souji ノート

souji

aaaaaaaaaa

目 次

第I部

帽子パズルの研究

第II部

不完全性定理勉強会ノート

このノートは@souji04261 が作った, 学問の啓蒙について考える団体『裏難波大學』の「不完全性定理勉強会」という勉強会にて使用したものです. 勉強会の活動記録は Google スプレッドシートで管理していて, ここから見ることができます.
勉強会は数学科のゼミ形式で行い, 発表は基本的には souji が担当しました.
この勉強会の目標は不完全性定理の証明（の理解）であり, テキストは数理論理学の入門書である [3], またはその和訳である [4] をベースにしています. ただ時折他のテキストを参考にしたりしてます.
ノートの見方としては, 基本的には課題図書に沿って進めていますが, 節をスキップしたり, また行間を埋めたり, 数理論理学を学んだ立場から補足を入れたりしています. またそれに伴って, テキストにない定義や定理・補題, 記法の導入をしています. それらにも採番しているので, テキストにある定理の番号とはズレていることがあります. ただそれだとテキストと一緒に勉強するのは大変だと思い, テキストにも載っている定義・定理などは, テキストのどの定義・定理に対応してるか, そして原著（E）・和訳（K）のどのページに載っているか記載しています. このノートを参考にする方は, 是非テキストを購入して見比べてもらえればと思います.
また基礎的な数学知識の補足は, 自分用の基礎知識学習まとめノートの第 III 部（21 ページ）から引用しています.

第0章　導入

<u>Notation</u> 0.0.1（ジャーゴン (E:p1 2, K:p1 2)）.
数学用語になかで, このノートを通じて用いるものを 4 つ挙げる.

1. 定義や定理の主張の終わりを表す記号として ■ を, 証明の終わりを表す記号として □ を用いる[1].
2. 「○○ならば××である」という含意を表す文章を「○○　⇒ ××」と略記する [2]. 逆向きの含意を表すのに ⇐ を使うこともあります.
   「○○であるのは, ××であるとき　, かつそのときに限る」を「○○は××と同値である」と述べたり　, 記号 ⇔ を, 「○○ ⇔ ××」のように使ったりする　.
3. 「したがって」という言葉の代わりに省略記号 ∴ を, 「なぜなら」という言葉の代わりに省略記号 ∵ を用いる. とくに証明中に ∵ を用いる場合はぶら下げを使って, その理由部分を書く[3].
4. 関係を表す記号に斜線を重ねることでその関係の否定を表すことがある. 例えば「$x = y$」の否定として「$x \neq y$」や「$x \in y$」の否定として「$x \notin y$」と書く. このテキストで新たに導入する記号, 例えば $\models$ に対しても同様に $\not\models$ のようにして, このルールを適用する. ■

<u>Definition</u> 0.0.2（集合 (E:p1 2, K:p2)）.
ものの集まりのことを **set**（集合）という.
ここでいう「もの」のことを **member**（要素）または **element**（元）と呼ぶ. この「もの」のことをオブジェクトとも呼んだりする[4]. オブジェクト x, y が同一のものであるとき, $x = y$ と表す.
もの t が集合 A の要素であることを $t \in A$ で表す.
集合 A, B に対して

$$\text{どのオブジェクト } t \text{ についても, } t \in A \text{ であれば } t \in B \text{ であり, かつ } t \in B \text{ であれば } t \in A \text{ である}$$

（論理式で書けばたとえば $\forall t(\ t \in A \to t \in B\ \wedge\ t \in B \to t \in A\ )$ や, $\forall t(\ t \in A \Leftrightarrow t \in B\ )$ となる）をみたすとき, 集合 A, B は等しいと言い, $A = B$ で表す. ■

<u>Definition</u> 0.0.3（E:p2, K:p2）.
オブジェクト t と集合 A に対して, その要素が t か A に属する要素のみであるような集合を $A;t$ で表す.
のちに定義する和集合記号 ∪ を用いて定義しなおせば, $A;t \overset{\text{def}}{=} A \cup \{t\}$ となる. 「 $\overset{\text{def}}{=}$」という表記に関してはすぐ下の Notation を参照のこと[5]. ■

<u>Notation</u> 0.0.4（定義するための記号）.
もの（数学的対象）を定義するさいに「 $\overset{\text{def}}{=}$」[6], （数学的な）述語を定義するさいに「 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$」を用いる. 使い方としてはこれら

[1] 原書でも和訳でも ⊣ となっていますが, 私が普段使わないので □ にさせてもらうことにしました.

[2] 「○○ ⇒ ××」のような形の命題があったとき　, ○○の部分をこの命題の前件, ××の部分をこの命題の後件と読んだりします　. 原著でも和訳でも「... ならば... である」と前件も貢献も「...」で表現されていますが, 細かいことをいうと, これだと前件も後件も同じ主張が入るのかなと誘導しそうだと思い, 自分では○○と××を使ってみました　.

[3] ∴ は普段から使わないのでこのノートでも使わないと思います. それとは別に ∵ は普段から積極的に使っているので, ここに載せました. また ∵ を使ったときにどこからどこまでがその理由であるか, 理由が長ければ長いほど分かりにくくなるので, ぶら下げを使うことにしています. これの利点は証明を読む場合にその理由を読む必要がなければ, ぶら下げ部分全体を目で飛ばしてしまえばいいからです. これと同じで証明中の場合分けや, 同値証明を含意方向別に見やすくするため, つまり必要条件確認と十分条件確認を分けて見やすくするために, その各部分にぶら下げを使ったりしています.

[4] 個人的には「元」というと, その集合に演算が入っているようなイメージがあるので, 単なる集合の属するものに対しては「要素」を使っていきます.

[5] この $A;t$ という記法はここで初めて見た. どこまでメジャーなんだろうか.

[6] この記号はテキストでは導入されていないが, ほかの数学書でもよく使うし表現を簡略化するためにも積極的に使っていく. また「 $\overset{\text{def}}{=}$」の代わりに「:=」はよく使われている印象がある. ただこれは証明内での一時的な定義にも使用している人もいるような気がする.

に記号の左側に変数などを利用した新たなものや述語を記述し，右側に日常言語で書かれたそれらの定義を書く．ここまでの定義を使用例を出すと

- $A;t \overset{\text{def}}{=}$ その要素が t か A に属する要素のみであるような集合（Definition ??）
- $A = B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ どのオブジェクト t についても，$t \in A$ であれば $t \in B$ であり，かつ $t \in B$ であれば $t \in A$ である（Definition 0.0.2） ■

Proposition 0.0.5.
オブジェクト t と集合 A に対して，$t \in A \Leftrightarrow A;t = A$. ■

Proof 同値であることを示すので，$t \in A \Rightarrow A;t = A$ と $A;t = A \Rightarrow t \in A$ の 2 つを示す必要がある．

$t \in A \Rightarrow A;t = A$ の証明
$t \in A$ とすると，t はすでに A の要素であるため，$A;t$ のどの要素も A の要素であり t も含めてそれ以外の要素が含まれることがない．つまり $A;t = A$.

$A;t = A \Rightarrow t \in A$ の証明
$A;t = A$ とすると，集合 $A;t$ のどの要素も A の要素であるから，$A;t$ に属する t もまた A の要素でなくてはならない．つまり $t \in A$. □

Definition 0.0.6（空集合 (E:p2, K:p2 3)）.
要素を全く持たない集合を **empty set**（**空集合**）といい，$\emptyset$ で表す．集合 A が空であることは $A = \emptyset$ で表せ，（論理式で書けば例えば $\forall x(\ x \notin A\ )$ となる）空集合でない集合を **non empty** な（**空でない**）集合と呼ぶ. ■

Definition 0.0.7（外延的記法 (E:p2, K:p3)）.
オブジェクト $x, x_1, \ldots, x_n$ に対して，

1. x のみを要素にもつ集合を $\{x\}$ で表す.
2. $x_1, \ldots, x_n$ のみを要素にもつ集合を $\{x_1, \ldots, x_n\}$ で表す.
3. $\{0, 1, 2, \ldots\}$ は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を表し，$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ は整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を表す. ■

集合は要素の表現の順番を変えても同じ集合である.

