souji ノート

souji

aaaaaaaaaa

目 次

第I部

基礎固めノート

色々な基礎的なことをまとめるノートです．また他のノートの参照先としても機能させるつもりです．

第1章　基礎数学

ここではある程度テキストなどでまとまっている, 学部レベルの分野を勉強したものをまとめています.

1.0　数学をするための準備

aaaaa

1.1　素朴集合論

ここでは（素朴）集合論の範囲内の知識や用語を整理します. 基本的には [9] や [8] を参考にしています.

1.1.1　集合の基礎

1.1.2　関係

あとでまとめるけど今は必要なものだけ.

Definition 1.1.1（帰納的半順序集合と Zorn の補題）.
半順序集合 $(X, \leq)$（つまり反射律, 推移律, 反対称律を満たす）に対して

- $(X, \leq)$ が**帰納的** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 全ての全順序部分集合（上記 3 つに加えて三分律が成立）が上界をもつ
- $a \in X$ が $(X, \leq)$ において**極大** $\overset{\text{def}}{\iff} \neg\exists x \in X(\ a \leq x\ \wedge a \neq x\ )$

Zorn の補題とは「帰納的半順序集合は少なくとも 1 つの極大元をもつ」という主張のこと. ■

1.1.3　写像・関数

Definition 1.1.2.
集合 X, Y に対して, 「f が X から Y への**写像**（**mapping** または **map**）」であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことをいう.

(f1) $f\ \subseteq X \times Y$.

(f2) $\forall x \in X\ \exists! y \in Y\big(\ \langle x, y\rangle \in f\ \big)$.

「f が X から Y への写像」であることを $f : X \to Y$ で表す.
$f : X \to Y$ のとき

- X を写像 f の**定義域**（**domain**）, または**始域**（こちらも **domain**）と呼び, $\mathrm{dom}(f)$ で表す.
- Y を写像 f の**値域**（**range**）, または**終域**（**codomain**）と呼び, $\mathrm{ran}(f)$ で表す. ■

文献によっては（どの文献かは忘れた）, $f : X \to Y$ で値域である Y が $\mathbb{N}$ や $\mathbb{R}$ といった数の集合であるときに**関数**（**function**）と呼んで, 写像と関数を使い分けたりするが, このノートでは特に使い分けせず, どちらも混ぜて使います（でも関数が多いと思う）.

上の順序対での写像の定義に, 普段よく使う記法を適用します.

<u>**Notation**</u> **1.1.3.**
$f : X \to Y$ であるとき,「$\langle x, y\rangle \in f$」を「$f(x) = y$」で表し「$f$ は x を y へ写す」や「x の f による値は y」と言ったりする. $f(x)$ を「x の f による値」と呼ぶ.
この記法を用いれば写像の定義 (f2) は以下のように書き換えられる.

$$\forall x \in X\ \exists! y\big(\ f(x) = y\ \big)$$

つまり定義域の任意の要素は一意的な値域の要素に対応していると言える. ■

ここでは写像を（順序対の）集合として定義したため, 集合に関する記法を使って議論することができます. それを踏まえて, 様々な用語を定めておきます.

<u>**Definition**</u> **1.1.4.**
2 つの関数 f, g に対して, この 2 つを単なる順序対の集合とみて, $f \subseteq g$ が成立しているとき f を g の**部分関数**, g を f の**拡大**と呼ぶ.
さらに集合として f と g が等しいとき, つまり $f \subseteq g$ かつ $g \subseteq f$ なとき（写像として）f と g は**等しい**といい, 集合と同じで $f = g$ で表す.
定義域や値域にまで踏み込んだ定義が続きます.

(1) 関数 $f : X \to Y$ と $A \subseteq X$ に対し $f{\restriction}A = (A \times Y) \cap f$ とおく. つまり $f{\restriction}A$ は f の対応規則はそのままに定義域を A へ狭めた A から Y への関数のことです. $f{\restriction}A$ は関数 f の A への**制限**と呼びます.
つまり $f{\restriction}A$ は f の部分関数, f は $f{\restriction}A$ の拡大といえます.

(2) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ な 2 つの関数 f, g があったとき, $f \triangle g \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq g(x)\}$.

(3) ${}^X Y$ は $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$ なる関数全体の集合を表します. つまり ${}^X Y \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : X \to Y\}$. ■

写像が集合として表現できれば, 2 つの写像に集合演算を適用することができます. しかしその演算結果もまた写像になるかどうかはわかりません. 例えば $f(x) \neq g(x)$ な $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ が存在したときです. f, g の定義域が互いに素なとき, つまり $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \neq \emptyset$ なとき, $f \cup g$ は $\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)$ から $\mathrm{ran}(f) \cup \mathrm{ran}(g)$ への関数になります. つまり対応規則が

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathrm{dom}(f) \\ g(x) & x \in \mathrm{dom}(g) \end{cases}$$

な関数です.

1.1.4 集合族

1.1.5 色々な用語

様々な分野で現れる用語をまとめておきます.

<u>**Definition**</u> **1.1.5.**
集合 X と X の部分集合の族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が X の**分割**（**partition**）であるとは以下の 3 つの条件を満たすことをいう.

- $\emptyset \notin \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.
- $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda(\lambda \neq \lambda' \to Y_\lambda \cap Y_{\lambda'} = \emptyset)$.
- $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. ■

<u>**Definition**</u> **1.1.6.**
集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**有限交叉性**（**finite intersection property**）をもつ $\overset{\text{def}}{\iff} \forall L \in [\Lambda]^{<\omega}\big(\ \bigcap_{i\in L} X_i \neq \emptyset\ \big)$. ■

compact 位相空間について述べる時のための定義を用意します.

Definition 1.1.7.
集合 X, $A \subseteq X$, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して

- $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の**被覆（covering）** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.
- A の被覆 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\Lambda' \subseteq \Lambda$ に対して, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ もまた A の被覆のとき $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ を $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**部分被覆**という. とくに $|\Lambda'| < \omega$ のとき, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ は $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**有限部分被覆**とよぶ. ■

1.1.6 選択公理と直積の一般化

有限個の集合の直積を一般化する.

Definition 1.1.8.
Λ を添え字集合とした集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を以下のように定義する.

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{\ f : \lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid \forall\lambda\in\Lambda\big(\ f(\lambda) \in X_\lambda\ \big)\ \}. \quad ■$$

$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の要素は**選択関数**と呼びます. $\forall\lambda\in\Lambda(\ X_\lambda \neq \emptyset\ )$ であれば $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ も空にならないように思えますが, それについては選択公理で保証しなくてはいけません. また $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が空でないという主張は選択公理と同値になります.

Lemma 1.1.9.
集合族 $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ はどの要素も空でないとする. つまり $\forall\lambda\in\Lambda(A_\lambda \neq \emptyset)$. このとき以下は同値.

(1) （選択公理）$\mathcal{A}$ に選択関数が存在する.

(2) （直積定理）直積集合 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が空でない. ■

Proof (1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathcal{A}$ 上の選択関数を $f_{AC} : \mathcal{A} \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とおく. つまり $\forall\lambda\in\Lambda(f_{AC}(A_\lambda) \in A_\lambda)$ が成立しています. $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{\ f : \mathcal{A} \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \mid \forall\lambda\in\Lambda(\ f(A_\lambda) \in A_\lambda\ )\}$ という定義から $f_{AC} \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1)
$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ よりある $f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ が存在するが, これは $\mathcal{A}$ 上の選択関数です. □

よって以降は選択公理は常に仮定します. ですが, その公理を明記した場合には明記するようにします.

Definition 1.1.10.
Λ を添え字集合とした集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とその直積 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ があったとき, $\lambda\in\Lambda$ に対して, $p_\lambda : \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を $p_\lambda(f) = f(\lambda)$ で定義して, p_λ を $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の λ 成分への射影と呼ぶ. ■

簡単に分かることを示しておきます.

Lemma 1.1.11.
$\forall\lambda\in\Lambda(\ X_\lambda \neq \emptyset\ )$ ならば, どの射影 p_λ は全射. ■

Proof 選択公理によって $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ です．よって 1 つ $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ をとり固定します．全射であることを示すため，任意に $x_\lambda \in X_\lambda$ をとります．関数 $g : \lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

$$g \ = \ \{\langle \lambda, x_\lambda \rangle\} \ \cup \ f \restriction (\Lambda \setminus \{\lambda\})$$

で定義すると，$g \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で，$p_\lambda(g) = x_\lambda$ です．そんな g の存在から p_λ は全射です． □

1.2 位相空間論

この節では位相空間の基本事項をまとめていきます．基本的には [8] を（かなり）参考にしています．ゆえにここに書いている証明は，そのノートを自分なりに整理したものになっています．

1.2.1 距離空間入門事項

ここでは距離空間に関する定義をまとめておく．

Definition 1.2.1.
集合 X に対して,$d : X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の**距離関数（metric）**であるとは，以下の 3 条件を満たすことをいう．

(d1) (i) $\forall x, y \in X\big(\ d(x,y) \geq 0\ \big)$
(ii) $\forall x, y \in X\big(\ d(x,y) = 0 \ \leftrightarrow \ x = y\ \big)$

(d1) $\forall x, y \in X\big(\ d(x,y) = d(y,x)\ \big)$

(d1) $\forall x, y, z \in X\big(\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\ \big)$

d が X 上の距離関数のとき，組 (X,d) を**距離空間（metric space）**という．d が文脈から明らかならば単に「距離空間 X」と呼ぶ． ■

続いて部分空間について定義しておく．

Definition 1.2.2.
距離空間 (X,d) と $A \subseteq X$ に対して，組 $(A, d{\restriction}A \times A)$ を (X,d) の**部分距離空間（metric subspace）**，あるいは単に**部分空間**という． ■

続いて距離空間の構造を調べるための写像を定義します．

Definition 1.2.3.
距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) に対して，

- $f : X \to Y$ が**距離を保つ**，あるいは**等長写像（isometry）**
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x, x' \in X\big(\ d_X(x,x') = d_Y(f(x), f(x'))\ \big)$
- X と Y が距離空間として**等長（isometric）**，あるいは**同型（isomorphic）**であるとは，X から Y への全射等長写像が存在することをいう． ■

通常「同型」とは構造（この場合は距離）が同じで，全単射写像が存在する場合に使う言葉ですが，上記の定義では全射であることしか要求していません．これは等長写像が常に単射であることが示せるからです．それを含めた細かな主張をまとめておきます．

Proposition 1.2.4.
距離空間 $(X, d_X),\ (Y, d_Y),\ (Z, d_Z)$ と $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ に対して

(1) f が等長写像ならば単射.

(2) f, g が等長写像ならば, その合成 $g \circ f : X \to Z$ も等長写像

(3) f が全射等長写像ならば, その逆写像も等長写像

(4) f が全射等長写像ならば, X と $f[X]$ は距離空間として等長, つまり同型.

(5) X と Y が同型ならば, 等長写像 $f' : X \to Y,\ g' : Y \to Z$ が存在して $g' \circ f' = id_X,\ f' \circ g' = id_Y$ が成立する.

(6) $A \subseteq X$ に対して, 包含写像 $i_A : X \to X$ は (X, d_X) から部分空間 $(A, d{\restriction}A \times A)$ への等長写像. ■

Proof

(1) $f(x) = f(x') \wedge x \neq x'$ なる $x, x' \in X$ が存在したとします. x' より $d(x, x') > 0$,$f(x) = f(x')$ より $d_Y(f(x), f(x')) = 0$ ですが, これは f が等長写像であることに矛盾.

(2) 任意に $x, x' \in X$ をとります. $d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d_Z(\ g(f(x)), g(f(x'))\ )$ で, g が等長写像であることから $d_Z(\ g(f(x)), g(f(x'))\ ) = d_Y(\ f(x), f(x')\ )$. そして f が等長写像であることから $d_Y(\ f(x), f(x')\ ) = d_X(x, x')$. まとめると $d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d_X(x, x')$ より $g \circ f$ は等長写像.

(3) (1) より f は単射でもあるので,f は全単射より逆写像 f^{-1} が存在. ある $y, y' \in Y$ に対して $d_Y(y, y') = d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y'))$ でなかったとします. f は等長写像なので $d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = d_Y(\ f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(x'))\ ) = d_Y(y, y')$ となって矛盾.

(4) $f' : X \to f[X]$ を $f'(x) = f(x)$ とすれば, f' は X から $f[X]$ への等長写像で,f' はその作り方から全射. そんな全射等長写像の存在から X と $f[X]$ は同型です.

(5) X と Y が同型なので, その間の等長写像を f とおく. (1) より f は単射, X と Y が同型なので f は全射, 故に逆写像 f^{-1} が存在する. (3) より f^{-1} も等長写像で, f^{-1} が逆写像であることから $f^{-1} \circ f = id_X,\ f \circ f^{-1} = id_Y$ です. 等長写像 $f' : X \to Y,\ g' : Y \to Z$ が存在して $g' \circ f' = id_X,\ f' \circ g' = id_Y$ が成立する.

(6) 包含写像の定義と, 恒等写像が明らかに等長写像であることから, ここまでの議論より明らか. □

Definition 1.2.5.
距離空間 (X, d),$x \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して

- $U_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \{\ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\ \}$ として, これを x を中心とする半径 ε の**開球**(**open ball**), **開円盤**(**open disc**)あるいは **ε 近傍**と呼ぶ.
- $S_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \{\ y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\ \}$ として, これを x を中心とする半径 ε の**球面**(**sphere**)と呼ぶ. ■

Definition 1.2.6.
距離空間 (X, d) と空でない $A \subseteq X$ に対して, $\delta(A) \overset{\text{def}}{=} \sup\{\ d(x, y) \mid x, y \in A\ \}$ として, これを A の**直径**(**diameter**)と呼ぶ. 必要ならば $\delta(\emptyset) = -\infty$ と約束する.
$\delta(A) < +\infty$ のとき,A は**有界**(**bounded**)という. ■

Proposition 1.2.7.
距離空間 (X, d) と $A, B \subseteq X$,A は空でないとするとき

(1) $A \subseteq B$ ならば $\delta(A) \leq \delta(B)$.

