souji ノート

souji

目 次

第 I 部　研究ノート 1

第 1 章　帽子パズル概要 5

1.1 帽子パズルとは？ 5

1.1.1 この章の今後の流れの説明 12

1.2 バリエーション 12

1.2.1 帽子パズルの構成要素 12

1.2.2 囚人数・色の数と帽子をどう見分けるか？ 17

1.2.3 帽子に付く色の個数 18

1.2.4 帽子の見え方 20

1.2.5 帽子についての情報 22

1.2.6 発言方法 23

1.2.7 色以外の発言 24

1.2.8 発言回数 26

1.2.9 勝利条件 26

1.3 帽子パズルの歴史 27

1.3.1 パズルとしての帽子パズルの歴史 27

1.3.2 数学的対象としての帽子パズルの歴史 39

1.4 帽子パズルの形式化 39

1.5 帽子パズルの限界 45

第 2 章　有限な帽子パズル 47

2.1 Hardin-Taylor の帽子パズル 47

2.1.1 Smullyan の帽子パズル 47

第 3 章　無限な帽子パズル 49

3.1 概略と節案内 49

第 4 章　他のパズルとの関係 51

第 5 章　論文精読と文献調査 53

5.1 100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル 53

第Ⅰ部

研究ノート

自分の研究についてまとめるノートです. 1 章の最初の節にて, 今後のこのノートの流れについて説明しています. またこれ以外の研究に関わる部・章と, その部・章の分け方の理由についてもそこに書いてあります.

第1章　帽子パズル概要

1.1　帽子パズルとは？

私の自身の研究テーマであるパズルを**帽子パズル**とよんでいます．様々なバリエーションがありますが，最も簡単なものは以下のようなものです．まずはこれを題材に話を進めていきます．

<u>Puzzle</u> 1.1.1.
Two prisoners are told that they will be brought tot a room and seated so that each can see the other. Hats will be placed on their heads and each hat is either red or green. The two prisoners must simultaneously submit a guess of their own hat color, and they both go free if at least one of them guesses correctly. While no communication is allowed once the hats have a strategy session before being brought to the room. Is there a strategy ensuring their release? ■

これは [28] の冒頭で紹介されたパズルをそのまま引用したものです．そしてこれをテキトーに和訳すると以下のようになります．

<u>Puzzle</u> 1.1.2.
2 人の囚人が，ある部屋に連れて行かれ，それぞれが相手を見ることができるように座らされることを告げられる．2 人の頭には帽子が被せられ，それぞれの帽子は赤か緑のどちらかである．2 人の囚人は同時に自分の帽子の色を当てなければならず，少なくともどちらかが正しく当てれば 2 人とも自由の身となる．一旦コミュニケーションをとることは許されないが，帽子は部屋に運ばれる前に作戦会議が行われる．果たして，二人を確実に解放する作戦はあるのだろうか？ ■

このパズルには少し不明瞭な部分があります．冗長になってしまいましたが，答えが変わらない範囲で，記述を少し変えたり加えたりしたり，ゲームのルールも分かりやすいように箇条書きに変えてみたものが以下のパズルです．あと個人的な好みから，帽子の色を赤・緑から白・黒に変更しています．

<u>Puzzle</u> 1.1.3.
釈放を望む囚人が 2 人と彼らを処刑したいと思っている看守がいます．看守は囚人たちに対して，これから行うゲームのルールについて説明しました．その内容は，

1. 看守は囚人たちに目隠しと耳栓をつけたあと，ある部屋へ連れていく．この耳栓は特別製で看守の声以外は何も聞こえないようになっている．
2. 入室後，看守は囚人たちを向かい合うように距離をあけて立たせる．
3. その部屋には白色・黒色どちらかで塗られた帽子が，それぞれ 2 つずつ置かれている．
4. 看守は帽子を 1 人に 1 つずつ囚人たちに被せていく．囚人たちは目隠しによって，どの色の帽子を被ったのかも，誰にも被せなかったものとして何色の帽子がいくつ残ったのかもわからない．
5. 全員に帽子を被せたあと，看守は彼らの中から 1 人ずつ目隠しを外しては再装着する作業を全員分繰り返す．
6. 目隠しを外されたどの囚人も，もう 1 人の囚人が目隠しされたまま帽子を被って立っている様子が見え，相変わらず自身の帽子の色は分からないが，向かい合って立っていることによって，もう 1 人の囚人が被っている帽子の色は分かる．
7. 上記の作業後，つまり再度囚人たちが全員目隠しをしている状態に戻ったあと，看守は彼らに考える時間を十分に与えたのち，囚人たち全員に帽子に塗られた色（黒か白）のうちいずれか 1 つを発言させる．

8. 被っている帽子の色とその発言とが一致していれば, その囚人は正解したことになる. 2 人の囚人の中にそんな正解者が 1 人でもいれば, 囚人たちが勝利したことになり, 2 人とも釈放される. もし 2 人とも正解者でなければ, 囚人たちが敗北したことになり, 2 人とも即座に処刑される.

というものです. 当然ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには分かりません. このルールの説明を受けたあと, 看守はゲーム開始までに囚人たちに作戦を相談する十分な時間が与えました. しかし看守はその作戦相談の様子を盗聴するなどして, 囚人たちがどのような作戦でゲームに挑むか知っているとします. このとき囚人たちには, 入室後に看守が 2 人にどのように帽子を被せても 1 人以上が正解する, つまり囚人たちがゲームに必ず勝利する作戦は存在するでしょうか？存在するならば, それはどのような作戦でしょうか？ ■

このルールの書き方はこれからたくさんのパズルを紹介していくさいの 1 つのフォーマットとして使用します.