Proposition 0.0.8（E:p2, K:p3）.
オブジェクト x, y に対して，$\{x, y\} = \{y, x\}$ である. ■

Proof 証明略. □

Definition 0.0.9（内包的記法 (E:p2, K:p3)）.
$\{\ x \mid \_x\_\ \}$ と書いて $\_x\_$ をみたす全てのオブジェクトの集合を表す[7] [8]. ■

Definition 0.0.10（部分集合 (E:p2, K:p3)）.
集合 A, B に対して集合 A の要素がすべて B の要素でもあるとき，A は B の **subset**（**部分集合**）であるといい，$A \subseteq B$ で表す．（論理式で書けば $\forall x(x \in A \to x \in B)$ となる） ■

[7] ここはテキストにならったのだけど，$\_x\_$ はかなり曖昧だと思いました．x に関する命題とか文と言ってしまえば，これから命題や文という単語を対象につけることがあるような当分野においては避けたい表現ではある（そして表現という単語も今後登場する………）．$\_x\_$ の代わりに $P(x)$ や $\varphi(x)$ などを使って，x を変数とする命題かのように表現することもありますが，それもこの場合は意図的に避けたのだろうと思います．避けた理由としては，今度は主張における変数とは何かを説明しなくてはならないからでしょうか.

[8] テキストでは「この書き方はめいっぱい柔軟に用いることにする」とあり，その使用例として $\{\ \langle m, n\rangle \mid m, n$ は $\mathbb{N}$ の要素で $m < n\}$ が挙げられています．論理記号を使って書けば $\{\ \langle m, n\rangle \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n\}$ となります．ここにおいて「柔軟」という言い方も曖昧だと思います．定義にある書き方になぞるならこの集合は $\{\ x \mid \exists m, n \in \mathbb{N}(\ x = \langle m, n\rangle \wedge m < n\}$ と書くべきでしょうか．ちなみに [5] では内包的記法における $\mid$ の左に変数一文字ではなく，いくつかの変数を用いた表現が使われている記法を，内包的記法と区別して置換型記法と呼んでいたりします．たしかにこの 2 つの記法は同じではないので，区別する必要があると思われます（普通の数学書でそう区別はしないことは多いと思うが）．なのでここの柔軟さはかなり曖昧に思えました.

Proposition 0.0.11（(E:p2, K:p3)）．
$\emptyset$ はどんな集合に対しても部分集合となる． ■

Proof 証明略． □

Definition 0.0.12（べき集合 (E:p2, K:p3)）．
集合 A に対して A のすべての部分集合からなる集合を A の **power set**（べき集合）とよぶ, $\mathcal{P}(A)$ で表す．より正確には $\mathcal{P}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, X \mid X \subseteq A \,\}$. [9]. ■

Example 0.0.13（E:p3, K:p4）．
$\mathcal{P}(\emptyset) \ = \ \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) \ = \ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ■

Definition 0.0.14（和集合と共通部分 (E:p3, K:p4 5)）．
A, B を集合, $\mathcal{A}$ を全ての要素が集合であるような集合とする[10] [11]. さらに各自然数 n に対して集合 A_n が定まっているとする．

1. $A \cup B \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid x \in A$ または $x \in B \,\}$（$= \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$）とし, これを A と B の **union**（和集合）という．
2. $A \cap B \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid x \in A$ かつ $x \in B \,\}$（$= \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$）とし, これを A と B の **intersection**（共通部分）という．
3. $A \cap B = \emptyset$ であるとき, A と B は **disjoint**（交わらない）という．$\mathcal{A}$ のどの 2 個の要素も交わらないとき, $\mathcal{A}$ は **pairwise disjoint**（互いに交わらない）という．
4. $\bigcup \mathcal{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid x$ は A のいずれかの要素に属する $\}$（$= \{\, x \mid \exists A(x \in A \wedge A \in \mathcal{A}) \,\}$）とし, これを $\mathcal{A}$ の **union**（和集合）という．
5. $\bigcap \mathcal{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid x$ は A のすべての要素に属する $\}$（$= \{\, x \mid \forall A(x \in A \wedge A \in \mathcal{A}) \,\}$）とし, これを $\mathcal{A}$ の **intersection**（共通部分）という．
6. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup \{\, A_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ とする．これを単に $\bigcup_n A_n$ と表すこともある[12]. ■

Example 0.0.15（E:p3, K:p4 5）．
t をオブジェクト, A, B を集合, $\mathcal{A} = \{\{0,1,5\}, \{1,6\}, \{1,5\}\}$ という集合族とする．

1. $A; t = A \cup \{t\}$.
2. $\bigcup \mathcal{A} = \{0, 1, 5, 6\}$.
   $\bigcap \mathcal{A} = \{1\}$.
3. $A \cup B = \bigcup \{A, B\}$.
4. $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$. ■

Definition 0.0.16（順序対 (E:p3 4, K:p5)）．
オブジェクト $x, y, z, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ に対して

1. $\langle x, y \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$ とし, これを x と y の **ordered pair**（順序対）という[13]. 順序対 $\langle x, y \rangle$ における x, y をこの順序対の成分といい, とくに x を第一成分, y を第二成分と呼んだりする[14].
2. $\langle x, y, z \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ とし, より一般的に $n > 1$ に対して $\langle x_1, \ldots, x_{n+1} \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle$ と帰納的に定義する．

[9] テキストでは $\mathcal{P}A$ だが個人的には $\mathcal{P}(A)$ が好きなのでこちらを使っていくことにしました．
[10] テキストではいきなりこんな集合が登場したけど, なんで「集合族」のような語を用意しなかったのだろうか．
[11] テキストでは集合でも集合族でも単なる A で表現していた．個人的には集合族には記号の衝突が起こらない（つまり理論を展開するさいに必須な記号と被らない）かぎり, 集合族には筆記体（カリグラフィーとどう違うのか分からないけれども………）を使うのが好み．
[12] これは添え字付き集合族の和集合ともいえるものだけど, なぜ添え字付き集合族の共通部分は定義しなかったのだろう（単に今後使わないだけ？）．
[13] これは順序対の Kuratowski 流の定義と言われています．他の流儀などは Wikipedia『順序対』[1] も参考に．
[14] 定義されていなかった言葉遣いだったのでなんとなく定義しておいた．

3. とくに $\langle x \rangle = x$ と定義する[15]. ■

Definition 0.0.17（有限列 (E:p4, K:p5)）.
集合 A に対して

1. S が A の要素からなる **finite sequence**（有限列）（あるいは **string**（列））であるとは, ある正の整数 n について $S = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ で各 x_i が A の要素であるときとする．（論理式で書くと $\exists n \in \mathbb{Z}(\ n > 0\ \wedge\ x_1, \ldots, x_n \in A\ \wedge\ S = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle\ )$）
またこのときの n を有限列 A の**長さ**とよぶ[16].

