcal{B}_\lambda$ の 2 要素をとり, 定義からそれに対応する $\mathcal{B}$ の 2 要素を F_1,F_2 とおきます. つまり $(p_\lambda[F_1])^a$, $(p_\lambda[F_2])^a\in\mathcal{B}_\lambda$ です. $\mathcal{B}$ は有限交叉性をもつので $F_1\cap F_2\neq\emptyset$. ここから $\emptyset\neq p_\lambda[F_1\cap F_2]\subseteq p_\lambda[F_1]\cap p_\lambda[F_2]$ より $p_\lambda[F_1]\cap p_\lambda[F_2]\neq\emptyset$ です. 閉包の定義から $p_\lambda[F_i]\subseteq(p_\lambda[F_i])^a$ なので $(p_\lambda[F_1])^a\cap(p_\lambda[F_2])^a\neq\emptyset$ です.

$(X_\lambda,\mathcal{O}_\lambda)$ の compact 性から $\bigcap\mathcal{B}_\lambda\neq\emptyset$ が成立する. 集合族 $\{\ \bigcap\mathcal{B}_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\ \}$ に選択公理を適用して $\langle x_\lambda\in X_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ を作れば, これが求めるべき y になっています.

この y は全ての $\mathcal{B}$ の要素の触点になっています. つまり $\forall F\in\mathcal{B}(\ y\in F^a\ )$

$\because$ 任意に $F\in\mathcal{B}$ をとる. y が F の触点であるとは, 任意の y の近傍が F と交わることなので任意に y の近傍 N をとる. 近傍の定義からこの N に対して $\mathcal{O}$ の開集合 O があって $y\in O\subseteq N$ となっている. ここで直積位相の定義から, この O に対して $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$ とそれに対応する $U_i\in\mathcal{O}_{\lambda_i}$ ($1\leq i\leq n$) があって, $O=\bigcap_{i=1}^{n}p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ となっている, つまり以下が成立しています.

$$y\;\in\;\bigcap_{i=1}^{n}p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]\;\subseteq\;N$$

$p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ とは U_{λ_i} と λ_i 以外の X_λ との直積だから, $y\in\bigcap_{i=1}^{n}p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ より, $p_{\lambda_i}(y)=x_{\lambda_i}\in U_{\lambda_i}$ が成立しています.
$F\cap N\neq\emptyset$ を示すため $F\cap p_{\lambda_1}^{-1}[U_{\lambda_1}]\cap\cdots\cap p_{\lambda_n}^{-1}[U_{\lambda_n}]\neq\emptyset$ を示す. そのためにまず以下が成立することを確かめる.

$$\forall i(\ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]\;\in\;\mathcal{B}\ )$$

$\because$ $\{\ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]\ \}_{i\leq n}$ は有限交叉性を持ちます. なので $\mathcal{B}$ の極大性より, $\{\ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]\ \}_{i\leq n}\subseteq\mathcal{B}$ です.

よって $\mathcal{B}$ の性質 (i) から $F\cap p_{\lambda_1}^{-1}[U_{\lambda_1}]\cap\cdots\cap p_{\lambda_n}^{-1}[U_{\lambda_n}]\neq\emptyset$ が成立します. つまり $F\cap N\neq\emptyset$.

任意に $A\in\mathcal{A}$ をとると A は閉集合なので $A^a=A$ で, $\mathcal{B}$ の定義からどの A も $\mathcal{B}$ に属する. そして y の性質からどの A^a にも y は属する, つまり A に属する. よって $\forall A\in\mathcal{A}(y\in A)$ という y の存在から $\bigcap\mathcal{A}\neq\emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

選択公理そのものではなく同値な直積定理を証明します. 示すことは Lemma 2.0.9 より各要素が空でない集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

に対して, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ を示す.

まずどの A_λ にも属さない, つまり $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ に属さない元を 1 つとり, それを α とおきます. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $X_\lambda = A_\lambda \cup \{\alpha\}$ とします. $\mathcal{O}_\lambda = \{\ B \subseteq X_\lambda \mid |X_\lambda \setminus B| < \omega\ \} \cup \{\emptyset,\ \{\alpha\}\}$ とおくと $\mathcal{O}_\lambda$ は X_λ 上の compact な位相です.

> ∵ 補有限位相での証明を参考にしてください（まだ書いてない）.

$Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおくと, $f : X_\lambda \to \{\alpha\}$ という要素があるので $Y \neq \emptyset$ です. $Y \neq \emptyset$ と因子空間全てが compact であることより, 仮定の Tychonoff の定理（Theorem 2.1.35）から直積空間 Y も compact です. 射影 $p_\lambda : Y \to X_\lambda$ を用いて各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $F_\lambda = p_\lambda^{-1}[A_\lambda]$ とおくと, どの F_λ も Y において閉集合です.

> ∵ 直積位相は各射影 $p_\lambda : Y \to X_\lambda$ が連続になる位相で, 各 A_λ は X_λ において $\{\alpha\}$ が開集合であることより閉集合だから, 連続写像 p_λ による逆像 $p_\lambda^{-1}[A_\lambda]$ もまた閉集合です.

さらに $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交叉性をもちます.

> ∵ 有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ を任意にとる. $y = \langle x_\lambda \in X_\lambda \rangle_{\lambda\in\Lambda}$ を
>
> $$x_\lambda = \begin{cases} \alpha & \lambda \notin \Lambda \setminus \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \\ x_\lambda \in A_\lambda & \exists i(\ \lambda = \lambda_i\ ) \end{cases}$$
>
> な点とすれば,$y \in Y$ であることは明らか. また $\forall i(\ y \in F_{\lambda_i}\ )$ が成立します. なぜなら $x_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i}$ より $p_{\lambda_i}(y) \in A_{\lambda_i}$, つまり $y \in p_{\lambda_i}^{-1}[A_{\lambda_i}] = F_{\lambda_i}$ だからです. すなわち $\bigcap_{1\leq i\leq n} F_{\lambda_i} \neq \emptyset$ です.

よって $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は compact 空間 Y の有限交叉性をもつ閉集合の族だから $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ です. そして $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^{-1}[A_\lambda] = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ なので $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ です. □

第3章　その他細かなテーマ

ここでは教科書一冊になるほどではないが, 重要なテーマ・勉強したテーマをまとめいます.

3.0　Ideal と Filter 入門事項まとめ

ここでは ideal や filter についてまとめておきます. また filter に対しては ultra filter についてもまとめておきます. [51] の基礎部分を参考にしています.

3.0.1　ideal と filter の定義と例

ideal と filter の定義をして, 名前がついているものを紹介していきます.

Definition 3.0.1.
集合 A に対して $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が集合 A 上の **ideal** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下の 3 条件を満たすもののこと.

1. $\mathcal{I} \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{I}(\ X \cup Y \in \mathcal{I}\ )$.
3. $\forall X, Y(\ X \subseteq Y \wedge Y \in \mathcal{I}\ \rightarrow\ X \in \mathcal{I}\ )$.

集合 A に対して $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が集合 A 上の **filter** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下の 3 条件を満たすもののこと.

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{F}(\ X \cap Y \in \mathcal{F}\ )$.
3. $\forall X, Y(\ X \subseteq Y \wedge X \in \mathcal{F}\ \rightarrow\ Y \in \mathcal{F}\ )$. ■

いくつかの例を紹介します. それが ideal であること, filter であることの証明は省略します.

Example 3.0.2.
集合 A に対して,

(1) $\mathcal{P}(A)$ は A 上の ideal かつ filter.

(2) $\{\emptyset\}$ は A 上の ideal, $\{A\}$ は A 上の filter.

(3) $x \in A$ に対して, $\{X \subseteq A | x \notin X\}$ は A 上の ideal, $\{X \subseteq A | x \in X\}$ は A 上の filter. このような ideal を **principal ideal**, **principal filter** と呼んだりする.

(4) $S \subseteq A$ に対して, $\{X \subseteq A | X \subseteq S\}$ は A 上の ideal, $\{X \subseteq A | S \subseteq X\}$ は A 上の filter.

以降 A は無限集合として

(5) A の有限部分集合全体 $[A]^{<\omega}$ は A 上の ideal, A の補有限集合全体 $\{X \subseteq A \mid |A \setminus X| < \omega\}$ は A 上の filter. $|A \setminus X| < \omega$ とは $A \setminus X \in [A]^{<\omega}$ とも表現できる. またこのような filter を **Fréchet filter** とも呼ぶ.

(6) 上の例を拡張して, 基数 κ に対して $[A]^{<\kappa}$ は A 上の ideal. ■

ideal, filter には proper と呼ばれるものがあり, 大抵 proper であることは仮定されます.

Definition 3.0.3.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$, filter $\mathcal{F}$ に対して

- $\mathcal{I}$ が **proper** $\overset{\text{def}}{\iff} A \notin \mathcal{I}$.
- $\mathcal{F}$ が **proper** $\overset{\text{def}}{\iff} \emptyset \notin \mathcal{F}$. ■

proper であることを仮定するのは, proper でないとすると ideal も filter も $P(A)$ という自明なものになってしまいますからです. このノートでも以降 proper なものだけ扱います.
また Example 3.0.2(3) に対応して, non-principal と呼ばれる性質があります.

Definition 3.0.4.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$, filter $\mathcal{F}$ に対して,

- $\mathcal{I}$ が **non-principal** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A(\ \{a\} \in \mathcal{I}\ )$.
- $\mathcal{F}$ が **non-principal** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall X \subseteq A(\ A \setminus X \in [A]^{<\omega} \to X \in \mathcal{F}\ )$. ■

その定義から Fréchet filter は non-principal です.

ideal と filter は双対な概念です. どういうことかというと, ある ideal $\mathcal{I}$ があったとき, 補集合が $\mathcal{I}$ に属するような集合全体は同じ集合上の filter になります. そういったものを表現するための用語を定義します.

Definition 3.0.5.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して

- $X \subseteq A$ が $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**-measure zero** $\overset{\text{def}}{\iff} X \in \mathcal{I}$.
- $X \subseteq A$ が **positive** $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**-measure** $\overset{\text{def}}{\iff} X \notin \mathcal{I}$.
- $X \subseteq A$ が $\boldsymbol{\mathcal{I}-}$**measure one** $\overset{\text{def}}{\iff} A \backslash X \in \mathcal{I}$.

さらに

- $\boldsymbol{\mathcal{I}^+} \overset{\text{def}}{=} \{\, X \subseteq A \mid X \notin \mathcal{I} \,\}$: positive $\mathcal{I}$-measure 全体.
- $\boldsymbol{\mathcal{I}^*} \overset{\text{def}}{=} \{\, X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{I} \,\}$: $\mathcal{I}$-measure one 全体.

これらの定義は filter に対しても用いる. ■

この定義や記法は [47] の 4 ページを参考にしました.
A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して $\mathcal{I}^*$ は A 上の filter になります. このとき $\mathcal{I}^*$ は ideal $\mathcal{I}$ の **dual filter** と呼びます. その逆で A 上の filter $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}^* = \{\, X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{F} \,\}$ は A 上の ideal となり, それを $\mathcal{F}$ の **dual ideal** と呼びます.

3.0.2 もっと filter について

ここでは filter に関する話題をさらに掘り下げていきます.
proper な filter はその定義から有限交叉性を持ちます. しかし A の部分集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が有限交叉性をもつからといって filter になるとは限りません. 有限交叉性をもつ集合族から filter を作る方法を提示します.

Proposition 3.0.6.
集合 A に対して, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ は $\mathcal{S} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{S}$ は有限交叉性をもつとします. $\mathcal{F} = \{\, X \subseteq A \mid \exists E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}(\ \bigcap E \subseteq X\ ) \,\}$ は filter であり, $\mathcal{S}$ を含み, $\mathcal{S}$ を含む filter の中で極小なものになっている. ■

Proof 先に $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ であることを示します．そのために任意に $X \in \mathcal{S}$ をとります．$E = \{X\} \in [\mathcal{S}]^{<\omega}$ とおけば, $X = \bigcap E$ より, そんな E の存在から $X \in \mathcal{F}$ です．
続けて $\mathcal{F}$ が filter であることを示します．$\mathcal{F} \neq \emptyset$ であることは, $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ より分かります．続いて任意に $X, Y \in \mathcal{F}$ をとります．$\mathcal{F}$ の定義から X, Y に対して存在する $[\mathcal{S}]^{<\omega}$ の要素をそれぞれ E_X, E_Y とおきます．$E = E_X \cup E_Y$ とおくと, $E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}$ で, $E_X, E_Y \subseteq E$ より $\bigcap E \subseteq \bigcap E_X \wedge \bigcap E \subseteq \bigcap E_Y$ です．よって $\bigcap E \subseteq (\ (\bigcap E_X) \cap (\bigcap E_Y)\ ) \subseteq X \cap Y$ だから, そんな E の存在より $X \cap Y \in \mathcal{F}$ です．filter の最後の定義, 超集合関係で閉じることは $\mathcal{F}$ の定義より明らかなので割愛します．
最後に $\mathcal{F}$ の極小性を確かめるために, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}'$ なる filter $\mathcal{F}'$ を任意にとります．さらに任意に $X \in \mathcal{F}$ をとると, $\exists E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}(\bigcap E \subseteq X)$ な E を 1 つ固定します．$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}'$ より $E \subseteq \mathcal{F}'$ です．$|E| < \omega$ と $\mathcal{F}'$ が filter であることから $\bigcap E \in \mathcal{F}'$ です．もう一度 $\mathcal{F}'$ が filter であることと $\bigcap E \subseteq X$ から, $X \in mathcalF'$ です．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, つまり $\mathcal{S}$ を含むような filter の中で極小になっています． □

このような作り方をした filter のことを, $\mathcal{S}$ が生成する filter という呼び方があります．有限交叉性を持たない $\mathcal{S}$ から生成した filter は, proper にならず, つまり $\mathcal{P}(A)$ という自明な filter になってしまいます．

ある集合上の filter 全体は部分集合関係で半順序集合になります．この順序での極大な filter のことを **maximal filter** と呼びます．
つまり A 上の filter $\mathcal{F}$ が maximal であることの定義は

$$\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A) \big(\ \mathcal{A} : \text{filter} \ \rightarrow\ \neg(\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{A})\ \big)$$

を満足することになります．

それとは別に ultra という性質もあります．

Definition 3.0.7.
A 上の filter $\mathcal{F}$ が **ultra** であるとは, 任意の $X \subseteq A$ に対して $X \in \mathcal{F}$ か $A \setminus X \in \mathcal{F}$ のどちらか一方が成立するときをいう．$\veebar$ を排他的論理和を表すための記号とするならば

$$\mathcal{F} : \text{ultra} \ \overset{\text{def}}{\iff} \forall X \subseteq A(\ X \in \mathcal{F}\ \veebar\ A \setminus X \in \mathcal{F}\ ) \tag{3.1}$$

と表現できます． ■

proper な filter を考えている範囲では, maximal であること ultra であることは同値になります．故に書き手によっては極大であることを ultra であることの定義として, 上記の定義は性質の 1 つとして挙げているものもあったりします．その定理の証明の前に ultra filter について分かることをまとめておきます．

Proposition 3.0.8.
集合 A に対して

- A 上の proper filter $\mathcal{F}$ が ultra でない $\iff$ $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{F} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{F}\ )$.
- $\mathcal{F}$ が A 上の proper ideal $\mathcal{I}$ の dual filter（つまり $\mathcal{F} = \mathcal{I}^*$）ならば, $\mathcal{F}$ が ultra でない $\iff$ $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{I} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{I}\ )$.

A 上の ultra filter $\mathcal{U}$ と $X, Y \subseteq A$ と $\{X_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して

- $X, Y \notin \mathcal{U}\ \rightarrow\ X \cup Y \notin \mathcal{U}$.
- $X \in \mathcal{U} \wedge Y \notin \mathcal{U}\ \rightarrow\ X \setminus Y \in \mathcal{U}$.
- $\bigcup_{i \in [n]} X_i \in \mathcal{U}\ \rightarrow\ \exists i \in [n](X_i \in \mathcal{U})$. ■

Proof (1) 排他的論理和 $\veebar$ を用いた論理式について考えます．P, Q を命題を表す記号として $P \veebar Q$ とは, 他の論理記号を用いて論理的同値な式に書き換えると, $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ です．さらに論理的同値なものとして $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ があるので, 今回はこれを使います．すると $\mathcal{U}$ が ultra であることを書き直せば,

$$\forall X \subseteq A \big(\ (X \in \mathcal{U} \vee A \setminus X \in \mathcal{U})\ \wedge\ (X \notin \mathcal{U} \vee A \setminus X \notin \mathcal{U})\ \big)$$

となり, それを否定すれば

$$\exists X \subseteq A\big(\ (X \notin \mathcal{U} \land A \setminus X \notin \mathcal{U}) \ \land \ (X \in \mathcal{U} \land A \setminus X \in \mathcal{U})\ \big)$$

です. $X \in \mathcal{U} \land A \setminus X \in \mathcal{U}$ とすると, $\mathcal{U}$ が filter より $X \cap (A \setminus X) \in \mathcal{U}$ ですが, これは $\emptyset \in \mathcal{U}$ となって $\mathcal{U}$ が proper であることに矛盾します. よって成立するのは $X \notin \mathcal{U} \land A \setminus X \notin \mathcal{U}$ となります.

(2) (1) にそのまま当てはめると, $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{I}^* \land A \setminus X \notin \mathcal{I}^*\ )$ です. $X \notin \mathcal{I}^*$ とは, その定義から $A \setminus X \notin \mathcal{I}^*$, $A \setminus X \notin \mathcal{I}^*$ とは $X \notin \mathcal{I}^*$ です.

(3) $X \cup Y \notin \mathcal{U}$ を示すため, $A \setminus (X \cup Y) \in \mathcal{U}$ を示します. $A \setminus (X \cup Y) = (A \setminus X) \cap (A \setminus Y)$, そして仮定より $A \setminus X, A \setminus Y \in \mathcal{U}$ なので, $(A \setminus X) \cap (A \setminus Y) \in \mathcal{U}$, つまり $A \setminus (X \cup Y) \in \mathcal{U}$ です.

(4) $X \setminus Y \notin \mathcal{U}$ とすると, $\mathcal{U}$ が ultra より $A \setminus (X \setminus Y) \in \mathcal{U}$ です. $A \setminus (X \setminus Y) = (A \setminus X) \cup Y$ で, 仮定からの $A \setminus X, Y \notin \mathcal{U}$ と, (3) より $(A \setminus X) \cup Y \notin \mathcal{U}$ でなくてはなりませんが, これは矛盾です.

(5) $\forall i \in [n](X_i \notin \mathcal{U})$ だったとします. $\mathcal{U}$ が ultra より $\forall i \in [n](A \setminus X_i \in \mathcal{U})$ です. $\mathcal{U}$ が filter であることから $\bigcap_{i \in [n]}(A \setminus X_i) \in \mathcal{U}$ です. すると $A \setminus \big(\ \bigcap_{i \in [n]}(A \setminus X_i)\ \big) = \bigcup_{i \in [n]} X_i \notin \mathcal{U}$ ですが, これは仮定に矛盾です. □

では maximal であること ultra であることが同値であることを証明します.

Proposition 3.0.9.
A 上の filter $\mathcal{F}$ に対して, 以下は同値

(1) $\mathcal{F}$ は A 上の proper filter の中で極大（maximal）.

(2) $\mathcal{F}$ は ultra. ■

Proof

(1)→(2)
任意に $X \subseteq A$ をとります. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもつかどうかで場合分けします. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもっていたとします. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ から生成される filter を $\mathcal{F}'$ とおくと, その定義から $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \cup \{X\}$ と, $\mathcal{F} \cup \{X\} \subseteq \mathcal{F}'$ より, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ ですが, $\mathcal{F}$ は maximal より $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ となることはない, つまり $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ です. すなわち X は最初から $\mathcal{F}$ に属していた, つまり $X \in \mathcal{F}$ です.
$\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもっていなかったとします. $\mathcal{F}$ は filter なので有限交叉性をもちますが, X を加えると有限交叉性をもたなくなったということなので, $\exists \{Y_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{F}\big(\ (\bigcap_{i \in [n]} Y_i) \cap X = \emptyset\ \big)$ です. $Y = \bigcap_{i \in [n]} Y_i$ とおくと, $\mathcal{F}$ が filter であることより $Y \in mathcalF$. $Y \cap X = \emptyset$ より $Y \subseteq A \setminus X$ で, $\mathcal{F}$ が filter であることから $A \setminus X \in \mathcal{F}$ です.

(2)→(1)
対偶「$\mathcal{F}$ が maximal でないならば, $\mathcal{F}$ が ultra でない」を示します. $\mathcal{F}$ が maximal でないことから, $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ なる proper filter $\mathcal{F}'$ が存在します. $X \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ を 1 つとると, $A \setminus X \notin \mathcal{F}$ です. なぜならば $A \setminus X \in \mathcal{F}$ だとすると, $A \setminus X \in \mathcal{F}'$ となって, $X \cap A \setminus X \in \mathcal{F}'$ ですが, これは $\emptyset \in \mathcal{F}'$ となって, $\mathcal{F}'$ が proper であることに矛盾します. よって $X, A \setminus X \notin \mathcal{F}$ なる X の存在から $\mathcal{F}$ は ultra ではありません. □

maximal な, つまり ultra な filter の形は 2 つに定まります.

Proposition 3.0.10.
集合 A 上の maximal filter は principal か non-principal のいずれか一方になる. ■

Proof A 上の maximal filter $\mathcal{F}$ が $\exists D \in [A]^{<\omega}(D \in \mathcal{F})$ か $\forall D \in [A]^{<\omega}(D \notin \mathcal{F})$ かどうかで場合分けします.
$\exists D \in [A]^{<\omega}(D \in \mathcal{F})$ だったとき, そんな有限集合 D を固定すれば $\exists! x \in D(\{x\} \in \mathcal{F})$ です.

∵ $\forall x \in D(\{x\} \notin \mathcal{F})$ だったとすれば, filter が $\mathcal{F}$ であることから $\forall x \in D(X \setminus \{x\} \in \mathcal{F})$ です．$\mathcal{F}$ は filter なので $\bigcap_{x \in D}(X \setminus \{x\}) \in \mathcal{F}$ ですが, $\bigcap_{x \in D}(X \setminus \{x\}) = X \setminus D$ より, これは $D \in \mathcal{F}$ に矛盾．一意性については $x, x' \in D$ に対して $\{x\}, \{x'\} \in \mathcal{F}$ とすれば, $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset \in \mathcal{F}$ となって, $\mathcal{F}$ が proper であることに矛盾です．

そんな $x \in D$ を固定すれば, $\mathcal{F} = \{ X \subseteq A \mid x \in X \}$ であること, つまり $\mathcal{F}$ が principal であることは明らかです．
$\forall D \in [A]^{<\omega}(D \notin \mathcal{F})$ だったとき, $\mathcal{F}$ が ultra より $\forall D \in [A]^{<\omega}(A \setminus D \mathcal{F})$ です．任意に取った $X \subseteq A$ が補有限集合とするならば, $\exists D \in [A]^{<\omega}(X = A \setminus D)$ です．つまり $X \in \mathcal{F}$ より, $\mathcal{F}$ がどの補有限集合も要素に持つことから $\mathcal{F}$ は non-principal です． □

ここまでの証明と同じようにして極大な ideal についても同様のことを示すことができます．ただ慣習なのか ultra filter と同様の性質をもつ ideal を ultra ideal と呼んだりはしないようです．

Corollary 3.0.11.
A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して, 以下は同値

(1) $\mathcal{I}$ は A 上の proper ideal の中で極大（maximal）．

(2) $\forall X \subseteq A(\ X \in \mathcal{I} \ \veebar \ A \setminus X \in \mathcal{I}\ )$. ■

Corollary 3.0.12.
集合 A 上の maximal ideal は principal か non-principal のいずれか一方になる． ■

最後に ultra filter は存在するのかを確かめます．それを示すためには選択公理, それと同値な Zorn の補題を必要とします．

Lemma 3.0.13（ultra filter の補題）.
選択公理を仮定する．集合 A 上の任意の filter $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}$ を含むような A 上の ultra filter が存在する． ■

Proof 任意に A 上の filter $\mathcal{F}$ をとります．$\mathfrak{F} = \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A) \mid \mathcal{A} : \text{filter} \land \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \}$ とおくと, $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ は半順序集合で, 帰納的です．なぜならば任意に $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ の全順序部分集合 $\mathfrak{C}$ をとると, $\bigcup \mathfrak{C}$ が $\mathfrak{C}$ の極大要素になっているからです．Zorn の補題から, $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ には極大要素, つまり maximal filter が存在しますが, Proposition 3.0.9 より, それは $\mathcal{F}$ を含む A 上の ultra filter です． □

Corollary 3.0.14.
集合 A に対して $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が有限交叉性をもつならば, $\mathcal{S}$ を含むような A 上の ultra filter が存在する． ■

Proof $\mathcal{S}$ より生成された filter $\mathcal{F}$ に対して, Lemma 3.0.13 と同様にして証明できます． □

3.0.3 ω 上の ultra filter

ここでは ω 上の ultra filter についてまとめます．まずは p-filter について定義します．

Definition 3.0.15.
ある集合上の filter $\mathcal{F}$ が **P-filter** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \{X_n\}_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{F}\ \exists X \in \mathcal{F}\big(\ \forall n \in \omega(\ X \subseteq^* X_n\ )\ \big)$. ここで $X \subseteq^* X_n$ とは $|X \setminus X_n| < \omega$ ということです．ある filter が P-filter かつ ultra だったとき, そんな filter を **P-point** と呼ぶ． ■

3.1 Cantor 空間と Baire 空間まとめ

Cantor 空間と Baire 空間は公理的集合論の基本的な対象です．しかし丁寧な解説を私はあまり見たことがありませんでした．なので自分なりに位相空間論をベースにして, この 2 つの空間についての知識をまとめておきます．
まずここで定義だけ簡単にまとめておきます．そのさい 2.1.5 節（112 ページ）での直積位相の知識を用います．

$\{\ (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\ \}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とします．$\forall\lambda,\lambda'\in\Lambda(\ X_\lambda = X_{\lambda'}\ \wedge\ \mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{\lambda'}\ )$ の場合，つまり因子空間が全て同じだった場合を考えます．このとき同じ位相空間の Λ 個の直積と思えます．すると

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;=\; {}^{\Lambda}X_\lambda \;=\; \{\ f \mid f\colon \Lambda \to X_\lambda\ \}$$

となります．つまり $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は Λ から X_λ への関数全体と一致します．よってこの位相空間の点は，すべて同じ定義域・値域の関数になっています．
$\{\ X_\lambda\ \}_{\lambda\in\Lambda}$ が全ての要素が空でなく異なる要素が属す可能性がある一般的な場合には，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ であることを主張するには選択公理が必要（直積定理,Lemma 2.0.9）でしたが，この場合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は単なる関数の集合なので，それが空であることを主張するのに選択公理は必要ありません．
また X_λ は λ ごとに区別する必要がないため，${}^{\Lambda}X_\lambda$ を単に ${}^{\Lambda}X$ と書くことにします．
X を離散位相空間とし，$\Lambda=\omega,\ X=2=\{0,1\}$ とした直積位相空間を ${}^{\omega}2$ と，$\Lambda=\omega,\ X=\omega$ とした直積位相空間を ${}^{\omega}\omega$ と表すことにします．この 2 つの空間に以下のように名前が付いています．

Definition 3.1.1（Cantor 空間と Baire 空間）.
Cantor 空間とは，直積位相空間 ${}^{\omega}2$ のことで，ここで各 $2=\{0,1\}$ には離散位相が入っているものとする．
同様に Baire 空間とは，直積位相空間 ${}^{\omega}\omega$ のことで，ここで各 ω には離散位相が入っているものとする． ■

3.1.1 Cantor 空間と Baire 空間の開集合

何らかの位相空間が与えられたとき，どんな集合がその空間の開集合になっているかは，1 つの（もしかしたら一番大事な）関心事だと思います．Definition 3.1.1（124 ページ）で定義した 2 つの位相空間の開集合はどのようなものか説明します．
まずは以下のような関数の集合を定義します．

Definition 3.1.2.
集合 A に対して

$$\begin{aligned} {}^{<\omega}A &\overset{\text{def}}{=} \{\, s \mid \exists X\subseteq\omega\big(\ |X|<\omega\ \wedge\ s\colon X\to A\ \big)\,\} \\ &= \{\, s\colon X\to A \mid X\subseteq\omega \wedge\ |X|<\omega\,\}. \end{aligned}$$ ■

$A=2$ とした ${}^{<\omega}2$ について考えると，$s\in{}^{<\omega}2$ とはその定義から，定義域が ω の有限部分集合で，値域が 2 であるような，何らかの関数のことです．$t\in{}^{<\omega}\omega$ も同様に定義域が ω の有限部分集合で，値域が ω であるような，何らかの関数のことです．このような関数には以下のような名前が付いています．

Definition 3.1.3.
$s\in{}^{<\omega}2$ と $t\in{}^{<\omega}\omega$ に対して

- s は ω から 2 への**有限部分関数（finite partial function）**という．
- t は ω から ω への**有限部分関数（finite partial function）**という．

ゆえに ${}^{<\omega}2$ は ω から 2 への有限部分関数全体の集合に，${}^{<\omega}\omega$ は ω から ω への有限部分関数全体の集合になります． ■

finite partial function という名前は [52] の 173 ページを参考にして，有限部分関数はそれを訳したものです．
各 $s\in{}^{<\omega}2$ や $t\in{}^{<\omega}\omega$ を用いることで，${}^{\omega}2$ や ${}^{\omega}\omega$ の部分集合を定義します．

Definition 3.1.4.
$s\in{}^{<\omega}2$ と $t\in{}^{<\omega}\omega$ に対して

$$\begin{aligned} O(s) &\overset{\text{def}}{=} \{\, f\in{}^{\omega}2 \mid \forall n\in\operatorname{dom}s\big(\ s(n)=f(n)\ \big)\,\} \\ &= \{\, f\in{}^{\omega}2 \mid s = f\restriction\operatorname{dom}(s)\,\} \\ &= \{\, f\in{}^{\omega}2 \mid f\ \text{は}\ s\ \text{の拡大}\,\}. \end{aligned}$$

同様に $O(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid \forall n \in \mathrm{dom}\, t\big(\ t(n) = f(n)\ \big)\,\}$.
$O(s)$ を s を元にした ${}^{\omega}2$ の **basic set** とよぶ．同様に $O(t)$ を t を元にした ${}^{\omega}\omega$ の **basic set** とよぶ．[1] ■

$O(s)$ という記法は [48] を参考にしています．この $O(s)$ はテキストによっては $[s]$ と表したりします（例えば [65] など）．
$O(s)$ や $O(t)$ は s,t を拡大した関数全体の集合であり，その定義から $O(s) \subseteq {}^{\omega}2$, $O(t) \subseteq {}^{\omega}\omega$ です．
この basic set でもって ${}^{\omega}2$ や ${}^{\omega}\omega$ の開集合を表現します．

Proposition 3.1.5.
集合 $\mathcal{B}$ に対して

- $\mathcal{B} = \{\, O(s) \mid s \in {}^{<\omega}2\,\}$ のとき，$\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}2$ は Cantor 空間の開基である．
- $\mathcal{B} = \{\, O(s) \mid s \in {}^{<\omega}\omega\,\}$ のとき，$\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ は Baire 空間の開基である． ■

この証明は〇〇にてやることにします（今はこの空間たちを使えるようになることだけを目的としてます）．
つまり集合 $O \subseteq {}^{\omega}2$ が ${}^{\omega}2$ の開集合ならば，ある $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ があって $O = \bigcup \mathcal{A}$ となっている．よって $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}2)$ を ${}^{\omega}2$ の開集合系とすると，$\mathcal{O} = \{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ となります．Baire 空間も同様です．
開基の定義から basic set は Cantor 空間や Baire 空間の開集合です．よって一般的には basic set は **basic open set** と呼ばれることが多いです．
位相空間の定義から $\emptyset, {}^{\omega}2$ は ${}^{\omega}2$ の開集合です．$\emptyset \in \mathcal{O}$ であるとは $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ を $\mathcal{A} = \emptyset$ とすれば明らかです．
${}^{\omega}2 \in \mathcal{O}$ であることを示すために，ある $n \in \omega$ を用いて $s_0, s_1 \colon \{n\} \to 2$ を $s_i(n) = i$ な，たった 1 つの対応規則のみの関数とします．関数を順序対の集合としてとらえるなら $s_i = \{\langle n, i\rangle\}$ です．すると $O(s_i)$ は n の値が i になる ω から 2 への関数全体の集合になり，$O(s_0) \cup O(s_1)$ は n の値が 0 か 1 かの ω から 2 への関数全体の集合，つまり ω から 2 への関数全体の集合，すなわち ${}^{\omega}2$ になります．よって ${}^{\omega}2 \in \mathcal{O}$ を示すためには $\mathcal{A} = \{O(s_0), O(s_1)\}$ とすればよいです．
同様にして $\mathcal{O} \subseteq {}^{\omega}\omega$ を Baire 空間の開集合系とすると，$\emptyset \in \mathcal{O}$ も同様に明らかで，${}^{\omega}\omega \in \mathcal{O}$ はある n を用いて

$$\mathcal{A} \;=\; \{\, O(s_i) \mid i \in \omega \;\wedge\; s_i(n) = i\,\}$$

とすれば，$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \omega} O(s_i) = {}^{\omega}\omega$ となります．
実は Proposition 3.1.5（125 ページ）よりも要素が少なくなった別の開基が存在します．次節にてそれについてと，有限部分関数とそれを元にした basic set との関係を紹介します．

3.1.2 Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現

Cantor 空間と Baire 空間は Proposition 3.1.5（125 ページ）にあるような開基で議論されることは少ない（ような気がします）．
これからの議論に使うための basic set の集合を定義しておきます．

Definition 3.1.6.
$\mathcal{B}_{\lhd} \subseteq {}^{\omega}2, {}^{\omega}\omega$ を以下のように定める．

- $\mathcal{B}_{\lhd} \;=\; \{\, O(s) \mid \exists n \in \omega(\ s\colon n \to 2\ )\,\}$.
- $\mathcal{B}_{\lhd} \;=\; \{\, O(s) \mid \exists n \in \omega(\ s\colon n \to \omega\ )\,\}$. ■

同じ用語を 2 つの意味で使うことになりますが，2 つの空間を同時に扱わなければ混乱はないと思うので，このまま使っていくことにします．
ある $n \in \omega$ について，$s\colon n \to 2, t\colon n \to \omega$ は確かに ω から 2 や ω への有限部分関数，つまり $s \in {}^{<\omega}2, t \in {}^{<\omega}\omega$ ですが，$n \in \omega$ より定義域が単なる ω の有限部分集合ではなく，何らかの（順序数の意味での）自然数 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ となっています．つまり $\mathcal{B}_{\lhd} \subseteq \mathcal{B}$ であり，元の定義の開基よりも明らかの要素が減っているため，これもまた開基になるのか一見明らかではないですが，確かに $\mathcal{B}_{\lhd}$ もまた，Cantor 空間や Baire 空間の開基となります．

[1] 一般的には「s を元にした」は付けない．ただ言葉の成り立ちからそのような前置きが必要ではと感じてこのように名前を付けました．

Proposition 3.1.7.
$\mathcal{B}_{\lhd}$ は Cantor 空間の開基である.
また $\mathcal{B}_{\lhd}$ は Baire 空間の開基である. ■

Proof まずは Cantor 空間について示します. $\mathcal{B}_{\lhd} \subseteq \mathcal{B}$ であるので, 任意の $\mathcal{B}$ の要素を $\mathcal{B}_{\lhd}$ の要素の和で表現できることを示せばよいので, 任意に $O(s) \in \mathcal{B}$ をとります. $s \in {}^{<\omega}2$ の定義域 $\mathrm{dom}(s)$ を $\mathrm{dom}(s) = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ とおくと, $\mathrm{dom}(s) \subseteq a_m = \{0, 1, \ldots, a_{m-1}\}$ です. s に対して $T_s \subseteq {}^{<\omega}2$ を $T_s = \{\, t \colon a_m \to 2 \mid t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s \,\}$ と定めます. T_s とは s の拡大で, s の定義域の中で a_{m-1} までの足りない自然数を全て補った関数全体の集合です. あとは $O(s) = \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ を示せば証明終わりです.