最初のパズルの何が不明瞭で, Puzzle 1.1.3 の記述方法にてそれが解消されたのかを解説します. まず 1 つは囚人たちが釈放を願っているという説明です. もし自殺願望があるなどして処刑を望む囚人がいたならば, そんな囚人は作戦を話し合う場面で不真面目になるか, もしくは作戦は承知しつつもゲーム開始後に裏切るかもしれません. パズルとしてなるべく状況を簡単にするためには, そのような面従腹背行為なども含めて非協力的な行動はしない, つまり釈放を願っていて, このような機会が得られたならば, ルールの範囲内で全ての囚人が全力を注ぐと分かるような記述があってもよいのではないかと思いました. 同様に看守は彼らの処刑を望んでいるという設定も付け加えました. これによって看守が彼らに忖度することなく, ルールの範囲内で彼らがゲームに負けるように行動するということが分かります.
続く改良点はルール説明とそれを受けた後にどのようにゲームが始まるのかを明確にした点です. これによってゲーム開始前に囚人たちができるのはあくまで相談だけで, そしてその相談の時間は囚人たちが望むだけ与えられるということが分かります. またそれぞれの発言の前にも十分な時間が与えられることも追記しました. もし目隠しをとったあとに即答を求められれば, いくら良い作戦を考えていても慌てて使えない可能性を考えさせてしまう（少なくては私は考える）からです.
そして帽子の数についての言及が加わりました. よく帽子パズルを誰かに出題したときに受ける質問として, 帽子への色の塗り方に何かしらの規則があるのかと聞かれることがあります. 例えば「2 人の囚人たちの帽子は必ず白黒 1 つずつあるように被せるのか？」と具合にです. そういった疑問を出題側が先に回避するには, 帽子が各色それぞれ囚人分用意されていること, つまり帽子の被せ方は, 2 人に 2 色の帽子を被せる全ての組み合わせの数だけその可能性があることが伝わりやすくなったと思います. しかしこれだと被せなかった帽子がもし囚人たちに見られてしまった場合, 自分たちがどの帽子を被せられたのかヒントを与えてしまいます. たとえばもし白の帽子が 2 つ余っていることを囚人が分かってしまった場合, 相手の帽子を見るまでもなく自分たちは 2 人とも黒を被っていることが分かってしまいます. それを防ぐために目隠しをする設定とそれを外す適切なタイミングの説明を追加しています. 目隠し設定の代わりに帽子はどの色もたくさんある, もっと細かくいえば最低 3 つずつ以上あるとすれば, 仮に被せた後に残った帽子を見られたとて, その情報は囚人たちには自身の色の推測にはなんら役立たないようにすることができます. しかしこの後で帽子のそれぞれの色の個数が重要になるパズルたちも登場します. なのでそんなパズルたちも考慮しなるべく同じ枠組みでパズルを紹介するためにも, 目隠しの設定を採用していきます.
また目隠しと耳栓の設定を加え, 離れて立つことを明記したことで, 囚人たちでコミュニケーションを取りたくとも取れない状況が想像しやすくなったと思います. 他の囚人たちがどのように帽子を被っている様子を確認するのをわざわざ 1 人ずつにした理由は, もし例えば 2 人同時に行えば, たとえ耳栓をしていたとしてもアイコンタクトなどが情報伝達できるかもしれないと考えたからです. この修正で囚人たちは会話どころか, いかなるボディランゲージも使用することができなくなり, それが回答者にも伝わりやすくなったのではないでしょうか. また部屋の中で看守から囚人へ向かい合って立つように命令したことを書いたことで, どのように帽子が見えているのかも伝わりやすくなったと思っています.
そして看守が囚人たちがどのような作戦でゲームに臨むのかを知っている設定を加えました. つまり看守はそのとき気分で帽子を被せることも, 囚人たちの作戦に対して彼らが敗北するように帽子を被せることができます. つまりこの設定を加えることで, このゲームは囚人たちがより不利になっているイメージを与えることができます. つまりこのパズルには偶然囚人たちが勝つということがなく, 囚人たちはかなり綿密に作戦を練らなくてはいけないということも伝わると思います.

ではパズルそのものについて考えていきます. まず看守がどのように帽子を被せるかは規則性も全くなく, 言うなれば看守のそのときの気分ということもありえます. そうなると以下にゲーム前に作戦を練っても, ゲーム開始後に得られる情報は, もう 1 人の帽子の色という自分の帽子の色とは関係のない情報だけで, 本当に自身の色を当てることができるのか疑問に思います.