2. A の要素からなる有限列 $S = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ に対し, $1 \leq k \leq m \leq n$ な k, m でもって $\langle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m \rangle$ な形の有限列を S の **segment**（区間）という．とくに $k = 1$ な区間を S の **initial segment**（始切片）といい, $m \neq n$ な始切片を S の **proper initial segment**（真の始切片）という． ■

Proposition 0.0.18（E:p4, K:p6）.
オブジェクト $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ に対して $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ ならば, $1 \leq i \leq n$ な各 i について $x_i = y_i$. ■

Proof　示すべきことを論理式で書くと

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(\ \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\,(\ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle\ \to\ \forall i(\ 1 \leq i \leq n \to x_i = y_i\ )\ )\ )$$

よって $n \in \mathbb{N}$ について数学的帰納法を用いて証明する．

（Basis）
その定義より $\langle x \rangle = x$ だから, $\langle x_1 \rangle = \langle y_1 \rangle$ ならば $x_1 = y_1$ である．

（Induction step）
n のときに成立しているとする．任意に取った $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ に対して, $\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \rangle$ だったとする．一般的な順序 n 個組の定義から

$$\begin{aligned} \langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle &= \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle \\ \langle y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \rangle &= \langle \langle y_1, \ldots, y_n \rangle, y_{n+1} \rangle \end{aligned}$$

であり, 今順序対の定義から第一成分・第二成分同士が等しいので,

$$\begin{aligned} \langle x_1, \ldots, x_n \rangle &= \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \\ x_{n+1} &= y_{n+1} \end{aligned}$$

今に任意に取られた n 個の要素たちについては

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle\ \to\ \forall i(\ 1 \leq i \leq n \to x_i = y_i\ )$$

が成立しているので, $x_{n+1} = y_{n+1}$ とまとめると, $\forall i(\ 1 \leq i \leq n+1 \to x_i = y_i\ )$ となるので, $n+1$ の場合も OK. □

Lemma 0.0.19（E:p4 LEMMA 0A, K:p6 補題 0A）.
$\langle x_1, \ldots, x_m \rangle = \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+k} \rangle$ ならば $x_1 = \langle y_1, \ldots, y_{k+1} \rangle$. ■

Proof　示すべきことを論理式で書けば

$$\forall k \in \mathbb{N}\,\big(\ \forall m \in \mathbb{N} \forall x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{m+k}\big(\ \langle x_1, \ldots, x_m \rangle = \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+k} \rangle\ \to\ x_1 = \langle y_1, \ldots, y_{k+1} \rangle\ \big)\ \big)$$

となる．任意に $k \in \mathbb{N}$ をとる．このあとの主張に対して $m \in \mathbb{N}$ についての数学的帰納法を用いる．

[15] これの妥当性として, すぐ後ろで $\langle x, y \rangle$ とは x, y とオブジェクトが並んだ列と見なすので, $\langle x \rangle$ とは $x1$ つが並んでいる初項のみの列と思えば $\langle x \rangle = x$ であるほうが自然に見える．また Kuratowski 流の定義によれば $\langle x, x \rangle = \{\{x\}\}$ となりこれと単なる x とを区別しやすくなる．

[16] テキストにおいて写像における有限列の定義について言及しているが, これは例えば長さ n の A の有限列 S は $\{1, \ldots, n\}$ から A への写像として定義できる．

（Basis）

$m=1$ を仮定に代入すると $\langle x_1\rangle = \langle y_1, y_2, \ldots, y_{1+k}\rangle$ となり, 定義より $\langle x_1\rangle = x_1$ から成立.

（Induction step）

m のときに成立しているとする. $\langle x_1, \ldots, x_{m+1}\rangle = \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+1+k}\rangle$ を仮定する. 一般順序組の定義から

$$\begin{aligned}\langle x_1, \ldots, x_{m+1}\rangle &= \langle\langle x_1, \ldots, x_m\rangle, x_{m+1}\rangle \\ \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+1+k}\rangle &= \langle\langle y_1, \ldots, y_{m+k}\rangle, x_{m+k+1}\rangle\end{aligned}$$

つまり各第一成分が等しいということなので

$$\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_{m+k}\rangle$$

が分かり, m のときに成立していたことから $x_1 = \langle y_1, \ldots, y_{k+1}\rangle$ であることが分かる. □

テキストでは例えとして「たとえば, A は集合で, A のどの要素も他の要素からなる有限列とは一致しないと仮定します. そのとき, $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ であって, x_i や y_i それぞれが A に属する場合, 上の補題によって $m=n$ です. さらに, 結果的に, それぞれの i について $x_i = y_i$ となります.」とありますが個人的に分かりづらかったので具体例を挙げる.

Example 0.0.20.
集合 A を $A=\{0,1,\langle 2,3\rangle\}$ とすると, この A の要素で（集合として）等しくなるようなどんな 2 つの n 個組を作っても, それが等しい限りはその長さも構成成分の順番も等しくなる.
逆に $A=\{0,1,\langle 0,1\rangle,\langle 0,1,0\rangle\}$ として, A の有限列 S_1, S_2 を

$$\begin{aligned}S_1 &= \langle\langle 0,1,0\rangle,1\rangle \\ S_2 &= \langle\langle 0,1\rangle,0,1\rangle\end{aligned}$$

とすると, この 2 つは（集合として）$S_1 = S_2$ ではあるが, S_1 の長さは 2 で S_2 の長さは 3, よって長さは一致せず, ゆえに構成成分も一致しない. ■

ここで有限列の長さの定義の曖昧さが少し影響てくる. たとえば Example 0.0.20 の S_1 は $\langle\langle 0,1,0\rangle,1\rangle = \langle\langle 0,1\rangle,0,1\rangle$ でもあるから, これの長さとして 2 か 3 のどちらを採用すればよいか混乱する. テキストに書いてある注意事項のように写像で定義すれば問題は解決できる. 関数の定義の先取りにはなってしまうが, たとえば S_1 を $S_1\colon \{1,2\}\to A$ として, $S_1(1)=\langle 0,1,0\rangle$, $S_1(2)=1$ とすればよい. すると S_1 と S_2 はそもそも定義域が違う別の関数となるので混乱がなくなる. しかしながら 1 章以降は $\{0,1,\langle 0,1\rangle,\langle 0,1,0\rangle\}$ のような集合から有限列を構成したりはしない. つまり $\{0,1,\langle 2,3\rangle\}$ のような「どの要素も他の要素からなる有限列とは一致しない」集合を扱うときには, 長さの定義に曖昧さがでることはないので特に長さの定義を意識する必要はないということである. 最初にこれの注意に該当することは Definition **??**（**??**ページ）下の注意事項 **??**があてはまる.

Definition 0.0.21（直積集合 (E:p4, K:p6)）.
集合 A, B と $n>1$ な $n\in\mathbb{N}$ に対し

1. $A\times B \overset{\text{def}}{=} \{\,\langle a,b\rangle \mid a\in A \text{ かつ } b\in B\,\}$ とし, これを A と B の **Cartesian product**（直積集合）という.
2. $A^n \overset{\text{def}}{=} A^{n-1}\times A$ と帰納的に定義する. たとえば $A^3=(A\times A)\times A$ である. ■

Definition 0.0.22（関係 (E:p4 5, K:p6 7)）.
集合 A, B, R と $n>0$ な $n\in\mathbb{N}$ に対し

1. R のすべての要素が順序対であるとき, R を **relation**（関係）という.
2. 関係 R に対して $\mathrm{dom}(R) \overset{\text{def}}{=} \{\,x \mid \text{ある } y \text{ について } \langle x,y\rangle\in R\,\}$ とし, これを関係 R の **domain**（定義域）という.
   さらに $\mathrm{ran}(R) \overset{\text{def}}{=} \{\,y \mid \text{ある } x \text{ について } \langle x,y\rangle\in R\,\}$ とし, これを関係 R の **range**（値域）という.
   さらに $\mathrm{fld}(R) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{ran}(R)$ とし, これを関係 R の **field**（領域）という[17] [18].