(2) A が有界 $\leftrightarrow \forall x \in X \exists r > 0\big(\ A \subseteq U_r(x)\ \big)$

(3) A が有界 $\leftrightarrow \exists x \in X \exists r > 0\big(\ A \subseteq U_r(x)\ \big)$

(4) $A \in [X]^{<\omega}$ ならば A は有界.

(5) $\forall x \in X \forall r > 0 \big(\ \delta(U_r(x)) \leq 2r \ \big)$ ■

Proof

(1) 実数の 2 つの部分集合 R, R' に対して $R \subseteq R'$ ならば $\sup R \leq \sup R'$ です．$A \subseteq B$ だから $\{ \ d(x,y) \mid x,y \in A \ \} \subseteq \{ \ d(x,y) \mid x,y \in B \ \}$ なので, 両方の sup をとれば $\delta(A) \leq \delta(B)$ です.

(2) $(\rightarrow)$ A が有界なので, ある $s \in \mathbb{R}$ でもって $\delta(A) = s$ です．任意にとった x に対して，もう 1 つ $a \in A$ をとっておく．$r = s + d(x,a) + 1$ とおくと, $A \subseteq u_r(x)$ です．なぜならば任意に $b \in A$ をとると

$$\begin{aligned} d(x,b) &\leq d(x,a) + d(a,b) && \text{(d3) より} \\ &\leq d(x,a) + s \\ &\leq r \end{aligned}$$

つまり $b \in U_r(x)$ なので,$A \subseteq U_r(x)$ です.

$(\leftarrow)$ 任意に $x \in X$ をとり, それに対して存在する $r > 0$ を固定します．$A \subseteq U_r(x)$ より (1) より $\delta(A) \leq \delta(U_r(x))$, そしてその定義から $\delta(U_r(x)) \leq 2r$, つまり $\delta(A) \leq 2r < +\infty$ より A は有界です.

(3) (2) より明らか.

(4) A は有限なので, 集合 $\{ \ d(x,y) \mid x,y \in A \ \}$ も有限です．するとこれは実数の有限集合なので最大元が存在し, 故に有界です.

(5) 任意の $y, z \in U_r(x)$ に対して

$$d(y,z) \ \leq \ d(y,x) + d(x,z) \ < \ r + r \ = \ 2r$$

より, その定義から $\delta(U_r(x)) \leq 2r$. □

(5) についてですが, これは距離空間やその r の取り方によって等号が成立したりしなかったりします．例えば n 次元ユークリッド空間（Example 1.2.10）ならば, $\delta(U_r(x)) = 2r$（Proposition 1.2.11(8)）となり, 離散距離空間（Example 1.2.12）ならば, ある r に対して $\delta(U_r(x)) < 2r$（Proposition 1.2.13(3)）となります.

Definition 1.2.8.
距離空間 (X,d) と空でない $A, B \subseteq X$ に対して, $d(A,B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{ \ d(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \ \}$ として, これを A と B の**距離**と呼ぶ.
とくに A が一元集合のとき $A = \{a\}$ とおくならば, $d(\{a\}, B)$ を単に $d(a,B)$ と書いて,a と B の距離という．つまり $d(a,B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{ \ d(a,b)$
$B \ \}$ ■

Proposition 1.2.9.
距離空間 (X,d) と空でない $A, B \subseteq X$ に対して,$A \cap B \neq \emptyset$ ならば $d(A,B) = 0$. ■

Proof $A \cap B \neq \emptyset$ なので $x \in A \cap B$ を 1 つ取れば, $d(x,x) \in \{ \ d(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \ \}$, そして $d(x,x) = 0$ より,$d(A,B)$ の定義から $d(A,B) = 0$ です. □

しかしこの命題の逆は一般的には成立しません．Proposition 1.2.11(7) を見てください.

1.2.2 距離空間の例

ここでは 1.2.1 節の用語を使いながら, 距離空間の例をいくつか挙げていきます.

Example 1.2.10.
$n \in \omega$, $\mathbb{R}^n = \{\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \}$,$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

とおくと, d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.
$(\mathbb{R}^n, d)$ は ***n* 次元ユークリッド空間**（**n-dimensional Euclidian space**）と呼ばれる. ■

Proof 距離空間の 3 条件を d が満たすか確かめる.

(d1) (i) 各 $(x_i - y_i)^2$ は 0 以上, 非負なので, 故に $d(x,y)$ もいかなる $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対しても $d(x,y) \geq 0$ である.

(ii) ある $x, y \in \mathbb{R}^n$ があって $d(x,y) = 0$ とすると, 各 i に対して

$$0 \ \leq \ (x_i - y_i)^2 \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \ = 0$$

より $(x_i - y_i)^2 = 0$, つまり $x_i - y_i = 0$ だから $x_i = y_i$. これが各 i について成立し, ゆえに $x = y$.

(d2) 各 i に対して $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ だから, d の定義より明らか.

(d3) 任意に $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ をとって, z も $z = (z_1, \cdots, z_n)$ とおく. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, つまり $d(x,y) + d(y,z) - d(x,z) \geq 0$ を示すことが目標になりますが, (d1) より $d(x,z), d(x,y), d(y,z)$ は非負なので, $\left(\ d(x,y) + d(y.z)\ \right)^2 - \left(\ d(x,z)\ \right)^2 \geq 0$ を示せば, 目標の証明になっている. $a_i = x_i - y_i$,$b_i = y_i - z_i$ とおくと, $x_i - z_i = a_i + b_i$ となる. すると

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\ ,\ d(y.z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}\ ,\ d(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2}$$

となって

$$\begin{aligned}
&\left(\ d(x,y) + d(y.z)\ \right)^2 - \left(\ d(x,z)\ \right)^2 \\
&= \left(\ d(x,y)^2 + 2d(x,y)d(y,z) + d(y,z)^2\ \right) - \left(\ d(x,z)\ \right)^2 \\
&= \left(\ \textstyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \right) - \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \\
&= \left(\ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \right) - \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2) \\
&= \ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 - \left(\ \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \right) \\
&= \ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} \ - \ 2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \ = \ 2\left(\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} \ - \ \sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)
\end{aligned}$$

より, $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} \ - \ \sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \ \geq \ 0$ を示す. そのために

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)^2 \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\right)$$

を示します. 上記の式は **Schwarz の不等式**（の別表現）と呼ばれています.
$\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 = 0$ ならば, 全ての b_i が 0 だと分かり, 両辺 0 になって成立.

$\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \neq 0$ とする．どの b_i^2 も非負なので, $\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 > 0$ です．任意に $t \in \mathbb{R}$ をとり, $\sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)^2$ を考えるとこれも非負, そして

$$0 \ \leq \ \sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)^2 \ = \ \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2t\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) + t^2\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2$$

で, $\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 > 0$ より, これを t を変数とした不等式とすると, その判別式は

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \right) \ - \ 4\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \right) \ \leq 0$$

つまり

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \right) \ - \ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \right) \ \leq 0$$

よって, $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \right)^2 \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \right)$ が証明できた． □

この空間について前節の用語を振り返ります．

Proposition 1.2.11.
1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d)$ と $x, y \in \mathbb{R}$,$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$

(2) $U_\varepsilon(x) \ = \ (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

(3) $S_\varepsilon(x) \ = \ \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$

(4) 何らかの $r \in \mathbb{R}$ に対して, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x_r$,$g(x) = x - r$ とすれば, f, g は 1 次元ユークリッド空間から自身への等長写像になっている．

(5) $d{\restriction}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ や $d{\restriction}\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ 上の距離関数となり, この距離により $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ は 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分距離空間になる．

2 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ と $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$（$\mathbb{R}$ の要素を (x, y) と書くと区間に見えるので, ここでは $\langle x, y\rangle$ と書くことにした）, $\varepsilon > 0$ に対して

(6) $U_\varepsilon(\langle x, y\rangle) \ = \ \{ \ \langle x', y'\rangle \mid (x' - x)^2 + (y' - y)^2 < \varepsilon^2 \ \}$

(7) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を $A = \{\langle 0, x\rangle | x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{\langle x, \frac{1}{x}\rangle | x \in \mathbb{R}\}$ とおくと, $A \cap B = \emptyset$ かつ $d(A, B) = 0$ が成立．

n 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ と $x \in \mathbb{R}^n$,$r > 0$ に対して

(8) $\delta(U_r(x)) = 2r$. ■

Example 1.2.12.
集合 X に対して,$d : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) \ = \ \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

で定めると, d は X 上の距離関数で, 距離空間 (X, d) は**離散距離空間**（**discrete metric space**）と呼ぶ． ■

Proof (d1), (d2) はその定義より明らか．(d3) に関しては任意にとった 3 点 $x, y, z \in X$ を, $x = y \wedge y = z$, $x \neq y \wedge y = z, \cdots$ など場合分けすれば, その全てにおいて成立することが確かめられる． □

Proposition 1.2.13.
離散距離空間 (X, d) と $x \in X$,$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $U_\varepsilon(x) = \begin{cases} \{x\} & \varepsilon \leq 1 \\ X & \varepsilon > 1 \end{cases}$

(2) $S_\varepsilon(x) = \begin{cases} \emptyset & \varepsilon \neq 1 \\ X \setminus \{x\} & \varepsilon = 1 \end{cases}$

(3) $r \leq 1$ のとき, $\delta(U_r(x)) = 0$, つまり $\delta(U_r(x)) < 2r$. ■

1.2.3 位相空間の定義と閉集合

位相空間を以下のように定義する.

Definition 1.2.14.
空でない集合 X に対して, そのべき集合の部分集合 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X 上の**位相**（**topology**）であるとは, 以下の 3 条件をみたすことである.

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\ O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\ )$.

(O3) $\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}(\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}\ )$.

X と X 上の位相 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**（**topological space**）という.
$(X, \mathcal{O})$ が位相空間であるとき, $\mathcal{O}$ の要素を（その位相空間の）**開集合**（**open set**）という. ■

また位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における $\mathcal{O}$ のことを位相ではなく, その空間の**開集合系**（**system of open sets**）とよぶこともある.

ある集合に位相を入れるとか, 位相を定めるというのは, 上の 3 条件をみたす集合たちを定めること, つまり開集合全体を定めるという意味になる.
位相を入れられた集合, つまり $(X, \mathcal{O})$ における X のことを, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の**台集合**（**underlying set**）と呼ぶこともある[1]
.
位相空間によっては開集合はなんであるかを提示しにくい場合もあるそのために位相の定め方は他にもいくつかある.

開集合の双対概念として閉集合がある.

Definition 1.2.15.
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, $F \subseteq X$ が**閉集合**（**closed set**）であるとは, $X \setminus F$ が X の開集合, つまり $X \setminus F \in \mathcal{O}$ となることである.
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合全体の集合をその位相空間の**閉集合系**（**system of closed sets**）とよび, $\mathcal{F}$ や $\mathcal{C}$ などで表す[2]. ■

閉集合が開集合の双対概念である由縁は以下のような開集合と似た（対照的な）性質を持つことにある.

Proposition 1.2.16.
$\mathcal{F}$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合系とするとき, $\mathcal{F}$ は以下の 3 つの性質をみたす.

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.

(F2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\ F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}\ )$.

(F3) $\forall \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}(\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}\ )$. ■

Proof 証明は省略する. □

[1] 台集合とは Wikipedia の「数学的構造」[2] によると, (何の構造も持たない) 単なる「はだか」の集合という意味で使い, とくにその構造は位相でなくても使うことができる. 個人的には便利な言葉だと思うので以降も使っていく.
[2] ここらへんはテキストによっても変わるので, 自分もその時々の記号の使われ具合によって変えることにする.