しかし, このパズルの答えは, 囚人たちが勝利する, つまり「最低でも 1 人は正解する作戦は存在する」であり, その一例は「片方の囚人は相手と同じ色を, もう片方の囚人は相手と異なる方の色を発言する」というものです. このような役割で発言すれば, 囚人たちは看守がどのように帽子を被せようとも, 最低でも 1 人が正解することになります. つまり囚人たちはどちらがどの役割で発言するかをゲーム前に決めておけばよいだけになります. そしてこの作戦は看守に聞かれたとて有効という, 看守の後出しさえ許さない非常に強固な作戦になっています. これを確かめるために 2 人の囚人を a, b とおくことにします. たとえば a が（何色の帽子が見えてとしても）常に黒と発言する, b は常に白と発言する, という作戦で臨んだとします. もちろん看守が彼らの作戦を逆手にとって, a に白を b に黒を被せた場合, どちらも正解せず囚人側の負けになります. しかし, このパズルの答えになっている作戦は, 囚人側は必ず勝つことができ, ゆえに必勝作戦とよぶにふさわしいものになっています.
ではこの作戦が必勝になるのか論理的な・数学的な理由を説明します.
まずは本当に必勝になっているかを確認してみます. 2 人の囚人に黒白の 2 色の帽子を被せる組み合わせは以下の表のように計 4 つです.

	f_1	f_2	f_3	f_4
a	黒	黒	白	白
b	黒	白	黒	白

Table 1.1: 2 人 2 色パズルの帽子の被せ方

4 つの帽子の被せ方にそれぞれ f_1, f_2, f_3, f_4 と名前を付けておきました. つまり f_1 は看守が 2 人ともに黒と被せた場合にあたります.
そして 2 人の相談によって, a は見えた色と同じ色を, b は見えた色と異なる色を発言することになったとします.
例えば f_1 では囚人 a は, 自分が見えた相手の帽子の色, つまり囚人 b が被っている帽子の色と同じ色を発言したいので, 「黒」と発言します. そして囚人 b は, 自分が見えた相手の帽子の色と違う色, つまり囚人 a が被っている帽子の色と違う方の色を発言したいので, 「白」と発言します. すると囚人 a は被っている帽子の色と発言した色が一致しているので正解となり, 残念ながら囚人 b は不正解でしたが, 勝利条件「1 人以上正解である」はみたしているので, 囚人側の勝利となります.
これは f_1 だから勝利できたわけではありません. その他の 3 つの状況においても, 必ず 1 人は正解することができています. 各帽子の被せ方と, 各囚人がどのような色を発言したかをまとめた表は以下のようになります. 正解した囚人の行には色が付いています.

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a	黒	黒	黒	白	白	黒	白	白
b	黒	白	白	白	黒	黒	白	黒

Table 1.2: 必勝戦略における 2 人 2 色パズルの帽子の被せ方とその発言

それぞれの場合を見てもらえれば, 確かに 1 人は正解していることがわかります.
ではこの作戦が必勝になる理由を 2 通りで説明します.

必勝の理由その 1

帽子の被せ方のパターン 4 つ（表 1.1）を見ると,

- 2 人が同じ色を被っているもの（f_1 と f_4）と
- 2 人が別々の色を被っているもの（f_2 と f_3）

の 2 つに分かれます. そして看守がどのように帽子を被せても, 2 人が同じ色を被っているか, 別々の色を被っているかのどちらかになります. つまり

- 見えた色と同じ色を答えていた囚人 a は, 2 人は同じ色を被っていると思って発言している
- 見えた色と違う色を答えていた囚人 b は, 2 人は違う色を被っていると思って発言している

ということになり, 必ずどちらかの思惑通りになるわけですから, 常に 1 人が正解することになります.
先ほどの表 1.1 に, 各囚人の思惑を書いたものが以下のようになります.

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a 2 人は同じ色	黒	黒	黒	白	白	黒	白	白
b 2 人は違う色	黒	白	白	白	黒	黒	白	黒

続けて先ほどの表 1.1 に, 発言した色の情報を一旦抜いて, 2 人の囚人の帽子の様子がどうなっているかの情報を最下段に追加した表が以下のようになります.

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a	黒		黒		白		白	
b	黒		白		黒		白	
色の状態	2 人は同じ色		2 人は違う色		2 人は違う色		2 人は同じ色	

この 2 つの表を合体させ, さらにその被せ方ごとに正解した囚人の行に色を付けたものが以下のようになります.

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a 2 人は同じ色	黒	黒	黒	白	白	黒	白	白
b 2 人は違う色	黒	白	白	白	黒	黒	白	黒
色の状態	2 人は同じ色		2 人は違う色		2 人は違う色		2 人は同じ色	

この表を見れば, その囚人の思惑と帽子の色の状態が一致したときに, その囚人が正解していることが分かります. なので, この戦略が必勝になる理由を改めて述べると, 色の状態は

- 2 人は同じ
- 2 人は違う（2 人は同じ色ではないともいえる）

の 2 つのパターンしかなく, 2 人の囚人でどちらのパターンになっていてもよいように役割を分けられているからです.

必勝の理由その 2

これまで 2 人の囚人を a, b と名付けてきましたが, ここからはあえて a_0, a_1 とすることにします. 別にそのまま a, b でも問題ないのですが, この変更の意図は, その添え字によって偶数か奇数かで区別できるからです（あとでも詳しく述べます）. そしてここからは色を黒・白ではなく, 数の 0, 1 に置き換えます. ここまでの名前の置き換えによって, 先ほどの帽子の被せ方の表 1.1 は以下のように変わります.

	f_1	f_2	f_3	f_4
a_0	0	0	1	1
a_1	0	1	0	1

帽子の色が数に置き換わったことで, 囚人の発言した色という情報も数に置き換わります.

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a_0	0	0	0	1	1	0	1	1
a_1	0	1	1	1	0	0	1	0

そこから, 各囚人ごとにその見えていた色（数）と発言した色（数）の合計という情報を先ほどの表に追加します.