[17] テキストでは $\mathrm{dom}(R), \mathrm{ran}(R), \mathrm{fld}(R)$ ではなく $\mathrm{dom}\,R, \mathrm{ran}\,R, \mathrm{fld}\,R$ と「()」が付いていないですが, 個人的な好みから「()」をつけることにします.
[18] $\mathrm{fld}(R)$ というものはここで初めて見た.

3. $R \subseteq A^n$ であるとき, そんな R を A 上の n 項関係という.

4. $B \subseteq A$ かつ R が A 上の n 項関係であるとき, $R \cap B^n$ を R の B への **restriction**（制限）という. ■

Example 0.0.23（E:p4 5, K:p6 7）.
集合 $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{N}^2$ に対し

1. $R_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ とおくと, R_1 は 0 から 3 までの数の間の大小関係となる. さらに $\mathrm{dom}(R) = \{0,1,2\}$, $\mathrm{ran}(R) = \{1,2,3\}$, $\mathrm{fld}(R) = \{0,1,2,3\}$ となる.

2. $R_2 = \{\, \langle m,n\rangle \mid m < n \,\}$ とおくと, R_2 は $\mathbb{N}$ 上の大小関係となり, $B = \{0,1,2,3\}$ とすれば $R_1 = R_2 \cap B^2$ となるから R_1 は R_2 の B への制限である. ■

Definition 0.0.24（写像 (E:p5, K:p7 8)）.
集合 A, B と関係 F に対して

1. F が「$\mathrm{dom}(F)$ のそれぞれの要素 x について, $\langle x,y\rangle \in F$ なる y がただひとつ存在する」(論理式で書くと $\forall x \in \mathrm{dom}(F)\exists! y(\langle x,y\rangle \in F)$）をみたすとき, F は **function**（写像）であるという[19]. このとき $x \in \mathrm{dom}(F)$ に対して一意的に存在している y のことを $F(x)$ で表し, F の x における **value**（値）という.

2. 写像 F が $\mathrm{dom}(F) = A$ かつ $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$ をみたすとき, F は A を B に写すといい, $F\colon A \to B$ で表す[20].

3. $F\colon A \to B$ であるとき, $\mathrm{ran}(F) = B$ をみたすとき, F は A から B への **surjection**（全射）[21] であるといい, $F\colon A \xrightarrow{\text{onto}} B$ で表す[22].
「$\mathrm{ran}(F)$ のそれぞれの要素 y について, $\langle x,y\rangle \in F$ をみたす x がただひとつ存在する」(論旨式で書くと $\forall y \in \mathrm{ran}(F)\exists! x(\langle x,y\rangle \in F)$)[23] をみたすとき, F は A から B への **injection**（単射）[24] であるといい, $F\colon A \xrightarrow{\text{1-1}} B$ で表す[25].
全射かつ単射な写像を **bijection**（全単射）といい[26], $F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ で表す[27].

4. オブジェクト x, y とその順序対 $\langle x,y\rangle$ と写像 F に対して, $\langle x,y\rangle \in \mathrm{dom}(F)$ であるとき $F(\langle x,y\rangle)$ を単に $F(x,y)$ で表す. より一般的に $F(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ を $F(x_1,\ldots,x_n)$ で表す[28].

5. $F = \{\, \langle x,x\rangle \mid x \in A \,\}$ であるとき, F を A 上の **identity function**（恒等写像）といい, この F を id_A で表す[29]. ■

Definition 0.0.25（演算 (E:p5, K:p8)）.
集合 A, B と関係 f, g に対して

1. $f\colon A^n \to A$ であるとき f を A 上の ***n*-ary operation**（***n*** **項演算**）であるという.

2. A 上の n 項演算 f と $B \subseteq A$ な集合 B に対して, $g = f \cap (B^n \times A)$ をみたす g を f の B への **restriction**（制限）という[30].

---

[19] 個人的には map は写像, function は関数と訳すのが好みですが, ここはテキストとその和訳に合わせて function を写像と訳すことにします.
[20] これを見たときもしかしたら $\mathrm{ran}(R)$ の部分集合関係に合わせて $\mathrm{dom}(F) \subseteq A$ としなくてはいいのかと, 疑問に思う人もいるかもしれません. もしそうすると定義域に対応要素のない要素が存在することを許してしまう. それを許したうえで $\mathrm{dom}(F) = A$ なる写像に**全域写像**と名付ける流儀もあります. たとえば [5] では $\mathrm{dom}(F) \subseteq A$ かつ $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$ なるものを「A から B への部分写像」, F による x の値が存在しないとき「$F(x)$ は未定義」といい, 部分写像が $\mathrm{dom}(F) = A$ を満たした場合にそれを全域写像もしくは単に写像と呼んでいます.
[21] このテキストでは「B 全体へ写す」と表現しています. それならまだしも「上への写像」という言い方もありますが, これは何が「上」なのか個人的にイメージしづらく使わないようにしています.
[22] これはテキストでは導入されていなかったけれど, あると便利なので導入しました.
[23] ここでの単射の定義は初見では違和感がありました. なぜなら普段私は $F \subseteq A \times B$ かつ $\forall a \in A \exists! b \in B(\langle a,b\rangle \in F)$ をみたすものを, A から B への写像とよび $F\colon A \to B$ と表し, $\mathrm{ran}(F) = B$ としていたためです. ここでの定義ならこれでよいと思われるが, 個人的にはやはり「$\forall x_1, x_2, y(\, \langle x_1, y\rangle \in F \wedge \langle x_2, y\rangle \in F \;\to\; x_1 = x_2 \,)$」もっと分かりやすくして「$\forall x_1, x_2(\, F(x_1) = F(x_2) \;\to\; x_1 = x_2 \,)$」か,「$\to$」部分で対偶をとった「$\forall x_1, x_2(\, x_1 \neq x_2 \;\to\; F(x_1) \neq F(x_2) \,)$」の方が好みです.
[24] このテキストでは「F が 1 対 1 である」と表現している. しかし全単射に対してこの言い方を使うテキストもあるし, 個人的には全単射の方が 1 対 1 なるイメージを持っているためここでは「単射」を使うことにしました.
[25] これも上に同様.
[26] テキストでは定義されていなかったので用意しておいた.
[27] 同上.
[28] つまり普段 2 変数関数で使う記法を導入したことになるのだろう.
[29] テキストでは Id と書いているが「A 上の」というからにはせめて Id_A と書く方が好き. そして Id より id が好きなのでこのように定義しました.
[30] この g のことを $f \restriction B$ や $f|_B$ で表すことがあります. 個人的には $f \restriction B$ が好き（初めて見た記法がこれだったからという理由で）.

3. A 上の n 項演算 f に対して, 集合 $B \subseteq A$ が f について閉じているとは, どの $b_1, \ldots, b_n \in B$ についても $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ をみたす（論理式で書くと $\forall b_1, \ldots, b_n \in B\big(\ f(b_1, \ldots, b_n) \in B\ \big)$）ときをいう. ■

Example 0.0.26（E:p5, K:p8）.
$S_1 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ と $S_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して

1. S_1 が任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $S_1(m, n) = m + n$ をみたすとすると, S_1 は $\mathbb{N}$ 上の加法という $\mathbb{N}$ 上の 2 項演算となる.
2. S_2 が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $S_2(n) = n + 1$ をみたすとすると, S_2 は $\mathbb{N}$ 上の直後の自然数を与えるという $\mathbb{N}$ 上の 1 項（単項）演算となる[31].
3. $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対し $p(r_1 + r_2) = r_1 + r_2$ をみたすとすると, P は $\mathbb{R}$ 上の加法という $\mathbb{R}$ 上の 2 項演算となり, 1. の S_1 は P の $\mathbb{N}$ への制限, つまり $S_1 = P \cap \mathbb{N}^3$ となっている. ■

Example 0.0.27（E:p5, K:p8）.
集合 A, B に対して

1. f を A 上の n 項演算, $B \subseteq A$ とし, g を f の B への制限とする. g が B 上の n 項演算となることと, B が f について閉じていることは同値である.
2. A 上の恒等写像 id_A は（何もしない・作用しないという）A 上の単項演算である. ■

Proof 1. のみ示す. 主張「g が B 上の n 項演算となること」を (1),「B が f について閉じている」を (2) とおいて, (1) $\Rightarrow$ (2) と (2) $\Rightarrow$ (1) の 2 つを示す.