集合 X に位相を定めるとき, 開集合が何かを定めるのではなく, 閉集合とは何かを定めた上でその補集合全体を開集合と定める方法もある．これは Definition 1.2.14（13 ページ）の下の文章にも書いた, 開集合を直接定める以外の位相を定める方法の 1 つである．これは以下のような定理を示すことで分かる．

Theorem 1.2.17.
集合 X に対して $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が Proposition 1.2.16（13 ページ）の (F1)〜(F3) をみたしているとする．このとき $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を

$$\mathcal{O} \ = \ \{\ O \subseteq X \mid X \setminus O \in \mathcal{F}\ \}$$

で定めると,

(1) $\mathcal{O}$ は X の位相となり,

(2) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{O}$ の閉集合系になっている．

(3) また位相空間の開集合系から定めた位相はもとの位相と一致する． ■

Proof (1) と (2) の証明は省略する．
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ とその閉集合系 $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \{\ O \subseteq X \mid X \setminus O \in \mathcal{F}\ \}$ とおく．証明すべきことは $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ である．
$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ を示すため任意に $O \in \mathcal{O}$ をとる．$F = X \setminus O$ とおくと, $X \setminus F = X \setminus (X \setminus O) = O$ より $X \setminus F \in \mathcal{O}$, つまり F は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合より $F \in \mathcal{F}$．すると $X \setminus O = F \in \mathcal{F}$ より $O \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$．
$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{O}$ も同様に示せるので省略する． □

1.2.4 開基と準基

Definition 1.2.18.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**開基**（**open base**）であるとは, 任意の開集合が $\mathcal{B}$ に属する集合の和集合で表現できるときをいう．論理式で書くと $\forall O \in \mathcal{O} \exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B} \big(\ O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\ \big)$ です． ■

Definition 1.2.19.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間が**第二可算公理**（**second axiom of countability**）を満たすとは, $(X, \mathcal{O})$ に高々可算な開基が存在するときをいう． ■

Definition 1.2.20.
集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{G}$ が生成する位相とは, $\mathcal{G}$ を含む位相全ての共通部分, すなわち $\mathcal{G}$ の元が全て開集合になるような最弱の位相のことをいい, $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ で表す． ■

Definition 1.2.21.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**準基**（**sub base**）であるとは, $\mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の開基になること, つまり $\{\ \bigcap_{i \in [n]} B_i \mid \{B_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{B}\ \}$ が $\mathcal{O}$ が開基になっているということです． ■

$\mathcal{B}$ の 0 個の元の共通部分は X であると決めておきます．
ある集合族で生成される位相は, どんな集合が開集合になっているか分かりにくい．以下の補題で少しは分かりやすくなると思います．

Lemma 1.2.22.
集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{G}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ の準基になっている．つまり $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ における開集合とは, 「$\mathcal{G}$ の元の有限個の共通部分」たちの和集合で表せます． ■

Proof $\mathcal{G}$ の有限個の元の共通部分として表せる集合全体を $\hat{\mathcal{G}}$ と表す, つまり

$$\hat{\mathcal{G}} \ = \ \{\ \bigcap_{i \in [n]} G_i \mid \{G_i\}_{i \in n} \subseteq \mathcal{G}\ \}$$

です．さらに $\hat{\mathcal{G}}$ の元の和集合全体として表せる集合全体を $\mathcal{O}$ で表す, つまり

$$\hat{\mathcal{O}} \;=\; \{ \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \mid \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \hat{\mathcal{G}} \}$$

示すべきをここまでの定義を使って書けば $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{G})$ です．

- $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$
  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$ で,$\mathcal{O}(\mathcal{G})$ は定義から位相です．すると位相は, 有限共通部分で閉じているから $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$, そしてそれらの和集合で閉じているから $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$ です．
- $\mathcal{O}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{O}$
  その定義から $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}$ なので, $\mathcal{O}$ が位相であることを示せば OK です．なぜならば $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$ を含む最小の位相だからです．
  - $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
    $\emptyset$ は $\hat{\mathcal{O}}$ の 0 個の元の和集合として表現できます．X は $\mathcal{B}$ の 0 個の元の共通部分として $\hat{\mathcal{O}}$ に属し, それの 1 つの和集合として $\mathcal{O}$ に属します．
  - 有限共通部分で閉じること
    任意に $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ をとると，$\{O^1_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$，$\{O^2_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$ があって，$O_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_i} O^i_\lambda$（$i = 1, 2$）です．$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda_1\times\Lambda_2} O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}$ で, $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ とおけば,$\{O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}\}_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda}$ は, 各 $O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}$ が $\hat{\mathcal{G}}$ に属することから, $\hat{\mathcal{G}}$ の部分集合族であり, つまり $O_1 \cap O_2$ は $\{O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}\}_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda}$ の和集合なので $\mathcal{O}$ に属します．
  - 和集合で閉じること
    任意に $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ をとります．各 O_λ に対し,Λ^λ を添え字集合とした集合族 $\{O_\mu\}_{\mu\in\Lambda^\lambda} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$ があって $O_\lambda = \bigcup_{\mu\in\Lambda^\lambda} O_\mu$ です．$\Lambda' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Lambda^\lambda$ とおくと,$\{O_\mu\}_{\mu\in\Lambda'}$ も $\hat{\mathcal{G}}$ の集合族で $\bigcup_{\mu\in\Lambda} O_\mu \in \mathcal{O}$ です．そして $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\mu\in\Lambda} O_\mu$ より,$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ です． □

開基の双対概念として閉基というものがあります．これについて性質も含めて簡単にまとめておきます．

Definition 1.2.23.
X を位相空間とし, $\mathcal{C}$ をその閉集合全体の集合とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の**閉基**（**base for the closed sets**）であるとは, 任意の閉集合が $\mathcal{B}$ に属する集合の共通部分で表現できるときをいう．[3] ■

定義だけなら [11] にも載っていましたが, 閉基にどのような性質があるかは Wikipedia の『開基』のページ [1] を参考にしました．以下の命題はそれに載っていたものです．

Proposition 1.2.24.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $\mathcal{C}$ をその閉集合全体の集合とするとき, 以下は同値．

(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の閉基である．

(2) $\mathcal{F} = \{F | \exists C \in \mathcal{B}(F = X \setminus C)\}$ が $\mathcal{O}$ の開基． ■

Proof

(1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathcal{F}$ がその定義から開集合の族であることは明らか．開基であることを示すため, 任意に開集合 $O \in \mathcal{O}$ をとる．$C = X \setminus O$ とすると, C は閉集合であることと $\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の閉基であることから,

$$\exists \{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(\ C = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda\ )$$

が成立するので，そんな $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を 1 つとって固定する．そして $X \setminus O = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ より，$O = X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X \setminus C_\lambda)$．ここで $F_\lambda = X \setminus C_\lambda$ とおくと, 各 F_λ は $\mathcal{F}$ に属し, これは O が $\mathcal{F}$ の要素の和集合で表せた, つまり $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることを示したことになる．

[3] 開基が open base なので閉基は closed base なのかと思ったが, どうやらそのような呼び方は定着していないっぽい．

(2) $\Rightarrow$ (1)
(1) $\Rightarrow$ (2) の議論を反転させることで同様に示すことができるので省略する. □

開基・閉基について成り立つことで, 証明がパラレルに済みそうなものをまとめてみます.

Proposition 1.2.25.
位相空間 X の開集合全体を $\mathcal{O}$, 閉集合全体を $\mathcal{C}$ とおき, さらに $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して, 以下の (1-1) と (1-2), (2-1) と (2-2) はそれぞれ同値である.

(1-1) $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基.

(1-2) 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して, ある $U \in \mathcal{B}$ が存在して, $x \in U$ かつ $U \subseteq O$ となる.

(2-1) $\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の閉基.

(2-2) 任意の $C \in \mathcal{C}$ と $x \notin C$ に対して, ある $F \in \mathcal{B}$ が存在して, $A \subseteq F$ かつ $x \notin F$ となる. ■

Proof

(1-1) $\Rightarrow$ (1-2)
任意に $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ をとる. この O に対して $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから, $\mathcal{B}_O \subseteq \mathcal{B}$ があって $O = \bigcup \mathcal{B}_O$ となっている. すると $x \in O$ より $x \in \bigcup \mathcal{B}_O$ より, ある $U \in \mathcal{B}_O$ があって $x \in U$. そして $U \in \mathcal{B}_O$ より $U \subseteq O$. そんな U の存在から (1-2) は成立.

(1-2) $\Rightarrow$ (1-1)
任意の $O \in \mathcal{O}$ をとる. (1-1) より各 $x \in O$ に対して存在する $\mathcal{B}$ の要素を U_x とおく. すると $O = \bigcup_{x \in O} U_x$ であり, $\{U_x\}_{x \in O} \subseteq \mathcal{B}$ の存在から $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基である.

(2-1) $\Rightarrow$ (2-2)
任意に $C \in \mathcal{C}$ と $x \notin C$ をとる. $\mathcal{B}\mathcal{C}$ の閉基であることから, ある $\mathcal{B}_C \subseteq \mathcal{B}$ があって $C = \bigcap \mathcal{B}_C$ となっている. ここで $\exists B \in \mathcal{B}_C (x \notin B)$ が成立する.

$\because$ もし $\forall B \in \mathcal{B}_C (x \in B)$ とすると, $x \in \bigcap \mathcal{B}_C$ より, $C = \bigcap \mathcal{B}_C$ と $x \notin C$ に矛盾する.

そんな B を 1 つとると, $C = \bigcap \mathcal{B}_C \subseteq B$ と $x \notin B$ より, そんな B の存在から (2-2) が成立.

(2-2) $\Rightarrow$ (2-1)
任意に $C \in \mathcal{C}$ をとる. 各 $x \in X \setminus C$ に対して (2-2) より存在する F を F_x とおく. すると $\{F_x\}_{x \in X \setminus C}$ は $C = \bigcap_{x \in X \setminus C} F_x$ をみたす. そんな $\{F_x\}_{x \in X \setminus C} \subseteq \mathcal{B}$ の存在から $\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ の閉基. □

さきの命題を利用して集合族が開基・閉基になる別の同値条件を紹介する.

Proposition 1.2.26.
$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して以下の (1) と「(2-1) かつ (2-2)」は同値. さらに (3) が成立する.

(1) $\mathcal{B}$ は集合 X のある位相の開基である.

(2-1) $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(2-2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \in B_1 \cap B_2$ に対して, ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \in B$ かつ $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

(3) 「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を開基とする集合 X の位相は一意的である. ■

Proof

(1) ⇒ (2-1) かつ (2-2)
$\mathcal{B}$ を X の位相 $\mathcal{O}$ の開基とする．

(2-1) であること．
$X \in \mathcal{O}$ より $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから，$\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{B}$ があって $X = \bigcup \mathcal{B}_X$ となっている．$\bigcup \mathcal{B}_X \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ より $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(2-2) であること．
任意に $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ をとると，$\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから $B_1, B_2 \in \mathcal{O}$ より $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{O}$．このときある x が $x \in B_1 \cap B_2$ ならば $\exists B \in \mathcal{B}(\ x \in B\ \wedge\ B \subseteq B_1 \cap B_2\ )$．これは Proposition 1.2.25（16 ページ）より明らか．

(2-1) かつ (2-2) ⇒ (1)
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が (2-1) かつ (2-2) をみたしているとする．

$$\mathcal{O} \ = \ \{ \bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \} \tag{†}$$

するとこの $\mathcal{O}$ は X の位相になっている．それを確かめるため位相の定義の 3 条件（Definition 1.2.14（13 ページ））を示す．

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ を $\mathcal{A} = \emptyset$ とすれば，$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \emptyset = \emptyset$ より，そんな $\mathcal{A}$ の存在から，$\emptyset \in \mathcal{O}$.
$X = \bigcup \mathcal{B}$ より $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ とすれば，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ で $\bigcup \mathcal{A} = X$ より，そんな $\mathcal{A}$ の存在から，$X \in \mathcal{O}$.

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\ O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\ )$.
任意に $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ をとると，$\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$ があって $O_i = \bigcup \mathcal{A}_i$ となっている（$i = 1, 2$）．x を $x \in O_1 \cap O_2$ とすると，$x \in O_i = \bigcup \mathcal{A}_i$ より，ある $B_i \in \mathcal{A}_i$ があって $x \in B_i$ かつ $B_i \subseteq O_i$ となっている．そんな B_1, B_2 を 1 つ固定する．すると $x \in B_1 \cap B_2$ となっていて，(2-2) よりある $B_x \in \mathcal{B}$ があって $x \in B_x$ かつ $B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq O_1 \cap O_2$ である．各 x ごとに存在するそんな B_x を集めた集合を $\mathcal{A}$ とおくと，つまり

$$\mathcal{A} \ = \ \{ B_x \mid x \in O_1 \cap O_2 \ \wedge\ x \in B_x \ \wedge\ B_x \subseteq O_1 \cap O_2 \}$$

であり，その定義から $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ であり，$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x \in O_1 \cap O_2} B_x$ であることに注意すれば，$\bigcup \mathcal{A} = O_1 \cap O_2$ である．そんな $\mathcal{A}$ の存在から，$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) $\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}(\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}\ )$.
任意に $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ をとると，$\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって，各 $\mathcal{A}_\lambda$ が $\mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$ かつ $O_\lambda = \bigcup \mathcal{A}_\lambda$ となっている．すべての $\mathcal{A}_\lambda$ が $\mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$ より，$\mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とおくと $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ である．すると $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup \mathcal{A}_\lambda = \bigcup \mathcal{A}$ となるので，$\mathcal{A}$ の存在から，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

明らかに $\mathcal{B}$ はこの位相 $\mathcal{O}$ の開基である．

(3)
「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を開基とする位相を $\mathcal{O}$ とおくと，開基の定義から $\mathcal{O} = \{ O \mid \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(O = \bigcup \mathcal{A}) \}$ である．これは † での $\mathcal{O}$ と同じもの，つまり $\mathcal{B}$ を開基とする位相はこの $\mathcal{O}$ のみである． □

同様の事実が閉基についても成立する．

Proposition 1.2.27.
$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して以下の (1) と「(2-1) かつ (2-2)」は同値．さらに (3) が成立する．

(1) $\mathcal{B}$ は集合 X のある位相の閉基である．

(2-1) $\emptyset = \bigcap \mathcal{B}$.

(2-2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \notin B_1 \cup B_2$ に対して，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \notin B$ かつ $B_1 \cup B_2 \subseteq B$.

(3) 「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を閉基とする集合 X の位相は一意的である． ■

Proof 「(1) ⇒ (2-1) かつ (2-2)」は Proposition 1.2.26（16 ページ）と同様にできるので省略する.

(2-1) かつ (2-2) ⇒ (1)

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が (2-1) かつ (2-2) をみたしているとする.

$$\mathcal{F} \;=\; \{\, \bigcap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \,\} \tag{†}$$

するとこの $\mathcal{F}$ は X の閉集合系になっている. それを確かめるため閉集合系の 3 つの性質（Proposition 1.2.16（13 ページ）の (F1)〜(F3)）を確かめる.

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
$\emptyset = \bigcap \mathcal{B}$ より $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ とおけば, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ かつ $\emptyset = \bigcap \mathcal{A}$ より, そんな $\mathcal{A}$ の存在から $\emptyset \in \mathcal{F}$.
なんらかの $\mathcal{A}$ に対して集合族の共通部分の定義から $\bigcap \mathcal{A} = \{\, x \in X \mid \forall A \in \mathcal{A}(x \in A) \,\}$ より, $\mathcal{A} = \emptyset$ とおくと, $\forall A \in \emptyset (x \in A)$ はどんな x についても成立する, つまり $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \emptyset = X$ となる. そんな $\mathcal{A}$ の存在から $X \in \mathcal{F}$.