> 集合の等号関係を示す.
>
> $O(s) \subseteq \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ の証明
> 任意に $f \in O(s)$ をとる. $t = f{\restriction}a_m$ とおくと $\mathrm{dom}(s) \subseteq a_m$ より $t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s$ より $t \in T_s$ です. よって $f \in O(t)$, つまり $f \in \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ です.
>
> $\bigcup_{t \in T_s} O(t) \subseteq O(s)$ の証明
> 任意に $f \in \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ をとると, ある $t \in T_s$ があって $f \in O(t)$, つまり $f{\restriction}\mathrm{dom}(t) = t$ です. $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $f{\restriction}\mathrm{dom}(s) = t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s$ なので, $f \in O(s)$ です.

ここまで特に各 s, t などの値域が 2 であることに依存した証明をしていないので, Baire 空間についても同様に示すことができます. □

この証明によって Proposition 3.1.5(125 ページ)の $\mathcal{B}$ も $\mathcal{B}_{\lhd}$ のどちらも Cantor 空間, Baire 空間の開基なので, どちらを証明に用いても問題なく, そのときの議論や証明にあわせて使いやすい方を適宜選択します.
便利の為以下のような定義をしておきます. 記法は(多分)オリジナルです.

Definition 3.1.8.
${}^{<\omega}2$ や ${}^{<\omega}\omega$ の部分集合として以下のようなものを定義する.

- ${}^{\lhd\omega}2 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, s \in {}^{<\omega}2 \mid \exists n \in \omega(n = \mathrm{dom}(s)) \,\}$.
- ${}^{\lhd\omega}\omega \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, s \in {}^{<\omega}\omega \mid \exists n \in \omega(n = \mathrm{dom}(s)) \,\}$. ■

どのような点に便利かというと上の議論での開基 $\mathcal{B}_{\lhd}$ を, 簡単に $\{\, O(t) \mid t \in {}^{\lhd\omega}2 \,\}$ と書き表すことができます. またこれらの集合は有限列の集合ともとらえることができます.

この節の最後の話題として, ${}^{\lhd\omega}2, {}^{\lhd\omega}\omega$ の性質をまとめおきます.
${}^{<\omega}2$ などとの違いとして, どの $s, t \in {}^{\lhd\omega}2$ に対しても, $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ か $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(s)$ のどちらかもしくは両方が成立します. $s, t \in {}^{<\omega}2$ ならば $\mathrm{dom}(s) \cap \mathrm{dom}(t) = \emptyset$ となって, 上記のようにはならないことがありえます.
続いて ${}^{<\omega}2$ や ${}^{\omega}2$ の要素に関する用語を定義します. ここからは [48] や [52] を主に参考にしています.

Definition 3.1.9.
$s, t \in {}^{<\omega}2$ と $f \in {}^{\omega}2$ に対して,

(1) $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ かつ $\forall n \in \mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) = t(n)\ \big)$ を満たすとき, s を t の **initial segment**(始切片)と呼び, $s \trianglelefteq t$ で表す.

(2) $\forall n \in \mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) = f(n)\ \big)$ と満たすときも, s を f の **initial segment**(始切片)と呼び, $s \trianglelefteq f$ で表す.

$s, t \in {}^{<\omega}\omega$ や $f \in {}^{\omega}\omega$ に対しても同様に定義し, 同じように initial segment と呼び, $\trianglelefteq$ を使って表す. ■

$s,t \in {}^{\lhd\omega}2, {}^{\lhd\omega}\omega$ だった場合, s,t を有限列ととらえると initial segment という言葉遣いにも納得してもらえると思います. initial segment とは整列集合のある条件を満たす部分集合のことを指したりもしますが, その場合とは区別が容易なので, ここでは特に別の呼び方を考えたりはしません.
initial segment を表す記号として [48] では $\lhd$ を用いていますが, そこの定義でも $s=t$ の場合を含んでいたので, $\unlhd$ を使うことにしました.
s,t が ${}^{\lhd\omega}2$ や ${}^{\lhd\omega}\omega$ の要素だけで議論しているときに, s,t を順序対の集合と見れば, $s \unlhd t$ とは単に $s \subseteq t$ となります.
そして $\unlhd$ という関係は推移的です. つまり $s,t,u \in {}^{<\omega}2$ と $f \in {}^{\omega}2$ に対して, $s \unlhd t$ かつ $t \unlhd u$ ならば $s \unlhd u$, そして $s \unlhd t$ かつ $t \unlhd f$ ならば $s \unlhd f$ です.
$\unlhd$ を用いた定義を 1 つ用意します. これも [48] にあったものです.

Definition 3.1.10.
$s,t \in {}^{<\omega}2$ に対して, $s||t \overset{\text{def}}{\iff} s \unlhd t \vee t \unlhd s$.
また $s,t \in {}^{<\omega}\omega$ に対しても同様に定義する. ■

これは有限列同士のどちらかがどちらかの始切片であるという関係になります. もちろん $s||t$ には $s \unlhd t \wedge t \unlhd s$, つまり $s=t$ である場合も含まれています.
[48] では $s||t$ を s,t が compatible, $s||t$ でないことを $s \perp t$ で表し incompatible と呼んでいます. 私自身この言葉は強制法の議論のさいに見たことがあるもので, その定義は似ていますが少し異なります. その理由の考察としては, 本来の $s,t \in {}^{<\omega}\omega$ が compatible（これは $s \not\perp t$ で表す）であるとは, s,t が共通拡大を持つことになっています. そして [48] ではそもそも ${}^{\lhd\omega}\omega$ の要素しか議論しないため, $s,t \in {}^{\lhd\omega}\omega$ が共通拡大を持つとはそもそもどちらかがもう一方の拡大になっているときになります. よって $s||t$ に compatible という言葉を充てるのは, それほど間違ってはいません. このノートでは強制法も扱うかもしれないので, ここでは $s||t$ には呼び方を与えず, このまま使っていくことにします.
これまでの用語と basic set に関する簡単な命題を紹介します. [48] に載っていたものです.

Proposition 3.1.11.
$s,t \in {}^{\lhd\omega}2$ に対して

(1) $s \unlhd t \iff O(t) \subseteq O(s)$

(2) $s||t \iff \big(O(t) \subseteq O(s) \vee O(s) \subseteq O(t) \big)$

(3) $\neg s||t \iff O(s) \cap O(t) = \emptyset$

(4) $O(s) \cap O(t)$ は何らかの basic open となるか, または $\emptyset$ のどちらかになる

また $s,t \in {}^{\lhd\omega}\omega$ に対して同様に成立する. ■

Proof $s,t \in {}^{\lhd\omega}2$ についてのみ示す.

(1) 両辺が同値であることを示す.

(⇒) 任意に $f \in O(t)$ をとる. $f{\restriction}\mathrm{dom}(t) = t$ と $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $f{\restriction}\mathrm{dom}(s) = t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s$ だから, $f \in O(s)$.

(⇐) 先の議論より $s,t \in {}^{\lhd\omega}2$ に対して $\mathrm{dom}(t) \subsetneq \mathrm{dom}(s)$ か $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ のいずれかが成立. まず $\mathrm{dom}(t) \subsetneq \mathrm{dom}(s)$ だったとすると, $n = \min\big(\mathrm{dom}(s) \setminus \mathrm{dom}(t)\big)$ とおき, $t' = t \cup \{\langle n, 1-s(n)\rangle\}$ とすると $t' \in {}^{\lhd\omega}2$ です. そして t^{prime} の何らかの拡大を f とおくと, $t \unlhd t'$ と $t' \unlhd f$ より $t \unlhd f$, つまり $f \in O(t)$ と仮定より $f \in O(s)$ だが, $f(n) \neq s(n)$ より $f \notin O(s)$ となって矛盾.
続けて $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ として $\exists n\, \mathrm{dom}(s)\big(\, s(n) \neq t(n) \,\big)$ だったとし, そんな n を 1 つ固定しておく. 任意に $f \in O(t)$ をとると, $f{\restriction}\mathrm{dom}(t) = t$, そして $n \in \mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $t(n) = f(n) \neq s(n)$, よって f は s の拡大ではない, つまり $f \notin O(s)$ だが, これは仮定に矛盾.

(2) これは $s||t$ と (1) より明らか.

(3) 両辺が同値であることを示す.

(⇒) 先の議論より $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ か $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(s)$ のどちらかが成立するので, $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ だとすると仮定と合わせて $n\,\mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) \neq t(n)\ \big)$ となるので, そんな n を 1 つ固定します. いま, $f \in O(s) \cap O(t)$ とすると $s \trianglelefteq f \wedge t \trianglelefteq f$ と, $n \in \mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より, $s(n) = f(n) \wedge t(n) = f(n)$ から $s(n) = t(n)$ となるが, これは n の定義に矛盾.

(⇐) $O(s) \cap O(t) = \emptyset$ より $O(s) \subseteq O(t)$ でも $O(t) \subseteq O(s)$ でもない, つまり $s \trianglelefteq t$ でも $t \trianglelefteq s$ でもないことになり, つまり $\neg s||t$.

(4) $s||t$ だったとすると (2) より $O(s) \subseteq O(t) \vee O(t) \subseteq O(s)$ となり, そして仮に $O(s) \subseteq O(t)$ だとすると $O(s) \cap O(t) = O(s)$, つまり basic open になっている.
$\neg s||t$ だとすると (3) より $O(s) \cap O(t)$ は $\emptyset$ となる. □

3.1.3 Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく

この節ではこれまで使用してきた Proposition 3.1.5（125 ページ）の証明を目標とします. つまり何故全ての basic open set の集合が, どちらの空間においてもその空間の開基になるのかをまとめてみます.
もう一度一般的に議論すると, 添え字集合が ω, 各因子空間の台集合が X であるような直積位相空間 ${}^{\omega}X$ において, その位相は $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}X)$ を

$$\mathcal{G} \ = \ \{\, p_i^{-1}[O] \mid i \in \omega \wedge O \text{ は } X \text{ の open set} \,\}$$

とおいたときの, $\mathcal{G}$ が生成する位相のことでした. ここで各 $\in \omega$ において p_i は第 i 成分の射影です.
${}^{\omega}2$ において $\mathcal{G}$ がどのような集合になるか見てみます. ${}^{\omega}2$ において各因子空間 2 には離散位相が入っています. よって位相空間 2 では $\emptyset, \{0\}, \{1\}, 2$ の 4 つが開集合です. それぞれの開集合の, 各射影での逆像がどのようになるのかというと, ある $i \in \omega$ において $p_i^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ です. $p_i^{-1}[\{0\}]$ とは, ${}^{\omega}2$ の各要素を $0, 1$ の可算列と捉えた場合第 i 成分が 0 になっているような, ${}^{\omega}2$ の各要素を ω から 2 への関数と捉えた場合 i を 0 に写すような, そんなものたちの集合になっています. つまり後者でとらえた場合は,

$$p_i^{-1}[\{0\}] \ = \ \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) = 0 \,\}$$

です. $\{1\}$ も同様にして $p_i^{-1}[\{1\}] \ = \ \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) = 1 \,\}$ となります. そして $p_i^{-1}[2]$ とは ${}^{\omega}2$ の要素の中で i の値が 0 または 1 になっているもの全体ということで, つまり $p_i^{-1}[2] = {}^{\omega}2$ となります. 一般的には $O \subseteq 2$ に対して

$$p_i^{-1}[O] \ = \ \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) \in O \,\}$$

となります.
${}^{\omega}\omega$ においても同様に各因子空間 ω には離散位相が入っている, つまり ω のどの部分集合も ω の開集合です. なので $O \subseteq \omega$ に対して

$$p_i^{-1}[O] \ = \ \{\, f \in {}^{\omega}\omega \mid f(i) \in O \,\}$$

となります.
開集合 O が一元集合のときは, $p_i^{-1}[O]$ は 1 つの basic set になります. それを元にする有限部分関数のための記法を用意します.

Definition 3.1.12.
$i, i_0, \ldots, i_n \in \omega$ に対して

- $k \in 2$ に対して $[i \mapsto k] \ = \ \{\langle i, k\rangle\}$ と定めます. つまり i を k に写すというたった 1 つの対応規則のみの関数のことです. $k \in \omega$ に対しても同様に $[i \mapsto k]$ を定めます.

- $k_0, \ldots, k_n \in 2$ に対して
$$[i_0, \ldots, i_n \mapsto k_0, \ldots, k_n] \ = \ \{\, \langle i_m, k_m\rangle \mid 0 \le m \le n \,\}$$
として定め, $k_0, \ldots, k_n \in \omega$ についても同様に定める. ■

つまり $k \in 2$ に対して $p_i^{-1}[\{k\}] = O([i \mapsto k])$ となります. $k \in \omega$ の場合も同様です. より一般的には以下のようになります.

Proposition 3.1.13.
$A \subseteq 2$ に対して $p_i^{-1}[A] = \bigcup_{a \in A} O([i \mapsto a])$. $A \subseteq \omega$ の場合も同様.
とくに

$$\begin{aligned} p_i^{-1}[2] &= O([i \mapsto 0]) \cup O([i \mapsto 1]) = {}^{\omega}2. \\ p_i^{-1}[\omega] &= \bigcup_{k \in \omega} O([i \mapsto k]) = {}^{\omega}\omega. \end{aligned}$$ ■

よって ${}^{\omega}2$ の場合, $\mathcal{G}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \{ p_i^{-1}[\emptyset] \mid i \in \omega \} \cup \{ p_i^{-1}[\{0\,] \mid i \in \omega \} \cup \{ p_i^{-1}[\{1\,] \mid i \in \omega \} \cup \{ p_i^{-1}[2] \mid i \in \omega \} \\ &= \{\emptyset, \emptyset, \dots\} \cup \{ O([0 \mapsto 0]), O([0 \mapsto 1]), \dots \} \cup \{ O([1 \mapsto 0]), O([1 \mapsto 1]), \dots \} \cup \{{}^{\omega}2, {}^{\omega}2, \dots\} \\ &= \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \cup \{ O([i \mapsto 0]) \mid i \in \omega \} \cup \{ O({}^{<})^{i}1 \mid i \in \omega \} \\ &= \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \cup \{ O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in 2 \} \end{aligned}$$

となります. ${}^{\omega}\omega$ の場合 $\mathcal{G}$ は同様にして

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, {}^{\omega}\omega\} \cup \{ O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in \omega \}$$

となります.
ここまでの議論をまとめておきます.

Proposition 3.1.14.
$\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}2), \mathcal{G}_\omega \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}\omega)$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 &= \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \cup \{ O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in 2 \}, \\ \mathcal{G}_\omega &= \{\emptyset, {}^{\omega}\omega\} \cup \{ O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in \omega \} \end{aligned}$$

とすると, Cantor 空間の位相は $\mathcal{G}_2$ が生成する位相, Baire 空間の位相は $\mathcal{G}_\omega$ が生成する位相である. ■

もう一度位相空間論に戻ると, ある集合 $\mathcal{G}$ が生成する位相とは, $\mathcal{G}$ の全ての要素を開集合とするような最弱の位相で, それは Lemma 2.1.22（108 ページ）より $\mathcal{G}$ を準基とするような, つまり開基の $\mathcal{G}$ の要素の有限個の共通部分全体になります. よってそんな開基を $\mathcal{B}$ とおくと

$$\mathcal{B} = \{ \bigcap_{0 \le i \le n} G_i \mid n \in \omega \wedge G_0, \dots, G_n \in \mathcal{G} \}$$

です.
よって先ほどの Proposition 3.1.14（129 ページ）での $\mathcal{G}_2$ や $\mathcal{G}_\omega$ の有限個の要素で共通部分をとるとどのようになるか調べます.

Proposition 3.1.15.
互いに異なる $i, i_0, \dots, i_n \in \omega$ と $A_0, \dots, A_n \subseteq \omega$ に対して

1. $k_0, k_1 \in 2$ が $k_0 \neq k_1$ ならば $O([i \mapsto k_0]) \cap O([i \mapsto k_1]) = \emptyset$.
   より一般的には $O([i \mapsto k]) \cap O([i \mapsto 1-k]) = \emptyset$.
2. $k_0, \dots, k_n \in 2$ に対して $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} O([i_m \mapsto k_m]) = O([i_0, \dots, i_n \mapsto k_0, \dots, k_n])$.
3. $k_0, \dots, k_n \in \omega$ に対して $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} O([i \mapsto k_m]) = \emptyset$.
4. $\displaystyle(\bigcup_{a \in A_0} O([i \mapsto a])) \cap (\bigcup_{a \in A_1} O([i \mapsto a])) = \bigcup_{a \in A_0 \cap A_1} O([i \mapsto a])$.
   とくに $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ のとき $\displaystyle(\bigcup_{a \in A_0} O([i \mapsto a])) \cap (\bigcup_{a \in A_1} O([i \mapsto a])) = \emptyset$.
5. $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} (\bigcup_{a \in A_m} O([i_m \mapsto a])) = \bigcup_{a_0 \in A_0, \dots, a_n \in A_n} O([i_0, \dots, i_n \mapsto a_0, \dots, a_n])$. ■

第Ⅴ部

情報一覧

このパートは, このノートの色んな情報をまとめています.

第 4 章　後で書くメモ一覧

後で書くメモは全部で 34 個です.

その 1,（パス）part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_帽子パズルの構成要素

（行数⇒ 401） 有限パズルの平均正解者数定理が書けたら引用する

その 2,（パス）part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_色以外の発言.tex

（行数⇒ 46） 全員出ていったバージョンのパズルを見つけたら引用する

その 3,（パス）part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_色以外の発言.tex

（行数⇒ 111） いずれエバートの論文読んだらコメントを解説を追加する.

その 4,（パス）part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_色以外の発言.tex

（行数⇒ 136） ディラック・ガードナーの命名理由についても歴史パートを書いたらメモするまた他の箇所からこのメモにリンクをはるあとは EO パズル部分を書いたら、ここにリンクをはる

その 5,（パス）part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_色以外の発言.tex

（行数⇒ 178） 必勝戦略の説明文献精読ができあがればどうアレンジしたかを書くサイコロバージョンも追記する

その 6,（パス）part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの形式化.tex

（行数⇒ 85） 集合を定義したらリンクをはる

その 7,（パス）part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの形式化.tex

（行数⇒ 133） 一元集合を定義したらリンクをはる

その 8,（パス）part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの形式化.tex

（行数⇒ 189） 有向グラフについてまとめたらリンクをはる

その 9,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数⇒ 203） 集合は要素の表記の順番が異なっても同じ集合になる. 素朴集合論の基礎勉強の時に示してみる.

その 10,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数⇒ 259） 空集合はどんな集合でも部分集合になる．素朴集合論の基礎勉強の時に示してみる．

その 11,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数⇒ 912） 実際に集合での自然数の構成をするようなページにたどり着いたときに, 再度確認して〇〇部分を埋めておくこと．またもし ZFC からの数学展開ノートができていれば, そのリンクもはる．

その 12,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数⇒ 1143） 最後らへんまで読んで木の使い方が分かったらどのような使い方だったか書く．

その 13,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数⇒ 1151） この選択公理の回避の例が出てきたら, ここにリンクを貼る．

その 14,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数⇒ 1161） ZFC 復習やったらここに鎖の定義の参照を書く．

その 15,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数⇒ 1176） ツォルンの補題．ZFC 復習やったらここに証明へのリンクをはる．

その 16,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数⇒ 17） 整数全体集合は可算であること．素朴集合論の復習で証明したらリンクをはる．

その 17,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数⇒ 32） 対等関係は同値関係．素朴集合論の復習で証明したらリンクをはる．

その 18,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数⇒ 135） A が B におさえられていれば A から B への単射が存在する．素朴集合論の復習で証明したらリンクをはる．

その 19,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数⇒ 173） A が B におさえられるという関係は反射的・推移的．素朴集合論の復習で証明したらリンクをはる．

その 20,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数⇒ 187） A が N におさえられれば A は可算．素朴集合論の復習で証明したらリンクをはる．

その 21,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数⇒ 203） ベルンシュタインの定理. 素朴集合論の復習で証明したらリンクをはる.

その 22,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数⇒ 218） 濃度の比較可能定理. 選択公理の復習で証明したらリンクをはる.

その 23,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex

（行数⇒ 141） 一階述語述語論理において区切り文字がどのような扱いになっているか分かったら補足すること.

その 24,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex

（行数⇒ 273） 公理的集合論の服種をやったときに順序数としての自然数の定義が終わったらここの脚注に引用する.

その 25,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex

（行数⇒ 285） このテキストで後々そういう話をするのでそこまで読み進めたあとに引用する. 具体的には自然数論や集合論を使って文論理の理論を展開するところまで読んだらの話.

その 26,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex

（行数⇒ 358） 文記号の集合が不可算になったときにどのような弊害があるのか分かれば, ここに引用する.

その 27,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex

（行数⇒ 491） 何種類かの操作で「閉じさせる」という構成方法について 1.4 節（94 ページ）を読み終わって議論が分かれば, ここに引用しておく.

その 28,（パス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て.tex

（行数⇒ 199） この定理 12A の完全な証明が分かれば, ここに引用すること.

その 29,（パス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ.tex

（行数⇒ 56） 各節があるていど出来上がったらここにその案内とリンクをはる.

その 30,（パス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsec

（行数⇒ 22） 公理的集合論の入門ノートで一般的な有限部分関数全体集合を定義したらここにリンクを貼る.

その 31,（パス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsec

（行数⇒ 98） Cantor 空間や Baire 空間で何が開基になるかを解説し終えたら, ここの○○を埋める.

その 32,（パス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsect

（行数⇒ 111） basic set が開集合であることを示したら, ここにリンクをはる.

その 33,（パス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsect

（行数⇒ 179） （４）の別バージョンができたらリンクをはる.

その 34,（パス）part/part_その他/chapter_このノートの Tips/section_お助け自作ツール紹介.tex

（行数⇒ 49） この補題に関してはあとで示しておく.

第5章　今後の課題一覧

今後の課題は全部で 2 個です.

その 1　69 ページ

対応規則（の数や内容）が異なる（写像としては異なるように見える）が, 要素になっている順序対も全て集合に書き直したとき, 集合として一致するような写像の組み合わせは存在するか？

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）1133 （ラベル）kongo:対応規則は異なるが集合として一致する写像は存在するか？

その 2

ある整式の構成列があったとき, その末項整式に含まれていない文記号を持つ整式が, その構成列に含まれていた場合に, そのような整式全てを構成列から除いても, その末項整式の構成列であることには変わらない.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex`

（行数）625 （ラベル）

第6章　このノートの定義・定理一覧

6.1　0部　研究ノート

Puzzle

看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子は黒白どちらかの色で塗られています. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています. また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人でもいれば囚人たちの勝利として 2 人とも釈放されます. もし 2 人とも不正解ならば囚人たちの敗北として 2 人とも処刑されます. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で作戦を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 囚人たちが勝利する作戦は存在するでしょうか？

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルとは？.tex`

（行数）10 （ラベル）

Puzzle 1.2.1 13 ページ

看守は 3 人の囚人に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.
3. その部屋には白黒に塗られた帽子がそれぞれ 3 つずつ置かれている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 帽子を被せたあと他の全ての帽子を見てもらい黒色が 1 つでも見えたら手を挙げる.
7. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, 全員同時に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
8. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, 囚人全員に黒色の帽子を被せました. そしてルールに従って全員手を挙げました. そのあと全員が「分からない」と発言しました. しかしもう一度発言させると全員「黒」と発言し正解だったので釈放されました. なぜどの囚人も自分の色が分かったのでしょうか？

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_帽子パズルの構成要素.tex`

（行数）51 （ラベル）puzzle:個人戦 3 人 2 色視野完全同時発言全員同色帽子パズル

Puzzle 1.2.2　14 ページ

看守は 3 人の囚人（以下彼らを a, b, c とおく）に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.
3. その部屋には白黒に塗られた帽子がそれぞれ 3 つずつ置かれている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 帽子を被せたあと他の全ての帽子を見てもらい黒色が 1 つでも見えたら手を挙げる.
7. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c の順に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
8. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c の順に 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, 囚人全員に黒色の帽子を被せました. そしてルールに従って全員手を挙げました. 最初の発言では 3 人は「分からない」と答えましたが, 2 度目の発言が回ってきた囚人 a は「黒」と発言して正解し釈放されました. なぜ囚人 a は自分の色が分かったのでしょうか？

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_帽子パズルの構成要素.tex`

（行数）159 （ラベル）puzzle:個人戦 3 人 2 色視野完全順次発言全員同色帽子パズル

Puzzle 1.2.3　14 ページ

看守は 3 人の囚人（以下彼らを a, b, c とおく）に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.
3. その部屋には 5 つの帽子があり, うち 2 つは白色に, 残り 3 つは黒色に塗られている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 囚人たちにそれぞれ自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c の順に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
7. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c の順に 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, ルール通りに帽子を被せました. そのあと a, b は考えたのち順番に「分からない」と答えましたが, それを聞いた c は「黒」と発言して正解し釈放されました. なぜ囚人 c は自分の色が分かったのでしょうか？

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_帽子パズルの構成要素.tex`

（行数）214 （ラベル）puzzle:個人戦 3 人 2 色視野完全順次発言色配分不均衡帽子パズル

Definition 1.2.4　17 ページ

帽子パズルのうち, 登場するプレイヤー（囚人）と, プレイヤーに被せる帽子の色の候補が共に有限なパズルを**有限帽子パズル**と, どちらか 1 つ以上が無限になっているパズルを**無限帽子パズル**とよぶ.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_囚人数・色の数と帽子をどう見分けるか？.tex`

（行数）21 （ラベル）definition:有限・無限帽子パズル

Puzzle 1.2.14 26 ページ

看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子は黒白どちらかの色で塗られています. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています. また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 2 人もしくは 0 人のとき囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます. もし正解者・不正解者 1 人ずついるようならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_バリエーション/subsection_勝利条件.tex`

（行数）24 （ラベル）puzzle:hat-Lenstra-2-2

Puzzle 1.3.1 [59]3 章「泥んこの子供たち」冒頭のパズル 27 ページ

外で遊んでいた子供の一団が, 父親に呼ばれて家に戻ってきた. 父親の周りに集まると, 思ってたとおり, 子供たちの中の何人かは, 遊んでいる間に汚れていて, とくに顔に泥がついている. 子供たちは, それぞれ他の子供の顔に泥がついているかどうかは見えるが, 自分自身の顔に泥がついているかどうかは見えない. このことは全員が分かっているし, 子供たちが完璧な論理的思考をすることは一目瞭然である. ここで, 父親はこう言う. 「君らのうち, 少なくとも一人は泥で汚れている」そして, こう続ける. 「自分が泥で汚れている分かった者は, 前に進み出なさい」これで誰も前に進み出なければ, 父親は, この指示を繰り返す. 何回かこれを繰り返した時点で, 泥で汚れた子供全員が前に進み出る. 全員で k 人の子供のうち, m 人が泥で汚れているとき, 何回目でこうなるか, そして, その理由は.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの歴史/subsection_パズルとしての帽子パズルの歴史.tex`

（行数）26 （ラベル）puzzle:泥んこの子供たちパズルの一般系

Puzzle 1.3.2 [59] の Puzzle 8（28 ページ） 27 ページ

外で遊んでいたアリスとボブが家に戻ってくる. 二人の父親は, ボブの顔が汚れているのを見て, 二人が泥遊びをしていたことに気づく. 二人は, それぞれ相手の顔が泥で汚れているのを見ることはできるが, 自分自身の顔が汚れているかは見ることができない. もちろん, 鏡を覗き込めば自分の顔を見ることができる. ここで, 父親は「二人のうち一人の顔は泥で汚れている」と言う. ボブはすぐに顔を洗いに向かった. しかし, ボブは鏡を見たわけではない. ボブはどのようにして自分が泥で汚れていると分かったのか.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの歴史/subsection_パズルとしての帽子パズルの歴史.tex`

（行数）60 （ラベル）puzzle:2 人ヒント無しの泥んこの子供たちパズル

Puzzle 1.3.3 [59] の Puzzle 9（29 ページ） 27 ページ

その翌日, アリスとボブはまた外で遊んでいたが, 今度は二人とも泥んこになった. 家に帰ったとき, 父親は, またしても,「二人のうち少なくとも一人は泥んこだ」と言う. そして, 父親はボブにこう尋ねる. 「自分は泥んこかどうか分かるかな」ボブは「いや, 分からない」と答える. そこで, 父親はアリスにこう尋ねる. 「自分は泥んこか分かるかな」するとアリスは「ええ. 分かるわ. 私は泥んこね」どうして, 自分が泥んこだとアリスは分かったのに, ボブには分からなかったということが起こりうるのだろうか.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの歴史/subsection_パズルとしての帽子パズルの歴史.tex`

（行数）81 （ラベル）puzzle:2 人ヒント有りの泥んこの子供たちパズル

Puzzle 1.3.4 29 ページ

ある王が 3 人の臣下に目隠しをし, それぞれの額を触った. 臣下たちは, 触った指がランプブラックで覆われているかもしれないし, そうでないかもしれないことを知っていた. 目隠しをはずすと, 「黒い点が一つでも見えたら口笛を吹くように」との指示が出された. そして, 自分の額にランプブラックがついているかどうかがわかったら, すぐに口笛をやめるようにと指示された. 3 人全ての額に黒点がついたため, そのうちの 1 人はやがて口笛を吹くことを止めた. なぜ彼は自分の額に黒点があるとわかったのだろうか.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの歴史/subsection_パズルとしての帽子パズルの歴史.tex`

（行数）268 （ラベル）puzzle:Buker 版泥んこの子供たちのパズル

Puzzle 1.3.5 29 ページ

精神反応速度の異なる $n > 2$ の乗客を乗せた車がトンネルを通過し, そのため各乗客は無意識に自分の額にすすが付くことがある. どの乗客も以下の条件を満たします.

(1). 他の乗客の額が汚れていると笑い出して止まらなくなってしまうこと.

(2). 他の乗客の額はすべて見えること.

(3). 正しく推論すること.

(4). 推論して自分の額に汚れがあると判断したときだけ自分の額を拭くこと.

(5). これまでの条件を他の乗客も満たすことを知っていること.