(1) $\Rightarrow$ (2)
f の B への制限 g が今 B 上の n 項演算であることから, $\mathrm{dom}(g) = B^n$ かつ $\mathrm{ran}(g) \subseteq B$ をみたしている, もっというと $g = f \cap B^{n+1} = f \cap (B^n \times B)$ をみたしている, これはつまり (2) をみたしていることになる.

(2) $\Rightarrow$ (1)
B が f について閉じている, つまり $g = f \cap B^{n+1} = f \cap (B^n \times B)$ となっているので, $\mathrm{dom}(g) = B^n$ かつ $\mathrm{ran}(g) \subseteq B$ をみたしている, これはつまり (1) をみたしていることになる. □

普段閉じている演算ばかりを見ているので, 逆に閉じてない演算とはどんな例があるかという議論があったのでここにまとめる.
$\mathbb{R}$ 上の 2 項演算 $+, -, \times$ にて $\mathbb{R}$ は閉じている. 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ とすると, $\mathbb{Q}$ 上のこれらの演算は $\mathbb{R}$ の演算の $\mathbb{Q}$ への制限となる. そして $\mathbb{Q}$ についても, そして $\mathbb{Z}$ についても閉じている. しかし演算 $-$ は $\mathbb{N}$ については閉じていない.
$\div$ についてはそもそもどう定義するか（0 で割ることをどう避けるか）によって議論が変わりそうであるが, どのように定義したとしても $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ については閉じているが, $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ については閉じていないであろう.

Definition 0.0.28（同値関係と順序関係 (E:p5 6, K:p8 9)）.
集合 A と関係 R に対して

1. R が A 上で **reflexive**（反射的）とは, 任意の $x \in A$ について $\langle x, x \rangle \in R$ であることという.
2. R が **symmetric**（対称的）とは, 任意の x, y に対して $\langle x, y \rangle \in R$ ならば $\langle y, x \rangle \in R$ であることという.
3. R が **transitive**（推移的）とは, 任意の x, y, z に対して $\langle x, y \rangle \in R$ かつ $\langle y, z \rangle \in R$ ならば $\langle x, z \rangle \in R$ であることという.
4. R が A 上で **trichotomy**（三分律）をみたすとは, 任意の x, y に対して $\langle x, y \rangle \in R,\ x = y,\ \langle y, x \rangle \in R$ のいずれか 1 つをみたすことという.
5. R が A 上の **equivalence relation**（同値関係）であるとは, R が A 上の 2 項演算でかつ A 上で反射的・対称的・推移的であるときをいう.

[31] これはよく後者関数と呼ばれています.

6. R が A 上の **ordering relation**（順序関係）であるとは, R が A 上の 2 項演算でかつ推移的であり A 上で三分律をみたすときをいう. ■

Definition 0.0.29（**同値類 (E:p6, K:p9)**）**.**
集合 A 上の同値関係 R と $x \in A$ に対して $[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \mid \langle x, y\rangle \in R \,\}$ とし, これを x の **equivalence class**（**同値類**）という. さらに集合 $\{\, [x] \mid x \in A \,\}$ を $A\backslash R$ で表し, 集合 A の同値関係 R による **quotient set**（**商集合**）という[32]. ■

Proposition 0.0.30（**E:p6, K:p9**）**.**
集合 A 上の同値関係 R に対して, A の各要素の同値類全体は A の分割となる. ■

Proof $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が A の分割であるとは, $\mathcal{A}$ が互いに素でかつ $\bigcup \mathcal{A} = A$ をみたすこととし, これを $\{\, [x] \mid x \in A \,\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, つまり先に定義した $A\backslash R$ に対してこれを示す.

$\mathcal{A}$ が互いに素であること

任意に $X \neq Y$ な $X, Y \in A\backslash R$ をとると, それぞれに対し $x, y \in A$ が存在して $X = [x],\ Y = [y]$ となっている. $[x] \cap [y] = \emptyset$ であることを示すため, $z \in [x] \cap [y]$ なる z が存在したとする. $z \in [x]$ より $\langle x, z\rangle \in R$, 同様に $\langle y, z\rangle \in R$. $\langle y, z\rangle \in R$ と R が A 上の同値関係より対称的であることから $\langle z, y\rangle \in R$. さらに $\langle x, z\rangle \in R$ と R が推移的であることから $\langle x, y\rangle \in R$.
ここで $\forall a, b \in A(\ \langle a, b\rangle \in R\ \rightarrow\ [a] = [b]\ )$ である. （この証明には必要ないが $\forall a, b \in A(\ [a] = [b]\ \rightarrow\ \langle a, b\rangle \in R\ )$, つまり $\forall a, b \in A(\ \langle a, b\rangle \in R\ \Leftrightarrow\ [a] = [b]\ )$ も示せる）

> ∵ 任意に $a, b \in A$ をとり $\langle a, b\rangle \in$ とする. $[a] \subseteq [b]$ を示すためさらに任意に $c \in [a]$ をとる. $\langle a, b\rangle \in R$, $\langle a, c\rangle \in R$ より R が対称的かつ推移的なので $\langle b, c\rangle \in R$, つまり $c \in [b]$. 同様にして $[b] \subseteq [a]$ であることもわかる. つまり $[a] = [b]$.

よって $\langle x, y\rangle \in R$ から $[x] = [y]$ であるが, これは仮定の $[x] \neq [y]$ に矛盾.

$\bigcup A\backslash R = A$ であること

$\bigcup A\backslash R \subseteq A$ であることは明らか. $A \subseteq \bigcup A\backslash R$ を示すため任意に $x \in A$ をとる. R が A 上反射的であることから $x \in [x]$, つまり $[x] \neq \emptyset$ で, そして $[x] \subseteq A\backslash R$ より $x \in \bigcup A\backslash R$. □

ここからはテキスト通り, 集合の濃度の話に移る（可算までしかでてこないが）.

Notation 0.0.31（**E:p6, K:p9**）**.**
自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ で表す. ■

ここに「個々の自然数そのものを集合を使って定義する方法もあります」とあって, テキストにある通り, それに触れている○○節を見ると, ZF 公理系からの数学展開でよくやる Neumann 流の順序数の定義の仕方を使うものだった.

Definition 0.0.32（**E:p6, K:p9**）**.**
集合 A に対して

1. 集合 A が **finite**（**有限**）であるとは, ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 写像 f があって, f が全単射になっていることをいう（論理式で書くと $\exists n \in \mathbb{N} \exists f(\ f \colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \{0, 1, \ldots, n-1\}\ )$）.
2. 集合 A が **infinite**（**無限**）であるとは, 有限でないときをいう. つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ への全単射写像が存在しないことをいう. 言い換えればどんな A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ の写像も全単射にならないともいえる[33].

[32] テキストでは定義してなかったですが, すぐ下の補題を示すときに記法として欲しかったので定義しておきました.
[33] よくよく見てみれば「無限」であるということはキチンと定義されていなかったので追加しました. 一般的には無限とは有限でないという定義なので, ここでいう有限の定義の否定をその定義とすることにしました.