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

例えば, なぜ f_2 の a_0 部分の「合計」項目に 2 という数が入っているかというと, a_0 が見えた a_1 の被っている色（数）である 1 と, a_0 の発言した色（数）である 1 の和が 2 だからです. 同様の理由ですが, 同じ f_2 の a_1 部分の「合計」項目に 1 が書かれているのは, a_1 が見えた a_0 の被っている色（数）である 0 と, a_1 の発言した色（数）である 1 の和が 1 だからです. 他の部分にも同じように計算して書き込んであります. その計算過程を分かりやすいように色を付けたのが以下の表になります.

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

つまり f_1 の a_0 部分の「合計」項目は色が付いていませんが, それは f_1 内の色が付いていない数字を足したものになっています. 逆に色が付いてある「合計」項目は, 同じく色が付いている数字を足したものになっています.
さらに各帽子の被せ方ごとに, その帽子の色（数）の合計という情報も最下段に追加したものが以下の表です.

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
帽子色の合計	0			1			1			2		

これについても, その計算過程が分かりやすくなるように色をつけたものが以下のようになります.

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
帽子色の合計	0			1			1			2		

つまり f_3 の「帽子色の合計」部分に 1 が書いてあるのは, その上にある色の付いた数字を足したからになっています. ここでは帽子色の合計に書かれている数字は, その合計は $0, 1, 2$ のいずれかになっていることを確認してください.
そして各帽子の被せ方における正解者を見ると, その正解者の先ほど追加した「合計」項目と, 「帽子色の合計」項目が一致しています. それが分かりやすくなるように, その被せ方においての正解者の「合計」項目と, 「帽子色の合計」項目に色を付けた表が以下のようになります.

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
帽子色の合計	0			1			1			2		

これはどういうことかというと, まず事実として数値に置き換えた帽子色の合計は必ず偶数（2 で割り切れる数）か奇数（2 で割って 1 余る数）のいずれかになります. そしてそれぞれ

- 囚人 a_0 は自分と相手の帽子色の合計が偶数になると思って発言している
- 囚人 a_1 は自分と相手の帽子色の合計が奇数になると思って発言している

ということになります.
先ほど囚人の名前を a, b から a_0, a_1 に変えたのは, それぞれの添え字 $0, 1$ が, 2 で割って 0 余る数・2 で割って 1 余る数, つまり偶数・奇数を表しています. よって囚人たちは作戦会議では, 各色への $0, 1$ の数の割り当てと, それぞれが偶数か奇数かの担当を決めておけばよい, ということになります. もっというと a_0 は帽子色の合計が 2 で割って余り 0 になる場合を担当し, a_1 は帽子色の合計が 2 で割って余り 1 になる場合を担当しています.
以上の理由で, 囚人たちには必勝作戦が存在します.
またその必勝である理由を見てもらえれば分かる通り, その理由は論理的・数学的です. またこれ以外の数学的理由でもって説明することもできると思います. ゆえにこのパズルは単なる論理パズルを超えて, さまざまな数学が役立つ可能性を持ったパズルの 1 つです.

Puzzle 1.1.3 はよく知られたパズルで, プレイヤーが囚人で, 彼らに帽子を被せる設定からか**囚人と帽子のパズル**と呼ばれています. 英語では **Hat Puzzle** や **Hat (Guessing) Game**, **Hat Problem** などと呼ばれています.

このパズルの一番の特徴は, 各プレイヤーは自身の帽子の色を言い当てる必要があり, その推理のために使える情報が自身の色とは直接は関係ない自分以外の帽子の色のみ, という点にあります. この特徴を際立たせるために, 部屋に入って以降は囚人同士はコミュニケーションがとれない設定になっています. コミュニケーションには会話だけでなく, アイコンタクトや手話などのボディランゲージも含めた, とにかく情報を伝達する術を全て封じています. これを禁止にしておかないと, 作戦を考えるさいに会話ではない囚人たちだけに伝わるサインを考案して使用することができるからです. またもともとのパズルにあった, 同時に発言しなくてはいけないというルールも, 仮に同時でなければ, 片方が相手の色を発言して教えてあげ, もう片方が言い当てるという, パズルとしては面白くない作戦が必勝になってしまいます. よってこの同時に発言しなくてはいけないというのも, コミュニケーションがとれないという制約の一種とも捉えられます. それを際立たせるために改良したパズルでは, 耳栓をした

まま発言させて, 発言の前後でも何も情報が得られないようにしています.

Puzzle 1.1.2 や Puzzle 1.1.3 では, ゲームに挑むプレイヤーが囚人となっていますが, 別に囚人でなくても構いません. ただプレイヤーたちが囚人たちならば, ゲームに対して（処刑を免れたいという）積極的になる理由が説明しやすい・想像させやすいでしょうし, またプレイヤーたちに命令しゲームを設定できる立場に看守という役割が使える点でも, この設定を選ぶ利点はあると思います. 似たような使いやすい設定として, 動画ですが [26] では, プレイヤーが捕えられた人というのは同じであるものの, 捕えたのは人間を食べようとした宇宙人で, 彼らの倫理では協調的かつ論理的行動ができる生物は食べないとしているため, 協調的かつ論理的かどうかを試すためにゲームを行う, みたいなものもあります. ただプレイヤーが開放を臨んでいる捕まえられた人であるという点は同じなので, やはりこのような設定がパズルの説明には便利なのかもしれません.