最終的にはどの乗客も自身の顔を拭くことを示せ.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの歴史/subsection_パズルとしての帽子パズルの歴史.tex`

（行数）323 （ラベル）puzzle:Bennett 版泥んこの子供たちのパズル

Puzzle 1.3.6 30 ページ

ここに三人の人が居る．課長と係長と巡査部長としてもよい．トランプが 5 枚, そのうち三枚は黒で, 二枚は赤, 私が三人の人の背中に一枚ずつ貼りつける．三枚入り用．二枚はかくしてしまう．そこで, まず課長さんに, 係長と巡査部長の背中をみてくれ給え, そして自分の背中のトランプの色が判るかとたずねる．いいですかな．課長は, かくした二枚を知っていればすぐ答えられるが, そうでないなら答えられない．じっくり考えて, よく考えたが判りませんと答えた．そこで今度は係長に, つまり神田さん, あんたに, 他の二人の背中をみて, 自分の背中のトランプの色が判りますか, と聞いた．すると係長は, 課長と巡査部長の背中をじっくりみて考えたが, 結局, 判りませんと答えた．よしかね．さて今度は巡査部長に, 他の二人のせなっかをみて下さい．キミの背中には既に二人の人に見られているが, あんたは他の二人の背中の色をみて, 自分の背中のトランプの色が判りますか, と聞いた．するてえと, 巡査部長はやがて眼をつむって, 課長さんと係長さんがよく考えて, 完全な推理の上で判らぬと仰言ったのがまちがいなければ, 私にはよく判る．私の背中の色は X 色ですと答えた．よしかな．何色でありましたか, そしてどうして判りましたかってんですよ．

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの歴史/subsection_パズルとしての帽子パズルの歴史.tex`

（行数）390 （ラベル）puzzle:光とその影に登場した帽子パズル

Puzzle 1.3.7 37 ページ

ギリシャの 3 人の哲学者は, 論争に疲れ, 夏の暑さに耐えかねて, アカデミーの木の下で少し昼寝をしていた．ところが, ある悪戯者が彼らの顔に黒いペンキを塗ってしまった．やがて彼らは一斉に目を覚まし, それぞれ相手を笑い始めた．突然, 一人が自分の顔にペンキが塗られていることに気づき, 笑うのをやめました．彼はなぜ笑うのをやめたのでしょうか．

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの歴史/subsection_パズルとしての帽子パズルの歴史.tex`

（行数）1160 （ラベル）puzzle:3 人の哲学者の問題

Puzzle 1.3.8 37 ページ

革命に失敗した 3 人が国境を越えて脱出し, ある小さな町の留置場に収容された．保安官は囚人たちに同情し, 彼らを自由にする方法を探した．ある日, 保安官は白い円盤を 3 枚, 黒い円盤を 2 枚持って刑務所に入り, 囚人たちに言った．「お前たちの背中に, この円盤を一枚ずつ貼ろう．お前たちは仲間の円盤を見ることができるが, 自分の円盤は誰も見ることができない．白い円盤を貼られた者が, 自分の円盤が白であることを正しく当てることができれば, 彼は自由を得ることができる．そうでなければ, その者は無期限に拘留される。」こう言って, 彼はそれぞれの背中に白い円盤を貼り付け, 彼らを監視係の部下に預けた．3 人の囚人 A, B, C は, それぞれ自分の円盤が白いかどうかをどのように推論すれば言い当てることができるだろうか？

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの歴史/subsection_パズルとしての帽子パズルの歴史.tex`

（行数）1180 （ラベル）puzzle:Kraitchik 囚人円盤パズル

Definition 1.4.1 囚人と色の集合 39 ページ

集合 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{K}$ と書いたとき, A を**囚人集合**といい, A の要素を**囚人**（**prisoner**）または **agent** とよぶ. K を**色集合**といい, K の要素を**色**（**color**）とよぶ.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの形式化.tex`

（行数）90 （ラベル）definition:帽子パズルの囚人と色の集合

Definition 1.4.2 coloring 39 ページ

A, K に対して写像 $f\colon A \to K$ を **coloring** とよぶ. あるゲームにおいて, 囚人たちが被せられる可能性のある帽子の被せ方, つまり coloring の集合を C で表す.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの形式化.tex`

（行数）148 （ラベル）definition:coloring

Definition 1.4.3 視野グラフ 39 ページ

囚人集合 A に対して, A 上の有向グラフ $\boldsymbol{V}$ がループを持たないとき, V を（A 上の）**視野グラフ**（**visibility graph**）とよぶ.
$a, b \in A$ と A 上のなんらかの視野グラフに対して,

- V において a から b への辺が存在するとき, a は b の**帽子が見えている**, もしくは単に a は b が**見えている**といい, $a\overrightarrow{\boldsymbol{V}}b$ と表す.
- V において a が見えている囚人全体の集合を $V(a)$ で表す. つまり $V(a) = \{b \in A : a\overrightarrow{V}b\}$ であり, この $V(a)$ を囚人 a の**視野**と呼ぶ.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの形式化.tex`

（行数）194 （ラベル）definition:視野グラフ

Definition 1.4.4 coloring の「見分けがつかない」関係 40 ページ

囚人集合 A と $a \in A$, A 上の視野グラフ V に対して, C 上の二項関係 $\boldsymbol{\equiv_a}$ を

$$\begin{aligned} f \equiv_a g &\overset{\text{def}}{\iff} \forall b \in V(a)\big(\ f(b) = g(b)\ \big) \\ &\iff f{\restriction}V(a) = g{\restriction}V(a) \end{aligned}$$

と定義する. 2 つの coloring $f, g \in C$ に対して, $f \equiv_a g$ であるとき, f, g は a にとって**見分けがつかない**という.

（ファイルパス）`part/part_研究ノート/chapter_帽子パズル概要/section_帽子パズルの形式化.tex`

（行数）283 （ラベル）definition:見分けがつかない関係

6.2 1部 帽子パズル本精読ノート

6.3 2部 不完全性定理勉強会ノート

Notation 0.0.1 ジャーゴン (E:p1 2, K:p1 2) 59 ページ

数学用語になかで, このノートを通じて用いるものを 4 つ挙げる.

1. 定義や定理の主張の終わりを表す記号として ■ を, 証明の終わりを表す記号として □ を用いる.
2. 「○○ならば××である」という含意を表す文章を「○○ $\Rightarrow$ ××」と略記する . 逆向きの含意を表すのに $\Leftarrow$ を使うこともあります.
   「○○であるのは, ××であるとき , かつそのときに限る」を「○○は××と同値である」と述べたり , 記号 $\Leftrightarrow$ を, 「○○ $\Leftrightarrow$ ××」のように使ったりする .
3. 「したがって」という言葉の代わりに省略記号 $\therefore$ を, 「なぜなら」という言葉の代わりに省略記号 $\because$ を用いる. とくに証明中に $\because$ を用いる場合はぶら下げを使って, その理由部分を書く.
4. 関係を表す記号に斜線を重ねることでその関係の否定を表すことがある. 例えば「$x = y$」の否定として「$x \neq y$」や「$x \in y$」の否定として「$x \notin y$」と書く. このテキストで新たに導入する記号, 例えば $\models$ に対しても同様に $\not\models$ のようにして, このルールを適用する.

(ファイルパス) `part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

(行数) 5 (ラベル) notation:ジャーゴン

Definition 0.0.2 集合 (E:p1 2, K:p2) 59 ページ

ものの集まりのことを **set** (**集合**) という.
ここでいう「もの」のことを **member** (**要素**) または **element** (**元**) と呼ぶ. この「もの」のことをオブジェクトとも呼んだりする. オブジェクト x, y が同一のものであるとき, $x = y$ と表す.
もの t が集合 A の要素であることを $t \in A$ で表す.
集合 A, B に対して

どのオブジェクト t についても, $t \in A$ であれば $t \in B$ であり, かつ $t \in B$ であれば $t \in A$ である

(論理式で書けばたとえば $\forall t(\ t \in A \to t \in B\ \wedge\ t \in B \to t \in A\ )$ や, $\forall t(\ t \in A \Leftrightarrow t \in B\ )$ となる) をみたすとき, 集合 A, B は等しいと言い, $A = B$ で表す.

(ファイルパス) `part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

(行数) 62 (ラベル) definition:集合

Definition 0.0.3 E:p2, K:p2 59 ページ

オブジェクト t と集合 A に対して, その要素が t か A に属する要素のみであるような集合を $A; t$ で表す.
のちに定義する和集合記号 $\cup$ を用いて定義しなおせば, $A; t \overset{\text{def}}{=} A \cup \{t\}$ となる. 「$\overset{\text{def}}{=}$」という表記に関してはすぐ下の Notation を参照のこと.

(ファイルパス) `part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

(行数) 88 (ラベル) definition:セミコロン演算

Notation 0.0.4 定義するための記号 59 ページ

もの（数学的対象）を定義するさいに「$\stackrel{\mathrm{def}}{=}$」,（数学的な）述語を定義するさいに「$\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$」を用いる．使い方としてはこれらに記号の左側に変数などを利用した新たなものや述語を記述し, 右側に日常言語で書かれたそれらの定義を書く．ここまでの定義を使用例を出すと

- $A;t \stackrel{\mathrm{def}}{=}$ その要素が t か A に属する要素のみであるような集合（Definition 0.0.3）
- $A = B \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ どのオブジェクト t についても, $t \in A$ であれば $t \in B$ であり, かつ $t \in B$ であれば $t \in A$ である（Definition 0.0.2）

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）102 （ラベル）notetion:定義するための記号

Proposition

オブジェクト t と集合 A に対して, $t \in A \Leftrightarrow A;t = A$.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）126 （ラベル）

Definition 0.0.6 空集合 (E:p2, K:p2 3) 60 ページ

要素を全く持たない集合を **empty set**（**空集合**）といい, $\emptyset$ で表す．集合 A が空であることは $A = \emptyset$ で表せ,（論理式で書けば例えば $\forall x(\ x \notin A\ )$ となる）空集合でない集合を **non empty** な（**空でない**）集合と呼ぶ.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）148 （ラベル）definition:空集合

Notation 0.0.7 E:p2, K:p3 60 ページ

自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ で, 整数全体の集合 $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{Z}$ で, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）159 （ラベル）notation:自然数全体の集合

Definition 外延的記法 (E:p2, K:p3)

オブジェクト $x, x_1, \ldots, x_n$ に対して,

1. x のみを要素にもつ集合を $\{x\}$ で表す.
2. $x_1, \ldots, x_n$ のみを要素にもつ集合を $\{x_1, \ldots, x_n\}$ で表す.
3. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を表し, $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ は整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を表す.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数）182 （ラベル）

Proposition E:p2, K:p3

オブジェクト x, y に対して, $\{x, y\} = \{y, x\}$ である.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数）195 （ラベル）

Definition 内包的記法 (E:p2, K:p3)

$\{\, x \mid \_x\_ \}$ と書いて $\_x\_$ をみたす全てのオブジェクトの集合を表す.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数）209 （ラベル）

Definition 0.0.11 部分集合 (E:p2, K:p3) 61 ページ

集合 A, B に対して集合 A の要素がすべて B の要素でもあるとき, A は B の **subset（部分集合）** であるといい, $A \subseteq B$ で表す. （論理式で書けば $\forall x(x \in A \to x \in B)$ となる）

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数）242 （ラベル）definition:部分集合関係

Proposition (E:p2, K:p3)

$\emptyset$ はどんな集合に対しても部分集合となる.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

（行数）252 （ラベル）

Definition 0.0.13 べき集合 (E:p2, K:p3) 61 ページ

集合 A に対して A のすべての部分集合からなる集合を A の **power set**（べき集合）とよぶ, $\mathcal{P}(A)$ で表す．より正確には $\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, X \mid X \subseteq A \,\}$.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）265 （ラベル）definition:べき集合

Example E:p3, K:p4

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}\\ \mathcal{P}(\{\emptyset\}) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）277 （ラベル）

Definition 0.0.15 和集合と共通部分 (E:p3, K:p4 5) 61 ページ

A, B を集合, $\mathcal{A}$ を全ての要素が集合であるような集合とする．さらに各自然数 n に対して集合 A_n が定まっているとする．

1. $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A$ または $x \in B \,\}$（$= \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$）とし, これを A と B の **union**（和集合）という．
2. $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A$ かつ $x \in B \,\}$（$= \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$）とし, これを A と B の **intersection**（共通部分）という．
3. $A \cap B = \emptyset$ であるとき, A と B は **disjoint**（交わらない）という．$\mathcal{A}$ のどの 2 個の要素も交わらないとき, $\mathcal{A}$ は **pairwise disjoint**（互いに交わらない）という．
4. $\bigcup \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x$ は A のいずれかの要素に属する $\}$（$= \{\, x \mid \exists A(x \in A \wedge A \in \mathcal{A}) \,\}$）とし, これを $\mathcal{A}$ の **union**（和集合）という．
5. $\bigcap \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x$ は A のすべての要素に属する $\}$（$= \{\, x \mid \forall A(x \in A \wedge A \in \mathcal{A}) \,\}$）とし, これを $\mathcal{A}$ の **intersection**（共通部分）という．
6. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{\, A_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ とする．これを単に $\bigcup_n A_n$ と表すこともある．

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）282 （ラベル）definition:和集合

Example E:p3, K:p4 5

t をオブジェクト, A, B を集合, $\mathcal{A} = \{\{0,1,5\},\{1,6\},\{1,5\}\}$ という集合族とする.

1. $A; t = A \cup \{t\}$.
2. $\bigcup \mathcal{A} = \{0,1,5,6\}$.
   $\bigcap \mathcal{A} = \{1\}$.
3. $A \cup B = \bigcup \{A, B\}$.
4. $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$.

   （ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

   （行数）341 （ラベル）

Definition 0.0.17 順序対 (E:p3 4, K:p5) 61 ページ

オブジェクト $x, y, z, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ に対して

1. $\langle x, y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\},\{x,y\}\}$ とし，これを x と y の **ordered pair（順序対）** という．順序対 $\langle x, y\rangle$ における x, y をこの順序対の成分といい，とくに x を第一成分，y を第二成分と呼んだりする．
2. $\langle x, y, z\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$ とし，より一般的に $n > 1$ に対して $\langle x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle$ と帰納的に定義する．
3. とくに $\langle x\rangle = x$ と定義する．

   （ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

   （行数）355 （ラベル）definition:順序対

Definition 0.0.18 有限列 (E:p4, K:p5) 62 ページ

集合 A に対して

1. S が A の要素からなる **finite sequence（有限列）**（あるいは **string（列）**）であるとは，ある正の整数 n について $S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ で各 x_i が A の要素であるときとする．（論理式で書くと $\exists n \in \mathbb{Z}(\ n > 0\ \wedge\ x_1, \ldots, x_n \in A\ \wedge\ S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle\ ))$
   またこのときの n を有限列 A の長さとよぶ．
2. A の要素からなる有限列 $S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ に対し，$1 \leq k \leq m \leq n$ な k, m でもって $\langle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m\rangle$ な形の有限列を S の **segment（区間）** という．とくに $k = 1$ な区間を S の **initial segment（始切片）** といい，$m \neq n$ な始切片を S の **proper initial segment（真の始切片）** という．

   （ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex

   （行数）389 （ラベル）definition:有限列

Proposition E:p4, K:p6

オブジェクト $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ に対して $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ ならば, $1 \le i \le n$ な各 i について $x_i = y_i$.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）415 （ラベル）

Lemma 0.0.20 E:p4 LEMMA 0A, K:p6 補題 0A 63 ページ

$\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+k}\rangle$ ならば $x_1 = \langle y_1, \ldots, y_{k+1}\rangle$.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）458 （ラベル）lemma:長さの違う有限列が一致するとき始切片で帳尻が合う

Example 0.0.21 63 ページ

集合 A を $A = \{0, 1, \langle 2, 3\rangle\}$ とすると, この A の要素で（集合として）等しくなるようなどんな 2 つの n 個組を作っても, それが等しい限りはその長さも構成成分の順番も等しくなる.
逆に $A = \{0, 1, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle\}$ として, A の有限列 S_1, S_2 を

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle\langle 0, 1, 0\rangle, 1\rangle, \\ S_2 &= \langle\langle 0, 1\rangle, 0, 1\rangle \end{aligned}$$

とすると, この 2 つは（集合として）$S_1 = S_2$ ではあるが, S_1 の長さは 2 で S_2 の長さは 3, よって長さは一致せず, ゆえに構成成分も一致しない.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）506 （ラベル）example:集合として一致するが長さが異なる有限列

Definition 0.0.22 直積集合 (E:p4, K:p6) 63 ページ

集合 A, B と $n > 1$ な $n \in \mathbb{N}$ に対し

1. $A \times B \overset{\text{def}}{=} \{\, \langle a, b\rangle \mid a \in A \text{ かつ } b \in B \,\}$ とし, これを A と B の **Cartesian product**（**直積集合**）という.
2. $A^n \overset{\text{def}}{=} A^{n-1} \times A$ と帰納的に定義する. たとえば $A^3 = (A \times A) \times A$ である.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）540 （ラベル）definition:直積集合

Definition 0.0.23 関係 (E:p4 5, K:p6 7) 64 ページ

集合 A, B, R と $n > 0$ な $n \in \mathbb{N}$ に対し

1. R のすべての要素が順序対であるとき, R を **relation**（**関係**）という.
2. 関係 R に対して $\mathrm{dom}(R) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid$ ある y について $\langle x, y\rangle \in R \,\}$ とし, これを関係 R の **domain**（**定義域**）という.
   さらに $\mathrm{ran}(R) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, y \mid$ ある x について $\langle x, y\rangle \in R \,\}$ とし, これを関係 R の **range**（**値域**）という.
   さらに $\mathrm{fld}(R) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$ とし, これを関係 R の **field**（**領域**）という.
3. $R \subseteq A^n$ であるとき, そんな R を A 上の n 項関係という.
4. $B \subseteq A$ かつ R が A 上の n 項関係であるとき, $R \cap B^n$ を R の B への **restriction**（**制限**）という.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）555 （ラベル）definition:関係

Example E:p4 5, K:p6 7

集合 $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{N}^2$ に対し

1. $R_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ とおくと, R_1 は 0 から 3 までの数の間の大小関係となる. さらに $\mathrm{dom}(R) = \{0,1,2\}$, $\mathrm{ran}(R) = \{1,2,3\}$, $\mathrm{fld}(R) = \{0,1,2,3\}$ となる.
2. $R_2 = \{\, \langle m, n\rangle \mid m < n \,\}$ とおくと, R_2 は $\mathbb{N}$ 上の大小関係となり, $B = \{0,1,2,3\}$ とすれば $R_1 = R_2 \cap B^2$ となるから R_1 は R_2 の B への制限である.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）594 （ラベル）

Definition 0.0.25 写像 (E:p5, K:p7 8) 64 ページ

集合 A, B と関係 F に対して

1. F が「$\mathrm{dom}(F)$ のそれぞれの要素 x について，$\langle x, y\rangle \in F$ なる y がただひとつ存在する」（論理式で書くと $\forall x \in \mathrm{dom}(F)\exists! y(\langle x, y\rangle \in F)$）をみたすとき，$F$ は **function**（**写像**）であるという．このとき $x \in \mathrm{dom}(F)$ に対して一意的に存在している y のことを $F(x)$ で表し，F の x における **value**（**値**）という．
2. 写像 F が $\mathrm{dom}(F) = A$ かつ $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$ をみたすとき，F は A を B に**写す**といい，$F\colon A \to B$ で表す．
3. $F\colon A \to B$ であるとき，$\mathrm{ran}(F) = B$ をみたすとき，F は A から B への **surjection**（**全射**）であるといい，$F\colon A \xrightarrow{\text{onto}} B$ で表す．
   「$\mathrm{ran}(F)$ のそれぞれの要素 y について，$\langle x, y\rangle \in F$ をみたす x がただひとつ存在する」（論旨式で書くと $\forall y \in \mathrm{ran}(F)\exists! x(\langle x, y\rangle \in F)$）をみたすとき，$F$ は A から B への **injection**（**単射**）であるといい，$F\colon A \xrightarrow{\text{1-1}} B$ で表す．
   全射かつ単射な写像を **bijection**（**全単射**）といい，$F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ で表す．
4. オブジェクト x, y とその順序対 $\langle x, y\rangle$ と写像 F に対して，$\langle x, y\rangle \in \mathrm{dom}(F)$ であるとき $F(\langle x, y\rangle)$ を単に $F(x, y)$ で表す．より一般的に $F(\langle x_1, \dots, x_n\rangle)$ を $F(x_1, \dots, x_n)$ で表す．
5. $F = \{\, \langle x, x\rangle \mid x \in A \,\}$ であるとき，F を A 上の **identity function**（**恒等写像**）といい，この F を id_A で表す．

   （ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

   （行数）608 （ラベル）definition:写像

Definition 0.0.26 演算 (E:p5, K:p8) 65 ページ

集合 A, B と関係 f, g に対して

1. $f\colon A^n \to A$ であるとき f を A 上の ***n*-ary operation**（***n* 項演算**）であるという．
2. A 上の n 項演算 f と $B \subseteq A$ な集合 B に対して，$g = f \cap (B^n \times A)$ をみたす g を f の B への **restriction**（**制限**）という．
3. A 上の n 項演算 f に対して，集合 $B \subseteq A$ が f について閉じているとは，どの $b_1, \dots, b_n \in B$ についても $f(b_1, \dots, b_n) \in B$ をみたす（論理式で書くと $\forall b_1, \dots, b_n \in B\big(\ f(b_1, \dots, b_n) \in B\ \big)$）ときをいう．

   （ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

   （行数）719 （ラベル）definition:演算

Example E:p5, K:p8

$S_1\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ と $S_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して

1. S_1 が任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $S_1(m,n) = m+n$ をみたすとすると, S_1 は $\mathbb{N}$ 上の加法という $\mathbb{N}$ 上の 2 項演算となる.
2. S_2 が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $S_2(n) = n+1$ をみたすとすると, S_2 は $\mathbb{N}$ 上の直後の自然数を与えるという $\mathbb{N}$ 上の 1 項（単項）演算となる.
3. $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対し $p(r_1+r_2) = r_1+r_2$ をみたすとすると, P は $\mathbb{R}$ 上の加法という $\mathbb{R}$ 上の 2 項演算となり, 1. の S_1 は P の $\mathbb{N}$ への制限, つまり $S_1 = P \cap \mathbb{N}^3$ となっている.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）740 （ラベル）

Example E:p5, K:p8

集合 A, B に対して

1. f を A 上の n 項演算, $B \subseteq A$ とし, g を f の B への制限とする. g が B 上の n 項演算となることと, B が f について閉じていることは同値である.
2. A 上の恒等写像 id_A は（何もしない・作用しないという）A 上の単項演算である.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）760 （ラベル）

Definition 0.0.29 同値関係と順序関係 (E:p5 6, K:p8 9) 65 ページ

集合 A と関係 R に対して

1. R が A 上で **reflexive**（**反射的**）とは, 任意の $x \in A$ について $\langle x, x\rangle \in R$ であるこという.
2. R が **symmetric**（**対称的**）とは, 任意の x, y に対して $\langle x, y\rangle \in R$ ならば $\langle y, x\rangle \in R$ であるこという.
3. R が **transitive**（**推移的**）とは, 任意の x, y, z に対して $\langle x, y\rangle \in R$ かつ $\langle y, z\rangle \in R$ ならば $\langle x, z\rangle \in R$ であるこという.
4. R が A 上で **trichotomy**（**三分律**）をみたすとは, 任意の x, y に対して $\langle x, y\rangle \in R,\ x = y,\ \langle y, x\rangle \in R$ のいずれか 1 つをみたすことという.
5. R が A 上の **equivalence relation**（**同値関係**）であるとは, R が A 上の 2 項演算でかつ A 上で反射的・対称的・推移的であるときをいう.
6. R が A 上の **ordering relation**（**順序関係**）であるとは, R が A 上の 2 項演算でかつ推移的であり A 上で三分律をみたすときをいう.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）805 （ラベル）definition:同値関係

Definition 0.0.30 同値類 (E:p6, K:p9) 66 ページ

集合 A 上の同値関係 R と $x \in A$ に対して $[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \mid \langle x, y \rangle \in R \,\}$ とし, これを x の **equivalence class**（**同値類**）という. さらに集合 $\{\, [x] \mid x \in A \,\}$ を $A \backslash R$ で表し, 集合 A の同値関係 R による **quotient set**（**商集合**）という.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）837 （ラベル）definition:同値類

Proposition E:p6, K:p9

集合 A 上の同値関係 R に対して, A の各要素の同値類全体は A の分割となる.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）853 （ラベル）

Notation E:p6, K:p9

自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ で表す

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）901 （ラベル）

Definition 0.0.33 E:p6, K:p9 67 ページ

集合 A に対して

1. 集合 A が **finite**（**有限**）であるとは, ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 写像 f があって, f が全単射になっていることをいう（論理式で書くと $\exists n \in \mathbb{N} \exists f(\ f \colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \{0, 1, \ldots, n-1\}\ )$）.
2. 集合 A が **infinite**（**無限**）であるとは, 有限でないときをいう. つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ への全単射写像が存在しないことをいう. 言い換えればどんな A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ の写像も全単射にならないともいえる.
3. 集合 A が **at most countable**（**高々可算**）であるとは, A から $\mathbb{N}$ への単射写像が存在するこという.
4. 集合 A が **countable**（**可算**）であるとは, A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在するこという.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）920 （ラベル）definition:有限集合

Proposition E:p6, K:p9

有限集合は高々可算.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）965 （ラベル）

Proposition 0.0.35 E:p6, K:p9 67 ページ

高々可算な無限集合 A に対して A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在する.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）977 （ラベル）proposition:高々可算な無限集合は N への全単射が存在する

Theorem 0.0.36 E:p6 THEOREM 0B, K:p10 定理 0B 67 ページ

A を高々可算集合とするとき, A の要素からなる有限列全体の集合も高々可算.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）1004 （ラベル）theorem:可算集合の要素の有限列全体も可算

Definition E:p7 , K:p12

集合族 $\mathcal{C}$ が **chain**（鎖）であるとは, 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $X \subseteq Y$ か $Y \subseteq X$ のいずれかが成立することをいう.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）1157 （ラベル）

Lemma 0.0.38 E:p7 ZORN'S LEMMA, K:p12 ツォルンの補題 69 ページ

集合族 $\mathcal{A}$ が

$$\text{任意の } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ が鎖ならば } \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$$

を満たすとき, $\mathcal{A}$ には超集合関係にて極大な要素 A が存在する, つまり A はどの $X \in \mathcal{A}$ に対しても $A \subsetneq X$ となることはない.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識.tex`

（行数）1166 （ラベル）lemma:ツォルンの補題

Definition 0.0.39 E:p8 , K:p12 69 ページ

集合 A, B に対して A から B への全単射写像が存在するとき, A と B は **equinumerous**（**対等**）であるといい, $A \sim B$ で表す.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）5 （ラベル）definition:集合の対等関係

Proposition E:p8 , K:p12

$\mathbb{N}$ と整数全体の集合は対等である.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）14 （ラベル）

Proposition 0.0.41 E:p8 , K:p12 69 ページ

任意の集合 A, B, C に対して以下の 3 つが成立する.

1. $A \sim A$.
2. $A \sim B$ ならば $B \sim A$.
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）23 （ラベル）proposition:対等関係は同値関係

Definition 0.0.42 E:p8 , K:p13 70 ページ

集合 A に対して $\mathrm{card}(A)$ を, 任意の集合 B に対して

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \leftrightarrow A \sim B$$

を満たすものとし, これを A の **cardninal numger**（**基数**）または **cardinality**（**濃度**）という.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）61 （ラベル）definition:基数・濃度

Definition 0.0.43 E:p8 , K:p13 70 ページ

集合 A, B に対して, ある $B' \subseteq B$ があって $A \sim B'$ であるとき, A **dominated by** B（A **は** B **でおさえられている**）といい, $A \preceq B$ で表す.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）121 （ラベル）definition:集合がおさえられているという関係

Proposition E:p8 , K:p13

$A \preceq B$ であるとき, A から B への単射写像が存在する.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）131 （ラベル）

Definition 0.0.45 E:p8 , K:p14 70 ページ

集合 A, B に対して $A \preceq B$ であるとき, $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ であるとする.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）141 （ラベル）definition:基数の大小関係

Proposition E:p9 , K:p14

任意の集合 A, B, C に対して以下の 2 つが成立する.

1. $A \preceq A$.
2. $A \preceq B$ かつ $B \preceq C$ ならば $A \preceq C$.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数）166 （ラベル）

Proposition E:p9 , K:p14

$A \preceq \mathbb{N}$ であることと, A が高々可算であることは同値.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数）183 （ラベル）

Theorem 0.0.48 E:p9 SCHÖDER-BERNSTEIN THEOREM, K:p14 シュレーダー・ベルンシュタイン（

集合 A, B と, 基数 κ, λ に対して,

(a) $A \preceq B$ かつ $B \preceq A$ ならば $A \sim B$.

(b) $\kappa \leq \lambda$ かつ $\lambda \leq \kappa$ ならば $\kappa = \lambda$.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数）193 （ラベル）theorem:シュレーダー・ベルンシュタインの定理

Theorem 0.0.49 E:p9 THEOREM 0C, K:p14 定理 0C 71 ページ

集合 A, B と, 基数 κ, λ に対して,

(a) $A \preceq B$ または $B \preceq A$ の少なくとも一方が成り立つ.

(b) $\kappa \leq \lambda$ または $\lambda \leq \kappa$ の少なくとも一方が成り立つ.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数）209 （ラベル）theorem:濃度の比較可能定理

Notation 0.0.50 E:p9, K:p14 71 ページ

$\mathrm{card}(\mathbb{N})$ を $\aleph_0$ で, $\mathrm{card}(\mathbb{R})$ を $2^{\aleph_0}$ で表す.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex

（行数）225 （ラベル）notation:アレフ記法

Definition 0.0.51 E:p9, K:p15 71 ページ

集合 A, B とその基数 $\mathrm{card}(A) = \kappa, \mathrm{card}(B) = \lambda$ に対して，その演算 $+, \cdot$ を以下のように定める．

1. $A \cap B = \emptyset$ のとき，$\kappa + \lambda \ = \ \mathrm{card}(A \cup B)$.
2. $\kappa \cdot \lambda \ = \ \mathrm{card}(A \times B)$.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）233 （ラベル）definition:基数の演算

Theorem E:p9, K:p15

選択公理を仮定する．どんな無限集合も可算な無限部分集合をもつ．

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）247 （ラベル）

Theorem 0.0.53 E:p9 CARDINAL ARITHMETIC THEOREM, K:p15 基数算術の定理 71 ページ

$\kappa \leq \lambda$ かつ λ が無限な基数 κ, λ に対して，

1. $\kappa + \lambda \ = \ \lambda$.
2. $\kappa \neq 0$ ならば $\kappa \cdot \lambda \ = \ \lambda$.
3. κ が無限ならば $\aleph_0 \cdot \kappa \ = \ \kappa$.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）270 （ラベル）theorem:基数算術の定理

Theorem 0.0.54 E:p10 THEOREM 0D, K:p15 定理 0D 72 ページ

無限集合 A に対して，A の要素からなる有限列全体の集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{n+1}$ の濃度は $\mathrm{card}(A)$ と同じ．

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）281 （ラベル）theorem:無限集合の要素の有限列全体はその集合の濃度に一致

Example E:p10, K:p16

実数における代数数的数全体の集合の濃度は $\aleph_0$ である．

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）317 （ラベル）

Definition 0.0.56　72 ページ

複素数 α が **algebraic number**（代数的数）であるとは，ある整数係数 n 次多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$（$a_n \neq 0$ かつどの a_i も整数）があって，α が $f(x)$ の根になっている，つまり $f(\alpha) = 0$ をみたすことをいう．代数的数でない複素数は **transcendental number**（超越数）とよぶ．

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_集合についての予備知識/subsection_基数.tex`

（行数）324 （ラベル）definition:代数的数

Definition 1.1.1　記号 (E:p13 14, K:p20)　76 ページ

互いに区別できる無限個のオブジェクトの列を用意し固定する．その列の成分となっているオブジェクトをそれぞれ **symbol**（記号）とよぶ．

これらの記号のどれもが他の記号の有限な長さの列とは一致しないと仮定したうえで，列の第一成分から以下の表の通りに記号に名前をつける．

記号	名称	注意
(	**left parenthesis**（左括弧）	区切り記号
)	**right parenthesis**（右括弧）	区切り記号
$\neg$	**negation symbol**（否定記号）	日本語でいう「～でない」
$\wedge$	**conjunction symbol**（連言記号）	日本語でいう「かつ」
$\vee$	**disjunction symbol**（選言記号）	日本語でいう「(包含的な）または」
$\to$	**conditional symbol**（条件記号）	日本語でいう「○○ならば××」
$\leftrightarrow$	**biconditional symbol**（双条件記号）	日本でいう「○○のとき，かつ，そのときに限り××
A_1	1 個目の **sentence symbol**（文記号）	
A_2	2 個目の **sentence symbol**（文記号）	
$\ldots$		
A_n	n 個目の **sentence symbol**（文記号）	
$\ldots$		

Table 6.1: (E:p14 TABLE II, K:p21 表 II)

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex`

（行数）75 （ラベル）definition:記号

Definition 1.1.3 表現 (E:p15, K:p23) 79 ページ

Definition 0.0.18（62 ページ）の用語を用いる．

1. 文論理の記号の集合を以降 SIMB で表すことにする．
2. SIMB の要素からなる有限列を **expression**（**表現**）とよぶ．

   またすべての表現の集合を EXPR で表すことにする．
   また表現 $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$（ここで各 s_i は SIMB の要素である）をその成分を順番に並べて $s_1 s_2 \ldots s_{n-1} s_n$ と書くこともある．以降どちらの使い方も柔軟に使っていくことにする．
3. $\alpha, \beta \in$ EXPR に対してそれぞれ $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, $\beta = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ とするとき，$\alpha\beta \overset{\text{def}}{=} \langle a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \rangle$ として，これを α と β の **string concatenation**（**文字列連結**）とよぶ．

   （ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex`

   （行数）381 （ラベル）definition:表現

Example E:p15, K:p23

表現 α, β に対して

1. $(\neg A_1)$ という（私たちにとって見やすい表し方をした）表現は厳密には有限列 $\langle (, \neg, A_1,) \rangle$ のことである．
2. $\alpha = (\neg A_1)$, $\beta = A_2$ とおくとその文字列結合 $\alpha\beta$ は $(\neg A_1)A_2$ に，$(\alpha \to \beta)$ は $((\neg A_1) \to A_2)$ となる．

   （ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex`

   （行数）420 （ラベル）

Definition 1.1.5 式構成操作 (E:p17, K:p25) 79 ページ

$\alpha, \beta \in$ EXPR と論理記号に対して

- $\mathcal{E}_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$ と定める．より厳密には $\mathcal{E}_\neg(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \langle (, \neg \rangle \alpha \langle) \rangle$ であり，これは Definition 1.1.3 で定義した表現の文字列連結である．つまり $\mathcal{E}_\neg$ は EXPR 上の 1 変数関数である．
- $\mathcal{E}_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$ と定める．より厳密には $\mathcal{E}_\wedge(\alpha, \beta) \overset{\text{def}}{=} \langle (\rangle \alpha \langle \wedge \rangle \beta \langle) \rangle$ であり，$\mathcal{E}_\wedge$ は EXPR 上の 2 変数関数である．同様にして EXPR 上の 2 変数関数として $\mathcal{E}_\vee, \mathcal{E}_\to, \mathcal{E}_\leftrightarrow$ を定義する．

これらの 5 つの演算をあわせて **formula-building operation**（**式構成操作**）とよぶ．

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex`

（行数）440 （ラベル）definition:式構成操作

Definition 1.1.6 （素朴な）整式の定義 (E:p16 17, K:p25) 80 ページ

well-formed formula（**整式**）とは以下のように帰納的に定義される.