3. 集合 A が **at most countable**（高々可算）であるとは，A から $\mathbb{N}$ への単射写像が存在するこという．
4. 集合 A が **countable**（可算）であるとは，A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在するこという[34]． ■

Proposition 0.0.33（E:p6, K:p9）．
有限集合は高々可算． ■

Proof A を有限集合とすると，その定義より A に対し存在する $n \in \mathbb{N}$ と $f\colon A \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ をそれぞれ固定します．$f_{\mathbb{N}}\colon A \to \mathbb{N}$ を $f_{\mathbb{N}}(a) = f(a)$ で定義すれば，$f_{\mathbb{N}}$ は確かに A から $\mathbb{N}$ への写像であり，f が単射であることから $f_{\mathbb{N}}$ が単射であることも明らかである． □

Proposition 0.0.34（E:p6, K:p9）．
高々可算な無限集合 A に対して A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在する． ■

Proof 高々可算な無限集合 A に対して，その定義から存在する単射写像 $f\colon A \to \mathbb{N}$ を 1 つ固定する．f は全射でない，つまり $\mathrm{ran}(f) \neq \mathbb{N}$ とする．$n_i \in \mathbb{N}$ を $\mathrm{ran}(f)$ の中での i 番目に小さい数，つまり $n_0 = \min \mathrm{ran}(f)$, $n_{i+1} = \min(\ \mathrm{ran}(f) \setminus \{n_0, \ldots, n_i\}\ )$ と帰納的に定義する．ここで A が無限であることと f が単射であることから，$\mathrm{ran}(f)$ は無限集合なので，n_i をとる操作が有限で止まったりはしないことに注意．
そして $\mathrm{ran}(f) = \{\, n_i \mid i \in \mathbb{N}\,\}$ である．$g\colon \mathbb{N} \to A$ を $g(i) = f^{-1}(n_i)$ で定めると，g はその作り方から全単射であり，$f'\colon A \to \mathbb{N}$ を $f'(a) = g^{-1}(a)$ で定めると，これもその作り方から A から $\mathbb{N}$ への全単射である[35]． □

Theorem 0.0.35（E:p6 THEOREM 0B, K:p10 定理 0B）．
A を高々可算集合とするとき，A の要素からなる有限列全体の集合も高々可算． ■

Proof S を A の要素からなる有限列全体の集合とすると，有限列の定義である Definition 0.0.17（10 ページ）から $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{n+1}$ となる．A が高々可算かつ無限集合であることから Proposition 0.0.34（15 ページ）より存在する，A から $\mathbb{N}$ への全単射 f を 1 つ固定しておく．S から $\mathbb{N}$ への写像 g を，$s = \langle a_0, \ldots, a_m\rangle \in S$ に対して

$$g(s) \ = \ \min\{\, 2^{f(b_0)+1} \cdot 3^{f(b_1)+1} \ldots p_n^{f(b_n)+1} \mid s = \langle b_0, \ldots, b_n\rangle\,\}$$

で定める．ここで p_i は i 番目の素数を表しているとする．
この g は well-defined である．

$\because$ 単純に g を $g(s) = 2^{f(a_0)+1} \cdot 3^{f(a_1)+1} \ldots p_m^{f(a_m)+1}$ で定めれば，確かにこちらは有限列を素数を使ってコーディングしたようなものなので分かりやすい．しかし A 次第ではこの定義では写像にならないことになる．例えば Example 0.0.20（11 ページ）にだした $A = \{0, 1, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle\}$ と，その要素からなる以下のような 2 つの有限列

$$\begin{aligned} s_1 &= \langle\langle 0,1,0\rangle, 1\rangle \\ s_2 &= \langle\langle 0,1\rangle, 0, 1\rangle \end{aligned}$$

について考える．そして写像 g' を $g'(s) = 2^{f(a_0)+1} \cdot 3^{f(a_1)+1} \ldots p_m^{f(a_m)+1}$ としておく．A から $\mathbb{N}$ への単射写像を

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\langle 0,1\rangle) = 2,\ f(\langle 0,1,0\rangle) = 3$$

---

[34] テキストではここでいう「高々可算」を「可算」と呼んでいます．つまり「高々可算」と「可算」を区別してません．個人的には高々可算は便利な言葉だと思っているのと，他のノートとの整合性をとるためにも高々可算と可算は区別しておこうと思います．ちなみに高々可算の「高々」は数学特有の言葉として説明しているものもあります．もし「高々有限」をこれと同じように定義すると，$\exists n \in \mathbb{N} \exists f(\ f\colon A \xrightarrow{\text{1-1}} \{0, 1, \ldots, n-1\}\ )$ となるでしょう．なので個別に「高々〇〇」を定義することも可能でしょうし，「高々」は特有の言葉遣いとして説明する方法もありそうです．「高々」を説明しているものとしては，例えば [2] や [6] の 37 ページなどです．

[35] テキストの口語的な説明の方が分かりやすいとは思ったけれど，あえて厳密に書くとこんな感じなのかなと．

で定めると,

$$\begin{aligned} g'(s_1) &= 2^{f(\langle 0,1,0\rangle)+1}3^{f(1)+1} &= 2^4 3^2 \\ g'(s_2) &= 2^{f(\langle 0,1\rangle)+1}3^{f(0)+1}5^{f(1)+1} &= 2^3 3^1 5^2 \end{aligned}$$

となり $g'(s_1) \neq g'(s_2)$ であるが, 集合としては $s_1 = s_2$ であるため $g'(s_1) = g'(s_2)$ とならなくてはならず, 口語的には写る先が 1 つに定まらないとも言えて, これは g' が写像としては矛盾している.
なので A がこのような集合になっている可能性を考えると, 上のように定義しておく必要がある. 実際有限列 s_1, s_2 が上のように列として表現すると異なるが, 集合としては同じものだった場合でも

$$\begin{aligned} g(s_1) &= \min\{\, g'(s) \mid s \in S \wedge s = s_1 \,\} \\ &= \min\{\, g'(s) \mid s \in S \wedge s = s_2 \,\} \\ &= g(s_2) \end{aligned}$$

となって（矛盾しないし）写像としては問題はない.

改めて上記ぶら下げ内にある g' を使って $g(s) = \min\{\, g'(s') \mid s' \wedge s' = s \,\}$ や $g(s) = \min g'[\{\, s' \mid s' \wedge s' = s \,\}]$ と書くことにする. 写像 g は単射である.

$\because$ 任意に $s_1 \neq s_2$ なる $s_1, s_2 \in S$ をとり, $g(s_1) = g(s_2)$ だったとする. すると $\{ s \in S \mid s = s_1 \} \neq \{ s \in S \mid s = s_2 \}$ である. $g(s_1) = g(s_2)$ より $\min g'[\{\, s \in S \mid s = s_1 \,\}] = \min g'[\{\, s \in S \mid s = s_2 \,\}]$ だから, $n \in g'[\{\, s \in S \mid s = s_1 \,\}] \cap g'[\{\, s \in S \mid s = s_2 \,\}]$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在することになる. そんな n に対して $g(s) = n$ かつ $s = s_1$ かつ $s = s_2$ なる $s \in S$ が存在することになる. するとこの s を介して $s_1 = s_2$ となるが, これは矛盾.

よってそんな単射写像 g の存在から S は高々可算である[36]. □

ここから **tree**（木）についての話題が始まるが, 今後どれほど大事なのか分からないので, 一旦飛ばすことにする.

続いて選択公理の話題が入る. テキストでは「問題となる定理を可算な言語の場合に制限することで, 選択公理の使用はたいてい回避できます」とある.