(F2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\; F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F} \;)$.
任意に $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ をとると, $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$ があって $F_i = \bigcap \mathcal{A}_i$ となっている（$i = 1, 2$）. x を $x \notin F_1 \cup F_2$ とすると, $x \notin F_i = \bigcap \mathcal{A}_i$ より, ある $B_i \in \mathcal{A}_i$ があって $x \notin B_i$ かつ $F_i \subseteq B_i$ となっている. そんな B_1, B_2 を 1 つ固定する.
すると $x \notin B_1 \cup B_2$ となっていて, (2-2) よりある $B_x \in \mathcal{B}$ があって $x \notin B_x$ かつ $F_1 \cup F_2 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq B_x$ となっている. 各 x ごとに存在するそんな B_x を集めた集合を $\mathcal{A}$ とおくと, つまり

$$\mathcal{A} \;=\; \{\; B_x \mid x \notin F_1 \cup F_2 \;\wedge\; x \notin B_x \;\wedge\; F_1 \cup F_2 \subseteq B_x \;\}$$

であり, その定義から $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ であり, $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{x \notin F_1 \cup F_2} B_x$ であることに注意すれば, $\bigcap \mathcal{A} = F_1 \cup F_2$ である.

> ∵ どの B_x も $F_1 \cup F_2 \subseteq B_x$ より $F_1 \cup F_2 \subseteq \bigcap \mathcal{A}$ は明らかである.
> $\bigcap \mathcal{A} \subseteq F_1 \cup F_2$ を示すために $X \setminus F_1 \cup F_2 \subseteq X \setminus \bigcap \mathcal{A}$ を確かめる. 任意に $x \in X \setminus F_1 \cup F_2$ な x, つまり $x \notin F_1 \cup F_2$ な $x \in X$ をとると $x \notin B_x$ かつ $B_x \in \mathcal{A}$ なる B_x がある. そんな B_x の存在から $x \in \mathcal{A}$ である.

そんな $\mathcal{A}$ の存在から, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

(F3) $\forall \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}(\; \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F} \;)$.
これは Proposition 1.2.26（16 ページ）の (O3) を反転させればできるので省略する.

Theorem 1.2.17（14 ページ）のようにこの $\mathcal{F}$ を用いて位相を定めれば, 明らかに $\mathcal{F}$ はその位相の閉基である.

(3)

すぐ上のように X に位相を定めたとすると, あとは Proposition 1.2.26（16 ページ）と同様にできる. □

1.2.5 直積位相

有限個の集合の直積集合には以下のように位相を入れるのが一般的です.

Definition 1.2.28.
$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. X と Y の**直積空間**（**product space**）とは, $X \times Y$ に $\{\, O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathcal{O}_X, O_Y \in \mathcal{O}_Y \,\}$ が生成する位相を入れた位相空間のことで, この位相を**直積位相**（**product topology**）という. ■

より一般的な直積集合に対しては以下のように位相を定義します. **??**節（**??**ページ）の Definition 1.1.8 とそのあとの議論も参考にしてください.

Definition 1.2.29.
$\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする．この集合族の**直積空間**とは，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に $\{\, p_\lambda^{-1}[O] \mid O \in \mathcal{O}_\lambda\}$ が生成する位相を入れた空間のこと，この位相を**直積位相**という． ■

直積空間を構成する X, Y や X_λ のことを**因子空間**と呼びます．
直積位相は以下の補題から，どのような集合が開集合になっているか分かりやすくなります．

Lemma 1.2.30.
直積位相空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に対して

$$\{\ \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \mid \exists L \in [\Lambda]^{<\omega}\big(\ \lambda \in L \to B_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\ \vee\ \lambda \notin L \to B_\lambda = X_\lambda\ \big)\ \}$$

は直積位相の開基になっている． ■

Proof 証明は Lemma 1.2.22 より明らかです． □

1.2.6 compact な位相空間

被覆の定義,Definition 1.1.7 も参考にしてください．

Definition 1.2.31.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間として

- $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ が $A \subseteq X$ の被覆のとき，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の**開被覆（open covering）**とよぶ．
- $(X, \mathcal{O})$ が **compact** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: X の開被覆 ($\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が有限部分被覆をもつ)
- $A \subseteq X$ が **compact** $\overset{\text{def}}{\iff} (X, \mathcal{O})$ の部分空間 A が compact. ■

その定義からどんな有限集合上の位相も compact になります．

Lemma 1.2.32.
集合 X が $|X| < \omega$ ならば，任意の X 上の位相 $\mathcal{O}$ に対し $(X, \mathcal{O})$ は compact. ■

Proof $|X| < \omega$ より $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ とおきます．任意に X の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとると，X の被覆なので各 $i \leq n$ に対して $x_i \in O_\lambda$ なる λ が存在するので，それを λ_i とおき，$\Lambda' = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\}$ とします．$X = \bigcup_{0\leq i\leq n}\{x_i\} \subseteq \bigcup_{\lambda_i\in\Lambda'} O_{\lambda_i}$ より $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ は $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆だから，その存在から $(X, \mathcal{O})$ は compact. □

有限交叉性と compact 性の関係について述べます．

Lemma 1.2.33.
位相空間 X に対して，以下は同値．

(1) X が compact.

(2) $\forall\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: 閉集合の族 $\big(\ \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: FIP をもつ $\to \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset\ \big)$. ■

Proof

(1) → (2)
任意に有限交叉性をもつ閉集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$ だったとすると，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^C = X$ より $\{F_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆です．ここで F^C とは F の補集合を表しています．(1) より $\{F_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限部分被覆をもつので，それを $\{F_i^C\}_{i\in L}$ とおけば $X = \bigcup_{i\in L} F_i^C$，つまり $\emptyset = \bigcap_{i\in L} F_i$ となりますが，これは $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限交叉性に矛盾．

(2) $\to$ (1)
任意に X の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．X が有限部分被覆を持たなかった, つまり $\forall L\in[\lambda]^{<\omega}\big(\ X\neq\bigcup_{i\in L}O_i\ \big)$ です．任意に $L\in[\lambda]^{<\omega}$ をとると, $X\neq\bigcup_{i\in L}O_i$ より $\exists x\in X\big(\ \forall i\in L(x\notin O_i)\ \big)$ です．そんな x を 1 つとれば $\forall i\in L(x\in O_i^C)$ が成立, つまり $x\in\bigcap_{i\in L}O_i^C$ なので $\bigcap_{i\in L}O_i^C\neq\emptyset$ です．これは閉集合の族 $\{O_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性を持つことを表しているので, (2) より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda^C\neq\emptyset$ でなくてはいけませんが, $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda^C=\emptyset$ よりこれは矛盾, つまり X は有限交叉性をもちます． □

因子空間が有限個であるような直積空間は, 因子空間全てが compact ならば compact になります．

Theorem 1.2.34.
位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ が共に compact ならば, 直積位相空間 $X\times Y$ も compact ■

Proof $\mathscr{O}=\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $X\times Y$ の開被覆として, $\mathscr{O}$ の有限部分被覆を構成します．

$$\mathcal{A}=\{O_\lambda^X\}_{\lambda\in\Lambda_\mathcal{A}}=\left\{\ O_\lambda^X\in\mathcal{O}_X\ \middle|\ \exists G_1,\cdots,G_n\in\mathscr{O}\left(\ O_\lambda^X\times Y\ \subseteq\bigcup_{1\leq i\leq n}G_i\right)\ \right\}$$

とおくと,$\mathcal{A}$ は X の開被覆です．

$\because$ 各点 $x\in X$ が何らかの $\mathcal{A}$ の要素に属することを示す．任意に $x\in X$ をとる．この x に対し Y の部分集合族 $\mathcal{B}_x$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{B}_x=\{\ O^Y\in\mathcal{O}_Y\ |\ \exists O^X\in\mathcal{O}_X\ \exists G\in\mathscr{O}\big(\ x\in O^X\ \wedge\ O^X\times O^Y\subseteq G\ \big)\ \}$$

このとき $\mathcal{B}_x$ は Y の開被覆.

$\because$ 各点 $y\in Y$ が何らかの $\mathcal{B}_x$ の要素に属することを示す．任意に $y\in Y$ をとる．この y と先に固定されている x に対して, $\mathscr{O}$ は $X\times Y$ の開被覆だから $\langle x,y\rangle$ はある要素 $G\in\mathscr{O}$ に属するのでその 1 つを改めて G として固定する．つまり $\langle x,y\rangle\in G$．ここで G は $X\times Y$ の開集合なので直積位相の定義から, ある $O^X\in\mathcal{O}_X$, $O^Y\in\mathcal{O}_Y$ があって $G=O^X\times O^Y$ となっている．この O^Y は O^X, G の存在から $O^Y\in\mathcal{B}_x$ で, $y\in O^Y$.

Y の compact 性より

$$\exists V_1,\cdots,V_m\in\mathcal{B}_x\left(\ Y=\bigcup_{1\leq i\leq m}V_i\right)$$

この V_i を固定すると, それぞれに対して $\mathcal{B}_x$ の定義から $U_i\in\mathcal{O}_X$, $G_i\in\mathscr{O}$ $(1\leq i\leq m)$ があって $U_i\times V_i\subseteq G_i$ となっている．$U_x=U_1\cap\cdots\cap U_m$ とおけば, $x\in U_x$ と $U_x\in\mathcal{O}_X$ が成立する．

$$\bigcup_{1\leq i\leq m}(U_x\times V_i)\ =\ U_x\times\left(\bigcup_{1\leq i\leq m}V_i\right)\ =\ U_x\times Y$$

そして $\forall i(\ U_x\times V_i\subseteq G_i\ )$ が分かるから

$$U_x\times Y\subseteq\bigcup_{1\leq i\leq m}G_i$$

よって $u_x\in\mathcal{A}$ で, この U_x が x が属する $\mathcal{A}$ の要素になる．

X の compact 性より

$$\exists O_1^X, \cdots, O_m^X \in \mathcal{A} \left(X = \bigcup_{1 \le i \le m} O_i^X \right)$$

が成立. 各 O_i^X に対して $\mathcal{A}$ の定義から

$$\exists O_{i_1}, \cdots, O_{i_n} \in \mathscr{O} \left(O_i^X \times Y \subseteq \bigcup_{1 \le j \le n} O_{i_j} \right).$$

すると

$$\begin{aligned} X \times Y &= \left(\bigcup_{1 \le i \le m} O_i^X \right) \times Y = \bigcup_{1 \le i \le m} (O_i \times Y) \\ &\subseteq \bigcup_{1 \le i \le m} \left(\bigcup_{1 \le j \le n} O_{i_j} \right) \end{aligned}$$

よって $X \times Y$ が $m \times n$ 個の, すなわち有限個の $\mathscr{O}$ の要素で被覆できた. □

しかし上記の定理の一般系（Tychonoff の定理）を示すには選択公理が必要です．またその主張は選択公理と同値になります．この証明は [12]（117 ページあたりから）を参考にした.

<u>Lemma</u> 1.2.35（選択公理は Tychonoff の定理と同値）.
以下は同値.

(1) 選択公理

(2) （Tychonoff の定理）
$\{ \ (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) \ \}_{\lambda \in \Lambda}$ を compact 位相空間の族とし, $(Y, \mathcal{O})$ をその直積位相空間とすれば,Y は compact. ■

<u>Proof</u>

(1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ を有限交叉性をもつ閉集合の族として, $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ であることを示す.

$$\mathcal{F} \ = \ \{ \ \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(Y) \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \ \wedge \ \mathcal{A}' \text{: 有限交叉性をもつ} \ \}$$

と定義すれば, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は帰納的半順序集合です.

> $\because$ $(\mathcal{F}, \subseteq)$ が半順序集合であることの確かめは省略します．任意に全順序部分集合 $C \subseteq \mathcal{F}$ をとれば, その和集合 $\bigcup C$ は C の上界になっています．その存在から $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は帰納的です.

選択公理より Zorn の補題をこの $(\mathcal{F}, \subseteq)$ に適用できるので $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は少なくとも 1 つの極大元を持つから, それを $\mathcal{B}$ とおきます．この $\mathcal{B}$ に対して以下の 2 つが成立.

(i) $\forall F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{B}(\ F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathcal{B} \ )$
(ii) $\forall A \subseteq Y(\ \forall F \in \mathcal{B}(A \cap F \neq \emptyset) \ \rightarrow \ A \in \mathcal{B} \ )$

> $\because$ (i) は $\mathcal{B}$ が有限交叉性を持つ範囲で $\mathcal{A}$ を大きくしていった集合であることから, (ii) は $\mathcal{B}$ の極大性より明らかです.

$p_\lambda : Y \to X_\lambda$ を射影とすると以下が成立.

$$\exists y = \langle x_\lambda \in X_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda} \in Y \big(\ \forall F \in \mathcal{B} \ \forall \lambda \in \Lambda \ (\ x_\lambda \in (p_\lambda[F])^a \ ) \ \big)$$

$\because$ ある $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathcal{P}(X_\lambda)$ を

$$\mathcal{B}_\lambda \ = \ \{ \ (p_\lambda[F])^a \mid F \in \mathcal{B} \ \}$$

と定義すれば $\mathcal{B}_\lambda \subseteq X_\lambda$ で, 閉包の定義から閉集合の族になっていて, 有限交叉性をもちます.

$\because$ 任意に $\mathcal{B}_\lambda$ の 2 要素をとり, 定義からそれに対応する $\mathcal{B}$ の 2 要素を F_1, F_2 とおきます. つまり $(p_\lambda[F_1])^a$, $(p_\lambda[F_2])^a \in \mathcal{B}_\lambda$ です. $\mathcal{B}$ は有限交叉性をもつので $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. ここから $\emptyset \neq p_\lambda[F_1 \cap F_2] \subseteq p_\lambda[F_1] \cap p_\lambda[F_2]$ より $p_\lambda[F_1] \cap p_\lambda[F_2] \neq \emptyset$ です. 閉包の定義から $p_\lambda[F_i] \subseteq (p_\lambda[F_i])^a$ なので $(p_\lambda[F_1])^a \cap (p_\lambda[F_2])^a \neq \emptyset$ です.