(a) 個々の文記号は整式である.

(b) α, β が整式ならば, $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ は整式である.

(c) (a)(b) にあてはまるものだけが整式である.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex`

（行数）465 （ラベル）definition:（素朴な）整式の定義

Definition 1.1.7 構成列と整式 (E:p17 18, K:p26 27) 80 ページ

表現の集合 EXPR の有限列 $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ が **construction sequence**（**構成列**）であるとは, 各 $i \leq n$ に対して (1) から (3) のいずれかをみたすときをいう.

(1) ε_i は文記号.

(2) ある $j < i$ があって $\varepsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)$.

(3) ある $j, k < i$ があって $\varepsilon_i = \mathcal{E}_\square(\varepsilon_j, \varepsilon_k)$.
ここで $\square$ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

ある表現 α で終わる（つまり末項が α である）ような構成列が存在するとき, そんな表現を **well-formed formula**（**整式**）とよぶ.
すべての整式の集合は今後 WFF で表すことにする.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex`

（行数）497 （ラベル）definition:構成列と整式

Example 1.1.11 E:p18 EXAMPLE, K:p28 例 84 ページ

どの整式もそれに含まれる右括弧・左括弧の個数は同じである.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語.tex`

（行数）840 （ラベル）example:文論理の整式の両括弧の数は同じ

Exercise E:p19 1., K:p29 1.

日本語の文をみっつ挙げ, それらの文を私たちの形式言語に翻訳しなさい. 文は, なんらかの意味のある構造を持つように, また, 翻訳が 15 個以上の記号からなる列になるように選びなさい.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語/subsection_「section：文論理の言語」演習問題.tex`

（行数）5 （ラベル）

Exercise E:p19 2., K:p29 2.

長さが 2,3,6 の整式は存在しないこと, そして, それら以外のすべての正整数の長さをもつ整式は存在することを示しなさい.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語/subsection_「section：文論理の言語」演習問題.tex

（行数）136 （ラベル）

Exercise E:p19 3., K:p29 3.

α を整式として, α の中で 2 項結合記号が出現する箇所の数を c で, α の中で文記号が出現する箇所の数を s で表します.（たとえば, α が $(A \to (\neg A))$ の場合は, $c = 1,\ s = 2$ です.）帰納法の原理を使って, $s = c + 1$ であることを示しなさい.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語/subsection_「section：文論理の言語」演習問題.tex

（行数）198 （ラベル）

Exercise 1.1.17 E:p19 4., K:p29 4. 87 ページ

φ で終わる構成列があって, φ は記号 A_4 を含んでいないとします. この構成列から A_4 を含む表現をすべて取り去ったとしても, その結果はやはり正しい構成列になっていることを示しなさい.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語/subsection_「section：文論理の言語」演習問題.tex

（行数）247 （ラベル）example:構成列の末項に含まれない文記号を含む整式をその構成列から除いても問題ない

Exercise E:p19 5., K:p29 5.

α は否定記号 $\neg$ を含まない整式とします.

(a) α の長さ（記号列を構成する記号の個数）は奇数であることを示しなさい.

(b) α を構成する記号のうち, 文記号が占める割合が 1/4 を超えることを示しなさい.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_文論理の言語/subsection_「section：文論理の言語」演習問題.tex

（行数）295 （ラベル）

Definition 1.2.1 真理値割り当て (E:p20 21, K:p30 32) 88 ページ

$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{PVAR}$ とする．

1. Definition 1.1.1（76 ページ）とは別に新たに 2 つの記号を用意する．それらを F（これを **falsity**（偽）とよぶ）, T（これを **truth**（真）とよぶ）とする．
2. $v\colon \mathcal{A} \to \{F, T\}$ なる v を文記号の集合 $\mathcal{A}$ に対する **truth assignment**（真理値割り当て）という．
3. $\bar{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ から始めて 5 種類の式構成操作を使って構成できる整式全体の集合とする．
4. 真理値割り当て $v\colon \mathcal{A} \to \{F, T\}$ に対して, $\bar{v}\colon \bar{\mathcal{A}} \to \{F, T\}$ を各 $A \in \mathcal{A}$ と $\alpha, \beta \in \bar{\mathcal{A}}$ について以下の 6 条件をみたすものとする．

   4-0. $\bar{v}(A) = v(A)$

   4-1. $\bar{v}((\neg\alpha)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = F \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-2. $\bar{v}((\alpha \wedge \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = T \text{ かつ} \bar{v}(\beta) = T \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-3. $\bar{v}((\alpha \vee \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = T \text{ または} \bar{v}(\beta) = T \text{（もしくはその両方）のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-4. $\bar{v}((\alpha \to \beta)) = \begin{cases} F & \bar{v}(\alpha) = T \text{ かつ} \bar{v}(\beta) = F \text{ のとき} \\ T & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-5. $\bar{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta) \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て.tex`

（行数）5 （ラベル）definition:真理値割り当て

Example 1.2.2 E:p21 23, K:p32 34 90 ページ

整式 α を

$$((A \to (A_1 \to A_6)) \leftrightarrow ((A_2 \wedge A_1) \to A_6))$$

とし, $\mathrm{dom}(v) = \{A_1, A_2, A_6\}$ な真理値割り当て v を, $v(A_1) = T,\ v(A_2) = T,\ v(A_6) = F$ で定めると, $\bar{v}(\alpha) = T$ である．

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て.tex`

（行数）179 （ラベル）example:真理値割り当て

Theorem E:p23 THEOREM 12A, K:p34 定理 12A

集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{PVAR}$ へのどんな真理値割り当て v についても, Definition 1.2.1（88 ページ）の条件 4-0. から 4-5. までに合致する写像 $\bar{v}\colon \bar{\mathcal{A}} \to \{T, F\}$ がただひとつ存在する．

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て.tex`

（行数）194 （ラベル）

Definition 1.2.4 　90 ページ

$\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$ に対して, その全ての要素である整式に含まれる文記号の集合を $\mathrm{PVAR}(\Sigma)$ で表す. またある $\alpha \in \mathrm{WFF}$ でもって $\Sigma = \{\alpha\}$ となっていた場合は, $\mathrm{PVAR}(\Sigma) = \mathrm{PVAR}(\{\alpha\})$ を単に $\mathrm{PVAR}(\alpha)$ と略記する.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て.tex`

（行数）207 （ラベル）definition:整式の集合の全ての要素に含まれる文記号の集合

Definition 1.2.5 充足関係 (E:p23 24, K:p34 36) 90 ページ

整式の集合 Σ と整式 τ, σ に対して,

1. $\mathrm{PVAR}(\tau) \subseteq \mathrm{dom}(v)$ な真理値割り当て v に対して $\bar{v}(\tau) = T$ であるとき, v **satisfies** τ（v は τ **を充足する**）という.
2. $\mathrm{PVAR}(\Sigma) \cup \mathrm{PVAR}(\tau)$ を定義域として含むすべての真理値割り当てに対して, それが Σ のすべての要素を充足するならば τ をも充足するとき, Σ **tautologically implies** τ（Σ は τ を**トートロジー的に含意する**）といい, $\Sigma \models \tau$ で表す.
3. $\emptyset \models \tau$ であるとき, つまり $\mathrm{PVAR}(\tau)$ を定義域として含むどんな真理値割り当ても τ を充足するとき, τ は **tautology**（**トートロジー**）であるといい, 単に $\models \tau$ で表す.
4. Σ が一元集合であるとき, つまり $\{\sigma\} \models \tau$ であるとき単に $\sigma \models \tau$ と表すことにする.
   $\sigma \models \tau$ かつ $\tau \models \sigma$ であるとき, σ と τ は **tautologically equivalent**（**トートロジー的に同値**）であるといい, $\sigma \models\!\dashv \tau$ で表す.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て.tex`

（行数）219 （ラベル）definition:論理式の充足関係

Example 1.2.6 E:p23, K:p35 36 90 ページ

$A, B \in \mathrm{PVAR}$ とする.

1, Example 1.2.2（90 ページ）で挙げた整式 α と真理値割り当て v について, v は α を充足すると述べたが, それ以外のどの真理値割り当ても α を従属する. つまり α はトートロジーである.

2. $\{A, (\neg A)\} \models B$ である.
3. $\{A, (A \to B)\} \models B$ である.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て.tex`

（行数）259 （ラベル）example:トートロジー

Theorem 1.2.7 コンパクト性定理 (E:p24 COMPACTNESS THEOREM, K:p36 コンパクト性定理) 92 ページ

Σ は無限個の整式からなる集合で, いかなる Σ の有限な部分集合 Σ_0 についても, Σ_0 のすべての要素を同時に充足する真理値割り当てが存在するとする. このとき, Σ のすべての要素を同時に充足する真理値割り当てが存在する.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て.tex`

（行数）352 （ラベル）thm:文論理のコンパクト性定理

Exercise E:p27 1., K:p41 1.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex`

（行数）5 （ラベル）

Exercise E:p27 2., K:p41 2.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex`

（行数）9 （ラベル）

Exercise E:p27 3., K:p41 3.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex`

（行数）13 （ラベル）

Exercise E:p27 4., K:p42 4.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex`

（行数）17 （ラベル）

Exercise E:p27 5., K:p42 5.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex`

（行数）21 （ラベル）

Exercise E:p27 6., K:p42 6.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex

（行数）25 （ラベル）

Exercise E:p28 7., K:p42 7.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex

（行数）29 （ラベル）

Exercise E:p28 8., K:p43 8.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex

（行数）33 （ラベル）

Exercise E:p28 9., K:p43 9.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex

（行数）37 （ラベル）

Exercise E:p28 10., K:p43 10.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex

（行数）41 （ラベル）

Exercise E:p28 11., K:p44 11.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex

（行数）45 （ラベル）

Exercise E:p29 12., K:p44 12.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex

（行数）49 （ラベル）

Exercise E:p29 13., K:p44 13.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex`

（行数）53 （ラベル）

Exercise E:p29 14., K:p45 14.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex`

（行数）57 （ラベル）

Exercise E:p29 15., K:p45 15.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_真理値割り当て/subsection_「section：真理値割り当て」演習問題.tex`

（行数）61 （ラベル）

Lemma 1.3.1 E:p30 LEMMA 13A, K:p46 補題 13A 93 ページ

どの整式もそれに含まれる右括弧・左括弧の個数は同じである.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_構文解析のアルゴリズム.tex`

（行数）5 （ラベル）lemma:文論理の整式の両括弧の数は同じ

Lemma 1.3.2 E:p30 LEMMA 13B, K:p46 補題 13A 93 ページ

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_構文解析のアルゴリズム.tex`

（行数）10 （ラベル）lemma:文論理の整式の真の始切片は左括弧の方が多い

Exercise E:p33 1., K:p51 1.

（ファイルパス）`part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_「section：構文解析のアルゴリズム」演習問題.tex`

（行数）5 （ラベル）

Exercise E:p33 2., K:p52 2.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_「section：構文解析のアルゴリズム」演習問題.tex

（行数）9 （ラベル）

Exercise E:p34 3., K:p52 3.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_「section：構文解析のアルゴリズム」演習問題.tex

（行数）13 （ラベル）

Exercise E:p34 4., K:p52 4.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_「section：構文解析のアルゴリズム」演習問題.tex

（行数）17 （ラベル）

Exercise E:p34 5., K:p52 5.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_「section：構文解析のアルゴリズム」演習問題.tex

（行数）21 （ラベル）

Exercise E:p34 6., K:p52 6.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_「section：構文解析のアルゴリズム」演習問題.tex

（行数）25 （ラベル）

Exercise E:p34 7., K:p52 7.

（ファイルパス）part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_文論理/section_構文解析のアルゴリズム/subsection_「section：構文解析のアルゴリズム」演習問題.tex

（行数）29 （ラベル）

6.4 3 部　基礎固めノート

Definition **帰納的半順序集合と Zorn の補題**

半順序集合 $(X,\le)$（つまり反射律, 推移律, 反対称律を満たす）に対して

- $(X,\le)$ が**帰納的** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 全ての全順序部分集合（上記 3 つに加えて三分律が成立）が上界をもつ
- $a\in X$ が $(X,\le)$ において**極大** $\overset{\text{def}}{\iff} \neg\exists x\in X(\ a\le x\ \wedge a\ne x\ )$

Zorn の補題とは「帰納的半順序集合は少なくとも 1 つの極大元をもつ」という主張のこと.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_関係.tex`

（行数）7 （ラベル）

Definition

集合 X,Y に対して,「f が X から Y への**写像**（**mapping** または **map**)」であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことをいう.

(f1) $f\ \subseteq X\times Y$.

(f2) $\forall x\in X\ \exists! y\in Y\big(\ \langle x,y\rangle\in f\ \big)$.

「f が X から Y への写像」であることを $f:X\to Y$ で表す.
$f:X\to Y$ のとき

- X を写像 f の**定義域**（**domain**）, または**始域**（こちらも **domain**）と呼び, $\mathrm{dom}(f)$ で表す.
- Y を写像 f の**値域**（**range**）, または**終域**（**codomain**）と呼び, $\mathrm{ran}(f)$ で表す.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_写像・関数.tex`

（行数）5 （ラベル）

Notation

$f:X\to Y$ であるとき,「$\langle x,y\rangle\in f$」を「$f(x)=y$」で表し「f は x を y へ写す」や「x の f による値は y」と言ったりする. $f(x)$ を「x の f による値」と呼ぶ.
この記法を用いれば写像の定義 (f2) は以下のように書き換えられる.

$$\forall x\in X\ \exists! y\big(\ f(x)=y\ \big)$$

つまり定義域の任意の要素は一意的な値域の要素に対応していると言える.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_写像・関数.tex`

（行数）40 （ラベル）

Definition 2.0.4 100 ページ

2 つの関数 f, g に対して, この 2 つを単なる順序対の集合とみて, $f \subseteq g$ が成立しているとき f を g の**部分関数**, g を f の**拡大**と呼ぶ.
さらに集合として f と g が等しいとき, つまり $f \subseteq g$ かつ $g \subseteq f$ なとき（写像として）f と g は**等しい**といい, 集合と同じで $f = g$ で表す.
定義域や値域にまで踏み込んだ定義が続きます.

(1) 関数 $f : X \to Y$ と $A \subseteq X$ に対し $f{\restriction}A = (A \times Y) \cap f$ とおく. つまり $f{\restriction}A$ は f の対応規則はそのままに定義域を A へ狭めた A から Y への関数のことです. $f{\restriction}A$ は関数 f の A への**制限**と呼びます.
つまり $f{\restriction}A$ は f の部分関数, f は $f{\restriction}A$ の拡大といえます.

(2) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ な 2 つの関数 f, g があったとき, $f \triangle g \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq g(x)\}$.

(3) ${}^{X}Y$ は $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$ なる関数全体の集合を表します. つまり ${}^{X}Y \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : X \to Y\}$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_写像・関数.tex`

（行数）56 （ラベル）definition:関数の関連用語

Definition 2.0.5 100 ページ

集合 X と X の部分集合の族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が X の**分割（partition）**であるとは以下の 3 つの条件を満たすことをいう.

- $\emptyset \notin \{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.
- $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda(\lambda \neq \lambda' \to Y_\lambda \cap Y_{\lambda'} = \emptyset)$.
- $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_色々な用語.tex`

（行数）7 （ラベル）definition:分割

Definition 2.0.6 100 ページ

集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が**有限交叉性（finite intersection property）**をもつ $\overset{\text{def}}{\iff} \forall L \in [\Lambda]^{<\omega}\left(\bigcap_{i \in L} X_i \neq \emptyset \right)$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_色々な用語.tex`

（行数）19 （ラベル）definition:有限交叉性

Definition 2.0.7　101 ページ

集合 X, $A \subseteq X$, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して

- $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の**被覆（covering）** $\overset{\text{def}}{\iff} A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.
- A の被覆 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\Lambda' \subseteq \Lambda$ に対して, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ もまた A の被覆のとき $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ を $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**部分被覆**という．とくに $|\Lambda'| < \omega$ のとき, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ は $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**有限部分被覆**とよぶ.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_色々な用語.tex`

（行数）26 （ラベル）definition:被覆

Definition 2.0.8　101 ページ

Λ を添え字集合とした集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を以下のように定義する.

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{\ f : \lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda\big(\ f(\lambda) \in X_\lambda\ \big)\ \}.$$

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_選択公理と直積の一般化.tex`

（行数）6 （ラベル）definition:一般直積集合

Lemma 2.0.9　101 ページ

集合族 $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ はどの要素も空でないとする．つまり $\forall\lambda \in \Lambda(A_\lambda \neq \emptyset)$. このとき以下は同値.

(1) （選択公理）$\mathcal{A}$ に選択関数が存在する.

(2) （直積定理）直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が空でない.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_選択公理と直積の一般化.tex`

（行数）23 （ラベル）lemma:選択公理と直積定理は同値

Definition

Λ を添え字集合とした集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とその直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ があったとき, $\lambda \in \Lambda$ に対して, $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を $p_\lambda(f) = f(\lambda)$ で定義して, p_λ を $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の λ 成分への射影と呼ぶ.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_選択公理と直積の一般化.tex`

（行数）56 （ラベル）

Lemma

$\forall\lambda\in\Lambda(\ X_\lambda\neq\emptyset\ )$ ならば, どの射影 p_λ は全射.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_素朴集合論/subsection_選択公理と直積の一般化.tex

（行数）67 （ラベル）

Definition 2.1.1 　102 ページ

集合 X に対して,$d:X\times X\to\mathbb{R}$ が X 上の**距離関数（metric）**であるとは, 以下の 3 条件を満たすことをいう.

(d1) (i) $\forall x,y\in X\big(\ d(x,y)\geq 0\ \big)$
(ii) $\forall x,y\in X\big(\ d(x,y)=0\ \leftrightarrow\ x=y\ \big)$

(d1) $\forall x,y\in X\big(\ d(x,y)=d(y,x)\ \big)$

(d1) $\forall x,y,z\in X\big(\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\ \big)$

d が X 上の距離関数のとき, 組 (X,d) を**距離空間（metric space）**という. d が文脈から明らかならば単に「距離空間 X」と呼ぶ.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex

（行数）13 （ラベル）definition:距離空間

Definition 2.1.2 　102 ページ

距離空間 (X,d) と $A\subseteq X$ に対して, 組 $(A,d{\restriction}A\times A)$ を (X,d) の**部分距離空間（metric subspace）**, あるいは単に**部分空間**という.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex

（行数）34 （ラベル）definition:部分距離空間

Definition 2.1.3 　102 ページ

距離空間 (X,d_X) と (Y,d_Y) に対して,

- $f:X\to Y$ が**距離を保つ**, あるいは**等長写像（isometry）**
  $\overset{\text{def}}{\iff}\forall x,x'\in X\big(\ d_X(x,x')=d_Y(f(x),f(x'))\ \big)$
- X と Y が距離空間として**等長（isometric）**, あるいは**同型（isomorphic）**であるとは, X から Y への全射等長写像が存在することをいう.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex

（行数）44 （ラベル）definition:等長写像

Proposition

距離空間 (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) と $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$ に対して

(1) f が等長写像ならば単射.

(2) f,g が等長写像ならば, その合成 $g\circ f:X\to Z$ も等長写像

(3) f が全射等長写像ならば, その逆写像も等長写像

(4) f が全射等長写像ならば, X と $f[X]$ は距離空間として等長, つまり同型.

(5) X と Y が同型ならば, 等長写像 $f':X\to Y,\ g':Y\to Z$ が存在して $g'\circ f'=id_X,\ f'\circ g'=id_Y$ が成立する.

(6) $A\subseteq X$ に対して, 包含写像 $i_A:X\to X$ は (X,d_X) から部分空間 $(A,d\restriction A\times A)$ への等長写像.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）69 （ラベル）

Definition 2.1.5 103 ページ

距離空間 (X,d),$x\in X$, $\varepsilon>0$ に対して

- $U_\varepsilon(x)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{\ y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\ \}$ として, これを x を中心とする半径 ε の**開球（open ball）**, **開円盤（open disc）** あるいは **ε 近傍**と呼ぶ.
- $S_\varepsilon(x)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{\ y\in X\mid d(x,y)=\varepsilon\ \}$ として, これを x を中心とする半径 ε の**球面（sphere）**と呼ぶ.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）131 （ラベル）definition:開球

Definition 2.1.6 103 ページ

距離空間 (X,d) と空でない $A\subseteq X$ に対して, $\delta(A)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \sup\{\ d(x,y)\mid x,y\in A\ \}$ として, これを A の**直径（diameter）**と呼ぶ. 必要ならば $\delta(\emptyset)=-\infty$ と約束する.
$\delta(A)<+\infty$ のとき,A は**有界（bounded）**という.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）150 （ラベル）definition:距離空間における集合の直径

Proposition

距離空間 (X,d) と $A,B \subseteq X$,A は空でないとするとき

(1) $A \subseteq B$ ならば $\delta(A) \leq \delta(B)$.

(2) A が有界 $\leftrightarrow \forall x \in X \exists r > 0\big(\ A \subseteq U_r(x)\ \big)$

(3) A が有界 $\leftrightarrow \exists x \in X \exists r > 0\big(\ A \subseteq U_r(x)\ \big)$

(4) $A \in [X]^{<\omega}$ ならば A は有界.

(5) $\forall x \in X \forall r > 0\big(\ \delta(U_r(x)) \leq 2r\ \big)$

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）164 （ラベル）

Definition 2.1.8 104 ページ

距離空間 (X,d) と空でない $A,B \subseteq X$ に対して, $d(A,B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\ d(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\ \}$ として, これを A と B の距離と呼ぶ.
とくに A が一元集合のとき $A = \{a\}$ とおくならば, $d(\{a\},B)$ を単に $d(a,B)$ と書いて,a と B の距離という. つまり $d(a,B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\ d(a,b) \mid b \in B\ \}$

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）231 （ラベル）definition:距離空間における 2 つの集合の距離

Proposition

距離空間 (X,d) と空でない $A,B \subseteq X$ に対して,$A \cap B \neq \emptyset$ ならば $d(A,B) = 0$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）243 （ラベル）

Proposition 2.1.11 106 ページ

1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d)$ と $x, y \in \mathbb{R}$,$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$

(2) $U_\varepsilon(x) \ = \ (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

(3) $S_\varepsilon(x) \ = \ \{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}$

(4) 何らかの $r \in \mathbb{R}$ に対して，$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x_r$,$g(x) = x - r$ とすれば，f, g は 1 次元ユークリッド空間から自身への等長写像になっている．

(5) $d{\restriction}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ や $d{\restriction}\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ 上の距離関数となり，この距離により $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ は 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分距離空間になる．

2 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ と $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$（$\mathbb{R}$ の要素を (x, y) と書くと区間に見えるので，ここでは $\langle x, y\rangle$ と書くことにした），$\varepsilon > 0$ に対して

(6) $U_\varepsilon(\langle x, y\rangle) \ = \ \{ \ \langle x', y'\rangle \mid (x'-x)^2 + (y'-y)^2 < \varepsilon^2 \ \}$

(7) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を $A = \{\langle 0, x\rangle | x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{\langle x, \frac{1}{x}\rangle | x \in \mathbb{R}\}$ とおくと，$A \cap B = \emptyset$ かつ $d(A, B) = 0$ が成立．

n 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ と $x \in \mathbb{R}^n$,$r > 0$ に対して

(8) $\delta(U_r(x)) = 2r$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）358 （ラベル）proposition:ユークリッド空間の性質

Proposition 2.1.13 106 ページ

離散距離空間 (X, d) と $x \in X$,$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $U_\varepsilon(x) \ = \ \begin{cases} \{x\} & \varepsilon \leq 1 \\ X & \varepsilon > 1 \end{cases}$

(2) $S_\varepsilon(x) \ = \ \begin{cases} \emptyset & \varepsilon \neq 1 \\ X \setminus \{x\} & \varepsilon = 1 \end{cases}$

(3) $r \leq 1$ のとき，$\delta(U_r(x)) = 0$，つまり $\delta(U_r(x)) < 2r$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）417 （ラベル）proposition:離散距離空間の性質

Definition 2.1.14　107 ページ

空でない集合 X に対して, そのべき集合の部分集合 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X 上の**位相**（**topology**）であるとは, 以下の 3 条件をみたすことである.

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\ O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\ )$.

(O3) $\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}(\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}\ )$.

X と X 上の位相 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**（**topological space**）という.
$(X, \mathcal{O})$ が位相空間であるとき, $\mathcal{O}$ の要素を（その位相空間の）**開集合**（**open set**）という.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）449 （ラベル）definition:位相空間

Definition 2.1.15　107 ページ

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, $F \subseteq X$ が**閉集合**（**closed set**）であるとは, $X \setminus F$ が X の開集合, つまり $X \setminus F \in \mathcal{O}$ となることである.
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合全体の集合をその位相空間の**閉集合系**（**system of closed sets**）とよび, $\mathcal{F}$ や $\mathcal{C}$ などで表す.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）496 （ラベル）definition:閉集合

Proposition 2.1.16　107 ページ

$\mathcal{F}$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合系とするとき, $\mathcal{F}$ は以下の 3 つの性質をみたす.

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.

(F2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\ F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}\ )$.

(F3) $\forall \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}(\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}\ )$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）517 （ラベル）proposition:閉集合の 3 性質

Definition

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**開基**（**open base**）であるとは, 任意の開集合が $\mathcal{B}$ に属する集合の和集合で表現できるときをいう. 論理式で書くと $\forall O \in \mathcal{O} \exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B}\big(\ O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\ \big)$ です.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）572 （ラベル）

Definition

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間が**第二可算公理**（**second axiom of countability**）を満たすとは, $(X, \mathcal{O})$ に高々可算な開基が存在するときをいう.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）581 （ラベル）

Definition

集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{G}$ が生成する位相とは, $\mathcal{G}$ を含む位相全ての共通部分, すなわち $\mathcal{G}$ の元が全て開集合になるような最弱の位相のことをいい, $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ で表す.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）588 （ラベル）

Definition

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**準基**（**sub base**）であるとは, $\mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の開基になること, つまり $\{ \bigcap_{i\in[n]} B_i \mid \{B_i\}_{i\in[n]} \subseteq \mathcal{B} \}$ が $\mathcal{O}$ が開基になっているということです.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）597 （ラベル）

Lemma 2.1.22 108 ページ

集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{G}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ の準基になっている. つまり $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ における開集合とは, 「$\mathcal{G}$ の元の有限個の共通部分」たちの和集合で表せます.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）612 （ラベル）lemma:生成された位相の開集合の表現

Definition 2.1.23 109 ページ

X を位相空間とし, $\mathcal{C}$ をその閉集合全体の集合とする. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の**閉基**（**base for the closed sets**）であるとは, 任意の閉集合が $\mathcal{B}$ に属する集合の共通部分で表現できるときをいう.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）669 （ラベル）definition:閉基

Proposition 2.1.24　109 ページ

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $\mathcal{C}$ をその閉集合全体の集合とするとき, 以下は同値.

(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の閉基である.

(2) $\mathcal{F} = \{F | \exists C \in \mathcal{B}(F = X \setminus C)\}$ が $\mathcal{O}$ の開基.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）687 （ラベル）proposition:閉基は開基の双対概念

Proposition 2.1.25　110 ページ

位相空間 X の開集合全体を $\mathcal{O}$, 閉集合全体を $\mathcal{C}$ とおき, さらに $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して, 以下の (1-1) と (1-2), (2-1) と (2-2) はそれぞれ同値である.

(1-1) $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基.

(1-2) 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して, ある $U \in \mathcal{B}$ が存在して, $x \in U$ かつ $U \subseteq O$ となる.

(2-1) $\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の閉基.

(2-2) 任意の $C \in \mathcal{C}$ と $x \notin C$ に対して, ある $F \in \mathcal{B}$ が存在して, $A \subseteq F$ かつ $x \notin F$ となる.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）727 （ラベル）proposition:開基・閉基であることの言い換え

Proposition 2.1.26　110 ページ

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して以下の (1) と「(2-1) かつ (2-2)」は同値. さらに (3) が成立する.

(1) $\mathcal{B}$ は集合 X のある位相の開基である.

(2-1) $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(2-2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \in B_1 \cap B_2$ に対して, ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \in B$ かつ $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

(3) 「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を開基とする集合 X の位相は一意的である.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）788 （ラベル）proposition:開基の同値条件

Proposition 2.1.27 111 ページ

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して以下の (1) と「(2-1) かつ (2-2)」は同値．さらに (3) が成立する．

(1) $\mathcal{B}$ は集合 X のある位相の閉基である．

(2-1) $\emptyset = \bigcap \mathcal{B}$.

(2-2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \notin B_1 \cup B_2$ に対して，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \notin B$ かつ $B_1 \cup B_2 \subseteq B$.

(3) 「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を閉基とする集合 X の位相は一意的である．

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）879 （ラベル）proposition:閉基の同値条件

Definition

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．X と Y の**直積空間**（**product space**）とは，$X \times Y$ に $\{ O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathcal{O}_X, O_Y \in \mathcal{O}_Y \}$ が生成する位相を入れた位相空間のことで，この位相を**直積位相**（**product topology**）という．

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）960 （ラベル）

Definition 2.1.29 112 ページ

$\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする．この集合族の**直積空間**とは，$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に $\{ p_\lambda^{-1}[O] \mid O \in \mathcal{O}_\lambda \}$ が生成する位相を入れた空間のこと，この位相を**直積位相**という．

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）974 （ラベル）definition:一般直積位相空間

Lemma 2.1.30 113 ページ

直積位相空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対して

$$\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \mid \exists L \in [\Lambda]^{<\omega} \big(\lambda \in L \to B_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \ \vee \ \lambda \notin L \to B_\lambda = X_\lambda \big) \}$$

は直積位相の開基になっている．

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）989 （ラベル）lemma:直積空間の開基の表現

Definition

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間として

- $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ が $A \subseteq X$ の被覆のとき, $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の**開被覆（open covering）**とよぶ.
- $(X, \mathcal{O})$ が **compact** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: X の開被覆 ($\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が有限部分被覆をもつ)
- $A \subseteq X$ が **compact** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 A が compact.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）1006 （ラベル）

Lemma 2.1.32 113 ページ

集合 X が $|X| < \omega$ ならば, 任意の X 上の位相 $\mathcal{O}$ に対し $(X, \mathcal{O})$ は compact.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）1028 （ラベル）lemma:有限集合上の位相は compact

Lemma 2.1.33 113 ページ

位相空間 X に対して, 以下は同値.

(1) X が compact.

(2) $\forall\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: 閉集合の族 $\big(\ \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: FIP をもつ $\ \to\ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset\ \big)$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）1046 （ラベル）lemma:有限交叉性と位相空間の compact 性

Theorem

位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が共に compact ならば, 直積位相空間 $X \times Y$ も compact

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）1087 （ラベル）

Lemma 2.1.35 選択公理は **Tychonoff の定理**と同値 115 ページ

以下は同値.