またプレイヤーに帽子を被せるという設定も必須ではありません. この設定がよく使われる理由は, 帽子に色がついていて, それを被っていれば, 被っている当人にとってその色が分からないということと, そして他人の色が向かい合って立つだけで分かるという場面も想像しやすくなります. 他の設定としては, この自分の色が分からないという点を強調するために, 背中に色付きのモノ, トランプや円盤をつけるというものもあります. しかしこれだとどのように立っていても, 全員が自分以外のプレイヤーの色が分かるように立つことはできません. なのでゲームの手順を追加するなどが必要になってパズルの説明が少し長くなってしまいます. 例えば額に色付きシールをつけるというものがありますが, Puzzle 1.1.3 をこの設定に変えても全く問題はありませんが, プレイヤーが向かい合って立たないことが重要なパズルもあります. 例えば全てのプレイヤーが階段の一段ずつに下の段に向かって立つというものがあります. つまり自分よりも下の段にいるプレイヤーが全て見えているという設定です. 視覚的に分かりやすいものとして, 先に挙げた [26] もそうですし, 同じ動画形式のものならば [1] もそのようなゲーム設定の帽子パズルの例になっています. このようなプレイヤーの配置だと, 額にシールを貼っていても他のプレイヤーからは見えないので, 帽子を被っているとした方が説明が楽になります. 逆にこの場合だと背中に何か色付きのモノをつける設定でもいいかもしれません. しかし色付きの帽子を被せるとした方が, Puzzle 1.1.3 のような向かい合って立つようなパズルでも, これから紹介するどんな似たようなパズルでも, 共通して使える設定です. 英語にて似たようなパズルの名前として Hat がつくものが多いのも, そのような便利さがあるからなのかもしれません.

また帽子に色がついていて, その色を当てなくてはいけないという設定も必須ではありません. Puzzle 1.1.3 のように 2 色が色の候補でかつ帽子を被せる設定ならば, 「同じ帽子が 2 つあって, そのうち何個かに目印のような意味で飾りがついている」としてもよいです. つまり各プレイヤーは自分の帽子にその飾りがついているか否かを当てることが求められるというゲームに変わります. つまり 2 色ならば, 何かが有る無し（オンオフ）という設定と同じです. ゆえに似たようなパズルとして, プレイヤーの顔が泥や煤で汚れていてるという設定もあります. これだと自分自身では汚れているかどうかが確認できないという点で非常に伝わりやすくなります. これから研究するにあたって, このようなパズルを一般化していきます. その 1 つが色の候補を（無限も含めて）2 色より多く増やすというものがあります. よって上記のように何かの有り無しでは少し説明がめんどくさくなります. 帽子に色をつける設定ならば, つける色の候補を増やせば簡単にルールを拡張できるので便利です. 同様の設定として帽子に色をつけるのではなく, 数や記号を書いておくという案もあります. たとえば Puzzle 1.1.3 では $0, 1$ のどちらかが書いてあるとか, ○×のどちらかが書いてあるとか, という風に設定を変えることができます. ただ一番便利なのは数字が書いてあるというものでしょうか. とくに帽子の色の候補が非常に大きな数ないし無限にあるという設定の場合は色よりも数の方が説明は容易いと思います.

よって Puzzle 1.1.3 にて, パズルとして一番大事だと思われる設定は,

- プレイヤーは何かが描かれている帽子を被せられて,
- プレイヤーは自分の帽子に何が描かれているかは分からず,
- プレイヤーは自分の帽子に何が描かれているかを, 自分の帽子を（脱いだりして）見ることなく当てなくてはいけない

というものです. この要素をもつパズルをこのノートでは**帽子パズル**と呼ぶことにします. そして上記の設定のうち「帽子を被せる」の部分のみを別のものに変えたパズルを, 雑ですが**帽子パズルっぽいパズル**と呼ぶことにします. 帽子パズルっぽいパズルも設定を上手に変えることで帽子パズルにすることができます. よってこのノートではこれらを区別することなく, **自分につ**

いての情報を, 自分以外の情報から推測しなくてはいけないという性質のパズルをなるべく多く研究対象にしていきたいと思います. ちなみにこのようなパズルの別の総称として **Induction Puzzles** というものもあります. それについての Wikipedia[4] を参考にしてください.

1.1.1 この章の今後の流れの説明

Puzzle 1.1.3（5 ページ）は様々な種類のある帽子パズルの中で最もシンプルなものです. ここからルールや設定を変えることで様々なバリエーションが生まれます. どのような設定の変え方があるのか, それによってどのように考察方法が変わるのかなどを 1.2 節（12 ページ）で紹介します.

帽子パズルは最初から同じ設定で知られていたわけではありません. つまり帽子パズルっぽいものが先に現れ, それが人々に知られていくうちに帽子パズルの形になって登場しました. そんな帽子パズル・帽子パズルっぽいパズルの歴史についての調査・研究結果を 1.3 節（27 ページ）にてまとめます.

帽子パズルを数学的に研究するためには, パズルに登場する様々な概念, 例えばゲームのルールや囚人たちの作戦といったものを, 数学概念を使って書き直す必要がでてきます. こういった作業は「形式化」と呼ばれますが, そのやり方の一例を, 上記でまとめてバリエーションにも考慮しながら 1.4 節（39 ページ）にてまとめていきます.

そして形式化が完了すると, 帽子パズルについての様々な限界が見えてきます. たとえば Puzzle 1.1.3（5 ページ）では, どのような作戦で臨んでも常に 2 人正解させることはできません. そういった数学的事実のいくつかを, 形式化とそれに対しての数学的論証に慣れる例として 1.5 節（45 ページ）で紹介します.