Definition 0.0.36（**E:p7 , K:p12**）**.**
集合族 $\mathcal{C}$ が **chain**（鎖）であるとは, 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $X \subseteq Y$ か $Y \subseteq X$ のいずれかが成立することをいう. ■

Lemma 0.0.37（**E:p7 ZORN'S LEMMA, K:p12** ツォルンの補題）**.**
集合族 $\mathcal{A}$ が

$$\text{任意の } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ が鎖ならば } \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$$

を満たすとき, $\mathcal{A}$ には超集合関係にて極大な要素 A が存在する, つまり A はどの $X \in \mathcal{A}$ に対しても $A \subsetneq X$ となることはない. ■

0.1 基数

Definition 0.1.1（**E:p8 , K:p12**）**.**
集合 A, B に対して A から B への全単射写像が存在するとき, A と B は **equinumerous**（対等）であるといい, $A \sim B$ で表

[36] A が有限であれ無限であれ S は無限集合になるので, Proposition 0.0.34（15 ページ）を使えば S は高々可算でなく, 真に可算であることも示すことができる.

す. ■

<u>Proposition</u> 0.1.2（E:p8 , K:p12）.
$\mathbb{N}$ と整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は対等である. ■

<u>Proposition</u> 0.1.3（E:p8 , K:p12）.
任意の集合 A, B, C に対して以下の 3 つが成立する.

1. $A \sim A$.
2. $A \sim B$ ならば $B \sim A$.
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$. ■

<u>Definition</u> 0.1.4（E:p8 , K:p13）.
集合 A に対して $\mathrm{card}\, A$ を, 任意の集合 B に対して

$$\mathrm{card}\, A = \mathrm{card}\, B \leftrightarrow A \sim B$$

を満たすものとし, これを A の **cardninal numger**（基数）または **cardinality**（濃度）という. ■

<u>Definition</u> 0.1.5（E:p8 , K:p13）.
集合 A, B に対して, ある $B' \subseteq B$ があって $A \sim B'$ であるとき, A **dominated by** B（A は B でおさえられている）といい, $A \preceq B$ で表す. ■

<u>Proposition</u> 0.1.6（E:p8 , K:p13）.
$A \preceq B$ であるとき, A から B への単射写像が存在する. ■

<u>Definition</u> 0.1.7（E:p8 , K:p14）.
集合 A, B に対して $A \preceq B$ であるとき, $\mathrm{card}\, A \leq \mathrm{card}\, B$ であるとする. ■

アメリカでは $\leq$ でも $\leqq$ でもなく $\leqslant$ を使う, 少なくとも $\leqq$ のように二重線になっているものは使わない, みたいなことを聞いた記憶がある.
それはさておき, テキストでは上記の定義は「$\mathrm{card}\, A \leq \mathrm{card}\, B$」ではなく「$A \leqslant B$」になっている. 基数は私たちのよく知る数に対応するものでもあるので, よほど（無限）基数に着目した話をしない限りは, 今後このノートにて $\leq$ と $\leqslant$ は使い分けず, $\leq$ で統一することにする.

<u>Proposition</u> 0.1.8（E:p9 , K:p14）.
任意の集合 A, B, C に対して以下の 2 つが成立する.

1. $A \preceq A$.
2. $A \preceq B$ かつ $B \preceq C$ ならば $A \preceq C$. ■

<u>Proposition</u> 0.1.9（E:p9 , K:p14）.
$A \preceq \mathbb{N}$ であることと, A が高々可算であることは同値. ■

**<u>Theorem</u> 0.1.10（E:p9 SCHÖDER-BERNSTEIN THEOREM,
K:p14 シュレーダー・ベルンシュタイン（Schröder-Bernstein）の定理）.**
集合 A, B と, 基数 κ, λ に対して,

(a) $A \preceq B$ かつ $B \preceq A$ ならば $A \sim B$.

(b) $\kappa \leq \lambda$ かつ $\lambda \leq \kappa$ ならば $\kappa = \lambda$. ■

Theorem 0.1.11（E:p9 THEOREM 0C, K:p14 定理 0C）.
集合 A, B と, 基数 κ, λ に対して,

(a) $A \preceq B$ または $B \preceq A$ の少なくとも一方が成り立つ.

(b) $\kappa \leq \lambda$ または $\lambda \leq \kappa$ の少なくとも一方が成り立つ. ■

この定理は比較可能定理とも呼ばれる.

Notation 0.1.12（E:p9, K:p14）.
$\mathrm{card}\,\mathbb{N}$ を $\aleph_0$ で, $\mathrm{card}\,\mathbb{R}$ を $2^{\aleph_0}$ で表す. ■

Definition 0.1.13（E:p9, K:p15）.
集合 A, B とその基数 $\mathrm{card}\,A = \kappa, \mathrm{card}\,B = \lambda$ に対して, その演算 $+, \cdot$ を以下のように定める.

1. $A \cap B = \emptyset$ のとき, $\kappa + \lambda \ = \ \mathrm{card}(A \cup B)$.

2. $\kappa \cdot \lambda \ = \ \mathrm{card}(A \times B)$. ■

Theorem 0.1.14（E:p9 CARDINAL ARITHMETIC THEOREM, K:p15 基数算術の定理）.
$\kappa \leq \lambda$ かつ λ が無限な基数 κ, λ に対して,

1. $\kappa + \lambda \ = \ \lambda$.

2. $\kappa \neq 0$ ならば $\kappa \cdot \lambda \ = \ \lambda$.

3. κ が無限ならば $\aleph_0 \cdot \kappa \ = \ \kappa$. ■

Theorem 0.1.15（E:p10 THEOREM 0D, K:p15 定理 0D）.
無限集合 A に対して, A の要素からなる有限列全体の集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{n+1}$ の濃度は $\mathrm{card}\,A$ と同じ. ■

Example 0.1.16（E:p10, K:p16）.
実数における代数数的数全体の集合の濃度は $\aleph_0$ である. ■

第III部

学習

第IV部

その他

このパートは, 数学の研究や学習に直接は関係しないものの, 学問全般に関係あったり, 傲慢ながら他人に共有する価値のあると思われるものについてまとめていく, 雑多なパートになっています.
第 0 章（25 ページ）では, このノートを作成するにあたって使用した小技や工夫などをまとめています.

第0章　このノートのTips

0.1　自作マクロ・環境紹介

この節ではこのノートで使用していた, 自前で定義した TeX のマクロや環境について紹介しています. コンパイルされて PDF になると見えない部分なので, それなりに価値はあると思います. 大抵あれこれ色んなインターネットのサイトを見ながら作っているので, どこを参考にしたか分からないものをあるかもです. なるべく参考になったサイトなどは参考文献にも載せておこうかと思っています.

0.1.1　自作マクロ

使用分野別にまとめておきます.

1. 共通

   (a) 太字命令の簡略化
   基礎的な用語は基本的にその英語と日本語を併記しているので, その太字命令が並んでいるのが煩わしいという理由で導入してみたもの.

   ```
   \newcommand{\textgtbf}[2]{\textgt{#1}（\textbf{#2}）}
   \newcommand{\textbfgt}[2]{\textbf{#1}（\textgt{#2}）}
   ```

   例えば`\textgtbf{集合}{set}`で「**集合**（**set**）」, `\textbfgt{set}{集合}`で「**set**（**集合**）」となる.

   (b) 各種参照系
   ノートの一部分を参照した場合は, そのページ数も併記した方が親切かと考えて, このように参照先の記入は一回で済むようなマクロたちを作ってみた.