(1) 選択公理

(2) （Tychonoff の定理）
$\{\ (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\ \}_{\lambda\in\Lambda}$ を compact 位相空間の族とし, $(Y, \mathcal{O})$ をその直積位相空間とすれば,Y は compact.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_基礎数学/section_位相空間論.tex`

（行数）1166 （ラベル）lemma:選択公理と Tychonoff の定理は同値

Definition 3.0.1 119 ページ

集合 A に対して $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が集合 A 上の **ideal** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下の 3 条件を満たすもののこと.

1. $\mathcal{I} \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{I}(\ X \cup Y \in \mathcal{I}\ )$.
3. $\forall X, Y(\ X \subseteq Y \land Y \in \mathcal{I}\ \rightarrow\ X \in \mathcal{I}\ )$.

集合 A に対して $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が集合 A 上の **filter** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下の 3 条件を満たすもののこと.

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{F}(\ X \cap Y \in \mathcal{F}\ )$.
3. $\forall X, Y(\ X \subseteq Y \land X \in \mathcal{F}\ \rightarrow\ Y \in \mathcal{F}\ )$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal` と `Filter` 入門事項まとめ`.tex`

（行数）15 （ラベル）definition:ideal と filter

Example 3.0.2 119 ページ

集合 A に対して,

(1) $\mathcal{P}(A)$ は A 上の ideal かつ filter.

(2) $\{\emptyset\}$ は A 上の ideal, $\{A\}$ は A 上の filter.

(3) $x \in A$ に対して, $\{X \subseteq A | x \notin X\}$ は A 上の ideal, $\{X \subseteq A | x \in X\}$ は A 上の filter. このような ideal を **principal ideal**, **principal filter** と呼んだりする.

(4) $S \subseteq A$ に対して, $\{X \subseteq A | X \subseteq S\}$ は A 上の ideal, $\{X \subseteq A | S \subseteq X\}$ は A 上の filter.

以降 A は無限集合として

(5) A の有限部分集合全体 $[A]^{<\omega}$ は A 上の ideal, A の補有限集合全体 $\{X \subseteq A \mid |A \setminus X| < \omega\}$ は A 上の filter. $|A \setminus X| < \omega$ とは $A \setminus X \in [A]^{<\omega}$ とも表現できる. またこのような filter を **Fréchet filter** とも呼ぶ.

(6) 上の例を拡張して, 基数 κ に対して $[A]^{<\kappa}$ は A 上の ideal.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal` と `Filter` 入門事項まとめ`.tex`

（行数）37 （ラベル）example:簡単な ideal, filter の例

Definition 3.0.3 120 ページ

集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$, filter $\mathcal{F}$ に対して

- $\mathcal{I}$ が **proper** $\overset{\text{def}}{\iff} A \notin \mathcal{I}$.
- $\mathcal{F}$ が **proper** $\overset{\text{def}}{\iff} \emptyset \notin \mathcal{F}$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）73 （ラベル）definition:proper な ideal と filter

Definition 3.0.4 120 ページ

集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$, filter $\mathcal{F}$ に対して,

- $\mathcal{I}$ が **non-principal** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A(\ \{a\} \in \mathcal{I}\ )$.
- $\mathcal{F}$ が **non-principal** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall X \subseteq A(\ A \setminus X \in [A]^{<\omega} \to X \in \mathcal{F}\ )$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）93 （ラベル）definition:non-principal な ideal と filter

Definition 3.0.5 120 ページ

集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して

- $X \subseteq A$ が $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**-measure zero** $\overset{\text{def}}{\iff} X \in \mathcal{I}$.
- $X \subseteq A$ が **positive** $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**-measure** $\overset{\text{def}}{\iff} X \notin \mathcal{I}$.
- $X \subseteq A$ が $\boldsymbol{\mathcal{I}-}$**measure one** $\overset{\text{def}}{\iff} A \setminus X \in \mathcal{I}$.

さらに

- $\boldsymbol{\mathcal{I}^+} \overset{\text{def}}{=} \{\, X \subseteq A \mid X \notin \mathcal{I} \,\}$: positive $\mathcal{I}$-measure 全体.
- $\boldsymbol{\mathcal{I}^*} \overset{\text{def}}{=} \{\, X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{I} \,\}$: $\mathcal{I}$-measure one 全体.

これらの定義は filter に対しても用いる.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）116 （ラベル）definition:ideal と measure

Proposition

集合 A に対して, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ は $\mathcal{S} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{S}$ は有限交叉性をもつとします. $\mathcal{F} = \{ X \subseteq A \mid \exists E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}(\bigcap E \subseteq X) \}$ は filter であり, $\mathcal{S}$ を含み, $\mathcal{S}$ を含む filter の中で極小なものになっている.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）166 （ラベル）

Definition

A 上の filter $\mathcal{F}$ が **ultra** であるとは, 任意の $X \subseteq A$ に対して $X \in \mathcal{F}$ か $A \setminus X \in \mathcal{F}$ のどちらか一方が成立するときをいう. $\veebar$ を排他的論理和を表すための記号とするならば

$$\mathcal{F} : \text{ultra} \overset{\text{def}}{\iff} \forall X \subseteq A(\ X \in \mathcal{F} \ \veebar \ A \setminus X \in \mathcal{F} \ ) \tag{6.1}$$

と表現できます.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）221 （ラベル）

Proposition 3.0.8 121 ページ

集合 A に対して

- A 上の proper filter $\mathcal{F}$ が ultra でない $\iff$ $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{F} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{F} \ )$.
- $\mathcal{F}$ が A 上の proper ideal $\mathcal{I}$ の dual filter（つまり $\mathcal{F} = \mathcal{I}^*$）ならば, $\mathcal{F}$ が ultra でない $\iff$ $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{I} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{I} \ )$.

A 上の ultra filter $\mathcal{U}$ と $X, Y \subseteq A$ と $\{X_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して

- $X, Y \notin \mathcal{U} \ \rightarrow \ X \cup Y \notin \mathcal{U}$.
- $X \in \mathcal{U} \wedge Y \notin \mathcal{U} \ \rightarrow \ X \setminus Y \in \mathcal{U}$.
- $\bigcup_{i \in [n]} X_i \in \mathcal{U} \ \rightarrow \ \exists i \in [n](X_i \in \mathcal{U})$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）239 （ラベル）proposition:ultra filter の性質まとめ

Proposition 3.0.9 122 ページ

A 上の filter $\mathcal{F}$ に対して, 以下は同値

(1) $\mathcal{F}$ は A 上の proper filter の中で極大（maximal）.

(2) $\mathcal{F}$ は ultra.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）312 （ラベル）proposition:filter において maximal と ultra は同値

Proposition

集合 A 上の maximal filter は principal か non-principal のいずれか一方になる.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）363 （ラベル）

Corollary

A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して, 以下は同値

(1) $\mathcal{I}$ は A 上の proper ideal の中で極大（maximal）.

(2) $\forall X \subseteq A(\ X \in \mathcal{I}\ \veebar\ A \setminus X \in \mathcal{I}\ )$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）397 （ラベル）

Corollary

集合 A 上の maximal ideal は principal か non-principal のいずれか一方になる.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）405 （ラベル）

Lemma 3.0.13 **ultra filter の補題** 123 ページ

選択公理を仮定する. 集合 A 上の任意の filter $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}$ を含むような A 上の ultra filter が存在する.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）412 （ラベル）lemma:ultra filter の補題

Corollary

集合 A に対して $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が有限交叉性をもつならば, $\mathcal{S}$ を含むような A 上の ultra filter が存在する.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）434 （ラベル）

Definition

ある集合上の filter $\mathcal{F}$ が **P-filter** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall \{X_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{F}\ \exists X \in \mathcal{F}\big(\ \forall n \in \omega(\ X \subseteq^{\star} X_n\ )\ \big)$. ここで $X \subseteq^{\star} X_n$ とは $|X \setminus X_n| < \omega$ ということです. ある filter が P-filter かつ ultra だったとき, そんな filter を **P-point** と呼ぶ.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Ideal と Filter 入門事項まとめ.tex`

（行数）450 （ラベル）

Definition 3.1.1 Cantor 空間と Baire 空間 124 ページ

Cantor 空間とは, 直積位相空間 ${}^{\omega}2$ のことで, ここで各 $2 = \{0, 1\}$ には離散位相が入っているものとする.
同様に Baire 空間とは, 直積位相空間 ${}^{\omega}\omega$ のことで, ここで各 ω には離散位相が入っているものとする.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ.tex`

（行数）40 （ラベル）definition:Cantor 空間と Baire 空間

Definition 3.1.2 124 ページ

集合 A に対して

$$\begin{aligned} {}^{<\omega}A &\overset{\text{def}}{=} \{\, s \mid \exists X \subseteq \omega\big(\ |X| < \omega\ \land\ s\colon X \to A\ \big)\,\} \\ &= \{\, s\colon X \to A \mid X \subseteq \omega \land\ |X| < \omega\,\}. \end{aligned}$$

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開集合.tex`

（行数）12 （ラベル）definition:定義域が ω の有限部分関数全体

Definition 3.1.3 124 ページ

$s \in {}^{<\omega}2$ と $t \in {}^{<\omega}\omega$ に対して

- s は ω から 2 への有限部分関数（**finite partial function**）という.
- t は ω から ω への有限部分関数（**finite partial function**）という.

ゆえに ${}^{<\omega}2$ は ω から 2 への有限部分関数全体の集合に, ${}^{<\omega}\omega$ は ω から ω への有限部分関数全体の集合になります.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開集合.tex`

（行数）37 （ラベル）definition:定義域が ω の有限部分関数

Definition 3.1.4 124 ページ

$s \in {}^{<\omega}2$ と $t \in {}^{<\omega}\omega$ に対して

$$\begin{aligned} O(s) &\overset{\text{def}}{=} \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid \forall n \in \operatorname{dom} s\big(\ s(n) = f(n)\ \big)\,\} \\ &= \ \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid s = f{\restriction}\operatorname{dom}(s)\,\} \\ &= \ \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f \text{ は } s \text{ の拡大}\,\}. \end{aligned}$$

同様に $O(t) \overset{\text{def}}{=} \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid \forall n \in \operatorname{dom} t\big(\ t(n) = f(n)\ \big)\,\}$.
$O(s)$ を s を元にした ${}^{\omega}2$ の **basic set** とよぶ. 同様に $O(t)$ を t を元にした ${}^{\omega}\omega$ の **basic set** とよぶ.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開集合.tex`

（行数）56 （ラベル）definition:basic open set

Proposition 3.1.5 125 ページ

集合 $\mathcal{B}$ に対して

- $\mathcal{B} = \{\, O(s) \mid s \in {}^{<\omega}2\,\}$ のとき, $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}2$ は Cantor 空間の開基である.
- $\mathcal{B} = \{\, O(s) \mid s \in {}^{<\omega}\omega\,\}$ のとき, $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ は Baire 空間の開基である.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開集合.tex`

（行数）84 （ラベル）proposition:Cantor 空間と Baire 空間の開基

Definition 3.1.6 125 ページ

$\mathcal{B}_{\lhd} \subseteq {}^{\omega}2, {}^{\omega}\omega$ を以下のように定める.

- $\mathcal{B}_{\lhd} = \{ O(s) \mid \exists n \in \omega(\ s \colon n \to 2\ ) \}$.
- $\mathcal{B}_{\lhd} = \{ O(s) \mid \exists n \in \omega(\ s \colon n \to \omega\ ) \}$.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現.tex

（行数）8 （ラベル）definition:Cantor 空間・Baire 空間の別の開基

Proposition 3.1.7 126 ページ

$\mathcal{B}_{\lhd}$ は Cantor 空間の開基である.
また $\mathcal{B}_{\lhd}$ は Baire 空間の開基である.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現.tex

（行数）32 （ラベル）proposition:Cnator 空間・Baire 空間の開基の別表現

Definition 3.1.8 126 ページ

${}^{<\omega}2$ や ${}^{<\omega}\omega$ の部分集合として以下のようなものを定義する.

- ${}^{\lhd\omega}2 \overset{\text{def}}{=} \{ s \in {}^{<\omega}2 \mid \exists n \in \omega(n = \mathrm{dom}(s)) \}$.
- ${}^{\lhd\omega}\omega \overset{\text{def}}{=} \{ s \in {}^{<\omega}\omega \mid \exists n \in \omega(n = \mathrm{dom}(s)) \}$.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現.tex

（行数）80 （ラベル）definition:定義域が自然数で値域が 2 や ω の関数全体の集合

Definition 3.1.9 126 ページ

$s, t \in {}^{<\omega}2$ と $f \in {}^{\omega}2$ に対して,

(1) $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ かつ $\forall n \in \mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) = t(n)\ \big)$ を満たすとき, s を t の **initial segment**（**始切片**）と呼び, $s \trianglelefteq t$ で表す.

(2) $\forall n \in \mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) = f(n)\ \big)$ と満たすときも, s を f の **initial segment**（**始切片**）と呼び, $s \trianglelefteq f$ で表す.

$s, t \in {}^{<\omega}\omega$ や $f \in {}^{\omega}\omega$ に対しても同様に定義し, 同じように initial segment と呼び, $\trianglelefteq$ を使って表す.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現.tex

（行数）107 （ラベル）definition:有限列が始切片であるという関係

Definition 3.1.10 127 ページ

$s, t \in {}^{<\omega}2$ に対して, $s || t \overset{\text{def}}{\iff} s \trianglelefteq t \vee t \trianglelefteq s$.
また $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ に対しても同様に定義する.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現.tex

（行数）149 （ラベル）definition:有限列同士のどちらかが始切片という関係

Proposition

$s, t \in {}^{\triangleleft\omega}2$ に対して

(1) $s \trianglelefteq t \iff O(t) \subseteq O(s)$

(2) $s || t \iff \big(O(t) \subseteq O(s) \vee O(s) \subseteq O(t) \big)$

(3) $\neg s || t \iff O(s) \cap O(t) = \emptyset$

(4) $O(s) \cap O(t)$ は何らかの basic open となるか, または $\emptyset$ のどちらかになる

また $s, t \in {}^{\triangleleft\omega}\omega$ に対して同様に成立する.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現.tex

（行数）184 （ラベル）

Definition 3.1.12 128 ページ

$i, i_0, \ldots, i_n \in \omega$ に対して

- $k \in 2$ に対して $[i \mapsto k] = \{\langle i, k\rangle\}$ と定めます. つまり i を k に写すというたった 1 つの対応規則のみの関数のことです. $k \in \omega$ に対しても同様に $[i \mapsto k]$ を定めます.
- $k_0, \ldots, k_n \in 2$ に対して
$$[i_0, \ldots, i_n \mapsto k_0, \ldots, k_n] = \{\, \langle i_m, k_m\rangle \mid 0 \leq m \leq n \,\}$$
として定め, $k_0, \ldots, k_n \in \omega$ についても同様に定める.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく.tex

（行数）56 （ラベル）definition:有限定義域な ω から自然数への関数

Proposition

$A \subseteq 2$ に対して $p_i^{-1}[A] = \bigcup_{a \in A} O([i \mapsto a])$. $A \subseteq \omega$ の場合も同様.
とくに

$$p_i^{-1}[2] \;=\; O([i \mapsto 0]) \cup O([i \mapsto 1]) \;=\; {}^{\omega}2.$$
$$p_i^{-1}[\omega] \;=\; \bigcup_{k \in \omega} O([i \mapsto k]) \;=\; {}^{\omega}\omega.$$

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく.tex`

（行数）79 （ラベル）

Proposition 3.1.14 129 ページ

$\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}2), \mathcal{G}_{\omega} \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}\omega)$ を

$$\mathcal{G}_2 \;=\; \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \;\cup\; \{\, O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \land k \in 2 \,\},$$
$$\mathcal{G}_{\omega} \;=\; \{\emptyset, {}^{\omega}\omega\} \;\cup\; \{\, O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \land k \in \omega \,\}$$

とすると, Cantor 空間の位相は $\mathcal{G}_2$ が生成する位相, Baire 空間の位相は $\mathcal{G}_{\omega}$ が生成する位相である.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく.tex`

（行数）109 （ラベル）proposition:Cantor 空間や Baire 空間の位相を生成している集合

Proposition

互いに異なる $i, i_0, \ldots, i_n \in \omega$ と $A_0, \ldots, A_n \subseteq \omega$ に対して

1. $k_0, k_1 \in 2$ が $k_0 \neq k_1$ ならば $O([i \mapsto k_0]) \cap O([i \mapsto k_1]) = \emptyset$.
   より一般的には $O([i \mapsto k]) \cap O([i \mapsto 1-k]) = \emptyset$.
2. $k_0, \ldots, k_n \in 2$ に対して $\displaystyle\bigcap_{0 \leq m \leq n} O([i_m \mapsto k_m]) = O([i_0, \ldots, i_n \mapsto k_0, \ldots, k_n])$.
3. $k_0, \ldots, k_n \in \omega$ に対して $\displaystyle\bigcap_{0 \leq m \leq n} O([i \mapsto k_m]) = \emptyset$.
4. $\displaystyle(\bigcup_{a \in A_0} O([i \mapsto a])) \cap (\bigcup_{a \in A_1} O([i \mapsto a])) = \bigcup_{a \in A_0 \cap A_1} O([i \mapsto a])$.
   とくに $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ のとき $\displaystyle(\bigcup_{a \in A_0} O([i \mapsto a])) \cap (\bigcup_{a \in A_1} O([i \mapsto a])) = \emptyset$.
5. $\displaystyle\bigcap_{0 \leq m \leq n} \left(\bigcup_{a \in A_m} O([i_m \mapsto a]) \right) = \bigcup_{a_0 \in A_0, \ldots, a_n \in A_n} O([i_0, \ldots, i_n \mapsto a_0, \ldots, a_n])$.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく.tex`

（行数）134 （ラベル）

Definition

$i \in \omega, k \in 2$ に対して関数 $s_{i=k} \colon \{i\} \to 2$ を $s_{i=k}(i) = k$ なる関数とする.
$k \in \omega$ に対しても同様にして $s_{i=k} \colon \{i\} \to \omega$ を定める.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく.tex

（行数）201 （ラベル）

Proposition

2^ω において, $k \in 2$ と $A \subseteq 2$ に対して

(1) $A = \emptyset$ ならば $\forall i \in \omega \bigl(p_i^{-1}[\emptyset] = \emptyset\bigr)$.

(2) $A = \{k\}$ ならば $\forall i \in \omega \bigl(p_i^{-1}[A] = O(s_{i=k})\bigr)$.

(3) $A = 2$ ならば $\forall i \in \omega \bigl(p_i^{-1}[A] = 2^\omega\bigr)$.

同様に ω^ω において, $k \in \omega$ と $A \subseteq \omega$ に対して

(4) $A = \emptyset$ ならば $\forall i \in \omega \bigl(p_i^{-1}[\emptyset] = \emptyset\bigr)$.

(5) $\forall i \in \omega \bigl(p_i^{-1}[A] = \bigcup_{k \in A} O(s_{i=k}))\bigr)$.

(6) $A = \omega$ ならば $\forall i \in \omega \bigl(p_i^{-1}[A] = \omega^\omega\bigr)$.

（ファイルパス）part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor 空間と Baire 空間まとめ/subsection_Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく.tex

（行数）235 （ラベル）

Proposition

2^ω において, $i, i_0, \ldots, i_n \in \omega, k, k_0, \ldots, k_n \in 2$ に対して

1. $k_1 \neq k_2$ ならば $O(s_{i=k_1}) \cap O(s_{i=k_2}) = \emptyset$ である. もっと一般的には $O(s_{i=k}) \cap O(s_{i=1-k}) = \emptyset$.
2. $i_0, \ldots, i_n \in \omega$ がすべて異なるとすると, $s_{i_m=k_m}$ に対して $\bigcap_{0 \leq m \leq n} O(s_{i_m=k_m})$ は何らかの basic open set となる.
3. $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}2$ に対して, s_2 が s_1 の拡大ならば $O(s_2) \subseteq O(s_1)$, そしてゆえに $O(s_1) \cap O(s_2) = O(s_2)$.
4. $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}2$ に対して, $O(s_1) \cap O(s_2)$ は $\emptyset$ か, 何らかの basic open set となる.
5. どんな $s \in {}^{<\omega}2$ に対しても, 有限個の $s_0, \ldots, s_n \in {}^{<\omega}2$ があって, $O(s) = \bigcap_{0 \leq m \leq n} O(s_i)$ となる.
6. どんな $f \in 2^\omega$ に対しても, $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq {}^{<\omega}2$ があって, $\{f\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} O(s_\lambda)$ となる.

同様に ω^ω において, $i, i_0, \ldots, i_n \in \omega, k_0, \ldots, k_n \in \omega$ に対して

7. $k_1 \neq k_2$ ならば $O(s_{i=k_1}) \cap O(s_{i=k_2}) = \emptyset$ である.
8. $i_0, \ldots, i_n \in \omega$ がすべて異なるとすると, $s_{i_m=k_m}$ に対して $\bigcap_{0 \leq m \leq n} O(s_{i_m=k_m})$ は何らかの basic open set となる.
9. $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}\omega$ に対して, s_2 が s_1 の拡大ならば $O(s_2) \subseteq O(s_1)$, そしてゆえに $O(s_1) \cap O(s_2) = O(s_2)$.
10. $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}\omega$ に対して, $O(s_1) \cap O(s_2)$ は $\emptyset$ か, 何らかの basic open set となる.
11. どんな $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対しても, 有限個の $s_0, \ldots, s_n \in {}^{<\omega}\omega$ があって, $O(s) = \bigcap_{0 \leq m \leq n} O(s_i)$ となる.
12. どんな $f \in \omega^\omega$ に対しても, $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq {}^{<\omega}\omega$ があって, $\{f\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} O(s_\lambda)$ となる.

（ファイルパス）`part/part_基礎固めノート/chapter_その他細かなテーマ/section_Cantor空間とBaire空間まとめ/subsection_Cantor空間とBaire空間の開基についてさらに詳しく.tex`

（行数）270 （ラベル）

第 7 章　このノートの記号一覧

7.1　0 部　研究ノート

7.2　2 部　不完全性定理勉強会ノート

7.3　3 部　基礎固めノート

第 VI 部

その他

このパートは, 数学の研究や学習に直接は関係しないものの, 学問全般に関係あったり, 傲慢ながら他人に共有する価値のあると思われるものについてまとめていく, 雑多なパートになっています.

第 10 章（225 ページ）では, このノートを作成するにあたって使用した小技や工夫などをまとめています.

第8章　色んな語り・メモ

8.1　ブログ用文章

自分の親について

小学校時代を振り返る

中学校時代を振り返る

8.2　映画

ビューティフル・マインド

スパイダーマン2

8.3　ドラマ

ストロベリーナイト

女王の教室

恋がヘタでも生きてます

Hulu で 1 月 1 日の早朝から一気に全話見てしまった。原作は見たことはない。展開としてはありがちで、とくに気になるキャラやストーリーではなかった。それゆえに作業しながらでも見れたのかもしれない。Wikipedia は [26] として登録しておいた。しかしいくつかこれまでの経験上感情移入してしまう場面はあった。1 つ目は律儀にセフレとして立ち回ろうとする榎田 千尋だろうか。わざわざ正しい？セフレ像なんて調べて実行してしまうところが、いくら相手が提案した関係性とはいえ、素直というか愚かというか。しかしそれくらいしてまで関係を絶ちたくないという気持ちを持てることは個人的には羨ましかったりする。というか千尋の元彼氏はあまり報われない結果に終わったしまったのが残念（もちろん同情されるような行為はそんなにしていないのだけど）。
もう 1 つは第 7 話の千尋と橋本がセフレになったシーンだろうか。行為が終わった後に、以前に千尋が服を畳んでくれたことを思い出す場面は、同様の経験はないもののなぜか懐かしいような、以前感じたような気持ちになってしまった。女性からされたことは意外とその瞬間にはありがたみも湧かなくて、そうでない場面のふとしたときに思い出すもの。そしてなんでしてくれなくなったのだろうと気になってしまう。ここで橋本はセフレという関係に今まで通りにのめり込めなくなってしまったのだろうと想像する。もちろん彼はあまりにも気を遣われるのが嫌いらしいので、何も服を畳むことを求めているわけではないとは思う。でも気になってしまったんだろうなと。
結局主人公は恋愛主体のドラマの王道といった感じ。それゆえに徐々に違う深みにハマっていくもう 1 人の主人公が際立つのかもしれない。だからこそ自分の印象にもより深く残ったのかも。
見出してから嬉しくなったポイントは、このドラマに限らないが知っている俳優が増えたことによって、過去作のキャラと比較して楽しめるようになったことだろうか。このドラマでも、Hulu を契約するきっかけになった『来世ではちゃんとします』（その語りは 8.3）の主役だった、内田理央（Wikipedia は [23]）と、小関裕太（Wikipedia は [19]）が出演している。内田は性に奔放という点では『来世』でも同じだが、性に対しての主体性が全く異なる。『来世』では振り回されることが多いのに対し、このドラマでは悪女というか完全に振り回す側になっている。ただそれも千尋を意識し始めた橋本には通じなかったり、最終回周辺では千尋の良きライバルのような立ち位置になったりと、見どころはたくさんあった。小関も『来世』とでは女性への接

し方が真逆。『来世』では女性のことを軽んじているが、このドラマでは恋した女性に大してかなり献身的というか健気であった。二人のキャラがそれぞれ真逆になっているのは面白かった。ちなみに放送順としては『来世』の方が後。
あとは相棒シリーズで好きだった寺脇康文（Wikipedia は [17]）を久々に見れたのは嬉しかった。相変わらず亀山君っぽいのは変わらないが、このドラマの役柄では、色んな経験をしつつも飄々としているようなキャラであり、友だちとして一緒にいたら楽しそうだと思う。最終回付近で主人公に再度考えさせる場面は良かった。恋愛ものとしては王道展開のような終盤だったけど、やはり彼は王道展開がよく似合う。
あと俳優ではないが、占い師役で登場した、漫才コンビの相席スタート（Wikipedia は [22]）の山 ケイは、登場がいきなりだったのでビックリした（このときだけのちょい役なので仕方ないけれど）。あとこのコンビも漫才含めて最近見てなったので登場が嬉しかった。また漫才も見てみよう。
そして主題歌も耳に残るもので、各話の終盤を盛り上げてくれる。音楽には疎いので知らなかったのだが、秦 基博（はた もとひろ）というシンガーソングライター（Wikipedia は [20]）の『Girl』という曲。とくにアルバムを聞いてみたりはしないが、また違う場面で彼の曲に出会いたい。
以上、ほとんど流し見といった視聴だったが、別に不快になるわけでもなくそれなりに楽しませてくれた。

来世ではちゃんとします

8.4 アニメ

銀河英雄伝説

ヒカルの碁

aaaaaaaaaaaaa

8.5 漫画

人間交差点

サンクチュアリ

8.6 ノンフィクション書籍

教養の書

文系・理系はなぜわかれたのか

8.7 WEB メディア

ノルウェーの王女が霊媒師と交際、そして怪しいビジネスを始めた話

何がきっかけで見つけた情報なのか忘れた。そのネット記事は [?] として保存済み。皇族が少し金銭的に危うい、ないし社会人として見通しが経っていない人物と結婚しそうになっただけで、あれだけの騒ぎになったならば、ノルウェーではすごい騒ぎになったのだろうと想像する。
しかしスピリチュアル系や似非科学系は、専門家でもなかなか相手の勢いを殺すのが難しいと思う。ましてや皇族や王族などなど、そもそもその人たちに大して議論すること自体が難しい人たちが関わっていると、なおさら難しそうではある。
この王女の相手である霊媒師の助言相手としてグウィネス・パルトローがいたのは少しショック。アイアンマンから好きになった女優。もちろん女優としての仕事とプライベートでの過ごし方は別物だとは思う。ただショックだったのは事実。しかし彼女の Wikipedia（[11]）を見ると、スピリチュアルだけじゃなくて、元からこういうのに傾倒している（だけなら良いけど商売にも利用している）人物らしい。

8.8 メモ

出会い系サイトについて

性癖について

「クロス・フィロソフィーズ株式会社」観察記

これは会社「クロス・フィロソフィーズ株式会社」に関するメモです．私は個人的にこの企業に関心がある．会社概要として [**?**] を保存しておいた．興味を持っている点として, 代表は哲学の博士号を持っていること, そして哲学を扱ったサービスを提供しているということの 2 点．これは数学を何か社会的な活動に活かせないかと日々考えている自分にとって, 数学と同じくらいに哲学を使ったサービスを展開することは難しそうだと感じるから．特に専門家でもない人が哲学っぽいことで講習やセミナーをしているのはよく見てきた．博士号を持っているならば雑にでも専門家といっていいだろう．それが本当に専門的な知識を活かして, 複数人を養えるほどに利益をあげているならば驚くばかり．ここは単なる団体ではなく企業なので利益を優先しているはず．それに哲学を「使える」のは凄いと思う．しかしもしかしたら「哲学博士号」という肩書を効率よく効果的に使って, それっぽいことでお金を儲けているだけかもしれない．そういう自称専門家もどの分野にもたくさんいるわけで, それの哲学バージョンなだけの可能性もある．もちろん彼らのサービス全てに目を凝らして, 哲学的に打倒かとか, 正しい哲学に対する姿勢を啓蒙できているのかとかを門外漢の自分が判定することはできない．なので自分周辺の意見も参考にしつつ, この会社がどのようなサービスを提供しているのか, なるべく批判的になりすぎないように見ていければと思う．以下, この企業の企画やサービス, または関係者のこの企業活動に関係しているようなアウトプットに対するレビューなどをまとめていく．

第 9 章　日記

2021 年 11 月分

2021 年 11 月 04 日（木）

今日から始めてみた．明日からどのようなことを書くかも決めた．なぜ始めたのかやその自分への影響などについては, のちのちブログ記事のような形でまとめておきたい．

2021 年 11 月 05 日（金）

5 時半起床（ちょっと前から起きていたけど）．この前安くヒラメを買えたので, 今日はムニエルに挑戦しようと思う．この前鶏の唐揚げを作って余っていた片栗粉があるので, それをムニエルの小麦粉の代用としてみる．ちなみに Wikipedia によると（[15]）, ムニエルとはムニエ（仏: meunier, 粉屋または製粉業者）の女性形で,「〇〇・ア・ラ・ムニエール」は,「〇〇の粉屋または製粉業者のおかみ風」（〇〇には魚の名前が入る）という意味らしいので, 小麦粉でなくても, 粉をまぶしてバターで焼きレモンを絞って食べれば, 何でもムニエルなのかもしれない．だから片栗粉で調理しても「ムニエル」と呼んでいいと思う（実際そう書いてあるものも見つけた）．
計量して小分けにして冷凍保存しているご飯が今日の朝ごはんで無くなるので, 親から届いた「あきたこまち」を 3 合炊いた．いつもは母がそうしていたからという理由だけで（つまり特に食べ比べとかをしたわけでなく）「ヒノヒカリ」を食べている．
時間があったので, wix.com で新しい「大人の数学教室」の HP のレイアウトを探していた．落ち着いた色がベースの使いやすそうなテンプレートを見つけたので, これをベースに作っていこうと思う．
朝ごはんはいつものようにサバを焼いて, 味噌汁と昨日大量に作った人参しりしり．味噌汁は一人暮らししてから一度もきちんと作ったことがない．母曰く,「多めに作っても一人だと飲み切るのに時間がかかるから, 毎回インスタントにちょっと工夫するくらいの方がいい」とのこと．なのでいつも味噌一人前と乾燥わかめと薄揚げを入れてお湯を注ぐだけの味噌汁を飲んでいる．ちなみに薄揚げは安いときに購入し細かく切って冷凍しておいている．冷凍の細切れ薄揚げは, 前に愛媛に行ったときに実家にて親が重宝していた．これは向こうのスーパー（ラ・ムー）で売っていたが, 似たような商品がこちらのスーパーでは売っていなかった（冷蔵ならあるが賞味期限が短い）．なのでこのようにして自作することで対応しているが, 結構良いアイデアだったと思う．
7 時半にバイトに出発．いつものように 8 時から 14 時まで働く．どのような仕事内容なのかはいずれ語るとして, 今日もいつものように平穏に働けた．
バイト帰りに買い物．眉毛を整える用の剃刀, タッパー, サランラップなどを立てて置けるようになるキッチン小道具, 使い終わった油を貯めて再利用するためのポット．一人暮らししてから, こういったキッチン小道具を見るのも楽しくなった．オイルポットは前までテキトーな瓶に入れていたが, それ専用でなかったため使いにくかったし周りも汚れるので, 目に入って思わず買ってしまった（100 円だし）．最近（というか一人暮らししてから）料理を作るときに, ちょうどいい一人前を作ることが下手くそで, ついつい作り過ぎてしまう．それらをお皿に入れて置いておくのも冷蔵庫の場所をとるので, 改めてタッパーを追加した．
帰宅して, わかめスープ作って軽い昼食（バイト先でおやつもらってるしこれくらいでちょうどいい）．朝炊いたご飯が冷めていたので, それを計量して小分けにした．ちょっと昼寝した．
起きて, 作業着などを洗濯して, 買ったものを配置した．
その後在宅インターンバイトの作業を軽く終わらせた．だいぶ慣れてきたと思う．そして来週から指導教官の週間スケジュールにあわせてバイトのシフト変更できたので, 指導教官に来週水曜日にセミナーを希望するメールを送った．そして工場バイトの SE 体験活動に関する作業も終わらせた．Active Perl の古いバージョンが入手できて（本当に）よかった．

数学は明日一日空いているので, そこでやることにして, 今日は料理して終わり. いつもの半額ズリ皮を, トマト, エリンギ, ズッキーニ, オリーブ, パプリカと炒めた（また大量に作った）. これは保存しておいて, 昼ご飯のときに食パンに乗せて食べる. 具材だけならラタトゥイユといった感じだろうか. でも単にオリーブオイルと塩だけで作っているが十分美味しい. やっぱりオリーブオイルが優秀なのかも. 晩酌は作り置き人参しりしり, 小松菜ともやしのナムルとメンマ温泉卵付き, そしてメインのヒラメの（片栗粉）ムニエル. 日記を書き始めた初日だったが数学していない以外は良い一日だったと思う. しかし怠惰に過ごしたわけでもないから気分は良い. 明日は数学がんばりたい.