$(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ の compact 性から $\bigcap \mathcal{B}_\lambda \neq \emptyset$ が成立する. 集合族 $\{ \bigcap \mathcal{B}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ に選択公理を適用して $\langle x_\lambda \in X_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ を作れば, これが求めるべき y になっています.

この y は全ての $\mathcal{B}$ の要素の触点になっています. つまり $\forall F \in \mathcal{B}(\ y \in F^a \ )$

$\because$ 任意に $F \in \mathcal{B}$ をとる. y が F の触点であるとは, 任意の y の近傍が F と交わることなので任意に y の近傍 N をとる. 近傍の定義からこの N に対して $\mathcal{O}$ の開集合 O があって $y \in O \subseteq N$ となっている. ここで直積位相の定義から, この O に対して $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ とそれに対応する $U_i \in \mathcal{O}_{\lambda_i}$ ($1 \leq i \leq n$) があって, $O = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ となっている, つまり以下が成立しています.

$$y \ \in \ \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}] \ \subseteq \ N$$

$p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ とは U_{λ_i} と λ_i 以外の X_λ との直積だから, $y \in \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ より, $p_{\lambda_i}(y) = x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}$ が成立しています.

$F \cap N \neq \emptyset$ を示すため $F \cap p_{\lambda_1}^{-1}[U_{\lambda_1}] \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}[U_{\lambda_n}] \neq \emptyset$ を示す. そのためにまず以下が成立することを確かめる.

$$\forall i(\ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}] \ \in \ \mathcal{B} \ )$$

$\because$ $\{ \ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}] \ \}_{i \leq n}$ は有限交叉性を持ちます. なので $\mathcal{B}$ の極大性より, $\{ \ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}] \ \}_{i \leq n} \subseteq \mathcal{B}$ です.

よって $\mathcal{B}$ の性質 (i) から $F \cap p_{\lambda_1}^{-1}[U_{\lambda_1}] \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}[U_{\lambda_n}] \neq \emptyset$ が成立します. つまり $F \cap N \neq \emptyset$.

任意に $A \in \mathcal{A}$ をとると A は閉集合なので $A^a = A$ で, $\mathcal{B}$ の定義からどの A も $\mathcal{B}$ に属する. そして y の性質からどの A^a にも y は属する, つまり A に属する. よって $\forall A \in \mathcal{A}(y \in A)$ という y の存在から $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

選択公理そのものではなく同値な直積定理を証明します. 示すことは Lemma 1.1.9 より各要素が空でない集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ を示す.

まずどの A_λ にも属さない, つまり $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ に属さない元を 1 つとり, それを α とおきます. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $X_\lambda = A_\lambda \cup \{\alpha\}$ とします. $\mathcal{O}_\lambda = \{\ B \subseteq X_\lambda \mid |X_\lambda \setminus B| < \omega\ \} \cup \{\emptyset,\ \{\alpha\}\}$ とおくと $\mathcal{O}_\lambda$ は X_λ 上の compact な位相です.

> ∵ 補有限位相での証明を参考にしてください（まだ書いてない）.

$Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおくと, $f : X_\lambda \to \{\alpha\}$ という要素があるので $Y \neq \emptyset$ です. $Y \neq \emptyset$ と因子空間全てが compact であることより, 仮定の Tychonoff の定理（Theorem 1.2.35）から直積空間 Y も compact です. 射影 $p_\lambda : Y \to X_\lambda$ を用いて各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $F_\lambda = p_\lambda^{-1}[A_\lambda]$ とおくと, どの F_λ も Y において閉集合です.

> ∵ 直積位相は各射影 $p_\lambda : Y \to X_\lambda$ が連続になる位相で, 各 A_λ は X_λ において $\{\alpha\}$ が開集合であることより閉集合だから, 連続写像 p_λ による逆像 $p_\lambda^{-1}[A_\lambda]$ もまた閉集合です.

さらに $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交叉性をもちます.

> ∵ 有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ を任意にとる. $y = \langle x_\lambda \in X_\lambda \rangle_{\lambda\in\Lambda}$ を
>
> $$x_\lambda = \begin{cases} \alpha & \lambda \notin \Lambda \setminus \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \\ x_\lambda \in A_\lambda & \exists i(\ \lambda = \lambda_i\ ) \end{cases}$$
>
> な点とすれば,$y \in Y$ であることは明らか. また $\forall i(\ y \in F_{\lambda_i}\ )$ が成立します. なぜなら $x_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i}$ より $p_{\lambda_i}(y) \in A_{\lambda_i}$, つまり $y \in p_{\lambda_i}^{-1}[A_{\lambda_i}] = F_{\lambda_i}$ だからです. すなわち $\bigcap_{1\leq i\leq n} F_{\lambda_i} \neq \emptyset$ です.

よって $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は compact 空間 Y の有限交叉性をもつ閉集合の族だから $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ です. そして $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^{-1}[A_\lambda] = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ なので $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ です. □

第2章　その他細かなテーマ

ここでは教科書一冊になるほどではないが, 重要なテーマ・勉強したテーマをまとめいます.

2.0　Ideal と Filter 入門事項まとめ

ここでは ideal や filter についてまとめておきます. また filter に対しては ultra filter についてもまとめておきます. [6] の基礎部分を参考にしています.

2.0.1　ideal と filter の定義と例

ideal と filter の定義をして, 名前がついているものを紹介していきます.

Definition 2.0.1.
集合 A に対して $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が集合 A 上の **ideal** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下の 3 条件を満たすもののこと.

1. $\mathcal{I} \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{I}(\ X \cup Y \in \mathcal{I}\ )$.
3. $\forall X, Y(\ X \subseteq Y \wedge Y \in \mathcal{I}\ \rightarrow\ X \in \mathcal{I}\ )$.

集合 A に対して $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が集合 A 上の **filter** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下の 3 条件を満たすもののこと.

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{F}(\ X \cap Y \in \mathcal{F}\ )$.
3. $\forall X, Y(\ X \subseteq Y \wedge X \in \mathcal{F}\ \rightarrow\ Y \in \mathcal{F}\ )$. ■

いくつかの例を紹介します. それが ideal であること, filter であることの証明は省略します.

Example 2.0.2.
集合 A に対して,

(1) $\mathcal{P}(A)$ は A 上の ideal かつ filter.

(2) $\{\emptyset\}$ は A 上の ideal, $\{A\}$ は A 上の filter.

(3) $x \in A$ に対して, $\{X \subseteq A | x \notin X\}$ は A 上の ideal, $\{X \subseteq A | x \in X\}$ は A 上の filter. このような ideal を **principal ideal**, **principal filter** と呼んだりする.

(4) $S \subseteq A$ に対して, $\{X \subseteq A | X \subseteq S\}$ は A 上の ideal, $\{X \subseteq A | S \subseteq X\}$ は A 上の filter.

以降 A は無限集合として

(5) A の有限部分集合全体 $[A]^{<\omega}$ は A 上の ideal, A の補有限集合全体 $\{X \subseteq A \mid |A \setminus X| < \omega\}$ は A 上の filter. $|A \setminus X| < \omega$ とは $A \setminus X \in [A]^{<\omega}$ とも表現できる. またこのような filter を **Fréchet filter** とも呼ぶ.

(6) 上の例を拡張して, 基数 κ に対して $[A]^{<\kappa}$ は A 上の ideal. ■

ideal, filter には proper と呼ばれるものがあり, 大抵 proper であることは仮定されます.

Definition 2.0.3.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$, filter $\mathcal{F}$ に対して

- $\mathcal{I}$ が **proper** $\overset{\text{def}}{\iff} A \notin \mathcal{I}$.
- $\mathcal{F}$ が **proper** $\overset{\text{def}}{\iff} \emptyset \notin \mathcal{F}$. ■

proper であることを仮定するのは, proper でないとすると ideal も filter も $P(A)$ という自明なものになってしまいますからです. このノートでも以降 proper なものだけ扱います.
また Example 2.0.2(3) に対応して, non-principal と呼ばれる性質があります.

Definition 2.0.4.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$, filter $\mathcal{F}$ に対して,

- $\mathcal{I}$ が **non-principal** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A(\ \{a\} \in \mathcal{I}\ )$.
- $\mathcal{F}$ が **non-principal** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall X \subseteq A(\ A \setminus X \in [A]^{<\omega} \to X \in \mathcal{F}\ )$. ■

その定義から Fréchet filter は non-principal です.

ideal と filter は双対な概念です. どういうことかというと, ある ideal $\mathcal{I}$ があったとき, 補集合が $\mathcal{I}$ に属するような集合全体は同じ集合上の filter になります. そういったものを表現するための用語を定義します.

Definition 2.0.5.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して

- $X \subseteq A$ が $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**-measure zero** $\overset{\text{def}}{\iff} X \in \mathcal{I}$.
- $X \subseteq A$ が **positive** $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**-measure** $\overset{\text{def}}{\iff} X \notin \mathcal{I}$.
- $X \subseteq A$ が $\boldsymbol{\mathcal{I}-}$**measure one** $\overset{\text{def}}{\iff} A \backslash X \in \mathcal{I}$.

さらに

- $\boldsymbol{\mathcal{I}^+} \overset{\text{def}}{=} \{\, X \subseteq A \mid X \notin \mathcal{I} \,\}$: positive $\mathcal{I}$-measure 全体.
- $\boldsymbol{\mathcal{I}^*} \overset{\text{def}}{=} \{\, X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{I} \,\}$: $\mathcal{I}$-measure one 全体.

これらの定義は filter に対しても用いる. ■

この定義や記法は [4] の 4 ページを参考にしました.
A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して $\mathcal{I}^*$ は A 上の filter になります. このとき $\mathcal{I}^*$ は ideal $\mathcal{I}$ の **dual filter** と呼びます. その逆で A 上の filter $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}^* = \{\, X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{F} \,\}$ は A 上の ideal となり, それを $\mathcal{F}$ の **dual ideal** と呼びます.

2.0.2 もっと filter について

ここでは filter に関する話題をさらに掘り下げていきます.
proper な filter はその定義から有限交叉性を持ちます. しかし A の部分集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が有限交叉性をもつからといって filter になるとは限りません. 有限交叉性をもつ集合族から filter を作る方法を提示します.

Proposition 2.0.6.
集合 A に対して, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ は $\mathcal{S} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{S}$ は有限交叉性をもつとします. $\mathcal{F} = \{\, X \subseteq A \mid \exists E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}(\ \bigcap E \subseteq X\ ) \,\}$ は filter であり, $\mathcal{S}$ を含み, $\mathcal{S}$ を含む filter の中で極小なものになっている. ■

Proof 先に $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ であることを示します．そのために任意に $X \in \mathcal{S}$ をとります．$E = \{X\} \in [\mathcal{S}]^{<\omega}$ とおけば，$X = \bigcap E$ より，そんな E の存在から $X \in \mathcal{F}$ です．
続けて $\mathcal{F}$ が filter であることを示します．$\mathcal{F} \neq \emptyset$ であることは，$\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ より分かります．続いて任意に $X, Y \in \mathcal{F}$ をとります．$\mathcal{F}$ の定義から X, Y に対して存在する $[\mathcal{S}]^{<\omega}$ の要素をそれぞれ E_X, E_Y とおきます．$E = E_X \cup E_Y$ とおくと，$E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}$ で，$E_X, E_Y \subseteq E$ より $\bigcap E \subseteq \bigcap E_X \wedge \bigcap E \subseteq \bigcap E_Y$ です．よって $\bigcap E \subseteq (\ (\bigcap E_X) \cap (\bigcap E_Y)\ ) \subseteq X \cap Y$ だから，そんな E の存在より $X \cap Y \in \mathcal{F}$ です．filter の最後の定義，超集合関係で閉じることは $\mathcal{F}$ の定義より明らかなので割愛します．
最後に $\mathcal{F}$ の極小性を確かめるために，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}'$ なる filter $\mathcal{F}'$ を任意にとります．さらに任意に $X \in \mathcal{F}$ をとると，$\exists E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}(\bigcap E \subseteq X)$ な E を 1 つ固定します．$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}'$ より $E \subseteq \mathcal{F}'$ です．$|E| < \omega$ と $\mathcal{F}'$ が filter であることから $\bigcap E \in \mathcal{F}'$ です．もう一度 $\mathcal{F}'$ が filter であることと $\bigcap E \subseteq X$ から，$X \in mathcalF'$ です．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$，つまり $\mathcal{S}$ を含むような filter の中で極小になっています． □

このような作り方をした filter のことを，$\mathcal{S}$ が生成する filter という呼び方があります．有限交叉性を持たない $\mathcal{S}$ から生成した filter は，proper にならず，つまり $\mathcal{P}(A)$ という自明な filter になってしまいます．

ある集合上の filter 全体は部分集合関係で半順序集合になります．この順序での極大な filter のことを **maximal filter** と呼びます．
つまり A 上の filter $\mathcal{F}$ が maximal であることの定義は

$$\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)\big(\ \mathcal{A}\text{: filter } \rightarrow\ \neg(\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A})\ \big)$$

を満足することになります．

それとは別に ultra という性質もあります．

Definition 2.0.7.
A 上の filter $\mathcal{F}$ が **ultra** であるとは，任意の $X \subseteq A$ に対して $X \in \mathcal{F}$ か $A \setminus X \in \mathcal{F}$ のどちらか一方が成立するときをいう．$\veebar$ を排他的論理和を表すための記号とするならば

$$\mathcal{F}\text{: ultra } \overset{\text{def}}{\iff} \forall X \subseteq A(\ X \in \mathcal{F}\ \veebar\ A \setminus X \in \mathcal{F}\ ) \tag{2.1}$$

と表現できます． ■

proper な filter を考えている範囲では，maximal であること ultra であることは同値になります．故に書き手によっては極大であることを ultra であることの定義として，上記の定義は性質の 1 つとして挙げているものもあったりします．その定理の証明の前に ultra filter について分かることをまとめておきます．

Proposition 2.0.8.
集合 A に対して

- A 上の proper filter $\mathcal{F}$ が ultra でない $\iff$ $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{F} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{F}\ )$.
- $\mathcal{F}$ が A 上の proper ideal $\mathcal{I}$ の dual filter（つまり $\mathcal{F} = \mathcal{I}^*$）ならば，$\mathcal{F}$ が ultra でない $\iff$ $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{I} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{I}\ )$.