帽子パズルは様々な方法で分類できますが, その 1 つに, Puzzle 1.1.3（5 ページ）のようにパズルに登場するプレイヤー数も帽子に付いている色の候補の数も有限なものか, そのどちらか一方が無限になっているものです. 前者を単に**有限帽子パズル**と, 後者を**無限帽子パズル**と呼ぶことにします. それぞれについて様々な先行研究が既にあります. 私の最も関心のある帽子パズルは無限帽子パズルですが, 有限パズルもその研究が無限パズルに応用出来る可能性はかなり高いです. なので有限帽子パズルについてもなるべく多く勉強していきたいと思っています. これらをまとめるために, 有限・無限とで研究動機や使用する概念・手法も異なることから, これらはある程度分けておいて, 有限パズルについては第 2 章（47 ページ）で, 無限パズルについては第 3 章（49 ページ）にてまとめていこうと思っています.

帽子パズル以外にも数学者が注目しているパズルはたくさんあります. 帽子パズルを他のパズルと関連付けるような結果も見つかっています. そんな結果については第 4 章（51 ページ）で紹介します.

帽子パズルや, 関連性があるパズルについての論文はこれからたくさん読んでいくことになります. それらのメモや要約を文献ごとにまとめて紹介しているのが, 第 5 章（53 ページ）です.

そして帽子パズルを主にテーマにした数学書 [28] が存在します. そのテキストはとくに無限帽子パズルを研究するうえで最も重要なものになります. 他の文献以上にこのテキストは精読してきたいので, もとの章構成そのままに自分で読んでみて考えたことなどもまとめていきたかったので, そのためのパートが第**??**部（**??**ページ）です.

1.2 バリエーション

1.2.1 帽子パズルの構成要素

帽子パズル・帽子パズルっぽいパズルには様々なバリエーションがあります. 今なお新しい設定のパズルが生まれている中で, 将来も見据えて網羅的にまとめることは難しいとは思いますが, 今時点での研究成果として, 帽子パズルがどのようなバリエー

ションが考えられるかまとめていきます.
他のバリエーションと比較するため, 前述した一番シンプルな帽子パズルを再掲します. これと新しいバリエーションと比較して, 違いがよりわかりやすくなると思います.

Puzzle 1.1.3 の再掲

看守は釈放を望む 2 人の囚人に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 部屋に入ってからは囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.
3. その部屋には白黒に塗られた帽子がそれぞれ 2 つずつ置かれている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 帽子を被せられたあと, 帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させる.
7. その発言とその被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人でもいれば囚人たちの勝利として 2 人とも釈放される. もし 2 人とも不正解ならば囚人たちの敗北として 2 人とも処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. このルールの説明を受けた後, ゲーム開始までに囚人たちには作戦を相談する十分な時間が与えられました. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 囚人たちが勝利する作戦は存在するでしょうか?

さっそく異なるタイプの帽子パズルを紹介します.

Puzzle 1.2.1.
看守は 3 人の囚人に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.
3. その部屋には白黒に塗られた帽子がそれぞれ 3 つずつ置かれている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 帽子を被せたあと他の全ての帽子を見てもらい黒色が 1 つでも見えたら手を挙げる.
7. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, 全員同時に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
8. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, 囚人全員に黒色の帽子を被せました. そしてルールに従って全員手を挙げました. そのあと全員が「分からない」と発言しました. しかしもう一度発言させると全員「黒」と発言し正解だったので釈放されました. なぜどの囚人も自分の色が分かったのでしょうか? ■

Answer 3 人の囚人たちを a, b, c とおく．まず囚人 a の立場にたって考えます．1 回目の発言を終えたあと囚人 a は自分が白色を被っていると考えると, 見えている帽子の色とあわせて今自分たちの帽子の色の様子は以下のようになっていると考えるはずです．

a	b	c
白	黒	黒

こういう被せ方でも最初に全員が手を挙げたことに矛盾はしません．
そして囚人 a は囚人 b の立場にたって考えてみます．すると囚人 c が手を挙げたことと, b からは a の白と c の黒が見えていることから, 囚人 b は自分が黒を被っているとわかるはずです．しかし 1 回目の発言で b は「分からない」と発言したことから, 囚人 a は自身が白色でない, つまり自分は黒色を被っていると分かり, 2 回目の発言で黒を発言して正解しました．a 以外の囚人も 1 回目の発言後に同様に考えたことで自分が黒を被っていると分かりました． □

まず囚人たちに作戦があるかどうかを我々回答者に問うてきた Puzzle 1.1.3 とは, 問題の出題の仕方・出題内容が違うという点があります．しかしそもそも囚人たちが挑むゲームの内容が変わっています．それによって出題方法が変わっています．なぜ出題方法まで変わったのかという考察についてはこの節の最後に行いますが, 今後さらに出題内容は変わっていくので, それについては一旦気にせず進めていきます．

出題内容以外の, 囚人たちが挑むゲームの内容について注目して, Puzzle 1.1.3 と Puzzle 1.2.1 との違いをまとめてみると,

1. 囚人が 3 人になっていること．
2. 色以外に「分からない」という発言もできること．
3. 二度以上発言できることと, それによって 1 つ前の自分以外の発言という情報も, 自身の色の推測に使うことができること．
4. 発言前に「黒が手を挙げさせる」というルールの追加と, それによって自分以外の囚人から見て黒が見えるかどうかを知ることができること．

などがありますが, 私が考える最大の違いは, 囚人たちはチームでゲームに挑むのではなく, あくまで個人で挑む点です．なので入室前に作戦を相談するという行程が無くなっています．詳しく説明すると, Puzzle 1.1.3 では仮に自分が不正解だったとしても, もう 1 人が正解すれば自分も助かります．つまり個人個人の不正解はその囚人の処刑と直接は関係しません．しかし Puzzle 1.2.1 では, 個人の不正解は直接その囚人の処刑につながります．この違いはこれから帽子パズルを分類するうえで最も大きな区分けになります．