2021 年 11 月 06 日（土）

朝は少しお寝坊した. 朝ごはんは今日はいつものスキレットで焼く卵焼き. これは以前母の立ち飲み屋を手伝っていたときに身に付けた料理. 着想は母が昔中央線沿いで働いていた時のよく行っていた定食屋の「卵焼き定食」から. これは, アツアツの大きな鉄板に卵 3 個分くらいのフワフワな卵焼きと, ご飯と味噌汁というシンプルなもの. これを参考にスキレットで再現した. 立ち飲み屋手伝い中に何度も焼いたし, その時に使っていたスキレットを使っている. 作るたびにそのころを思い出す料理の 1 つ. 今日はネギと辛子明太子を入れて焼いてみた. そしていつもの味噌汁（昨日の日記より）.
その後 Perl のバージョンを諸事情で下げてみた. それによってこれまでのライブラリが使えなくなったようで, DateTime モジュールもその 1 つ. そしてこの日記 TeX ファイルのメタプログラミングはそのモジュールを使用していたので, そのバージョンのプリインストールされている TimeLocal モジュールを使う処理に書き換えた.
しかしそれ以外は数学もそれ以外も特に進まなかった. 原因は昨日にあるのだろう. もう半ば諦めていた女性の交際への可能性が再度復活した. 諦めていたからこそ考えずに済んでいたのに, やはり希望があれば考えてしまうもの. そして自分は何か感傷的なことを考えると, それに引っ張られる形で他の内面的なことも考えてしまうようだ. そういった連鎖を防ぐためにも, こういう内面を記録しておく日記を始めたわけだが, 今日はまだ上手く使えなかった. ルーティンの運動として, 夜の大泉公園を走ってきた. しかし, いつもの通勤のように朝に自転車でも漕ぐことで一日の開始の気分も変わるかもしれない. 明日は実験的に朝起きてすぐ走りに行ってみる.
昼ご飯としては昨日作ったズリトマト炒めを 6 枚切り食パンに乗せたもの.
夜ご飯としては昨日上手くいったヒラメのムニエル（2 匹セットで売っていたので二日続きになった）. 昨日食べるつもりで結局食べなかったハマチの造り, そして人参しりしり.
いつだって上手くいく日はないとは思うけど, それでも今日は最低限のルーティンはこなせた. これが続いていって, 毎日しっかりと納得するような進捗が生み出せるようになれたらいいな.

2021 年 11 月 07 日（日）

今日は 10 時から不完全性定理勉強会の予定だったが, 気分が乗らなかったので主催者権限で中止にした. あまり熱が入らないのは, 数学以外の他のことに意識が向いているからだろう. ならば, それ以外の問題を全部解決していくしかない.
いつものように朝ごはんを準備する気にもなれなかったので, 余っていたネギとベーコンを入れた味噌ラーメンをつくった. やっぱりこういう時のためにインスタントラーメンの類は常備しておいていいかも. ただ安くて封入数が多いプライベートブランドのものにしたから, 味としては微妙だったかも. やっぱりサッポロ一番がいいな. だから次は有名どころが安かったらそれを買おう.
そして大泉緑地の池の前のベンチで 30 分ほど音楽を聞きながらボーっとしてた. 来週は何も目標にしようか, どうやったら気分を変えられるのか, そして数学に向かえるのか, いつものようなことを考えている. ただ日記を始めたことで少しはそういったことを考える時間は減ってきたように思う. まだまだこれから.
そのあと大人向け数学教室の申し込みが 1 件, 20 代女性からあった. 高校数学の学び直しがしたいとのことだが, 未だに高校数学の学び直しって何を目標にしてどう進めていけばよいか, つまりこれだけ良質なコンテンツがたくさんあるような分野で, わざわざ私がレッスンするような価値をどうやって生み出すのか考えがまとまっていない. ともあれ数学教室の HP の作り直しもしているところだし, これを機に再度考えてみるしかない. そのあとも細々とした作業を片付けていた.
そして夕方に好きな人から飲みの誘いが来たので飛んで行った. やっぱりいきなりでも誘われるのは嬉しいもの. 3 件飲み歩いて, 終電までには帰ってきた. 今後も関係が発展するといいけれど.
今日はこれまで.

2021 年 11 月 09 日（火）

昨日は参加するつもりだった朝からの学部 4 年生のゼミが中止になった．若干二日酔いだったのもあるけれど, すると急に他のこともやる気がなくなってしまって, ほとんどルーティン以外の何もしなかった．
今日は朝からバイト．特に問題なくいつも通りに終わった．ただ 3 か月に一度くらいの頻度である, ハンバーグを好きなだけ持ち帰れる日で, 親が欲しいのは分かっていたので多めに持ち帰った．あとは社内販売で 3 割引きで買える卵を 3 パック, そして社長からお米をもらった．このお米は毎年この時期にもらえるみたい（去年ももらった）．色々と学生一人暮らしにはありがたい職場だ．
帰宅後, 細々とした作業を終わらせ買い物へ．このスーパーは水曜が定休日で, 火曜はたくさん値引きシールを貼ってくれる日．そして買い物前に自宅にいたときに朝日新聞の勧誘が来て, 色んなクーポンをくれた．その中にそのスーパーの 1 割引きクーポンがあり, さっそく使った．たまたまとはいえ, 安く買い物ができたので気分は良い．
そのあと, 明日のゼミの予習．主に [45] について発表するつもり．これまでに共有していない, 色んな帽子パズルを俯瞰するような話も入れて, どれくらい種々のパズルに詳しくなっているかをアピールするつもり．その中で当初読む気のなかった, [45] で紹介されていた, オークションの理論と帽子パズルを絡めた論文 [34] を眺めてみた．その中にこれまでとは毛色の違う帽子パズルがあって, ついついその部分だけ読んでしまった．これも明日発表に加えようと思う．
今日の晩酌は残り物の惣菜たち．今日は予定の作業は少し終わらなかったので, 明日の自分に任せることにする．今週も自分で決めたやりたいことは多いけれど, なんとか次にデートするまでには色々と終わらせておきたいところ．

2021 年 11 月 10 日（水）

今日こそは朝起きてすぐに走りに行こうと思っていたが実現せず．朝ごはんはいつものサバといつもの味噌汁．相変わらず脂が乗っていて美味しい．ノルウェー産の方がいいな．たまに脂が乗り過ぎてしんどいものもあるけれど．その後は明日のバイトのために作業着を洗濯して, 今日のゼミの発表内容の最終チェック．
10 時半から指導教官と 1 対 1 のゼミ．一年以上ぶりだった．研究の進捗報告と, 新しく読んだ論文のレビューといった感じ．良い風に言うと, 帽子パズルの世界最先端の場所だよなぁ．なんとか代数学や解析学方面にも手を伸ばして, 他の数学者も巻き込めるようになれば面白いけれど．
そのあとは院生室でちょっと読書して休憩．TA 作業をしに来た修士後輩が入室してきたので, 邪魔したら悪いと思って退室（もともとそれくらいには退室するつもりだったけど）．帰りにスーパーに寄って, レモン風味の塩とワインビネガーを買ってみた．そして家近くのスーパーにペットボトルなどリサイクル系のゴミを捨てに行って, 値引きシールが貼ってあるものをいくつか購入．
そのあとはゼミ後もあって昼寝したり簡単な作業をやったりで夕方になった．
自作文献管理システムにて, 翻訳本を登録したとき, そこから生成された bib ファイルには, 著者として元々の著者が出力されるようになっていた（てか最初はその挙動でいいと思っていた）．なのできちんと翻訳者が著者として出力されるように修正した．あとこの日記を全て呼び出す TeX ファイルを作成するプログラムにて軽度のバグがあったので修正．1 つ上のプログラム修正によってコンパイルが通らなくなったのかと思っていたけれど, 原因は日記関連のプログラムだった．今日はたまたまどこにバグがあるのかすぐに分かってよかった．これで 1 時間くらいとられたけど…
明日ブリのカマを焼こうと思ったので, それの下準備．最近作ってなかったカニカマとわかめの酢の物をつくった．自分はあまり果物を食べないので, ビタミンが不足しがち．そして不足過ぎたらすぐに体調に影響がでる．だから酢の物などは意識して食べていかなくてはいけない．でもお酢がなかったので, とりあえずポン酢で和えておいて, 今度お酢を買って仕上げるつもり．
今日の晩御飯は昨日スーパーで安く買えた鶏ハツとピーマンを今日買ったレモン塩で食べてみる．あとは梅味の小松菜としらすの和え物ともやしナムル．
久しぶりのゼミがあった一日だったが, メンタルも体調も安定していたと思う．ただまだまだ運動不足, それに伴って集中力もイスに座り続ける体力も減ってきている気がする．愛媛にいたころのように自転車で走りまくることができないので, 早く毎日のルーティンに運動も入れていきたい．でもまずはこの日記や通常のルーティンが習慣化するまでがんばろう．

2021 年 11 月 11 日（木）

今日もいつものように起きた．いつものサバとお味噌汁．あとおかずが足りない気がしたのでテキトーに卵を焼いた．その後窓を開けて空気を入れ替え．その中で歯を磨いて，バイトの準備をした．少し時間に余裕があったので，軽くプログラミング．この日記のための仕組みを変えることにしたので，それにあわせてプログラムを修正．全部は完了しなかったけど．
バイト向かう途中に雨に振られた．バイトまでは自転車で 20 分くらいの距離．バイトはイレギュラーなことがあったけどいつも通りに終了．
帰ってきて昼寝をしちゃった．体力があれば，そのまま昼寝とかせずにスムーズに次の作業に取り掛かれるのかな．それとも自制心の問題？
夕方に起きて洗濯，そしてシャワーを浴びて簡単な作業をいくつか終わらせた．そのあとひらたけとしいたけでキノコのソテーを作った．昨日買ったワインビネガーを使ってみたけど，また一歩母の味に一歩近づいた気がする．
そして大學から一斉送信で「安全確認システムで連絡先が照会できない」みたいなメールが届いたので，使うかどうか分からないけれど，学籍番号とパスワードを設定しておいた．
そして変えた日記の仕様にあわせてプログラムを修正．もう 21 時なので晩酌の準備をすることにする．リファクタリングしたい箇所はメモしておいたので，明日早起きした自分に任せることにする．
今日の晩酌は，昨日から準備しておいたブリのカマの塩焼きに大根おろしとすだちを添える．残り物の中華炒めと大量のレタス，今日作ったキノコのソテー，昨日作った酢の物，もやしのナムルとメンマ温泉卵付き，お腹空いたので副菜をたくさん並べた感じ．いつも晩酌で作った料理の写真は撮っているけれど，Instagram にアップロードするのはめんどくさくなってきた．
日曜には修士時代の YN 君と会えることになった．大阪に帰ってきたときに本屋で 4 万くらい使ったら，1 万につき近くのカフェのコーヒー券がもらえた．それを使う機会ができてよかった．
そして今日も意中の人からの連絡は来ないが，まぁ今は待つしかない．彼女はいま修羅場・正念場だろうし．ここは信じるしかない．というかこれだけ毎日充実していると，これくらいの連絡頻度の方が有難かったり．自分本位の理由だけども．

2021 年 11 月 12 日（金）

今日は 5 時半に目覚めたので二度寝してしまった．そして 6 時 45 分に目覚める．バイトへの出発は 7 時 30 分．なのでいつものような朝食を準備する時間はなさそうだったので，味噌味のインスタントラーメンを作った．おひたし用に湯がいてあったほうれん草とベーコン，そして卵を入れたしっかりとしたラーメン．
バイトはいくつか些細なミスをしてしまった．やはりまったくミス無しな日はないようだ．バイト先ではデミグラスソースと，成型ミスのハンバーグをもらった．ソースを使ってビーフシチューっぽいものでも作ってみようかな．梅田の好きなビールとドイツ料理の店で，この前意中の人と食べた「ドイツ風おでん」を再現できるかも．
帰りにマグロパーク寄った．上記の料理のための野菜やベーコンやソーセージ，そして色んな魚の造りの切れ端を集めたものが安く売っていたので購入．これで作ってみたい料理があるので，そのための大和芋も購入．明日あたりに作ってみる．
帰ってきて意識したことは，昨日のように昼寝しないこと．とりあえずインターンでのお仕事を軽くやって，今日やりたかったタスクを確認（本当は朝にやる作業）．
明日はいつもの読書会の予習．本当は 1 日前にはやらないのだけれど，前回かなり読み込んでいた箇所でもあるので，どのようなコメントをするのか決めてあったのですぐ終わらせられた．
そのあと日記関連のプログラムたちの改修作業．改修内容はすでに決まっていたためすぐに修正できた．
明日は数学教室のカウンセリングがあるので，髭を剃っておいた．普段バイトではマスクで隠れるし，マスク無しで人と会うことも少ないご時世だから，ついつい髭剃りをサボってしまう．昔の接客バイトや会社勤めの時は出勤時は必ず剃っていたが，すっかりそうならなくなってしまった．明日の予定を立てて今日は終了．
晩酌はまだ残っていたセロリと豚肉の中華炒め（今日でやっとなくなった）古くなってきたトマトと塩昆布を和えて豆腐に乗せたもの，ブリのカマの塩焼き（昨日と同じように食べる），そして昨日作ったキノコのソテー．
タスク管理をするようになってから，確かに無為に過ごしたと 1 日を後悔することは少なくなったが，逆に常に大中小様々なタスクを意識していて，悪く言えば常に焦っている，よく言えば思考が止まらず充実している状態になっている．明日から火曜日まではバイトがないので，その分色んなタスクを片付けていければと思う．早く数学のみ集中できるよう環境や精神状態を整えたい．

2021 年 11 月 13 日（土）

今日も 5 時半に起床. しかし少し布団から出るのに時間がかかってしまった. 今日は起きてすぐ服を着て大泉緑地を自転車で走ってきた. 冬の朝の冷たさは目が覚める気持ちよさがある. 小銭入れを持って行っていたので「紅茶花伝」のホットを購入し, 池にいる鳥を眺めながら飲んだ. 予定では 7 時までに動き出す予定だったので, 今日もいつものような朝ごはんではなく, 昨日のようにインスタントの味噌ラーメンにした. このインスタントを早く消化して, 普通のもっと美味しいインスタントラーメンを購入したい. あと 3 食かな.
そのあとは何かについて語るための仕組みのためのプログラミングをやった. 一つの通過点までは完成した. これを完成させて何か数学・数学以外の知識が増えたときや, 何かについての思いや考えがまとまったときに書いていく場所を作っておきたい. そして昨日思い出した数学基礎論若手の会に講演者として参加するかどうか思索した. 講演申し込みの〆切までに自分の立てた目標が達成されていれば講演してみようかな. 細かい発表内容についてはその後考えることにする.
10 時からはいつもの隔週の読書会. 読書会の内容に関連して, 次の時代の啓蒙の敵の 1 つは反知性主義だろうと話し合った. しかし相手の具体的な姿も見えず, またそれを様々な形・界隈で反知性主義的な行動するものも多い（各個撃破も困難ということ）ので, 具体的な相手も戦う方法も用意されていた絶対王政や宗教権威の打倒という, 昔の啓蒙とはまた違う困難があると思う. また, これにどう立ち向かうのかも簡単には答えがでなさそうな点で, 先行きは暗い. とりあえず今度学校に行ったとき,「啓蒙思想 2.0」を借りてみようと思う.
読書会は 12 時に終わり. トースト 1 枚食べて軽くシャワーを浴びて, いつもの美容院に行った. かなり髪が伸びていたので, ツーブロックにして耳で寒さを感じるようになった.
そのあと数学教室のカウンセリングのために天王寺に向かおうとしたが人身事故で電車が動かず. 待ち合わせ時間にあわせるために地下鉄と JR 環状線を使って約束時刻までには天王寺に到着. 1 時間ほどカウンセリングを実施し, 体験授業を受けていただけることに. 高校数学が対象で, あまり乗り気でない内容ではあるが（出来れば高校数学が全くできなくても大学以降数学に挑戦してくれる方がやりがいがある）, そろそろノウハウを身につけたいのでがんばっていこうと思う.
帰り道にスーパーによって, 色々な食材と炭酸などなどを購入. 帰宅後軽い作業などを終わらせたあと, 昨日もらったデミグラスソースを使って煮物を作った. 芋, しいたけ, ソーセージ, 豚肉ブロックを入れてみたが, 具をある程度食べたら, 今度は炒めた人参やハンバーグを投入して再活用しようと思う（つまり具に対してソースが多すぎる出来になった）.
今日の晩酌は昨日と同じトマト塩昆布豆腐とたまに朝に食べるスキレット卵焼き. そして以前雑誌でみた大衆居酒屋の料理を真似してみる. 色々な魚の刺身の細切れととろろを混ぜて, しょうゆとわさびで食べるやつ. 名前は忘れたけど, たしか「爆弾」みたいな名前だったので, これから自分は爆弾と呼ぶことにする. もう 1 人前あるので明日も食べることにする.
今日は事故に巻き込まれたこと以外は順調だった. ただ明日は起きてすぐに公園散歩にいけるよう意識していきたい. これも早く習慣化させたい. そして早く意中の人から連絡きてほしいものだ. 今は耐えるとき, なのかな. まぁ自身の生活を充実させてあまり気にしすぎないようになればいいとも思っている.

2021 年 11 月 14 日（日）

5 時半起床. 少し布団からでるのに時間がかかったが, 今日も大泉緑地に散歩に行けた. また紅茶花伝買っちゃった. 毎回 140 円払うのももったいないので, 今度洗いやすくて保温ができる水筒買って, 自分で紅茶を入れて持っていくようにしてみようかな. 次ホームセンターに行くときに水筒コーナーに行ってみる.
朝ごはんは母直伝のキャベツ炒め目玉焼き乗せ. その後洗い物して, 洗濯して, 掃除機かけて, トイレ掃除して, シャワー浴びた. 部屋の全ての窓を開けて空気の入れ替えも完璧. かなり良い一日スタートが切れた.
9 時から大人向け数学教室の個人レッスン 1 件目. 集合論や論理学へのモチベーションを高めることを目的としながら, ゆっくりと話した形. 素朴集合論ならば何も見なくても授業できるようになったのは, かなり自分でも成長を感じるポイント.
13 時からもう 1 件個人レッスンの予約があったため, それまで休憩と軽くプログラミング. そしていつものように個人レッスンに対応した.
そのあと, なんばへ移動し, 余っていたコーヒー券を使って修士時代の同級生の Y くんとお茶した. 近況報告と最近の研究内容の共有などなど. また一緒に受けていた修士時代に印象的だった授業について, その先生がどのような意図でその授業スタイルで授業をしていたのか聞けた（その先生は Y くんの指導教官）. これについてはブログ記事的な形で明文化しておきたい.

3 時間ほど話し込んで, 帰宅した. まだまだ体力が足りないのか, 個人レッスンがあった日は少し疲れてしまう. なので帰宅してすぐに晩酌を開始した.
昨日作ったビーフシチュー風煮物を少し温めて, 湯がいておいたほうれん草を添える. そして人参しりしり（まだ残っている）, 残っていたキノコのソテーを食べきった. 用意は 10 分ほどで終わった. こうして作り置きを用意しておくと, やっぱり疲れているときでも短時間で晩酌の用意ができる. 今後も続けていこうと思う.

2021 年 11 月 16 日（火）

昨日は 1 日無駄に過ごしてしまった. というより, ルーティンやタスクに囚われない, 休みにあたる日もあった方がいいと思った. 自分は精神を休ませることが苦手であり, 体力もまだないから毎日タスク通りに行動することも難しそう. なので自分で自分に強制する形で休息日にあたる日を設定し, それがある前提でスケジュールを立てていくようにすべきかと. なので来週から月曜日は休息日に設定し, 後輩のゼミに参加するくらいしかタスクを設定しない日にしておこう.
今日は朝からいつものようにバイト. 朝ごはんはいつものようにサバを焼いて, いつもの味噌汁とわかめとカニカマの酢の物. バイトは製造量が少なかったからか, かなりゆったりと作業を進められた.
そのあと帰宅して細かな作業, 在宅インターンで面倒なメールがきていた. こういうものを伝言ゲームで対応しようとすると, めんどくさいことになりがちということは社会人の時に嫌というほど経験しているので, 上長にパスした.
特別研究奨励金の案内が届いていた. 2 週間ほど申請期間があるので, 今週土曜に書き上げておき, 来週学校行ったさいに指導教官にサインをもらって提出かな.
今日は 13 日に作った「爆弾」と, 鶏皮の唐揚げを作ることにする. 明日は何も強制的な予定がない日なので, じっくり数学や種々の作業に集中したい.

2021 年 11 月 17 日（水）

いつものように起床. ご飯を炊いていなかったので, 一昨日買った新しいインスタントラーメンを作って食べた. たまにエースコップのラーメンを食べたくなる. これの塩味が売っていたので買ってみた. それにほうれん草とメンマ, 卵を入れて食べた. その後洗い物や洗濯を済ませてプログラミング開始.
日記とは別に読んだもの・見たものなどについての感想や, 自分が考えたことを文章化してみたくなったので, それを souji ノートに含めるための仕組みをずっと考えていた. それについての仕組みは昨日までに考えていたので, その仕様にあわせてプログラミングした. 結果今日一日で完成させせることができた. これは仕組みが日記用のプログラムと酷似していたので, すぐに作れた. 徐々に色んなことについて書いていって, 頭の中にある文章を少しずつ外部に保存して, 他のこと（とくに数学）について考える時間や余裕を増やせるようになりたい.
それ以外には在宅インターンのめんどくさい仕事を 1 つ片付け, 買い物に行った. そのあとご飯を 4 合炊いた. しばらくは炊かなくてもよさそう. 買い物では色々と材料を買ったが, 今日は間食が多かったような気がするので, 既にあったキャベツでお腹を膨らますための炒めものおつまみを作った. あとは残りのもののビーフシチュー風煮物を食べることにした. 明日はこれにバイト先からもらったハンバーグを入れて再利用する予定.

2021 年 11 月 18 日（木）

いつものように 5 時半に起きた. 朝ごはんは昨日のキャベツの炒めものの残り物を使って卵焼きを作って, いつもの味噌汁と一緒に食べた. いつもならそのあと洗い物をして, コーヒーでも飲んで軽く作業ができたのだけど, 今日はなぜか軽く寝てしまい, 7 時半より少し前に慌ててバイトのために家を出た. 最近疲れているような気がする. 今住んでいる家では, 一応浴槽はあるのだけれど, お湯は張らないようにして, 常にシャワーのみ使っている. それだと体の汚れは落とせても疲れはとれなかったりするので, 定期的に近くのスーパー銭湯に行っていた. よくよく考えてみれば愛媛から大阪に帰ってきてから一度も銭湯に行っていなかった. だから疲れがちょっとずつ溜まっていたのかもしれない. 最近妙に眠かったり, 集中力がないのは体力の無さもあるかもしれないが, 単純に疲れていたのかもしれない. なので, 今日はある程度の日時タスクを終えたらスーパー銭湯に行くことにした.

バイトから帰宅後おやつを食べた. 作り置きしているビーフシチュー風煮物から, しいたけとソーセージを取り出し食パンに乗せ, さらにスライスチーズを乗せて焼いてみた. 結構美味しかった. その後, 業務用スーパーに買い物に行き, キャベツとメンマ 1 キロ（なくなってきたので）と業務用塩昆布と牛乳を購入. 今週月曜日に不摂生したせいか, せっかく減ってきた体重が元に戻ってしまった. Twitter にてとある主婦が太り気味の旦那に対して, 食事前に塩昆布とキャベツの炒めものを食べさすことで腹を膨らませて, ご飯やおかずのおかわりを減らし, 結果体重が減ったという投稿を見た. それに習って自分も似たようなことをやってみようと思う. 同じような炒めものでも十分お酒のつまみになるので, これからキャベツ半玉ほどを一緒に食べることでつまみの量をコントロールしてみようと思う. 1 週間ほどやってみて効果を見たい.
そのあと帰宅して在宅インターンの作業. 週末までに進捗報告するよう仕組みが変わったので, それに対応した業務フローを考えて, 自分がやりやすい仕組みを考えてみた.
そのあとスーパー銭湯に行った. ひさしぶりのお風呂だったがかなり気持ちよかった. お風呂セットも作っておいてよかった. その銭湯には変わり種の食品販売コーナーがあって, そこで「わさびなめこ」なるものを買ってみた. ご飯や冷ややっこ, そばにのせるといいらしいので, 今度おつまみに使ってみる.
帰宅後母と電話した. 母は来週の日曜に帰阪するので, そのあとどのようなスケジュールで大阪で過ごすのか聞いた. 帰った来た日などは何かおつまみを作っておいておこうと思う. 唐揚げの準備でもしておこうかな.
そのあと, お風呂で考えた文献管理ツールの仕様を再度検討した. 新しい仕組みにあわせてのリファクタリングは早くて今週中に, 遅くても来週前半までには終わらせておきたい. そうしないと帽子パズルの研究ノートを作り始められない. なんとか 12 月中にまた 1 つまとまった発表ができるようにしておきたい.
晩酌は昨日と同じようにキャベツを炒めることにしたが, 昨日ベビーホタテを買ったので, 今日はそれも入れてみる. そしてビーフシチュー風煮物を少し食べることにした.
今日はかなり疲れがとれて気分がよくなった. これ書いているときもかなり良い眠気がある. 明日もがんばろう.

2021 年 11 月 21 日（日）

ここ数日メンタルを崩していたので特に日記に書くことがなかった. やはりいつものルーティンは一度崩すと, なかなか元に戻すのがしんどいようだ. また今回しんどくなった原因は中目標となるタスクを多く設定しすぎて, それが普段から頭の片隅にあることで少しずつしんどくなっていったような気がする. タスク管理をするということは, 常々タスクがあることを意識することになり, またそれが次々と片付けられるならば気持ちもよいだろうが, そうでないとしんどくなってくる. なのでいくつかのタスクの優先度を下げることにした. また今, 仕事と研究と学習とそれぞれについて 3 つずつくらい抱えている状況になっている. やっぱりいくつかは単純作業化されているといっても, そこまでは自分でも抱え過ぎていると感じた. なので休学中から始めていた不完全性定理勉強会を休止することにした. 2 週間に一度とはいえ, かなりしっかりと予習する, そしてオンラインゆえに丁寧さを発表にて要求されるため, かなり負荷がかかっていたと思う. 俗な言い方をすればこの勉強会はいくらやったところでお金が稼げるわけでもないし, 自身の専門に対しても少し遠い. なので一旦休止して, 他のタスクを上手くこなせるようになったときに再開させようと思う.
あと昨日の土曜日に工場バイトでの飲み会が予定されていた. 家から電車に乗って往復 2 時間くらい. 別に参加者のメンツに苦手な人がいるとかではないが, 昨日までのように色々なタスクを抱えている状態では, 一気に参加する気がなくなってしまった. 幸い席を予約していたわけではないので連絡 1 つで不参加にできたので良かった. 正直今外で気持ちよく飲める, そして一緒に飲みたい相手は今現在の意中の人だけだと思う. この色々と（勝手に）抱え込んでいる状況で, それを差し置いてまで, お金を払ってまで（別に奢られても変わらないとは思うけれど）, 行きたい飲み会はないと思う. でも意中の人からの連絡も様子を見ている状況. この人が私への興味がないとはっきりと分かれば, ある意味また一つ考え事が減るのになとも思わなくもない. まぁそれはこっちの事情で, いま向こうは引っ越しやそれに伴う新生活の準備などで忙しいはず. それが片付いたとき, 私に連絡しようと思うかどうかが分かれ道になるだろうなぁ.
ということで, 内外のいろんなことを整理するのに, 思いのほか時間がかかってしまった. しかし今週末には母が帰阪する. 以前からこの週までに自身の大阪ルーティンを実行して, よりよい研究生活を送っていることを示したかった. なのでそれを改めて思い出して, やる気をまた出すことができた. 母が帰ってくる日には何かおもてなしを用意しておきたい. それが 1 つのモチベになっているので, 明日からよりよく過ごしたいものだ.
今日は朝から酒を飲んでいたが, 昼には上記にように気持ちが切り替わったので, シャワーを浴び, 身なりを整え, 掃除をし, 洗濯を 2 回し, 買いたかった食材を買ってきた. そしてサボっていたタスクを整理した.

バイト先でもらったハンバーグを残り物のビーフシチュー風煮物に入れて, 煮込みハンバーグ風にしようとトライしてみた. それ以外にもジャガイモを加えてみた. しかしハンバーグを焼いてから入れてみたのだけれど, このバイト先のハンバーグを焼くことが（相変わらず）下手くそなので, 失敗してしまった（一応煮物っぽくはなっているがハンバーグの原型はなくなってしまった）. なので 4 つあったハンバーグのうち 2 つは単に焼いただけにしておき, そのうち食べるときに, このソースをかけてそれっぽくしてみることにした. それ以外にはまた大量の人参しりしりを作っておいた. 普段人参はあまり意識して食べないので, これはおつまみとしても使えて良いアイデアだと思う. 作り過ぎた気もするが, 母も手伝ってくれるだろうからなんとかなるだろう.
あとはいつもの在宅インターンのバイトの作業を今週分片付けておいた. そして明日から英語の学習をルーティン化するための準備をした.

2021 年 11 月 24 日（水）

昨日・一昨日と日記を書かないくらい色々とやる気がなかった. やる気がでない自分にも自己嫌悪を感じるし, また一度ルーティンが崩れるとなかなか元に戻すことは難しい. 『継続は力なり』とはよく言ったものだと思う. そういう意味でまだまだ力が足りない.
Hulu で『ハイキュー』の最新シーズンを一気見して, とうとうディズニー＋のサブスクにも加入してしまった. 見たいものがあり過ぎて困る. とりあえず『キャプテンアメリカ』『プラダを着た悪魔』を見た. 『キャプテンアメリカ』を見てカーターというキャラが好きになったので, そのキャラが主人公のドラマも見出してしまった. なのでこの二日間, ずっと寝てたわけではなく, 視聴活動そのものは活発だった. 上手くルーティンの中に視聴活動を組み込めたら嬉しいのだけれど. 午前中に研究を終わらせて, 午後は運動や他の活動に使うというルーティンは試せるだろうか.
今日の朝は昨日食べた鍋の残り汁で雑炊を食べた. そして母と今週末からの予定やご飯の炊き方について長電話した. そのあと, この二日間サボっていた作業を片付けた.
そのあとはずっとかれこれ 5 時間ほどプログラミングしてた. 自分用の文献管理ツールだが, 使い方にあわせて改修することにした. それに伴って仕組みやプログラムの動作自体を変えることにしたので, 改修していたが思いのほか難航している. 明日・明後日で終わらせたいのだけれど, 明日・明後日はバイトもあるため, できるか不安なレベルになっている. とりあえずがんばるしかない.
今日はご飯を炊いた. 今までは炊いたご飯を小分けにして保存していた. ただその小分けにする量が多いような気がしていたので, 小分けにする量を減らしてみた. 具体的には今までが約 270 グラムで, 今日からは 200 グラム. これが今の自分にとってちょうどいい量になっているといいな.
今日の晩酌は先日買ったヨコワのカマの塩焼き（あと 2 つ残っている）, ベビーホタテとしいたけとトマトの炒めもの. かなり作業で晩酌開始が遅くなったのでサッと食べて寝る. 明日からまたルーティン通りの行動ができるように戻していきたい. できれば土曜日に息抜きがてら映画でも見に行けたらいいなと思いつつ.

2021 年 11 月 25 日（木）

今日もいつもどおりのバイトのある日の朝. 朝ごはんはたまに食べたくなるめかぶと納豆を混ぜてごはんにぶっかけたもの. それといつもの味噌汁. 少しいつもよりご飯の量を減らしたけれど, そこまで影響はなかったから, 今後もその量をキープしていきたい.
バイトはいつも通り. 案の定飲み会をドタキャンしたことを弄られたけれど, とくに問題はなかった. もうこのマイペースを貫ける, 今のキャラが楽過ぎるので, 次の仕事関係のコミュニティでも, そういう風に立ち回れるようになれたらいいなと. 今日の作業はかなり単調で楽だった. それ以外では SE 体験にてある社員さん向けのマニュアルを作ってみた. 来週に作業手順の説明をするけれど, 上手く伝わるといいな.
バイト帰りにマグロパークによった. 平アジのお造りを買ってみた. その他にはいつものサバと, 漬物・鶏肉（よくよく考えてみれば今日買う必要なかった）・魚のフライ（大きいのが 4 つも入っていて 200 円なり）, そして外の移動販売所にて, 70 円（三つで 200 円）の小松菜とほうれん草をおひたしストック用に購入. 週末から母が来るから, これだけストックしておけば余裕だろう.