A 上の ultra filter $\mathcal{U}$ と $X, Y \subseteq A$ と $\{X_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して

- $X, Y \notin \mathcal{U}\ \rightarrow\ X \cup Y \notin \mathcal{U}$.
- $X \in \mathcal{U} \wedge Y \notin \mathcal{U}\ \rightarrow\ X \setminus Y \in \mathcal{U}$.
- $\bigcup_{i \in [n]} X_i \in \mathcal{U}\ \rightarrow\ \exists i \in [n](X_i \in \mathcal{U})$. ■

Proof (1) 排他的論理和 $\veebar$ を用いた論理式について考えます．P, Q を命題を表す記号として $P \veebar Q$ とは，他の論理記号を用いて論理的同値な式に書き換えると，$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ です．さらに論理的同値なものとして $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ があるので，今回はこれを使います．すると $\mathcal{U}$ が ultra であることを書き直せば，

$$\forall X \subseteq A\big(\ (X \in \mathcal{U} \vee A \setminus X \in \mathcal{U})\ \wedge\ (X \notin \mathcal{U} \vee A \setminus X \notin \mathcal{U})\ \big)$$

となり, それを否定すれば

$$\exists X \subseteq A\big(\ (X \notin \mathcal{U} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{U})\ \wedge\ (X \in \mathcal{U} \wedge A \setminus X \in \mathcal{U})\ \big)$$

です. $X \in \mathcal{U} \wedge A \setminus X \in \mathcal{U}$ とすると, $\mathcal{U}$ が filter より $X \cap (A \setminus X) \in \mathcal{U}$ ですが, これは $\emptyset \in \mathcal{U}$ となって $\mathcal{U}$ が proper であることに矛盾します. よって成立するのは $X \notin \mathcal{U} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{U}$ となります.

(2) (1) にそのまま当てはめると, $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{I}^* \wedge A \setminus X \notin \mathcal{I}^*\ )$ です. $X \notin \mathcal{I}^*$ とは, その定義から $A \setminus X \notin \mathcal{I}^*$, $A \setminus X \notin \mathcal{I}^*$ とは $X \notin \mathcal{I}^*$ です.

(3) $X \cup Y \notin \mathcal{U}$ を示すため, $A \setminus (X \cup Y) \in \mathcal{U}$ を示します. $A \setminus (X \cup Y) = (A \setminus X) \cap (A \setminus Y)$, そして仮定より $A \setminus X, A \setminus Y \in \mathcal{U}$ なので, $(A \setminus X) \cap (A \setminus Y) \in \mathcal{U}$, つまり $A \setminus (X \cup Y) \in \mathcal{U}$ です.

(4) $X \setminus Y \notin \mathcal{U}$ とすると, $\mathcal{U}$ が ultra より $A \setminus (X \setminus Y) \in \mathcal{U}$ です. $A \setminus (X \setminus Y) = (A \setminus X) \cup Y$ で, 仮定からの $A \setminus X, Y \notin \mathcal{U}$ と, (3) より $(A \setminus X) \cup Y \notin \mathcal{U}$ でなくてはなりませんが, これは矛盾です.

(5) $\forall i \in [n](X_i \notin \mathcal{U})$ だったとします. $\mathcal{U}$ が ultra より $\forall i \in [n](A \setminus X_i \in \mathcal{U})$ です. $\mathcal{U}$ が filter であることから $\bigcap_{i \in [n]}(A \setminus X_i) \in \mathcal{U}$ です. すると $A \setminus \big(\ \bigcap_{i \in [n]}(A \setminus X_i)\ \big) = \bigcup_{i \in [n]} X_i \notin \mathcal{U}$ ですが, これは仮定に矛盾です. □

では maximal であること ultra であることが同値であることを証明します.

Proposition 2.0.9.
A 上の filter $\mathcal{F}$ に対して, 以下は同値

(1) $\mathcal{F}$ は A 上の proper filter の中で極大（maximal）.

(2) $\mathcal{F}$ は ultra. ■

Proof

(1)→(2)
任意に $X \subseteq A$ をとります. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもつかどうかで場合分けします. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもっていたとします. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ から生成される filter を $\mathcal{F}'$ とおくと, その定義から $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \cup \{X\}$ と, $\mathcal{F} \cup \{X\} \subseteq \mathcal{F}'$ より, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ ですが, $\mathcal{F}$ は maximal より $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ となることはない, つまり $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ です. すなわち X は最初から $\mathcal{F}$ に属していた, つまり $X \in \mathcal{F}$ です.
$\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもっていなかったとします. $\mathcal{F}$ は filter なので有限交叉性をもちますが, X を加えると有限交叉性をもたなくなったということなので, $\exists \{Y_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{F}\big(\ (\bigcap_{i \in [n]} Y_i) \cap X = \emptyset\ \big)$ です. $Y = \bigcap_{i \in [n]} Y_i$ とおくと, $\mathcal{F}$ が filter であることより $Y \in mathcalF$. $Y \cap X = \emptyset$ より $Y \subseteq A \setminus X$ で, $\mathcal{F}$ が filter であることから $A \setminus X \in \mathcal{F}$ です.

(2)→(1)
対偶「$\mathcal{F}$ が maximal でないならば, $\mathcal{F}$ が ultra でない」を示します. $\mathcal{F}$ が maximal でないことから, $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ なる proper filter $\mathcal{F}'$ が存在します. $X \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ を 1 つとると, $A \setminus X \notin \mathcal{F}$ です. なぜならば $A \setminus X \in \mathcal{F}$ だとすると, $A \setminus X \in \mathcal{F}'$ となって, $X \cap A \setminus X \in \mathcal{F}'$ ですが, これは $\emptyset \in \mathcal{F}'$ となって, $\mathcal{F}'$ が proper であることに矛盾します. よって $X, A \setminus X \notin \mathcal{F}$ なる X の存在から $\mathcal{F}$ は ultra ではありません. □

maximal な, つまり ultra な filter の形は 2 つに定まります.

Proposition 2.0.10.
集合 A 上の maximal filter は principal か non-principal のいずれか一方になる. ■

Proof A 上の maximal filter $\mathcal{F}$ が $\exists D \in [A]^{<\omega}(D \in \mathcal{F})$ か $\forall D \in [A]^{<\omega}(D \notin \mathcal{F})$ かどうかで場合分けします.
$\exists D \in [A]^{<\omega}(D \in \mathcal{F})$ だったとき, そんな有限集合 D を固定すれば $\exists! x \in D(\{x\} \in \mathcal{F})$ です.

> $\because$ $\forall x \in D(\{x\} \notin \mathcal{F})$ だったとすれば, filter が $\mathcal{F}$ であることから $\forall x \in D(X \setminus \{x\} \in \mathcal{F})$ です．$\mathcal{F}$ は filter なので $\bigcap_{x\in D}(X \setminus \{x\}) \in \mathcal{F}$ ですが, $\bigcap_{x\in D}(X \setminus \{x\}) = X \setminus D$ より，これは $D \in \mathcal{F}$ に矛盾．一意性については $x, x' \in D$ に対して $\{x\}, \{x'\} \in \mathcal{F}$ とすれば, $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset \in \mathcal{F}$ となって, $\mathcal{F}$ が proper であることに矛盾です．

そんな $x \in D$ を固定すれば, $\mathcal{F} = \{ X \subseteq A \mid x \in X \}$ であること，つまり $\mathcal{F}$ が principal であることは明らかです．
$\forall D \in [A]^{<\omega}(D \notin \mathcal{F})$ だったとき, $\mathcal{F}$ が ultra より $\forall D \in [A]^{<\omega}(A \setminus D\mathcal{F})$ です．任意に取った $X \subseteq A$ が補有限集合とするならば, $\exists D \in [A]^{<\omega}(X = A \setminus D)$ です．つまり $X \in \mathcal{F}$ より, $\mathcal{F}$ がどの補有限集合も要素に持つことから $\mathcal{F}$ は non-principal です． □

ここまでの証明と同じようにして極大な ideal についても同様のことを示すことができます．ただ慣習なのか ultra filter と同様の性質をもつ ideal を ultra ideal と呼んだりはしないようです．

Corollary 2.0.11.
A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して, 以下は同値

(1) $\mathcal{I}$ は A 上の proper ideal の中で極大（maximal）．

(2) $\forall X \subseteq A(\ X \in \mathcal{I} \ \veebar \ A \setminus X \in \mathcal{I}\ )$. ■

Corollary 2.0.12.
集合 A 上の maximal ideal は principal か non-principal のいずれか一方になる． ■

最後に ultra filter は存在するのかを確かめます．それを示すためには選択公理, それと同値な Zorn の補題を必要とします．

Lemma 2.0.13（ultra filter の補題）．
選択公理を仮定する．集合 A 上の任意の filter $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}$ を含むような A 上の ultra filter が存在する． ■

Proof 任意に A 上の filter $\mathcal{F}$ をとります．$\mathfrak{F} = \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A) \mid \mathcal{A}\text{: filter} \land \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \}$ とおくと, $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ は半順序集合で, 帰納的です．なぜならば任意に $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ の全順序部分集合 $\mathfrak{C}$ をとると, $\bigcup \mathfrak{C}$ が $\mathfrak{C}$ の極大要素になっているからです．Zorn の補題から, $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ には極大要素, つまり maximal filter が存在しますが, Proposition 2.0.9 より，それは $\mathcal{F}$ を含む A 上の ultra filter です． □

Corollary 2.0.14.
集合 A に対して $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が有限交叉性をもつならば, $\mathcal{S}$ を含むような A 上の ultra filter が存在する． ■

Proof $\mathcal{S}$ より生成された filter $\mathcal{F}$ に対して, Lemma 2.0.13 と同様にして証明できます． □

2.0.3 ω 上の ultra filter

ここでは ω 上の ultra filter についてまとめます．まずは p-filter について定義します．

Definition 2.0.15.
ある集合上の filter $\mathcal{F}$ が **P-filter** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall \{X_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{F}\ \exists X \in \mathcal{F}\big(\ \forall n \in \omega(\ X \subseteq^\star X_n\ )\ \big)$．ここで $X \subseteq^\star X_n$ とは $|X \setminus X_n| < \omega$ ということです．ある filter が P-filter かつ ultra だったとき，そんな filter を **P-point** と呼ぶ． ■

2.1 Cantor 空間と Baire 空間まとめ

Cantor 空間と Baire 空間は公理的集合論の基本的な対象です．しかし丁寧な解説を私はあまり見たことがありませんでした．なので自分なりに位相空間論をベースにして，この 2 つの空間についての知識をまとめておきます．
まずここで定義だけ簡単にまとめておきます．そのさい 1.2.5 節（18 ページ）での直積位相の知識を用います．

$\{\ (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\ \}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とします. $\forall\lambda, \lambda' \in \Lambda(\ X_\lambda = X_{\lambda'}\ \wedge\ \mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{\lambda'}\ )$ の場合, つまり因子空間が全て同じだった場合を考えます. このとき同じ位相空間の Λ 個の直積と思えます. すると

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \ = \ {}^{\Lambda}X_\lambda \ = \ \{\ f \mid f\colon \Lambda \to X_\lambda\ \}$$

となります. つまり $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は Λ から X_λ への関数全体と一致します. よってこの位相空間の点は, すべて同じ定義域・値域の関数になっています.

$\{\ X_\lambda\ \}_{\lambda\in\Lambda}$ が全ての要素が空でなく異なる要素が属す可能性がある一般的な場合には, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ であることを主張するには選択公理が必要（直積定理,Lemma 1.1.9）でしたが, この場合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は単なる関数の集合なので, それが空であることを主張するのに選択公理は必要ありません.

また X_λ は λ ごとに区別する必要がないため, ${}^{\Lambda}X_\lambda$ を単に ${}^{\Lambda}X$ と書くことにします.

X を離散位相空間とし, $\Lambda = \omega,\ X = 2 = \{0, 1\}$ とした直積位相空間を ${}^{\omega}2$ と, $\Lambda = \omega,\ X = \omega$ とした直積位相空間を ${}^{\omega}\omega$ と表すことにします. この 2 つの空間に以下のように名前が付いています.

Definition 2.1.1（Cantor 空間と Baire 空間）.
Cantor 空間とは, 直積位相空間 ${}^{\omega}2$ のことで, ここで各 $2 = \{0, 1\}$ には離散位相が入っているものとする.
同様に Baire 空間とは, 直積位相空間 ${}^{\omega}\omega$ のことで, ここで各 ω には離散位相が入っているものとする. ■

2.1.1 Cantor 空間と Baire 空間の開集合

何らかの位相空間が与えられたとき, どんな集合がその空間の開集合になっているかは, 1 つの（もしかしたら一番大事な）関心事だと思います. Definition 2.1.1（30 ページ）で定義した 2 つの位相空間の開集合はどのようなものか説明します.
まずは以下のような関数の集合を定義します.