続いて Puzzle 1.2.1 を少し変形させたパズルを紹介します．ゲームのルールにおいて Puzzle 1.2.1 から変更した部分は, テキストの色を変えて分かりやすくしています．

Puzzle 1.2.2.
看守は 3 人の囚人（以下彼らを a, b, c とおく）に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました．その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する．
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない．
3. その部屋には白黒に塗られた帽子がそれぞれ 3 つずつ置かれている．
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる．また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない．
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている．
6. 帽子を被せたあと他の全ての帽子を見てもらい黒色が 1 つでも見えたら手を挙げる．

7. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c の順に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
8. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c の順に 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, 囚人全員に黒色の帽子を被せました. そしてルールに従って全員手を挙げました. 最初の発言では 3 人は「分からない」と答えましたが, 2 度目の発言が回ってきた囚人 a は「黒」と発言して正解し釈放されました. なぜ囚人 a は自分の色が分かったのでしょうか？ ■

またこの後 b, c も順に発言させていっても, a と同じように考え発言することで, Puzzle 1.2.1 同様, 全員正解することができます.
Puzzle 1.2.1 と Puzzle 1.2.1 との違いは囚人たちの発言が全員同時ではなく順番になった点だけです.
もう 1 つ囚人たちが協力しないパズルの例を挙げます. Puzzle 1.2.2 をさらに変形させたものになります. こちらも Puzzle 1.2.2 との違いを分かりやすくするために, Puzzle 1.2.2 と異なる部分はテキストの色を変更しました.

Puzzle 1.2.3.
看守は 3 人の囚人（以下彼らを a, b, c とおく）に対して, これから行うあるゲームのルールについて説明しました. その内容は,

1. 囚人たちはこれからある部屋へ移動する.
2. 入室後囚人たちは一切のコミュニケーションがとれない.
3. その部屋には 5 つの帽子があり, うち 2 つは白色に, 残り 3 つは黒色に塗られている.
4. 囚人 1 人に 1 つずつ, 当人にはどの帽子か分からないようにしながらその帽子を被せる. また囚人たちはどの帽子を被せなかったのかも知ることはできない.
5. どの囚人もそれぞれ自分が被っている帽子の色は分からないが, ほかの 2 人の囚人の帽子の色は見えている.
6. 囚人たちにそれぞれ自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c の順に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
7. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c の順に 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです. 当たり前ですが看守が入室後どのように帽子を被せるかは, 囚人たちには秘密です. また囚人は正直なので自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
ルール説明後, 看守は囚人たちをその部屋へ移動させ, ルール通りに帽子を被せました. そのあと a, b は考えたのち順番に「分からない」と答えましたが, それを聞いた c は「黒」と発言して正解し釈放されました. なぜ囚人 c は自分の色が分かったのでしょうか？ ■

Answer 囚人 c は, まず a が「分からない」と答えたことから b と自分の帽子の組み合わせの候補が以下のように絞れます.

b	c
黒	黒
黒	白
白	黒

なぜならもし b,c がどちらも白を被っていれば, a は自分が黒だと分かったはずだからです．なのでその可能性は無くなり上記のような組み合わせだけが候補に残ります．またこれは b も同じことを考えつくことになります．
続けて b も「分からない」と発言したことから, c は自分が黒だと分かります．なぜならば b も自分（b）と c は以下の組み合わせしかないと a の発言から分かっており, そしてもし c が白を被っていれば自分が黒を被っていると発言できたはずです．しかし分からないと答えたということは, b から見て c は黒を被っていたことになります． □