帰宅後おやつを食べて, 作業着の洗濯やら細かい作業やら. いつものサバは 1 つでかなり食べ応えがあるので, 明日から試験的に半分ずつ食べることにしてみる. 今日お漬物を買ったのは, それに伴っておかず不足になることを危惧してのこと. ちなみに買った漬物は混ぜご飯にしておにぎりにするのが大好きな刻みピーマンの漬物.
そのあと別のスーパーの資源ごみ捨てがてら炭酸を買いに行った. 帰宅したらシャワーを浴びてストレッチ. 疲労は上手にとっていかないと. そしてそのあと在宅インターンの作業. 問い合わせが多く結構時間がかかってしまった.
これで勉強以外のタスクはやっと終わったが, もう時間も遅かったので, 今日は諦めて, 今日買った野菜をおひたし用に湯がいておき, 晩酌の準備もしておいた.
今日の晩酌は, よこわのカマの塩焼き（これでラスト）, デミグラスソースを使った煮物風のモノに豚肉を入れておいたやつ. それに今日買った魚のフライとレタスを添える. さらに今日買った平アジのお造り. そしておひたしの残り物と人参しりしり. 結構豪華になった.
明日は早起きできたらいいな. なかなか研究支援ツールの開発作業が進まなかったので明日は挽回したい. あとスーパー銭湯に行って一週間の疲れをとっておく. これで土日をしっかり過ごせるようにしたい.

2021 年 11 月 26 日（金）

今日もバイトがあるいつもの日のように朝を過ごした. また出勤前に軽くプログラミングをやって, 詰まっていた部分を片付けることができた. 具体的には Ruby で CSV クラスの使い方を身につけられたことによって解決した感じ. 金曜はバイト先にて掃除当番に割り当てられた. いつものように 8 時に出勤すると, 人が多くて掃除がしにくそうだと判断したので, 今日は 15 分早く出勤してみた. 掃除は上手くいったが, ちょっと早く出勤し過ぎたかも. 掃除なんて 5 分もかからないし. でもタイムカードが 15 分刻みだからこうするしかなかった. もし以降の金曜にて, 作業内容が軽ければ今日みたいに出勤しなくてもいいかも. 今日は作業内容がいつもよりハードだった. なので, いつもの SE 体験作業も軽く終わらせて, 30 分早く退勤してきた. 昨日指示した仕事を片付けてくれてたみたいで安心した. なかなかバイトの立場で社員さんに仕事をお願いするのは気が引けるが, まぁ慣れていくしかないかな.
そして帰りに牛乳やグレープフルーツジュースを買うためにスーパーに寄った. するとこれらの飲み物はどれも 2 割引きで買えたし, 安い牡蠣とタラが買えた. 暖かいものが食べたかったので, この牡蠣とタラで煮物を作ることに決めた. なので別のスーパーに行き, 大根と菊菜を入手. 帰宅して煮物を作っておいた. 大根は柔らかくなってほしいので, 食べるのは明日以降にするつもり.
そのあと文献管理ツールのリファクタリング. 主要な箇所は開発できたので, あとは細かな挙動について実装していく感じ. 早く使えるようにしないと, 研究に戻れないので急がねば.
晩酌は, 昨日のビーフシチュー風煮物の豚肉と, 昨日湯がいておいたほうれん草と小松菜にしらすと生卵を乗せたおひたし.
明日は朝からいつもの隔週読書会. まだその予習終わらせていないので, 明日早起きしてやることにする. そのあと文献ツール関連作業の続きをする感じかな. 早く意中の人から連絡来ないかなあ. 勝手の言い分だけど脈がないなら早く振ってほしい. そしたらそんなことを考える時間が減って, もうちょっと楽に過ごせるのにって思う.

2021 年 11 月 28 日（日）

昨日もプログラミングを中心にやっていたが, ハマり過ぎてルーティンはこなせなかった. 今日は切り替えてルーティンをこなしつつ過ごせた.
7 時くらいい起床. 昨日 3 時くらいまで飲んでいたので, 朝ごはんは食べなかった. 10 時半から大人向け数学教室のレッスンが入っていたので, それまでにいつもより丁寧に掃除をした. それと母親が今日帰ってくるのも丁寧にやる理由ではある. ガスコンロの油汚れを落としたり, トイレをいつも以上に綺麗にしたり.
10 時半からのレッスンのお客様は, 今日が体験授業. なので迎えに行って, 私宅まで案内. この方は高校数学の学び直しを希望していたので, 彼女が持っているテキストで, できる範囲で予習してきてもらい, 私に対して授業形式で発表してもらうやり方. 私は理解度を試すような質問をしたり, より効率的に, または間違えにくく解けるやり方を助言したりして進む. 少し時間が余ったので何か質問はあるか聞くと, 彼女は基本情報の取得も狙っているらしく, その試験で必ずでる 2 進数について質問してきた. 10 進数で表現された数を 2 進数に変換する計算において, アルゴリズムは覚えたものの, その手順にどんな意味があるのか, どのように理解すればよいのか, という質問. そして 16 進数ではなぜ 0 から 9 の数字に加えていくつかのアルファベットを使う

のか, という質問も受けた. 進数について, 今まで他のお客さまに教えたことはないのだが, 即興でかなり良い説明ができたと思う. 改めてこの個人レッスンの仕事をこなすことで, 即興での思考力や説明力などがついたように思う.
本日は常連の方も 13 時からレッスンの予約してくれていたが, その方の親族が急きょ入院することになったので, 今日のレッスンの取りやめを連絡してきた. それ以外にももう 1 件予約が入っていたが, 本人多忙につき延期に. なので予定が一気になくなったので, プログラミングの続きが捗った.
プログラミングの息抜きにマグロパークに行ってきた. お目当ては母親に向けて, 何かお造りを買うこと. 愛媛での生活では, その土地柄なかなか良い海の幸がなかったので, お造りが一番喜んでもらえると思った. いとよりとはまちが安かったので, それを柵で購入. あとは余っているデミグラスソースで鶏肉の炒めものを作りたかったので, それに入れる野菜としてナスを購入した. あとは飾り用の適当な野菜を購入した感じ.
そして, 帰宅後も細かな作業を片付けていき, プログラミングをやりながら, 時々気分転換に料理をしていた. プログラミングにおいて Excel 生成を主にやっているわけだが, 今日は生成した Excel ファイルにて行を固定する設定を入れたり, ある範囲にプルダウンで選択できる入力を設定できることがわかった. これは今後の作業をやりやすくする上でかなり良い発見だと思う. 是非 readme とかにはこだわったポイントとして記載しておきたい.
気付いたら 22 時半だったので, 晩酌の準備. 今日はかなり張り切る. 作り置き素材を使って前菜 3 種類と, 一昨日作成の煮物, 今日作った鶏とナスとデミグラスソース炒め, そして 2 種のお造り.
母は 24 時ごろに家に着いた. 3 時ごろまで話し込んでしまった.

2021 年 11 月 29 日（月）

昨日遅くまで飲んで目覚ましもかけ忘れていたので 8 時くらいに目覚める. 8 時 40 分には家をでなくてはいけなかったので, 慌てて 2 人分の朝食を作った. サバを焼き, 昨日作った酢の物といつもの味噌汁.
そしてそのあと母の眼科病院への通院に付き合う. 白内障を治したいそうなのだが, その方法を決めるために色々と検査をする必要があったみたい. 10 時に受け付けたのに, 検査や診察を重ねたら終わったのは 15 時半くらいだった. 手術方法や入院については当初考えていたものより, かなりこちらにとって都合のよいスケジュールでできるそう. 手術と入院は 2 月中旬になるとのこと.
最中に意中の人から今週金曜日に飲みに行けると連絡がきた. その日はまだ母が大阪にいるため, わざわざ適当な理由を作るのもめんどくさかったので, デートに行くと伝えた. そしてデート日までに靴を買いたかったので, 母の買い物とあわせて帰りに天王寺に寄った. 無難にコンバースの黒を買った.
そして夕飯の買い物をして帰宅. 今日は母が作り置きを再利用するなどしてご飯を作ってれた. 作り置きの人参しりしりと酢の物はマヨネーズで和えられてサラダになっていた. 大根と牡蠣とタラの煮物は, ダシとベーコンと牛乳・片栗粉を入れてシチュー風味の煮物に変身. 新規に作ったものとしては, たくさんあるメンマと豚肉とキャベツ・卵の中華風炒めもの. やっぱり料理人は違う. 母の自称「名もなき料理の達人」は伊達じゃないと改めて思った.
デート日が決まったことで, 数学などなどやる気が湧いてきた. そこまで自分が恋愛体質なのか, または相手に寄るのか分からないけれど, こうもテンションに影響を与えることに自分でも驚いている.

2021 年 12 月分

2021 年 12 月 14 日（火）

しばらく日記をサボっていた. また気持ちが落ち込むことも多く怠惰に過ごしてしまった日も多い 2 週間だった. なので特に書くこともないような日々だった気がする. それでもいくつかは出来事があったので書いておく.
まず意中の人に対しての自分のスタンスがやっと定まり, 心中を騒がせることはなくなった. 悪く言えば少し興味が減ったのかもしれない. 2 週間前の金曜日に飲みに行ったが, 彼女は自身のことを「押しに弱い」と言っていた. 人に言わせれば, それは多少なりとも強引にきてほしいというサインだと捉えるかもしれないけれど, もう 5 回くらい会った感触では, まだまだ私に対してはとくにそこまで興味を持っていないように思える. つまり私が押すから答えているだけで, 彼女から何か私に対して質問をもらったこともほとんどない気がする. また彼女はかなりの連絡無精である. 電話をかけても出たことはないし（でられなくても折り返しもない）, 内容に関係なく LINE でも返答に 3 日以上はかかることも多い. さすがに会う直前の待ち合わせについて

の連絡の返答スピードならば, 私や私の周りの人と同じくらいになるが. この返答の遅さに関しては, 彼女の身の回りの状況が落ち着けば変わる（少なくとも会った当初はこうも遅くはなく私が思う普通の人並みだった）かと思っていたが, それもいまのところ変化はない. もちろん身の回りの状況は改善したが仕事の方が忙しくなった可能性もある. また彼女はリセット癖があるとも言っていた. つまり仕事など用事が立て込むとリセット癖により連絡は億劫になる. 論理的には納得できる理屈ではあるが, 私には共感は全くできない性質だ. 私もリセット癖, またはそれに近い状態になったこともあるが（高校時代は多かったが大学生になってからは減ったとは思う）, それでも仕事や親, 友だちからの急を要すると思われる連絡に対してはきちんと返事はする. よって彼女はリセット癖はあれど, 全ての連絡に何もかも答えていない可能性はないと思うので, 私の連絡への返信の優先度はまだまだ低いのだろう. また仕事が忙しくて返信ができないというのも分かるが, 1 日 1 回も連絡できないレベルの忙しさというのは想像ができない（私の社会人経験の少なさが原因かもしれないけれど）. もし仕事に対してやりがいを多く感じていて, それに集中しているときは何も見えなくなる, ということなら分かるのだが, 勤務時間が長い・人が減って仕事が増えたことは聞いているが, 仕事が好きだとかやりがいがあるとか, 仕事に対するポジティブな姿勢を見たことはない（見せてないだけの可能性もあるけれど）. 仕事を嫌々こなし, それに対して余裕がなくなって, 自分に好意を寄せているとしっている人に対しての連絡が億劫になることへも「リセット癖」という言葉を言い訳のように使う人だと思ってしまうと, 途端に興味が失せてしまった. もともと返信速度が遅いということはないと知っている. なのでここ最近に返信の遅さは, 私への興味のなさの裏返しか, 本当に仕事や私用で忙しくて, 元からのリセット癖も相まった結果のどちらかかもしれない. ただポジティブな考えをすれば, 上記のように返信が遅れる人の心理として, どうでもよい相手以外の返信には, 良い内容で返そうとして時間がかかってしまうということもあるそうだ. でも普段から長文で返信が来るわけでもないので, これは違うと思う（内容が完璧でも返信が遅れすぎる方が悪印象だという感覚は持っておいてほしい）. またなんとなくだが, 彼女はそこまで普段の生活に刺激を求めていないように見え, 仕事以外の何かに熱中している様子も見えてこない（それだけ仕事が楽しいのかもしれないけれど）. つまり恋愛ごとに対しても, 普通の人より遅いペースで発展させていくタイプなのかもしれない（誰かがめちゃくちゃ押さない限りは）. しかしそれは私が求めるペースではない. 毎日 1 時間電話して, 週に 2 回以上会う, なんてことは求めていない. せいぜい毎日軽くでも連絡して, 2 週間に 1 , 2 回会えたらいいと思っている. 最低でもこれくらいの接触頻度がないと, 同じコミュニティに属していない, 知り合った期間も短い赤の他人が仲良くなるのは不可能ではないだろうか. なのでもう向こうから何かアクションを起こさない限りは, これ以上こちらから関係を深めようとはしないことにした. 深めたくとも連絡すら返ってこないのだから, もうできることもないと思われた. このように意識が変わって, もうこちらができることは今はないと判断した結果, 彼女について考えることも減って, 他のことにも集中できるようになってきた.

12 月 4 日までは母が帰阪していた. 12 月 1 日にはひさしぶりに二人で飲みに行った. 1 件目は前に住んでいた桃谷から徒歩 10 分くらいのところにある小さなお寿司屋さん. 母には「そろそろ寿司屋にて自分の意思で注文できるようになれ」と言われた. 確かにいつも注文はまかせっきりなのだが, 果たして今後自分が主体となって寿司屋に行くことはあるのだろうか. 少なくともしばらくはないだろうな. もちろん行けるようになりたいし, そのさいは楽しめるような過ごし方や注文の仕方を身につけたいとも思いつつ, まだそこまで本腰入れてやる気にはなれない. そしてそのあとなんばに移動し, 母が馴染みの店をいくつか回った. 何店舗かは閉店しており, やはりコロナ禍にて経営が厳しくなった店舗もあったのだろうと想像する. 結局知っている立ち飲み屋を 2 件はしごし, その店長との会話を母は楽しんでいた（私は初対面の人ばかりだったので聞き役に徹する）. 最近の自分なら〆に何か欲しくなることはあまりなかったのだが, その日は飲んでいる時間が長かったからか〆が欲しくなり, 黒門市場近くにあって何度か行ったことのある, 母の知り合いが経営するお好み焼き屋に行った. ハイボールが濃かった（寿司屋も）. 世間のハイボールってここまで濃かったかな. そして帰宅したあとも話に花が咲いて飲んでしまったようだ. 普段しないような飲み方をしたせいか, 次の日バイトにも関わらず 8 時半に目覚めた. 母に起こされる形で目覚めたので, もし母が起きなければもっと寝ていたかもしれない. なにせ 8 時半とはいつもならもうすでに工場で働いている時間帯. すぐに電話して遅れることを伝え, 慌てて自転車に乗った. 5 分ほど余裕ができたのでコンビニでおにぎり 2 個買って急いで食べた. 絶賛二日酔いだった. しかし二日酔いによる不調は, このようなアクシデントがあると一気に気にならなくなった. 平謝りしながら工場に入りいつものように作業を終わらせることはできた. 次の日は謝罪の意思を込めてお菓子を持って出勤した. まぁそこまでしなくてもいいかとは思ったけれど, この職場で寝坊で遅刻するのは初めてだったし, またそもそも寝坊で仕事に遅刻するのも 7 年ぶりくらいだったので, 自分への戒めも込めた行動だった.

12 月 3 日には以前から誘われていた「性的倒錯」についてのオンラインワークショップに参加した. 時間は 13 時から 15 時で, この日はいつもなら 14 時までバイトしている曜日だったのだけど, 早めに退勤させてもらう形に. 前日が遅刻した日だったのでかなり申し訳なかったが. このワークショップは小学生からの知り合いで哲学で博士号を目指していた T くんから誘われたもの. これはこのテーマに興味をもつ哲学者・人類学者・社会学者を集めた企画であり, 3 つのパートに別れていて, この日に参

加したのは哲学パートである. のちのち他のパートも開催され, 各パートにて異なる専門分野の人たちが議論・交流して, このテーマについて知見を深めていくような形. 各パートに中心的に参加している若手研究者・博士課程院生が論文が, この企画の成果物になるそう. 個人的にこのテーマに興味があったので二つ返事で参加させてもらった. 当然数学どころか理系でも参加者は私だけでした. なかなか全部の議論内容を理解することはできなかったが, 積極的に質問もできたし参加して良かったと思う. とくに興味のあった哲学パートの回は今回 1 回きりになるのだけれど, 他のパートにも参加していきたい. その 1 週間後の土曜日の読書会後に T くんに感想を伝えた. そのさい私がこれに参加する動機についてかなり時間をかけて説明したつもり. 少しばかり自分の性的な部分の内面をさらすことになったのだけど, 小学校からの知り合いで, そのような性的な話題での話もしたことない相手に対して話すのは少し恥ずかしかった. そのうち飲みに行って細かく話すつもりだが, それまでにもう少し自分でも自己分析は進めておくつもり.
今日は朝いつものように起きた. いつものようにサバを焼いたのだけど, この 2 週間で少し変わったことがある. これまではマグロパークで売っている, 大きなサバフィレの 2 つ入り税抜き 380 円を購入して, 1 つずつ焼いて食べていた. そしてこの商品は 3 つで税抜き 1000 円になるので, いつも 3 つずつ買っている. 他の乾物も選べるのだけど, 朝ごはんに食べやすいサイズとなると, このサバが一番良い. ただこのサバはかなり脂が乗っていて, 良いご飯のおかずになるのだけれど, 最近朝食のご飯の量を減らし始めたので, おかずとしてのサバの量も減らしたくなった. なのでサバは購入後すぐにそれぞれを半分に切り冷凍し, これによって長持ちするようにした（消費スピードは半分になっているし）. また冷凍によって味が落ちるのか分からなかったが, とくに変化もないようなので, 朝ごはんはこの仕組みでよさそうだ.
そのあと文献管理ツールのプログラミングの続き. しかし作業開始時に昨日完成したツールを全部消してしまった. まだ未完成だったのでコミットをしてなかった自分が悪いのだけど. 昨日 3 時間くらいで作ったものだけど, 仕様については熟知していたので, 2 時間ほどで同じものを作れた. ということで 2 時間の余分な作業が発生してしまった. そして残りのツールも作った. これによって, ようやっと文献管理ツール一式が完成し, これによって文献管理ツールとこのノートの管理ツールが連携し, 研究ノートにも文献情報を自分が臨む形で引用できるようになった. もちろんまだまだ改修することはあるだろうけど, ひとまず完成して一安心. 今年中にこのような研究補助ツールは一通り完成させ, 来年からはそのツールを活かして研究に専念する予定.
そのあと買い物に. マグロパークで久しぶりにマグロの切り落としと, 安かったさわらなどを購入. そのあと業務用スーパーと関西スーパーに行き色々と購入.
運動習慣はちょっと前からルーティンに入れようと考えていた. やはり体力がなさすぎるような気がする. それによって集中力もその持続力もないような気がしていたので. そして母に帰阪時に向こうに忘れてきた運動靴を持ってきてもらったので, 大泉緑地を 1 周走っている（約 3 キロ）. 体力がついてきたら周回数を増やしていきたい. そのために今日は 1 周気持ちよく走ってきた. バイトがない日において, 朝に勉強, 昼に走って, 料理や事務作業に勤しむルーティンが理想.
そのあと在宅インターン作業と料理をやることでかなり時間を使ってしまった. あと久々に書いたこの日記執筆にも時間を使ってしまった. これからは毎日書けるようになりたい.
以前タラと牡蠣と大根で和風の煮物を作ったのだが, 母にダシと牛乳とベーコンを加えてとろみをつけて改造された. その改造後の味が気に入ったので今日もその改造後の味を目指して作った. ただ具は大根とベーコンとひき肉のみで, 生姜を擦って入れてみた. このひき肉は関西スーパーで見つけた大豆でできたひき肉風味のそぼろのようなやつ. あとはいつものように小松菜を湯がいておいた.
そのあと在宅インターンの MTG に参加. 1 時間弱だった. 色々と作業するさいにやりにくかった点やバグかもしれない動作にについて共有した.
今日の晩酌は, まずは今日購入した鰆をシンプルに塩焼き. そしてマグロでカルパッチョを. 作り置きしていたもやしナムルを, 棚の奥から見つけた大好きなピータンに添える. そして上記の煮物と小松菜のおひたしに温泉卵をのせた.
今日は久々に日記を書いて思っていたことをまとめれてよかった. 本当は火曜日はバイトなのだが, 今週は向こうの都合で火曜の代わりに土曜日が出勤に変わった. なので明後日から三連休になる. 文献管理ツールは完成したので, 次は数学教室の新 HP の作成を進めたい. もちろん研究も本格化させていかねば.

2021 年 12 月 16 日（木）

今日の朝はいつも通りの朝食, そしていつものようにバイト. バイトでは製造過程で作られたサンプル用商品の中で, 賞味期限間近になったものを従業員が好きなだけ持って帰ることができることがある. そのサンプルがある程度溜まったタイミングでこのイベント？は発生し, 大体 2 か月に一度くらいな気がする. 種類はたくさんあり, 大抵はハンバーグだが, 牛丼の具やどて焼

きなど一品料理とかに使えそうな冷凍食品もある．そしてこの会社のハンバーグはもう食べ飽きているので（仕事中のおやつで食べれるから）, ハンバーグは基本的に自分用には持って帰らない．ハンバーグは母が欲しいと言ったら持って帰る感じかな．愛媛の方では近所の人からよく野菜などを分けてもらうことが多いそうなので, そのお返しとして重宝するらしい．今日は母向けに必要かどうか分からなかったので, 自分用に欲しかったどて焼きをたくさん持って帰ってきた．
帰宅後はおやつでお腹いっぱいになってしまいダラダラと過ごしてしまった．ルーティンも大事だけれど, 自分が後々後悔するような行動リスト, すなわち禁止行動リストも作っていくのも大事なのかも．今日の教訓としてはおやつとしてスープを採用すると, ついつい量多く作ってしまって満腹感を得てしまう．いつものようにサクッとパンで済ます方がいいと思われる．
在宅インターン作業を軽く終わらせ, 洗濯など細々とした作業も完了．
そのあと文献管理を, 先日完成したツールを用いてさらに進めた．ただまたまた思いもよらない量の文献を見つけてしまった．ある意味嬉しい悲鳴でもあるけれど．あとパズル本を一つ注文した．とりあえず目に入った文献はすべて登録していきたい．単にメモしただけのものが, 前の数学用フォルダにたくさん残っているので, どんどん整理していかねば．
明日は文献登録作業の続きと, 数学教室新 HP のスケルトンだけでも作り始めたい．
昨日は雑に過ごしてしまった．食材はたくさん残っているので, 晩酌は一昨日のように, もやしナムルとピータン, 煮物の残り物, マグロカルパッチョに鰆の塩焼き．鰆は母から教えてもらった保存方法の改良を試してみたが, 焼き上がりも味もかなり美味しくなったような気がする．前は購入後すぐに塩をふり, キッチンペーパーで包むようにしていたが, こうすると魚からでた水が再度魚についてしまう．なのでキッチンペーパーは使わないようにし, また冷蔵庫の普通の冷蔵スペースに置くようにすれば, 良い形で水分が抜け美味しさが保たれるようだ．
もう落ち込んだり, 無駄に自己分析している時間ももったいないのかもしれない．そんなことに今は頭を使わず, たくさんの数学をバカみたいにやらないといけない気がする．振り返りは一区切りついてから．

2021 年 12 月 17 日（金）

いつものようにバイトのある日．朝食もいつものように．
急に寒くなって気がする．
バイトはいつものように終わった．仕事については徐々に認められてきたような気がする．もちろんもともとの天然さゆえにミスはするが, 他の人の業務を邪魔するようなことはしていない．あくまで自分が困る程度のささいなものばかり．あまり気が利くタイプではないが, 関連業務などをこなしていけば, 何をしてほしいかは徐々に分かってくる．もう少し経験を積めば, 初めての業務でもこのように気を利かせられるようになるのだろうか．同じ業界ならまだありえそうだけども．
バイト後に文献登録作業．しかし意外と時間がかかる．また調べているうちに新しい興味のありそうな文献が見つかってしまう．今週中にはある程度終わらせたいができるだろうか心配．
少し疲れが溜まってきている．次にバイトに行くまでにはスーパー銭湯に行っておこうと思う．
晩酌は（今日も）マグロのカルパッチョに, いつものもやしナムルとメンマ, そしてトマトとチーズのオムレツをスキレットで作ってみた．ただスキレットが小さすぎて若干生だったのが残念．次は大きい鉄フライパンで焼こうとも思うけれど, このフライパン, 自分が管理を怠ったせいか食材がそこに貼り付きやすくなってしまったので, 卵料理も失敗しやすくなってしまった．なのでまた同じスキレットで具材量を調整してトライしてみるかな．

2021 年 12 月 22 日（水）

今週も木金土曜が工場バイトになったので, 先週日曜から水曜まで連続バイト休み．今日はその最終日．昨日はやっと大事なファイルのバックアップの仕組みが整った．まず必要フォルダを zip 化する Ruby スクリプトを書いた．そして Google ドライブを自身の PC のフォルダと同期するよう設定して, 上記スクリプト実行するバッチファイルに, 文献として保存しているデータをコピーするコマンドを書いた．さらに USB メモリにもコピーするように書いておいた．また TeX ファイルをコンパイルするバッチファイル全ての最後に, 上記同期フォルダにコピーするコマンドを追加．これで必要なファイルが自動的に Google ドライブに保存されるようになった．いま使っている PC がいつ壊れてもおかしくないので, これで PC を買い替えることになってもすぐに元の環境に戻せるようになって一安心．また研究室にて（多分私個人で使用できる）Surface を購入してもらったので, そこで環境構築するさいにも役に立つだろうし, もう PC を持ち歩く必要もなくなってよかった．
朝は昨日作ったニラレバでどんぶりに作って簡単に済ませた．

HP を作り直すことになっている数学教室の新しい HP に関する作業をした. 気に入ったデザインを wix.com の中から見つけた. 少し改良して, なるべくシックな色合いで, 黒背景にタイトルは白文字, 文章は薄いクリーム色の文字に統一してみた. そのデザインを採用し, ヘッターとフッターを設定. これまでは問い合わせのための情報は, 申し込み後の流れの中に組み込んでいたいたが, それだと分かりにくいかと思ったので, 今回はそのような情報はフッターに組み込むことにしてみた. これは元々のサンプルのフッターが問い合わせフォームになっていたのを参考にした. あとは実際の文章を入れて作っていくだけ. なので前の HP も参考にしながら徐々に作っていく. 目標は今年中に完成させ, 来年から点検して公開までいければいいな. 次は動画作成かな. 徐々に数学を使った副業を本格化させていきたい.
そのあとは買い物や掃除, 料理をしつつ在宅インターンの仕事や事務作業など. インターンの仕事はいつもよりめんどくさくなりそうなので少し困った. 軽く先に上長に言い訳しておいてゆっくりやっていくことにする.
そのあとは自分の持っている過去の PDF や集めた情報の整理. これからこの日記のように考えたことは全て文章化していきたい. 公開するかどうかは別として. その 1 つとして博士課程最初期に自分用に作った ideal と filter の入門まとめノートの点検と, 新しいこのノートの記法にあわせた修正をした.
今日の晩酌は昨日作ったものが並ぶいつもの献立. 昨日は久しぶりにレバニラを作ってみた. 少し失敗した. これを作ろうと思ったのはスーパーサンコーでレバーが半額だったから. 自分の家の近くの店舗は水曜日が定休日で, 火曜日は半額シールをたくさん貼ってくれる. 以前中華料理屋さんの YouTube 動画を見て参考にしたやり方を再現. まずレバーを洗う. 断面に穴が空いていて水を当てるとそこから血の固まりのようなものがでてくる. それを丁寧にとって, お酒に漬ける. そして炒めるまえに片栗粉を表面につける. するとレバーが硬くなり過ぎず, 美味しいレバニラができる. でも昨日は片栗粉をまぶすのを雑にやりすぎて, 中華鍋にくっついてしまい, また細かく千切れてしまうことで見栄えも悪くなってしまった. でもニラともやし, しいたけを入れ, ラーメンスープで味を整えたことで, 味は美味しかった. もし誰かに振る舞うことがあればもう少し上手く準備しよう. そういえば 2 つ前の彼女に作ったっけなぁ. 自分が新しい料理の挑戦するときの動機って, やっぱり誰かに振る舞うことが目標になっているときが多いのかも.
レバー以外にもサンコーではハタハタを見つけた. その中の何匹かは卵と白子がついていた. なのでいつものように塩をかけて保存し焼いてみた. 卵がたくさんついた個体を食べたけど, やっぱりハタハタは美味しい. 今度はマグロパークにてもっと大振りで美味しいものを買いたい.
このまえバイト先でどて焼きを大量に貰ってきたので, 関西スーパーでなぜかいつも売っている「キンカン」を入れてリメイクした. 関西スーパーで売っているのは玉ひものひも無し, つまり小さい卵だけがパックに入っている感じ. 玉ひももキンカンもそれ専用のページは wiki に存在しなかったので, macaroni というサイトが詳しかったので, それを文献に登録してみた. [**?**] がこれに該当. 他にも美味しそうな玉ひもレシピが乗っていたので試してみたい. なかでも串焼きやすき焼きに入れるとかやってみたい. 自分はこのキンカンが大好きで, 一人暮らしを始めたころはよく食べていた. しかし母にあまり食べ過ぎるなと注意されたので, 最近は控えている. こういう合う料理を作れそうなときくらいかな. 昔は単にキンカンだけを炒めて食べていたような. あとはいつものように小松菜のおひたし.
そして今日は昨日のハタハタの残りの塩焼き（3 匹）. ニラレバの残り半分をチンした. ただ味が濃かったのでレタスを買ってきて一緒に食べることにする. そしてどて焼きの残り（まだまだたくさんある）そして酢の物が食べたかったので, 三杯酢で味付けされたもずく（3 パックセット）と, 塩もみしたきゅうりを飾りつけに. そしていつものトマト冷ややっこ. これについては明日くらいにレシピを文献登録しておこうかな.
とりあえず本格的に自分の作ったツールでサポートしながらの, 研究や読書などが捗るフェーズにきたかな. 明日からバイト 3 連続なので, 疲れすぎないようにして作業や勉強を進めていきたい.

2021 年 12 月 23 日（木）

今日はバイトの日. 早起きは成功して今 6 時半だけど, この日記を書き始めた.
昨日作ったトマトと塩昆布を和えたものを豆腐にのせるレシピの, 自分が最初に参考にしたものに近いレシピをインターネットで再発見した（[**?**]）. これはオリーブオイルで和えたものだったけど, 最初に見たものはごま油で和えたものだった. そしてよりおつまみっぽくするために醤油に漬けた卵黄をのせていた. 一人暮らしして結構序盤に作ってみたおつまみだったかな. これを食べたとき他の野菜でもできるだろうなと思って, トマトで試したものが昨日作ったやつ. もう何度も作っていて, 簡単に作れるし, トマトと豆腐が余ったときの自分の中での定番レシピになっている. 他にはどんな野菜でできるかなぁ.

バイトは今日はかなり楽だった. また来週もどれだけシフトに入れるか聞かれたが, 自分のペースを守るためにもあえて少なく入る予定. あと去年と同じように社長からカニをもらった. 去年は自分一人で 3 日かけてもとても食べきれない量だった. 去年はそのときの彼女と食べきったんだっけ. 今年は去年よりかなり量が減っていた（それでもタダでもらえるだけありがたいんだけどね. 他のパートさんに比べて自分はそんな長時間ないし高頻度でシフトに入らないわけで）. なので今年は 1 人でのんびり食べきれそう.
帰宅後は少しダラダラしてしまった. 相変わらずバイト終わりの眠くならないちょうど良いおやつの量が分からない. 調整が難しいのはバイト中にもらえるおやつの量が毎日変わるからだろうなぁ. ともあれスープは満腹感が出すぎるような気がするので, 量も関係なく飲まないようにする方が無難かも.
いくつかの作業を終わらせた. ただやりたかったことの全部はできなかった. 数学教室の新 HP の完成度は 15 %というところかな. 作業の合間に洗濯と, 昨日買いこんだ小松菜をおひたし用に湯がいておいた. 最近ほうれん草がずっと高くて（なかなか 120 円を下回らない）, 小松菜がずっと安いので小松菜ばかりおひたしにしてる.
今日の晩酌は冷凍庫に眠っていた赤魚を解凍してムニエルにしてみた. アスパラとトマトのソテーを添えた. あとは昨日作り置きしたもずくきゅうり. かなりの量だったので今日はこれで十分.
明日の工場バイトはかなり複雑な行程になりそうなので, 明日の予定表から初めて自分用手順メモを書いてみた. これで明日出勤したらすぐに作業に取り掛かれるはず. 別にここまで（しかも業務時間外に）やる必要はないけれど, 自分の中でのやりがいと日々の目標が定まってしまったのだから仕方ない. ただただテキトーに仕事を終わらせるのも嫌いだし. もちろん自分を安売りするつもりもないので, そこらへんは自分のバランス間隔で.