   ```
   \newcommand{\PartRef}[1]{第\ref{#1}部（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\ChapRef}[1]{第\ref{#1}章（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\SecRef}[1]{\ref{#1}節（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\DefRef}[1]{Definition␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\ExRef}[1]{Example␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\LemRef}[1]{Lemma␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\ThRef}[1]{Theorem␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\FactRef}[1]{Fact␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   \newcommand{\PropRef}[1]{Proposition␣\ref{#1}（\pageref{#1}ページ）}
   ```

   (c) 定義するための記号
   こういうのこそマクロにすべきだよねって.

   ```
   \newcommand{\defarr}{\␣\mbox{$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$}}
   \newcommand{\defeq}{\␣\mbox{$\stackrel{\text{def}}{=}$}}
   ```

2. 基礎数学系

(a) 集合の外延的記法に関するもの
見栄えを整えることが多く見辛くなりやすいのでマクロにしてみた（流石にやり過ぎな気がしなくもない）. 2 種類の外延的記法にあわせて 2 つ用意している.

```
\newcommand{\SetBar}[2]{
␣␣\{\,#1\,\mid\,#2\,\}
}
\newcommand{\SetColon}[2]{
␣␣\{\,#1\,:\,#2\,\}
}
```

例えば`\SetBar{x}{x␣\neq␣x}`で「$\{\,x\mid x\neq x\,\}$」,

```
\SetColon{|r|}{r␣\in␣\mathbb{R}}
```

で「$\{\,|r|\,:\,r\in\mathbb{R}\,\}$」と出力される.

(b) 順序対や有限列に関するもの
「langle」や「rangle」がたくさんあると見辛くなるので.

```
\newcommand{\op}[2]{\langle␣#1,#2␣\rangle}
\newcommand{\triple}[3]{\langle␣#1,#2,#3␣\rangle}
\newcommand{\ntuple}[2]{\langle␣#1,\dots,#2␣\rangle}
\newcommand{\singleseq}[1]{\langle␣#1␣\rangle}
```

(c) 関数に関するもの
まずは「f は A から B への（単射・全射・全単射）写像である」という述語の略記をマクロにする. 人によっては`\colon`ではなく:を使う人もいるので, それぞれの状況にあわせてマクロで一括変換出来る方がいいかもと思った（そんなときがあるのか分からんけど）.

```
\newcommand{\map}[3]{
␣␣#1\colon␣#2␣\to␣#3
}
\newcommand{\InjectionMap}[3]{
␣␣#1\colon␣#2␣\xrightarrow{\text{1-1}}␣#3
}
\newcommand{\SurjectionMap}[3]{
␣␣#1\colon␣#2␣\xrightarrow{\text{onto}}␣#3
}
\newcommand{\BijectionMap}[3]{
␣␣#1\colon␣#2␣\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}␣#3
}
```

そして写像・関数に関係する定義のためのコマンド一覧. 写像の定義域の制限の記号は単なる $|$ を使う人もいるけれど, 私はこれが好き. そして`\upharpoonright`が人によっては何を指しているのか分かりづらいし, 連発するとかなり 1 行が長くなってしまうので, 省略したい意図もある.

```
\newcommand{\restric}{\mbox{$\upharpoonright$}}
\DeclareMathOperator{\dom}{dom}
\DeclareMathOperator{\ran}{ran}
\DeclareMathOperator{\fld}{fld}
\DeclareMathOperator{\id}{id}
```

0.1.2 自作環境

1. ぶら下げと背景変更
   証明中の不要ならば読み飛ばしてほしい部分やテキストでは行間に相当する部分などを, ここに記述して分かりやすくするためのもの.

```
\definecolor{BIP-back}{gray}{0.9}
\newenvironment{sub-block}[1]
␣␣{
␣␣␣␣\begin{tcolorbox}[
␣␣␣␣colback␣=␣BIP-back,
␣␣␣␣colframe␣=␣white,
␣␣␣␣boxrule␣=␣10pt,
␣␣␣␣fonttitle␣=␣\bfseries,
␣␣␣␣breakable␣=␣true]
␣␣␣␣\begin{itemize}␣\item[#1]
␣␣}
␣␣{
␣␣␣␣\end{itemize}
␣␣␣␣\end{tcolorbox}
␣␣␣␣\vspace{-5pt}
␣␣}
```

   以下のように変数に何も入れないと

```
\begin{sub-block}{}
␣␣こんな感じ␣\\
␣␣になって,
\end{sub-block}
```

   こんな
   感じになって,

   例えば変数に`{\boldmath␣$\because$}\,`とか入れてみると,

   $\because$ こんな
   感じになる.

0.2 お助け自作ツール紹介

このノートを作成するにあたり, 自分の作業を効率化するため, 作ってみたツールたち. また効率化だけでなく, ノートの内容をよりよくするためのものも作れたらなと思っています. 簡単なファイル処理などは書き慣れている言語 Perl で書いています. 文献管理は別のフォルダでやっていて, それをサポートするためのツールの開発もやってます. そちらは別のリポジトリになっています. 詳しくはこちらから

- 全角「、」「。」変換ツール
  ツールのコードはこちらから. このノートでは「、」「。」は使わず, 「,」「.」で統一しています. しかし日本語を打っている際についつい「、」「。」を打ってしまってそのままということもあります. notetex から再帰的に subfile で呼びだしている tex ファイルを探し出し, その全てのファイルの中にある「、(改行)」「。(改行)」を「, (改行)」「. (改行)」に置換します. また置換前のファイルは同じ場所にバックアップをとります. もともと「、(改行)」「。(改行)」が含まれていなかったファイルはバックアップはとりません.
  しかしこれだと「、」「。」が行の途中に含まれている場合は検知できません. ただこの場合は, このツールの説明文や意図的に書いたものや, 私が改行を忘れている場合があります. なのでそれらを検知した場合は, そのファイル名と行番号・その行の内容をコンソールに表示するようにしてあり, それで自分がわざと書いたのか, 改行忘れかを判断する材料にするようにしています.

- 「あとで書く」メモのリスト化ツール
  ツールのコードはこちらから. 勉強していると「ここはあとで示しておこう」とか, 「この○○については後のページで説明すると書いてあるからメモしておこう」という部分は多々ある. これらを現実のノートにメモっておいてもよいけど, 何かにまとめておいておかないと忘れてしまう. なのでその箇所の勉強ノート TeX ファイルにメモっておき, いつでもそのメモのリストが見れるようにしておきたい, そんな思いを叶えるためのツールです. 例えば「`C:/souji/all-note/part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_導入.tex`」の 782 行目から, 以下のように何かあればメモったとします.

  ```
  %あとで書く
  \begin{comment}
  ␣␣この補題に関してはあとで示しておく.
  \end{comment}
  ```

  これなら出力には影響しません. そしてこのツールを実行すると, ノート用フォルダに「あとで書くリスト.txt」が作成され, ファイルを開くと以下のように書かれています.

  ```
  C:/souji/all-note/part/part_不完全性定理勉強会ノート/chapter_導入.tex で見つけたメモ----------

  782 行で発見。↓その内容
  ␣␣この補題に関してはあとで示しておく.
  ```

  他のファイルにもメモっていれば, もっと内容は増えます. ツールではコメントアウトした「あとで書く」, そしてその後にあるコメントアウト環境に囲まれた部分を読み込みます. なので「あとで書く」メモはこの記法を守っていくことにします.

参考文献

[1] Wikipedia『順序対』, 5 2019.

[2] Wikipedia『高々 (数学)』, 4 2020.

[3] Herbert Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition.* Academic Press, 12 2000.

[4] Herbert Enderton. 論理学への数学的手引き. 1 月と 7 月, 11 2020. [3] の和訳.

[5] 勝嘉田. 論理と集合から始める数学の基礎. 日本評論社, 12 2008.

[6] 文広佐藤. 数学ビギナーズマニュアル 第 2 版. 日本評論社, 2 2014.