Definition 2.1.2.
集合 A に対して

$$\begin{aligned} {}^{<\omega}A &\overset{\text{def}}{=} \{\ s \mid \exists X \subseteq \omega\big(\ |X| < \omega\ \wedge\ s\colon X \to A\ \big)\ \} \\ &= \ \{\ s\colon X \to A \mid X \subseteq \omega \wedge\ |X| < \omega\ \}. \end{aligned}$$ ■

$A = 2$ とした ${}^{<\omega}2$ について考えると, $s \in {}^{<\omega}2$ とはその定義から, 定義域が ω の有限部分集合で, 値域が 2 であるような, 何らかの関数のことです. $t \in {}^{<\omega}\omega$ も同様に定義域が ω の有限部分集合で, 値域が ω であるような, 何らかの関数のことです. このような関数には以下のような名前が付いています.

Definition 2.1.3.
$s \in {}^{<\omega}2$ と $t \in {}^{<\omega}\omega$ に対して

- s は ω から 2 への**有限部分関数**（**finite partial function**）という.
- t は ω から ω への**有限部分関数**（**finite partial function**）という.

ゆえに ${}^{<\omega}2$ は ω から 2 への有限部分関数全体の集合に, ${}^{<\omega}\omega$ は ω から ω への有限部分関数全体の集合になります. ■

finite partial function という名前は [7] の 173 ページを参考にして, 有限部分関数はそれを訳したものです.
各 $s \in {}^{<\omega}2$ や $t \in {}^{<\omega}\omega$ を用いることで, ${}^{\omega}2$ や ${}^{\omega}\omega$ の部分集合を定義します.

Definition 2.1.4.
$s \in {}^{<\omega}2$ と $t \in {}^{<\omega}\omega$ に対して

$$\begin{aligned} O(s) &\overset{\text{def}}{=} \{\ f \in {}^{\omega}2 \mid \forall n \in \operatorname{dom} s\big(\ s(n) = f(n)\ \big)\ \} \\ &= \ \{\ f \in {}^{\omega}2 \mid s = f{\restriction}\operatorname{dom}(s)\ \} \\ &= \ \{\ f \in {}^{\omega}2 \mid f \text{ は } s \text{ の拡大}\ \}. \end{aligned}$$

同様に $O(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid \forall n \in \operatorname{dom} t(\ t(n) = f(n)\ )\,\}$.
$O(s)$ を s を元にした ${}^{\omega}2$ の **basic set** とよぶ. 同様に $O(t)$ を t を元にした ${}^{\omega}\omega$ の **basic set** とよぶ. [1] ■

$O(s)$ という記法は [5] を参考にしています. この $O(s)$ はテキストによっては $[s]$ と表したりします（例えば [10] など）.
$O(s)$ や $O(t)$ は s, t を拡大した関数全体の集合であり, その定義から $O(s) \subseteq {}^{\omega}2$, $O(t) \subseteq {}^{\omega}\omega$ です.
この basic set でもって ${}^{\omega}2$ や ${}^{\omega}\omega$ の開集合を表現します.

Proposition 2.1.5.
集合 $\mathcal{B}$ に対して

- $\mathcal{B} = \{\, O(s) \mid s \in {}^{<\omega}2\,\}$ のとき, $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}2$ は Cantor 空間の開基である.
- $\mathcal{B} = \{\, O(s) \mid s \in {}^{<\omega}\omega\,\}$ のとき, $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ は Baire 空間の開基である. ■

この証明は○○にてやることにします（今はこの空間たちを使えるようになることだけを目的としてます）.
つまり集合 $O \subseteq {}^{\omega}2$ が ${}^{\omega}2$ の開集合ならば, ある $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ があって $O = \bigcup \mathcal{A}$ となっている. よって $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}2)$ を ${}^{\omega}2$ の開集合系とすると, $\mathcal{O} = \{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ となります. Baire 空間も同様です.
開基の定義から basic set は Cantor 空間や Baire 空間の開集合です. よって一般的には basic set は **basic open set** と呼ばれることが多いです.
位相空間の定義から $\emptyset, {}^{\omega}2$ は ${}^{\omega}2$ の開集合です. $\emptyset \in \mathcal{O}$ であるとは $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ を $\mathcal{A} = \emptyset$ とすれば明らかです.
${}^{\omega}2 \in \mathcal{O}$ であることを示すために, ある $n \in \omega$ を用いて $s_0, s_1 \colon \{n\} \to 2$ を $s_i(n) = i$ な, たった 1 つの対応規則のみの関数とします. 関数を順序対の集合としてとらえるなら $s_i = \{\langle n, i\rangle\}$ です. すると $O(s_i)$ は n の値が i になる ω から 2 への関数全体の集合になり, $O(s_0) \cup O(s_1)$ は n の値が 0 か 1 かの ω から 2 への関数全体の集合, つまり ω から 2 への関数全体の集合, すなわち ${}^{\omega}2$ になります. よって ${}^{\omega}2 \in \mathcal{O}$ を示すためには $\mathcal{A} = \{O(s_0), O(s_1)\}$ とすればよいです.
同様にして $\mathcal{O} \subseteq {}^{\omega}\omega$ を Baire 空間の開集合系とすると, $\emptyset \in \mathcal{O}$ も同様に明らかで, ${}^{\omega}\omega \in \mathcal{O}$ はある n を用いて

$$\mathcal{A} \ = \ \{\, O(s_i) \mid i \in \omega \ \land \ s_i(n) = i\,\}$$

とすれば, $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \omega} O(s_i) = {}^{\omega}\omega$ となります.
実は Proposition 2.1.5（31 ページ）よりも要素が少なくなった別の開基が存在します. 次節にてそれについてと, 有限部分関数とそれを元にした basic set との関係を紹介します.

2.1.2 Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現

Cantor 空間と Baire 空間は Proposition 2.1.5（31 ページ）にあるような開基で議論されることは少ない（ような気がします）.
これからの議論に使うための basic set の集合を定義しておきます.

Definition 2.1.6.
$\mathcal{B}_{\lhd} \subseteq {}^{\omega}2, {}^{\omega}\omega$ を以下のように定める.

- $\mathcal{B}_{\lhd} \ = \ \{\, O(s) \mid \exists n \in \omega(\ s \colon n \to 2\ )\,\}$.
- $\mathcal{B}_{\lhd} \ = \ \{\, O(s) \mid \exists n \in \omega(\ s \colon n \to \omega\ )\,\}$. ■

同じ用語を 2 つの意味で使うことになりますが, 2 つの空間を同時に扱わなければ混乱はないと思うので, このまま使っていくことにします.
ある $n \in \omega$ について, $s \colon n \to 2, t \colon n \to \omega$ は確かに ω から 2 や ω への有限部分関数, つまり $s \in {}^{<\omega}2, t \in {}^{<\omega}\omega$ ですが, $n \in \omega$ より定義域が単なる ω の有限部分集合ではなく, 何らかの（順序数の意味での）自然数 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ となっています. つまり $\mathcal{B}_{\lhd} \subseteq \mathcal{B}$ であり, 元の定義の開基よりも明らかの要素が減っているため, これもまた開基になるのか一見明らかではないですが, 確かに $\mathcal{B}_{\lhd}$ もまた, Cantor 空間や Baire 空間の開基となります.

[1] 一般的には「s を元にした」は付けない. ただ言葉の成り立ちからそのような前置きが必要ではと感じてこのように名前を付けました.

Proposition 2.1.7.
$\mathcal{B}_\lhd$ は Cantor 空間の開基である．
また $\mathcal{B}_\lhd$ は Baire 空間の開基である． ■

Proof まずは Cantor 空間について示します． $\mathcal{B}_\lhd \subseteq \mathcal{B}$ であるので，任意の $\mathcal{B}$ の要素を $\mathcal{B}_\lhd$ の要素の和で表現できることを示せばよいので，任意に $O(s) \in \mathcal{B}$ をとります． $s \in {}^{<\omega}2$ の定義域 $\mathrm{dom}(s)$ を $\mathrm{dom}(s) = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ とおくと，$\mathrm{dom}(s) \subseteq a_m = \{0, 1, \ldots, a_{m-1}\}$ です．s に対して $T_s \subseteq {}^{<\omega}2$ を $T_s = \{\, t\colon a_m \to 2 \mid t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s \,\}$ と定めます．T_s とは s の拡大で，s の定義域の中で a_{m-1} までの足りない自然数を全て補った関数全体の集合です．あとは $O(s) = \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ を示せば証明終わりです．

> 集合の等号関係を示す．
>
> $O(s) \subseteq \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ の証明
> 任意に $f \in O(s)$ をとる．$t = f{\restriction}a_m$ とおくと $\mathrm{dom}(s) \subseteq a_m$ より $t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s$ より $t \in T_s$ です．よって $f \in O(t)$，つまり $f \in \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ です．
>
> $\bigcup_{t \in T_s} O(t) \subseteq O(s)$ の証明
> 任意に $f \in \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ をとると，ある $t \in T_s$ があって $f \in O(t)$，つまり $f{\restriction}\mathrm{dom}(t) = t$ です．$\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $f{\restriction}\mathrm{dom}(s) = t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s$ なので，$f \in O(s)$ です．

ここまで特に各 s, t などの値域が 2 であることに依存した証明をしていないので，Baire 空間についても同様に示すことができます． □

この証明によって Proposition 2.1.5（31 ページ）の $\mathcal{B}$ も $\mathcal{B}_\lhd$ のどちらも Cantor 空間，Baire 空間の開基なので，どちらを証明に用いても問題なく，そのときの議論や証明にあわせて使いやすい方を適宜選択します．
便利の為以下のような定義をしておきます．記法は（多分）オリジナルです．

Definition 2.1.8.
${}^{<\omega}2$ や ${}^{<\omega}\omega$ の部分集合として以下のようなものを定義する．

- ${}^{\lhd\omega}2 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, s \in {}^{<\omega}2 \mid \exists n \in \omega(n = \mathrm{dom}(s)) \,\}$.
- ${}^{\lhd\omega}\omega \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, s \in {}^{<\omega}\omega \mid \exists n \in \omega(n = \mathrm{dom}(s)) \,\}$. ■

どのような点に便利かというと上の議論での開基 $\mathcal{B}_\lhd$ を，簡単に $\{\ O(t) \mid t \in {}^{\lhd\omega}2\ \}$ と書き表すことができます．またこれらの集合は有限列の集合ともとらえることができます．

この節の最後の話題として，${}^{\lhd\omega}2$, ${}^{\lhd\omega}\omega$ の性質をまとめおきます．
${}^{<\omega}2$ などとの違いとして，どの $s, t \in {}^{\lhd\omega}2$ に対しても，$\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ か $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(s)$ のどちらかもしくは両方が成立します．$s, t \in {}^{<\omega}2$ ならば $\mathrm{dom}(s) \cap \mathrm{dom}(t) = \emptyset$ となって，上記のようにはならないことがありえます．
続いて ${}^{<\omega}2$ や ${}^{\omega}2$ の要素に関する用語を定義します．ここからは [5] や [7] を主に参考にしています．

Definition 2.1.9.
$s, t \in {}^{<\omega}2$ と $f \in {}^{\omega}2$ に対して，

(1) $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ かつ $\forall n \in \mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) = t(n)\ \big)$ を満たすとき，s を t の **initial segment（始切片）** と呼び，$s \trianglelefteq t$ で表す．

(2) $\forall n \in \mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) = f(n)\ \big)$ と満たすときも，s を f の **initial segment（始切片）** と呼び，$s \trianglelefteq f$ で表す．

$s, t \in {}^{<\omega}\omega$ や $f \in {}^{\omega}\omega$ に対しても同様に定義し，同じように initial segment と呼び，$\trianglelefteq$ を使って表す． ■

$s,t \in {}^{\lhd\omega}2, {}^{\lhd\omega}\omega$ だった場合, s,t を有限列ととらえると initial segment という言葉遣いにも納得してもらえると思います. initial segment とは整列集合のある条件を満たす部分集合のことを指したりもしますが, その場合とは区別が容易なので, ここでは特に別の呼び方を考えたりはしません.
initial segment を表す記号として [5] では $\lhd$ を用いていますが, そこの定義でも $s=t$ の場合を含んでいたので, $\unlhd$ を使うことにしました.
s,t が ${}^{\lhd\omega}2$ や ${}^{\lhd\omega}\omega$ の要素だけで議論しているときに, s,t を順序対の集合と見れば, $s \unlhd t$ とは単に $s \subseteq t$ となります.
そして $\unlhd$ という関係は推移的です. つまり $s,t,u \in {}^{<\omega}2$ と $f \in {}^{\omega}2$ に対して, $s \unlhd t$ かつ $t \unlhd u$ ならば $s \unlhd u$, そして $s \unlhd t$ かつ $t \unlhd f$ ならば $s \unlhd f$ です.
$\unlhd$ を用いた定義を 1 つ用意します. これも [5] にあったものです.

Definition 2.1.10.
$s,t \in {}^{<\omega}2$ に対して, $s||t \overset{\text{def}}{\iff} s \unlhd t \vee t \unlhd s$.
また $s,t \in {}^{<\omega}\omega$ に対しても同様に定義する. ■

これは有限列同士のどちらかがどちらかの始切片であるという関係になります. もちろん $s||t$ には $s \unlhd t \wedge t \unlhd s$, つまり $s=t$ である場合も含まれています.
[5] では $s||t$ を s,t が compatible, $s||t$ でないことを $s \perp t$ で表し incompatible と呼んでいます. 私自身この言葉は強制法の議論のさいに見たことがあるもので, その定義は似ていますが少し異なります. その理由の考察としては, 本来の $s,t \in {}^{<\omega}\omega$ が compatible（これは $s \not\perp t$ で表す）であるとは, s,t が共通拡大を持つことになっています. そして [5] ではそもそも ${}^{\lhd\omega}\omega$ の要素しか議論しないため, $s,t \in {}^{\lhd\omega}\omega$ が共通拡大を持つとはそもそもどちらかがもう一方の拡大になっているときになります. よって $s||t$ に compatible という言葉を充てるのは, それほど間違ってはいません. このノートでは強制法も扱うかもしれないので, ここでは $s||t$ には呼び方を与えず, このまま使っていくことにします.
これまでの用語と basic set に関する簡単な命題を紹介します. [5] に載っていたものです.