2021 年 12 月 24 日（金）

今日はいつもより遅く起きてしまった. そして金曜日の工場バイトは朝に掃除当番が割り振られている. なのでいつもより 15 分早く出発する必要があり, 遅く起きたことも相まっていつものような朝ごはんを食べる時間はなかった. なので簡単にインスタントラーメンで済ました. やっぱりこういう時便利だね. 出前一丁に, 湯がいておいてた小松菜とどて焼きを少し入れて作った.
今日のバイトはかなりキツい製造予定の日. 効率よく動けるように前日から作戦を練っていたので, やりたいことは全部できた. 最後に凡ミスをしたけれど. そして去年のようにすき焼き用のお肉を配っていた. 今日は帰りに買い物したかったので持って帰らなかったけど. 明日も出勤なので明日持って帰ってくることにする. 年末にひとりすき焼きでもするかな. これもカニ同様去年彼女と消化した思い出がよみがえる. そのあと喧嘩して別れたからあんまり良い思い出ではない.
帰宅後はいつものように洗濯や, 作業や料理や買い物やらを終わらせた. 大して予定もないクリスマスイブだけど, 明日はチキンでも食べようと思って, 唐揚げを作ることにした. なので今日は唐揚げの下準備だけしておいた. 明日帰宅して揚げるだけ. これは大好きな, 母が作る白い衣の唐揚げ. レシピを聞いたら鶏肉の下準備は [?] を, 揚げ方は [?] を参考にと教えてもらった. 今回もこれにチャレンジする.
今日の晩酌はずっと残っていたニラレバを片付けるのと, これまた作り置きのどて焼き, 安かったカツオのたたき（安売りしてたサラダを添える）, そして昨日ムニエルにした赤魚がまだあるのでトマトとチーズでホイル焼きにしてみた.
明日はバイト 3 連勤の最終日. そこまで疲れずに帰ってきたい. そして在宅インターンの作業を少し終わらせて, 唐揚げパーティ（1 人）を楽しみたい.

2022 年 01 月分

2022 年 01 月 02 日（日）

久しぶりの日記. 本当は年末だって書こうと思っていたのだがついつい億劫になってしまっていた. 1 つは前に会っていた女性から急に連絡が着たことに動揺してしまっていたこと. それぐらいと思うかもしれないが, 私は彼女をかなり傷つけてしまったという自覚があった. そして 10 月下旬にもう会わないように思わせるような別れをしていて, もし今度彼女のような人にあったらどうしようとか色々と考えてしまっていた. おそらく数学が上手くいってなくて余計にこういったことを考えすぎてしまったのかもしれない. そしてまさしく彼女についてのこれまでとか今後どうしようとかの感情の整理がつき, 語りノートを利用してメモとして残しておこうと前向きになった矢先に, LINE で「ひさしぶり」的なメッセージが届いた. タイミングが良すぎてびっくりしたくらい. 年末年始にかけて会う約束もしていたのだが, 彼女の体調不良でキャンセルに. ただなんとなくもう終わった

と思っていたので, 少し会うのが面倒な気持ちもあったので, キャンセル自体は少し嬉しかったり. ただ少し前の意中の人との出会いから別れの話を聞いてもらったので, 気持ちの整理になって良かった.
あとは裏難波大學の忘年会を 28 日に私の自宅で開催. 本当はもっと活動についてとか話したかったが, 全員が久々に顔合わせしたこともあって, 大学教員・院生あるあるな会話で盛り上がり過ぎてしまった. 雑に文系理系でも修論発表ですら文化が違う点は面白いと思った.
1 月 1 日には寝ることができず 3 時くらいから Hulu で『恋がヘタでも生きてます』というドラマを全話一気見してしまった. それについては 204 ページで語っておいた.
また同日ようやく数学教室の新しい HP が完成した. 試しにプランをアップグレードして SEO も今回はきちんと設定しておいた. まだまだやることがあるので, 今日残りの作業を終わらせるつもり.
昨日はバイト先からもらったお肉で 1 人すき焼きパーティを開催. ただやはりこの濃い味付けはすぐに満腹感がでてしまう. 砂糖のせいだろうか. なので用意してあった具材の半分も食べきれず残してしまった. 今日の朝ごはんは簡単なすき焼き丼にした. この残りは具材を追加して煮物風にしておつまみに改造しようと思う.
ずっとサボっていた在宅インターンの作業を再開. 手を付けてみたものの, 思っていた通りめんどくさそう. とりあえず他のインターンも年末年始に関してはサボり気味っぽいので, 来週で目標達成しておけば大丈夫だと思う. 来週毎日やっておけば大丈夫な量のはず.
そして研究ノート作成を本格的に再開した. ずっと作りたかった自動化ツールを 3 つ作った. これでさらにこのノート作成をやりやすくなったと思う. 明日からは tex ファイルを打つ作業だけに集中できるようになったはず. これは去年までの目標だったので, 少し遅れてしまったが達成できてよかった.
数学教室のお客様から連絡. この方は母の介護でこれまで通りレッスンに通うことが難しくなると去年年末に言われたのだが, なんとかリモートで続けられないかと相談メールがきたので, 回答しておいた. こちらとしてもやる気のある方が続けてくれるのは嬉しい.
新しいドラマとして『私 結婚できないんじゃなくて、しないんです』を見始めた. 結構面白い. 一旦全て見たら語りファイルを作ってみようと思う.
それ以外はいつものように隙間時間に買い物やら作業やら済ませた. 今日の晩酌は昨日食べ残したすき焼きに, 白菜を追加, 新たにこんにゃくとえのきだけを追加したすき焼き風煮物を作ったので, それに温泉卵をのせたものが 1 つ. そして残っているメンマと, 食べ残しのキャベツおつまみを, 卵と豚肉で炒めものに改造したもの. そして冷ややっことおひたし.
明日はバイト先で開発しているプログラムのリファクタリングをやるが, なんとか午前中に終わらせて, 午後は数学に時間を使いたい. あとはそろそろ親にカニを送っておこうと思う.

2022 年 01 月 06 日（木）

三日間日記を書いていなかった. 原因は 4 日からの体調不良.
3 日は午前はバイト先のシステムのリファクタリングをやっていた. ずっと気になっていた機能を実装できたので満足していた. 実際のデータでの実験はまだしてなかったけど.
昼を軽く食べてその日の晩御飯の買い物をし, おやつを食べていると, 昔の立ち飲み屋のバイトでの同期かつ同い年から LINE で飲みに行かないかと連絡があった. 去年年始にも同様の誘いがあったけど, 時間があわず断ってしまっていた. 私としては誰かに誘ってもらう（大規模な飲み会はのぞく）のはすごく嬉しいし, 多少無理してでも参加したいと思っている. 去年断ってしまったので今年は急ではあったものの参加することに.
そのバイト先で同期かつ同い年は自分入れて 6 人いる. 誘いにあった通り京橋に向かうと, その中から 2 人が待っていた. さすがに年始ということもあって他の人は難しかったようだ. まぁ大阪を離れてしまった人もいるし. 2 人は先に昼くらいからパチンコを挟みつつ飲んでいたようで, 結構出来上がっていて合流後にいきなりうどんを食べに行った. 焼肉屋さんで 2 人はかすうどんを, 自分はテキトーなつまみでハイボールを飲んでいたけど, 会計してみると値段にびっくりした. 法外というほどではないものの, 質と金額は釣り合ってない感じの金額. まぁ外でチェーン系で飲むというはこういうこと. 喫煙者だった 2 人は禁煙だったことも不満だったようだけど.
当然 2 件目に行くことになり, 普通の居酒屋風の店に. そこでは値段も普通で, 楽しく飲めた. 二人は既婚であり, 既婚者ならではの会話を横で楽しみ, そして自分の近況を聞いてくれ, そしてバイトの昔話に華を咲かせと, 先日の忘年会とはまた違う良さがあった. 同じ思い出を共有する数人のグループにたくさん所属してるってことはいいことなんだな.

しかし帰りが寒かったからだろうか, 久々の外飲みで酔いが回り過ぎたのか, その日の 2 時ごろに二日酔いのような気持ち悪さで目覚める. 一回吐いたあと, 水を飲んでも気持ち悪さは変わらず, またその日はバイトでもあったため, 新年初日の出勤から遅刻もしたくなかった（それに 1 か月ほど前に寝坊で遅刻したという記憶もまだ新しい時期に）ので, 結局寝ることはなく, 水を飲みながら起きていた. 結局腹痛や頭痛があり, 風邪の可能性も考えて葛根湯を飲み, そして出勤時にコンビニで胃腸薬を買って飲んだ. 具合の悪さは少しはマシになったものの, 腹痛が一番酷く, 新年初日の工場バイトはテンションも低く, 動きも悪いというものになってしまった. たまたま作業内容がシンプルで助かった.

なんとか仕事が終わり, 少しは体調もマシにはなっていたけれど, 家に着いてからも, ずっと横になっていた.

そこから次の日まで酒も飲まず, 最低限の家事だけをして, ずっと寝ていた. こういうご時世なのでコロナウィルス感染を疑ったが, 結局ただの風邪だったよう. 上記の原因以外に, 最近布団の位置を窓際に変えたのだが, 我が家は隙間風が酷く, おそらく窓際で寝たことで体が冷えてしまったのも原因かもしれない. 今日から布団の敷く位置は窓から一番離すことにした.

そして体調は今日やっとよくなり, 今日はバイトだったが, いつものように働けた. 上記のリファクタリングしたコードのテストもやったが, やはりいきなり思い通りに動かず, キリも悪かったので, いつもよりも 45 分も多く時間を使った.

帰ってきてからいつもよりも溜めてしまった家事を片付けて, 買い物に. 今日はこれまでおかゆとかうどんとか食べていない分, 少しだけ料理をがんばってみることにした.

買い物後は在宅インターンや事務作業をやった. これも溜めてしまっていた. あとは数学教室の新年最初のレッスンをいつにするかのお伺いメールを送ってみたり. その途中で Twitter で指導教官から帽子パズルに関する情報を受け取ったので, 確認して知っている事実を追記するなどした.

晩酌は, こんにゃくで形成した低カロリー麺を使ったカルボナーラに, ずっと残っているすき焼き風の煮物の残り, 湯がいてあったほうれん草と納豆を和えたおひたし.

明日も同様のメニューかな. とりあえず明日の今週最後のバイトを終わらせて, なんとか数学する時間を捻出せねば. そうしないと精神がどんどん病んでいってしまう.

2022 年 01 月 11 日（火）

6 日からずっと体調が悪かった. 腹痛がずっと続いていた. ついやってしまう暴飲暴食が原因だと思う. 暴飲暴食は数学をやれてない自分へのストレスが原因だと思っている. この体調不良はそんな自分を変える良い機会にも思えた. その 1 つに晩酌をがんばることをやめることにした. ただしお酒を飲むことはやめない. なぜならもう 20 歳から 10 年間ほぼ毎日飲んできて, （いけないことだと思いつつ）飲まないと眠れなくなってしまった. なので飲むことはやめないが, これまでのように料理に手間をかけて晩酌することはやめた. なぜなら, その料理に結構手間暇を使っていると思われたから. 単に酔うだけならもっとテキトーなものでもよい. また晩酌にかかっている時間も少し無駄に思えてきた. そしてこれまでだと寝る前に晩酌することになっていたので, 翌朝でもまだお腹いっぱいな状態で朝ごはんも無理やり食べているような間隔もあった. これも健康には悪い様な気がしている. なので, ある程度の時間までにとりあえず晩御飯を済ませて, 再度勉強などした後に, 最後寝る前に余裕があれば, 軽いつまみのみで酒を飲むことに決めた. こうすることで晩酌に使う労力を減らすことにした.

お酒を楽しむことは私にとって趣味の 1 つであるから, これを止めることは余計にストレスがかかる可能性もある. ただときどきしてしまう暴飲暴食も止めたかった. 今までのようにおつまみを大量に作り置きしていると, それを肴にいつでも飲み会を始めることができた. なので冷蔵庫の中には作り置きを減らして, 酒を飲むことを自制できるようになりたかった. こういったコントロールも含めて自己管理だと思う. 体調管理やメンタルコントロールがうまくならないといけない. そう感じた年末年始だった. あまり良い一年のスタートではなかったけれど, 今年はお酒を飲む時間の何倍も数学をする時間をとるような, やる気に満ちた一年間にしたい.

第10章　このノートのTips

10.1　自作マクロ・環境紹介

この節ではこのノートで使用していた, 自前で定義した TeX のマクロや環境について紹介しています. コンパイルされて PDF になると見えない部分なので, それなりに価値はあると思います. 大抵あれこれ色んなインターネットのサイトを見ながら作っているので, どこを参考にしたか分からないものをあるかもです. なるべく参考になったサイトなどは参考文献にも載せておこうかと思っています.

10.1.1　自作マクロ

使用分野別にまとめておきます.

1. 共通

   (a) 太字命令の簡略化
   基礎的な用語は基本的にその英語と日本語を併記しているので, その太字命令が並んでいるのが煩わしいという理由で導入してみたもの.

   ```
   \newcommand{\textgtbf}[2]{\textgt{#1}（\textbf{#2}）}
   \newcommand{\textbfgt}[2]{\textbf{#1}（\textgt{#2}）}
   ```

   例えば`\textgtbf{集合}{set}`で「**集合（set）**」, `\textbfgt{set}{集合}`で「**set（集合）**」となる.

   (b) 各種参照系
   ノートの一部分を参照した場合は, そのページ数も併記した方が親切かと考えて, このように参照先の記入は一回で済むようなマクロたちを作ってみた.

   ```
   \newcommand{\PartRef}[1]{第\ref{#1}部（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\ChapRef}[1]{第\ref{#1}章（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\SecRef}[1]{\ref{#1}節（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\DefRef}[1]{Definition␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\ExRef}[1]{Example␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\LemRef}[1]{Lemma␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\ThRef}[1]{Theorem␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\FactRef}[1]{Fact␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\PropRef}[1]{Proposition␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   ```

   (c) 定義するための記号
   こういうのこそマクロにすべきだよねって.

   ```
   \newcommand{\defarr}{\␣\mbox{$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$}}
   \newcommand{\defeq}{\␣\mbox{$\stackrel{\text{def}}{=}$}}
   ```

2. 基礎数学系

(a) 集合の外延的記法に関するもの
見栄えを整えることが多く見辛くなりやすいのでマクロにしてみた（流石にやり過ぎな気がしなくもない）. 2 種類の外延的記法にあわせて 2 つ用意している.

```
\newcommand{\SetBar}[2]{
␣␣\{\,#1\,\mid\,#2\,\}
}
\newcommand{\SetColon}[2]{
␣␣\{\,#1\,:\,#2\,\}
}
```

例えば`\SetBar{x}{x␣\neq␣x}`で「$\{\, x \mid x \neq x \,\}$」,

`\SetColon{|r|}{r␣\in␣\mathbb{R}}`

で「$\{\, |r| : r \in \mathbb{R} \,\}$」と出力される.

(b) 順序対や有限列に関するもの
「langle」や「rangle」がたくさんあると見辛くなるので.

```
\newcommand{\op}[2]{\langle␣#1,#2␣\rangle}
\newcommand{\triple}[3]{\langle␣#1,#2,#3␣\rangle}
\newcommand{\ntuple}[2]{\langle␣#1,\dots,#2␣\rangle}
\newcommand{\singleseq}[1]{\langle␣#1␣\rangle}
```

(c) 関数に関するもの
まずは「f は A から B への（単射・全射・全単射）写像である」という述語の略記をマクロにする. 人によっては `\colon` ではなく `:` を使う人もいるので, それぞれの状況にあわせてマクロで一括変換出来る方がいいかもと思った（そんなときがあるのか分からんけど）.

```
\newcommand{\map}[3]{
␣␣#1\colon␣#2␣\to␣#3
}
\newcommand{\InjectionMap}[3]{
␣␣#1\colon␣#2␣\xrightarrow{\text{1-1}}␣#3
}
\newcommand{\SurjectionMap}[3]{
␣␣#1\colon␣#2␣\xrightarrow{\text{onto}}␣#3
}
\newcommand{\BijectionMap}[3]{
␣␣#1\colon␣#2␣\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}␣#3
}
```

そして写像・関数に関係する定義のためのコマンド一覧. 写像の定義域の制限の記号は単なる $\|$ を使う人もいるけれど, 私はこれが好き. そして`\upharpoonright` が人によっては何を指しているのか分かりづらいし, 連発するとかなり 1 行が長くなってしまうので, 省略したい意図もある.

```
\newcommand{\restric}{\mbox{$\upharpoonright$}}
\DeclareMathOperator{\dom}{dom}
\DeclareMathOperator{\ran}{ran}
\DeclareMathOperator{\fld}{fld}
\DeclareMathOperator{\id}{id}
```

10.1.2 自作環境

1. ぶら下げと背景変更
   証明中の不要ならば読み飛ばしてほしい部分やテキストでは行間に相当する部分などを, ここに記述して分かりやすくするためのもの.

```
\definecolor{BIP-back}{gray}{0.9}
\newenvironment{sub-block}[1]
␣␣{
␣␣␣␣\begin{tcolorbox}[
␣␣␣␣colback␣=␣BIP-back,
␣␣␣␣colframe␣=␣white,
␣␣␣␣boxrule␣=␣10pt,
␣␣␣␣fonttitle␣=␣\bfseries,
␣␣␣␣breakable␣=␣true]
␣␣␣␣\begin{itemize}␣\item[#1]
␣␣}
␣␣{
␣␣␣␣\end{itemize}
␣␣␣␣\end{tcolorbox}
␣␣␣␣\vspace{-5pt}
␣␣}
```

   以下のように変数に何も入れないと

```
\begin{sub-block}{}
␣␣こんな感じ␣\\
␣␣になって,
\end{sub-block}
```

   こんな
   感じになって,

   例えば変数に`{\boldmath␣$\because$}\,`とか入れてみると,

   $\because$ こんな
   感じになる.

10.2 お助け自作ツール紹介

このノートを作成するにあたり, 自分の作業を効率化するため, 作ってみたツールたち. また効率化だけでなく, ノートの内容をよりよくするためのものも作れたらなと思っています. 簡単なファイル処理などは書き慣れている言語 Perl で書いています. 文献管理は別のフォルダでやっていて, それをサポートするためのツールの開発もやってます. そちらは別のリポジトリになっています. 詳しくはこちらから

- 全角「、」「。」変換ツール
  ツールのコードはこちらから．このノートでは「、」「。」は使わず，「,」「.」で統一しています．しかし日本語を打っている際についつい「、」「。」を打ってしまってそのままということもあります．notetex から再帰的に subfile で呼びだしている tex ファイルを探し出し，その全てのファイルの中にある「、(改行)」「。(改行)」を「, (改行)」「. (改行)」に置換します．また置換前のファイルは同じ場所にバックアップをとります．もともと「、(改行)」「。(改行)」が含まれていなかったファイルはバックアップはとりません．
  しかしこれだと「、」「。」が行の途中に含まれている場合は検知できません．ただこの場合は，このツールの説明文や意図的に書いたものや，私が改行を忘れている場合があります．なのでそれらを検知した場合は，そのファイル名と行番号・その行の内容をコンソールに表示するようにしてあり，それで自分がわざと書いたのか，改行忘れかを判断する材料にするようにしています．

- 「あとで書く」メモのリスト化ツール
  ツールのコードはこちらから．勉強していると「ここはあとで示しておこう」とか，「この○○については後のページで説明すると書いてあるからメモしておこう」という部分は多々ある．これらを現実のノートにメモっておいてもよいけど，何かにまとめておいておかないと忘れてしまう．なのでその箇所の勉強ノート TeX ファイルにメモっておき，いつでもそのメモのリストが見れるようにしておきたい，そんな思いを叶えるためのツールです．例えば「`C:/souji/all-note/part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_導入.tex`」の 782 行目から，以下のようにメモったとします．

```
%あとで書く
\begin{comment}
␣␣この補題に関してはあとで示しておく.
\end{comment}
```

  これなら出力には影響しません．ただしこの部分の前後は改行しておかないと「! Bad space factor」というエラーがでることがあります．そしてこのツールを実行すると，ノート用フォルダに「あとで書くリスト.txt」が作成され，ファイルを開くと以下のように書かれています．

```
C:/souji/all-note/part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_導入.tex で見つけたメモ----------

782 行で発見。↓その内容
␣␣この補題に関してはあとで示しておく.
```

  他のファイルにもメモっていれば，もっと内容は増えます．ツールではコメントアウトした「あとで書く」，そしてその後にあるコメントアウト環境に囲まれた部分を読み込みます．なので「あとで書く」メモはこの記法を守っていくことにします．

参考文献

[1] Prisoner hat puzzle —— 10 prisoners —— red & blue hats, 1 2017. https://www.youtube.com/watch?v=RtidKw-qDxY.

[2] Wikipedia『基底 (位相空間論)』, 6 2018. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9F%BA%E5%BA%95_(%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%96).

[3] Wikipedia『順序対』, 5 2019. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%A0%86%E5%BA%8F%E5%AF%BE.

[4] Wikipedia『高々 (数学)』, 4 2020. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%AB%98%E3%80%85_(%E6%95%B0%E5%AD%A6).

[5] Wikipedia『竹内時男』, 3 2020. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%AB%B9%E5%86%85%E6%99%82%E7%94%B7.

[6] Wikipedia『日本の色の一覧』, 11 2020. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A5%E6%9C%AC%E3%81%AE%E8%89%B2%E3%81%AE%E4%B8%80%E8%A6%A7.

[7] Wikipedia『文字列結合』, 1 2020. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%96%87%E5%AD%97%E5%88%97%E7%B5%90%E5%90%88.

[8] Wikipedia『induction puzzles』, 7 2021. https://en.wikipedia.org/wiki/Induction_puzzles#cite_note-8.

[9] Wikipedia『エルデシュ数』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A8%E3%83%AB%E3%83%87%E3%82%B7%E3%83%A5%E6%95%B0.

[10] Wikipedia『ガルガンチュワとパンタグリュエル』, 4 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AC%E3%83%AB%E3%82%AC%E3%83%B3%E3%83%81%E3%83%A5%E3%83%AF%E3%81%A8%E3%83%91%E3%83%B3%E3%82%BF%E3%82%B0%E3%83%AA%E3%83%A5%E3%82%A8%E3%83%AB#%E6%97%A5%E6%9C%AC%E8%AA%9E%E8%A8%B3.

[11] Wikipedia『グウィネス・パルトロー』, 10 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B0%E3%82%A6%E3%82%A3%E3%83%8D%E3%82%B9%E3%83%BB%E3%83%91%E3%83%AB%E3%83%88%E3%83%AD%E3%83%BC.

[12] Wikipedia『ハッシュ関数』, 9 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8F%E3%83%83%E3%82%B7%E3%83%A5%E9%96%A2%E6%95%B0#%E8%AA%9E%E6%BA%90.

[13] Wikipedia『ヒルベルトの無限ホテルのパラドックス』, 10 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%92%E3%83%AB%E3%83%99%E3%83%AB%E3%83%88%E3%81%AE%E7%84%A1%E9%99%90%E3%83%9B%E3%83%86%E3%83%AB%E3%81%AE%E3%83%91%E3%83%A9%E3%83%89%E3%83%83%E3%82%AF%E3%82%B9.

[14] Wikipedia『フローニンゲン大学』, 10 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%83%8B%E3%83%B3%E3%82%B2%E3%83%B3%E5%A4%A7%E5%AD%A6.

[15] Wikipedia『ムニエル』, 3 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A0%E3%83%8B%E3%82%A8%E3%83%AB.

[16] Wikipedia『構造的帰納法』, 4 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%A7%8B%E9%80%A0%E7%9A%84%E5%B8%B0%E7%B4%8D%E6%B3%95.

[17] Wikipedia『寺脇康文』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AF%BA%E8%84%87%E5%BA%B7%E6%96%87.

[18] Wikipedia『順序対』, 8 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%B6%85%E8%B6%8A%E6%95%B0.

[19] Wikipedia『小関裕太』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B0%8F%E9%96%A2%E8%A3%95%E5%A4%AA.

[20] Wikipedia『秦基博』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%A7%A6%E5%9F%BA%E5%8D%9A.

[21] Wikipedia『数学的構造』, 7 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E7%9A%84%E6%A7%8B%E9%80%A0.

[22] Wikipedia『相席スタート』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%9B%B8%E5%B8%AD%E3%82%B9%E3%82%BF%E3%83%BC%E3%83%88.

[23] Wikipedia『内田理央』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%86%85%E7%94%B0%E7%90%86%E5%A4%AE.

[24] Wikipedia『不等号』, 8 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%8F%B7.

[25] Wikipedia『宝石 (雑誌)』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%9D%E7%9F%B3_(%E9%9B%91%E8%AA%8C).

[26] Wikipedia『恋がヘタでも生きてます』, 10 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%81%8B%E3%81%8C%E3%83%98%E3%82%BF%E3%81%A7%E3%82%82%E7%94%9F%E3%81%8D%E3%81%A6%E3%81%BE%E3%81%99.

[27] Wikipedia『asterix』, 1 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/Asterix.

[28] Wikipedia『list of martin gardner mathematical games columns』, 1 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Martin_Gardner_Mathematical_Games_columns.

[29] Wikipedia『maurice kraitchik』, 1 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/Maurice_Kraitchik.

[30] Wikipedia『werner heisenberg』, 1 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg.

[31] Wikipedia『竹内均』, 1 2022. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%AB%B9%E5%86%85%E5%9D%87.

[32] Wikipedia『日本ユニシス』, 1 2022. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A5%E6%9C%AC%E3%83%A6%E3%83%8B%E3%82%B7%E3%82%B9.

[33] Wikipedia『木々高太郎』, 1 2022. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%9C%A8%E3%80%85%E9%AB%98%E5%A4%AA%E9%83%8E.

[34] Amos Fiat Andrew V. Goldberg Jason D. Hartline Nicole Immorlica Aggarwal, Gagan and Madhu Sudan. Derandomization of auctions. *Games and Economic Behavior*, Vol. 72, No. 1, 6 2010. https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/99342.

[35] Albert A. Bennett. Problem no. 3734. *American Mathematical Monthly*, Vol. 42, , 1935.

[36] Albert A. Bennett, E.P. Starke, and G.M. Clemence. Solution to problem no. 3734. *American Mathematical Monthly*, Vol. 44, No. 5, 1937.

[37] Axel Born, Cor A.J. Hurkens, and Gerhard J. Woeginger. The freudenthal problem and its ramifications (part iii). *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science, EATCS*, Vol. 95, , 2008. https://research.tue.nl/en/publications/the-freudenthal-problem-and-its-ramifications-part-iii.

[38] Werner E. Buker. A puzzler for the thinkers. *School Science and Mathematics*, Vol. 35, No. 2, 2 1935. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1949-8594.1935.tb12823.x.

[39] Werner E. Buker, R. Wood, and O.B. Rose. Solution to science question 686: A puzzler for the thinkers. *School Science and Mathematics*, Vol. 35, , 1935.

[40] Holly Crider. Finite and infnite hat problems. 5 2010. https://www.siue.edu/~aweyhau/teaching/seniorprojects/crider_final.pdf.

[41] Herbert Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition.* Academic Press, 12 2000. https://www.elsevier.com/books/a-mathematical-introduction-to-logic/enderton/978-0-08-049646-7
Amazon の URL.

[42] Martin Gardner. *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions.* Simon & Schuster, 5 1961. https://bobson.ludost.net/copycrime/mgardner/gardner02.pdf
Amazon の URL.

[43] Martin Gardner. *Origami, Eleusis, and the Soma Cube Martin Gardner's Mathematical Diversions (The New Martin Gardner Mathematical Library, Series Number 2).* Cambridge University Press, 11 2008. [43] の海賊版？
https://www.amazon.co.jp/gp/product/0521735246/ref=ppx_yo_dt_b_asin_title_o01_s00?ie=UTF8&psc=1.

[44] Alex Gendler. Can you solve the prisoner hat riddle? - alex gendler, 10 2015. https://www.youtube.com/watch?v=N5vJSNXPEwA&t=58s.

[45] Petr Glivický. A note on the problem of prisoners and hats. 1 2018. https://arxiv.org/abs/1801.01184.

[46] Christopher S Hardin and Alan D Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-.* 11 2012. おそらく [47] の出版前原稿.
http://qcpages.qc.cuny.edu/~rmiller/abstracts/Hardin-Taylor.pdf.

[47] Christopher S Hardin and Alan D Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-.* Springer, 10 2013. 本当はタイトルに「-」は入っていないがファイル名として採用できるようにこのように修正した.[46] も同様.
https://www.springer.com/gp/book/9783319013329
Amazon の URL.

[48] Yurii Khomskii. Infinite games-summer course at the university of sofia, bulgaria, 7 2010. https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/infinitegames2010/Infinite%20Games%20Sofia.pdf.

[49] Maurice Kraitchik. *Mathematical recreations.* Dover Publications, 1942.

[50] Maurice Kraitchik. *Mathematical recreations.* Dover Publications, 1953.

[51] Alex Kruckman. Notes on ultrafilters, 7 2011. 著者の HP（https://akruckman.faculty.wesleyan.edu/notes-slides/）から発見したもの.toolbox seminar という企画で発表したものらしい. 他にも面白そうな PDF がたくさん配置されている.
https://akruckman.faculty.wesleyan.edu/files/2019/07/ultrafilters.pdf.

[52] Kenneth Kunen. *Set Theory (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations).* College Publications, 11 2011. https://www.collegepublications.co.uk/logic/mlf/?00016
Amazon の URL.

[53] Sara Robinson. Why mathematicians now care about their hat color, 4 2001. https://www.nytimes.com/2001/04/10/science/why-mathematicians-now-care-about-their-hat-color.html.

[54] Hans van Ditmarsch and Barteld Kooi. *Honderd gevangenen en een gloeilamp.* Epsilon Uitgaven, 2013.

[55] Hans van Ditmarsch and Barteld Kooi. *One Hundred Prisoners and a Light Bulb.* Copernicus, 7 2015. https://www.springer.com/gp/book/9783319166933
Amazon の URL.

[56] 田中一之. チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題. 東京大学出版会, 11 2013. http://www.utp.or.jp/book/b306613.html
Amazon の URL.

[57] 岩沢宏和, 上原隆平. ガードナーの数学娯楽 (完全版 マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 2). 日本評論社, 4 2015. [42] の和訳.
https://www.nippyo.co.jp/shop/book/6820.html
Amazon の URL.

[58] 藤村幸三郎. 最新数学パヅルの研究. 研究社, 1943.

[59] 川辺治之. 100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル. 日本評論社, 11 2016. [55] の和訳版.
https://www.nippyo.co.jp/shop/book/7303.html
Amazon の URL.

[60] 佃修一. 幾何学序論講義ノート, 4 2013. http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/note_2013.

[61] 嘉田勝. 論理と集合から始める数学の基礎. 日本評論社, 12 2008. https://www.nippyo.co.jp/shop/book/4116.html
Amazon の URL.

[62] 嘉田勝. 論理学への数学的手引き. 1 月と 7 月, 11 2020. [41] の和訳.
Amazon の URL.

[63] 佐野勝彦, 倉橋太志, 薄葉季路, 黒川英徳, 菊池誠. 数学における証明と真理 様相論理と数学基礎論. 共立出版, 3 2016.
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320111486
Amazon の URL.

[64] 中島匠一. 集合・写像・論理 -数学の基本を学ぶ. 共立出版, 2 2012. https://www.kyoritsu-pub.co.jp/kenpon/bookDetail/9784320110182
Amazon の URL.

[65] 渕野昌. 実数の集合論の基礎の基礎, 10 2003. https://fuchino.ddo.jp/notes/set-th-of-reals-kiso-no-kiso.pdf.

[66] 齋藤正彦. 数学の基礎 集合･数･位相 (基礎数学 14). 東京大学出版会, 8 2002. http://www.utp.or.jp/book/b302226.html
Amazon の URL.

[67] 菊池誠. 不完全性定理. 共立出版, 10 2014. https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320110960
Amazon の URL.

[68] 静間荘司. 囚人と帽子のパズル もし囚人が無限にいたら, 6 2021. https://www.nippyo.co.jp/shop/magazine/8572.html
Amazon の URL.

[69] 内田伏一. 集合と位相 (数学シリーズ). 裳華房, 11 1986. https://www.shokabo.co.jp/mybooks/ISBN978-4-7853-1401-9.htm
Amazon の URL.

[70] 佐藤文広. 数学ビギナーズマニュアル 第 2 版. 日本評論社, 2 2014. https://www.nippyo.co.jp/shop/book/6447.html
Amazon の URL.

[71] 坪井明人. 数理論理学の基礎・基本. 牧野書店, 3 2012. Amazon の URL.

[72] 高木茂男. 光と影と赤い帽子. 数学史研究, Vol. 8, No. 2, 4 1970. http://www.wasan.jp/sugakusipdf/sugakusi45.pdf.

[73] 金沢養. 100 万人のパズル（上）. 白揚社, 1968. Amazon の URL.

[74] 鹿島亮. 数理論理学 現代基礎数学 15. 朝倉書店, 10 2009. https://www.asakura.co.jp/detail.php?book_code=11765
Amazon の URL.

[75] 戸田山和久. 論理学をつくる. 名古屋大学出版会, 10 2000. https://www.unp.or.jp/ISBN/ISBN4-8158-0390-0.html
Amazon の URL.

索 引