Proposition 2.1.11.
$s,t \in {}^{\lhd\omega}2$ に対して

(1) $s \unlhd t \iff O(t) \subseteq O(s)$

(2) $s||t \iff \big(O(t) \subseteq O(s) \vee O(s) \subseteq O(t) \big)$

(3) $\neg s||t \iff O(s) \cap O(t) = \emptyset$

(4) $O(s) \cap O(t)$ は何らかの basic open となるか, または $\emptyset$ のどちらかになる

また $s,t \in {}^{\lhd\omega}\omega$ に対して同様に成立する. ■

Proof $s,t \in {}^{\lhd\omega}2$ についてのみ示す.

(1) 両辺が同値であることを示す.

($\Rightarrow$) 任意に $f \in O(t)$ をとる. $f\restriction\mathrm{dom}(t) = t$ と $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $f\restriction\mathrm{dom}(s) = t\restriction\mathrm{dom}(s) = s$ だから, $f \in O(s)$.

($\Leftarrow$) 先の議論より $s,t \in {}^{\lhd\omega}2$ に対して $\mathrm{dom}(t) \subsetneq \mathrm{dom}(s)$ か $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ のいずれかが成立. まず $\mathrm{dom}(t) \subsetneq \mathrm{dom}(s)$ だったとすると, $n = \min\big(\mathrm{dom}(s) \setminus \mathrm{dom}(t)\big)$ とおき, $t' = t \cup \{\langle n, 1-s(n)\rangle\}$ とすると $t' \in {}^{\lhd\omega}2$ です. そして t^{prime} の何らかの拡大を f とおくと, $t \unlhd t'$ と $t' \unlhd f$ より $t \unlhd f$, つまり $f \in O(t)$ と仮定より $f \in O(s)$ だが, $f(n) \neq s(n)$ より $f \notin O(s)$ となって矛盾.
続けて $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ として $\exists n\,\mathrm{dom}(s)\big(\, s(n) \neq t(n) \,\big)$ だったとし, そんな n を 1 つ固定しておく. 任意に $f \in O(t)$ をとると, $f\restriction\mathrm{dom}(t) = t$, そして $n \in \mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $t(n) = f(n) \neq s(n)$, よって f は s の拡大ではない, つまり $f \notin O(s)$ だが, これは仮定に矛盾.

(2) これは $s||t$ と (1) より明らか.

(3) 両辺が同値であることを示す.

(⇒) 先の議論より $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ か $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(s)$ のどちらかが成立するので, $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ だとすると仮定と合わせて $n\,\mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) \neq t(n)\ \big)$ となるので, そんな n を 1 つ固定します. いま, $f \in O(s) \cap O(t)$ とすると $s \trianglelefteq f \wedge t \trianglelefteq f$ と, $n \in \mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より, $s(n) = f(n) \wedge t(n) = f(n)$ から $s(n) = t(n)$ となるが, これは n の定義に矛盾.

(⇐) $O(s) \cap O(t) = \emptyset$ より $O(s) \subseteq O(t)$ でも $O(t) \subseteq O(s)$ でもない, つまり $s \trianglelefteq t$ でも $t \trianglelefteq s$ でもないことになり, つまり $\neg s||t$.

(4) $s||t$ だったとすると (2) より $O(s) \subseteq O(t) \vee O(t) \subseteq O(s)$ となり, そして仮に $O(s) \subseteq O(t)$ だとすると $O(s) \cap O(t) = O(s)$, つまり basic open になっている.
$\neg s||t$ だとすると (3) より $O(s) \cap O(t)$ は $\emptyset$ となる. □

2.1.3 Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく

この節ではこれまで使用してきた Proposition 2.1.5（31 ページ）の証明を目標とします. つまり何故全ての basic open set の集合が, どちらの空間においてもその空間の開基になるのかをまとめてみます.
もう一度一般的に議論すると, 添え字集合が ω, 各因子空間の台集合が X であるような直積位相空間 ${}^{\omega}X$ において, その位相は $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}X)$ を

$$\mathcal{G} \ = \ \{\, p_i^{-1}[O] \mid i \in \omega \wedge O \text{ は } X \text{ の open set} \,\}$$

とおいたときの, $\mathcal{G}$ が生成する位相のことでした. ここで各 $\in \omega$ において p_i は第 i 成分の射影です.
${}^{\omega}2$ において $\mathcal{G}$ がどのような集合になるか見てみます. ${}^{\omega}2$ において各因子空間 2 には離散位相が入っています. よって位相空間 2 では $\emptyset, \{0\}, \{1\}, 2$ の 4 つが開集合です. それぞれの開集合の, 各射影での逆像がどのようになるのかというと, ある $i \in \omega$ において $p_i^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ です. $p_i^{-1}[\{0\}]$ とは, ${}^{\omega}2$ の各要素を $0, 1$ の可算列と捉えた場合第 i 成分が 0 になっているような, ${}^{\omega}2$ の各要素を ω から 2 への関数と捉えた場合 i を 0 に写すような, そんなものたちの集合になっています. つまり後者でとらえた場合は,

$$p_i^{-1}[\{0\}] \ = \ \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) = 0 \,\}$$

です. $\{1\}$ も同様にして $p_i^{-1}[\{1\}] \ = \ \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) = 1 \,\}$ となります. そして $p_i^{-1}[2]$ とは ${}^{\omega}2$ の要素の中で i の値が 0 または 1 になっているもの全体ということで, つまり $p_i^{-1}[2] = {}^{\omega}2$ となります. 一般的には $O \subseteq 2$ に対して

$$p_i^{-1}[O] \ = \ \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) \in O \,\}$$

となります.
${}^{\omega}\omega$ においても同様に各因子空間 ω には離散位相が入っている, つまり ω のどの部分集合も ω の開集合です. なので $O \subseteq \omega$ に対して

$$p_i^{-1}[O] \ = \ \{\, f \in {}^{\omega}\omega \mid f(i) \in O \,\}$$

となります.
開集合 O が一元集合のときは, $p_i^{-1}[O]$ は 1 つの basic set になります. それを元にする有限部分関数のための記法を用意します.

Definition 2.1.12.
$i, i_0, \ldots, i_n \in \omega$ に対して

- $k \in 2$ に対して $[i \mapsto k] \ = \ \{\langle i, k\rangle\}$ と定めます. つまり i を k に写すというたった 1 つの対応規則のみの関数のことです. $k \in \omega$ に対しても同様に $[i \mapsto k]$ を定めます.

- $k_0, \ldots, k_n \in 2$ に対して
$$[i_0, \ldots, i_n \mapsto k_0, \ldots, k_n] \ = \ \{\, \langle i_m, k_m\rangle \mid 0 \leq m \leq n \,\}$$
として定め, $k_0, \ldots, k_n \in \omega$ についても同様に定める. ■

つまり $k \in 2$ に対して $p_i^{-1}[\{k\}] = O([i \mapsto k])$ となります. $k \in \omega$ の場合も同様です. より一般的には以下のようになります.

Proposition 2.1.13.
$A \subseteq 2$ に対して $p_i^{-1}[A] = \bigcup_{a \in A} O([i \mapsto a])$. $A \subseteq \omega$ の場合も同様.
とくに

$$\begin{aligned} p_i^{-1}[2] &= O([i \mapsto 0]) \cup O([i \mapsto 1]) &= {}^{\omega}2. \\ p_i^{-1}[\omega] &= \bigcup_{k \in \omega} O([i \mapsto k]) &= {}^{\omega}\omega. \end{aligned}$$ ■

よって ${}^{\omega}2$ の場合, $\mathcal{G}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \{ p_i^{-1}[\emptyset] \mid i \in \omega \} \cup \{ p_i^{-1}[\{0\}] \mid i \in \omega \} \cup \{ p_i^{-1}[\{1\}] \mid i \in \omega \} \cup \{ p_i^{-1}[2] \mid i \in \omega \} \\ &= \{\emptyset, \emptyset, \dots\} \cup \{ O([0 \mapsto 0]), O([0 \mapsto 1]), \dots \} \cup \{ O([1 \mapsto 0]), O([1 \mapsto 1]), \dots \} \cup \{{}^{\omega}2, {}^{\omega}2, \dots\} \\ &= \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \cup \{ O([i \mapsto 0]) \mid i \in \omega \} \cup \{ O({}^{<)i}1 \mid i \in \omega \} \\ &= \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \cup \{ O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in 2 \} \end{aligned}$$

となります. ${}^{\omega}\omega$ の場合 $\mathcal{G}$ は同様にして

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, {}^{\omega}\omega\} \cup \{ O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in \omega \}$$

となります.
ここまでの議論をまとめておきます.

Proposition 2.1.14.
$\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}2), \mathcal{G}_\omega \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}\omega)$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 &= \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \cup \{ O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in 2 \}, \\ \mathcal{G}_\omega &= \{\emptyset, {}^{\omega}\omega\} \cup \{ O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in \omega \} \end{aligned}$$

とすると, Cantor 空間の位相は $\mathcal{G}_2$ が生成する位相, Baire 空間の位相は $\mathcal{G}_\omega$ が生成する位相である. ■

もう一度位相空間論に戻ると, ある集合 $\mathcal{G}$ が生成する位相とは, $\mathcal{G}$ の全ての要素を開集合とするような最弱の位相で, それは Lemma 1.2.22（14 ページ）より $\mathcal{G}$ を準基とするような, つまり開基の $\mathcal{G}$ の要素の有限個の共通部分全体になります. よってそんな開基を $\mathcal{B}$ とおくと

$$\mathcal{B} = \{ \bigcap_{0 \le i \le n} G_i \mid n \in \omega \wedge G_0, \dots, G_n \in \mathcal{G} \}$$

です.
よって先ほどの Proposition 2.1.14（35 ページ）での $\mathcal{G}_2$ や $\mathcal{G}_\omega$ の有限個の要素で共通部分をとるとどのようになるか調べます.

Proposition 2.1.15.
互いに異なる $i, i_0, \dots, i_n \in \omega$ と $A_0, \dots, A_n \subseteq \omega$ に対して

1. $k_0, k_1 \in 2$ が $k_0 \neq k_1$ ならば $O([i \mapsto k_0]) \cap O([i \mapsto k_1]) = \emptyset$.
   より一般的には $O([i \mapsto k]) \cap O([i \mapsto 1-k]) = \emptyset$.
2. $k_0, \dots, k_n \in 2$ に対して $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} O([i_m \mapsto k_m]) = O([i_0, \dots, i_n \mapsto k_0, \dots, k_n])$.
3. $k_0, \dots, k_n \in \omega$ に対して $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} O([i \mapsto k_m]) = \emptyset$.
4. $\displaystyle(\bigcup_{a \in A_0} O([i \mapsto a])) \cap (\bigcup_{a \in A_1} O([i \mapsto a])) = \bigcup_{a \in A_0 \cap A_1} O([i \mapsto a])$.
   とくに $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ のとき $\displaystyle(\bigcup_{a \in A_0} O([i \mapsto a])) \cap (\bigcup_{a \in A_1} O([i \mapsto a])) = \emptyset$.
5. $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} (\bigcup_{a \in A_m} O([i_m \mapsto a])) = \bigcup_{a_0 \in A_0, \dots, a_n \in A_n} O([i_0, \dots, i_n \mapsto a_0, \dots, a_n])$. ■

参考文献

[1] Wikipedia『基底 (位相空間論)』, 6 2018. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9F%BA%E5%BA%95_(%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%96).

[2] Wikipedia『数学的構造』, 7 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E7%9A%84%E6%A7%8B%E9%80%A0.

[3] Christopher S Hardin and Alan D Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-*. 11 2012. おそらく [4] の出版前原稿.
http://qcpages.qc.cuny.edu/~rmiller/abstracts/Hardin-Taylor.pdf.

[4] Christopher S Hardin and Alan D Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-*. Springer, 10 2013. 本当はタイトルに「-」は入っていないがファイル名として採用できるようにこのように修正した.[3] も同様.
https://www.springer.com/gp/book/9783319013329
Amazon の URL.

[5] Yurii Khomskii. Infinite games-summer course at the university of sofia, bulgaria, 7 2010. https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/infinitegames2010/Infinite%20Games%20Sofia.pdf.

[6] Alex Kruckman. Notes on ultrafilters, 7 2011. 著者の HP（https://akruckman.faculty.wesleyan.edu/notes-slides/）から発見したもの.toolbox seminar という企画で発表したものらしい. 他にも面白そうな PDF がたくさん配置されている.
https://akruckman.faculty.wesleyan.edu/files/2019/07/ultrafilters.pdf.

[7] Kenneth Kunen. *Set Theory (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations)*. College Publications, 11 2011.
https://www.collegepublications.co.uk/logic/mlf/?00016
Amazon の URL.

[8] 佃修一. 幾何学序論講義ノート, 4 2013. http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/note_2013.

[9] 嘉田勝. 論理と集合から始める数学の基礎. 日本評論社, 12 2008. https://www.nippyo.co.jp/shop/book/4116.html
Amazon の URL.

[10] 渕野昌. 実数の集合論の基礎の基礎, 10 2003. https://fuchino.ddo.jp/notes/set-th-of-reals-kiso-no-kiso.pdf.

[11] 齋藤正彦. 数学の基礎 集合・数・位相 (基礎数学 14). 東京大学出版会, 8 2002. http://www.utp.or.jp/book/b302226.html
Amazon の URL.

[12] 内田伏一. 集合と位相 (数学シリーズ). 裳華房, 11 1986. https://www.shokabo.co.jp/mybooks/ISBN978-4-7853-1401-9.htm
Amazon の URL.

索 引