一見するとここまでのパズルとの違いに見えるのは, 私たち回答者には最後まで全ての囚人が何を被っているかは分からないという点と, 帽子の数が色ごとに決まっているという点でしょうか．1 点目はあくまで出題形式の違いです．これについては前述した通り, この節でのちに考察します．2 点目についてですが, これまでのパズルのゲームでは, 色付きの帽子は各色それぞれ全囚人分用意されていました．しかしこれは Puzzle 1.2.1 と Puzzle 1.2.2 と比べると, 実は大した違いではありません．上記 2 つのパズルではそのゲームの中で黒が見えたら手を挙げさせるというものがありました．そしてゲーム開始後に全員が手を挙げたことで, どの囚人も誰から見ても 1 つは黒色帽子が見えていることが分かります．つまり自分たちの帽子の被せ方として本来は $2^3 = 8$ パターンの可能性があったわけですが, 黒が最低でも 2 つは被せられていることが分かり, 帽子の被せ方の可能性は 4 パターンにまで減少しています．よって Puzzle 1.2.1 と Puzzle 1.2.2 の「発言前に黒が見えたら手を挙げる」というルールを無くし, そもそも部屋には「帽子は黒色が 3 つ, 白色が 1 つだけある」という風にルールを変更することと同じことになるからです．よって Puzzle 1.2.1・Puzzle 1.2.2・Puzzle 1.2.3 は, 帽子が全色囚人分用意されていないという点では同じであり, 異なるのはその色の配分だけということになります．つまり Puzzle 1.1.3 と, Puzzle 1.2.1・Puzzle 1.2.2・Puzzle 1.2.3 は, 各色の帽子が全囚人分用意されているか否かの視点でグループ分けすることができます．
さて, このパズルにはこれまでとは異なる最大の違いがあります．これまでのパズルでは自分以外の帽子が全て見えていました．しかし Puzzle 1.2.3 はその解答を見れば分かる通り, 実は囚人 b は a の, 囚人 c は a,b の帽子が見えている必要がありません．つまり c はどの発言が誰の発言なのか, そして各囚人がどのように見えているのかさえ知っていれば, 部屋に入ったあとそれ以外に何も情報を得られなくとも正解することができます．
これらのパズルは説明しやすいように私なりに設定を変えていますが, Puzzle 1.2.3 は物理学者の **Paul Dirac** が考案した可能性があり, Puzzle 1.2.2 はパズル作家でもあった数学者 **Martin Gardner** がその著作にて紹介したものです．この情報や証拠となる文献については 1.3 節（27 ページ）で紹介します．上でも説明したとおり Puzzle 1.1.3 とこれら 3 つのパズルの最大の違いは, 囚人たちが協力するか・できるかという点にあると考えています．よって囚人たちが協力する帽子パズルをこれまで通り **Hardin-Taylor の帽子パズル**と呼ぶことにし, 新たに紹介した囚人たちが協力しない帽子パズルを 2 人の名前をとって, **Dirac-Gardner の帽子パズル**と呼ぶことにしました．
よって私はすべての帽子パズルは囚人が協力するか否かで, この Hardin-Taylor のものか, Dirac-Gardner のものかに大別可能だと考えています．
Hardin-Taylor の帽子パズルの方が Dirac-Gardner の帽子パズルよりもシンプルだと感じます．なぜならば後者では囚人は個人でゲームに挑んでおり, 自分以外の帽子が見えたところでそれだけでは自分の色を推測することは不可能なため, 追加の情報がいくつも必要になるからだと思います．つまり自分も含めた帽子の様子についての情報（誰から見ても最低 1 人は黒がいるとか, 帽子の個数は色ごとに同じではないなど）や, 他の囚人たちの推論の結果という情報などが必要になり, ゆえに問題文も長くなるということです．
Hardin-Taylor の帽子パズルでは協力しているゆえに, 最低でも 1 人は正解するというような「囚人たちの勝利条件」というものが必要になり, その部分では Dirac-Gardner の帽子パズルよりは複雑になります．
2 つのパズルでは帽子パズル特有の「見えない自分の帽子を色を推測する」という要素を持ちますが, 協力するか否かで, 囚人たちの正解者数に注目するか, ここの囚人の推論の推移に注目するかという違いが生まれています．そしてそれゆえにパズルを研究するさいの使用する学問分野も, またパズルの結果の応用先の学問分野も変わってきます．
私の興味をもっている数学の分野は数理論理学・数学基礎論, とくに公理的集合論であり, この数学が応用できるのは囚人たちが協力する Hardin-Taylor の帽子パズルだと考えています．それは先行研究が既にそうなっているからだということに他なりませんが, だからといって Dirac-Gardner の帽子パズルを調査対象から外すわけではありません．なぜならば協力しない点は除いても, それ以外の設定は Hardin-Taylor の帽子パズルにも導入できることがあるからです．またその逆もありえます．
上でも少し述べましたが, 各帽子パズルを構成する要素を, 今時点で私が知っている限り挙げてみます．ここにない要素も, 私が新たなパズルを知ることで追加されるかもしれませんし, 協力・非協力以外の分類方法も生まれるかもしれません．
各要素の具体例を分かりやすくするために, これまで登場したパズルではどうだったのかを以下の表のようにしてまとめてあります．

	Puzzle 1.1.3	Puzzle 1.2.1	Puzzle 1.2.2	Puzzle 1.2.3
協力	協力	非協力		
囚人数	2 人	3 人		
色の数	2 色			
帽子の見分け方	色			
帽子に付く色の個数	1 個			
帽子の見え方	自分以外全員見える			
帽子についての情報	黒白 2 つずつある	有（誰からも黒が 1 つは見える）		有（白 $\times 2$ 黒 $\times 3$）
発言方法	全員同時		1 人ずつ順番に	
色以外の発言	無	「分からない」も可能		
発言回数	全員 1 回	全員 2 度以上可能		

例えば要素の 1 つである囚人数を増やすと, Hardin-Taylor の帽子パズルでの勝利条件の変更の考察をすることができます. 2 人の囚人がプレイヤーであった Puzzle 1.1.3（5 ページ）では, 囚人たちの勝利条件は最低でも 1 人が正解することでした. このままでもたとえば勝利条件を「2 人正解すること」にするとどうなるのか考察することができます. これはのちに示す定理より不可能であると分かります.
このようにして人数を増やすだけでも様々な勝利条件が考察対象に加わります. また単なる正解者の要求でない勝利条件も考案されています. そして Dirac-Gardner の帽子パズルでは囚人数や色数が増えても個々の囚人が自身の色を推測するようなものしかないと思われますが, たとえば「自分に被せられていない色を言い当てる」というものもあります. つまり個々の囚人の勝利条件を変えたものもあります.
よって「囚人たちが協力するかどうか」と以下のような要素をそれぞれ設定することで 1 つのパズルが生まれます.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{囚人たちが協力する}\\ \text{囚人たちが協力しない}\end{array}\right. \times \left\{\begin{array}{l}\text{囚人数}\\ \text{色の数}\\ \text{帽子の見分け方}\\ \text{帽子に付く色の個数}\\ \text{帽子の見え方}\\ \text{帽子についての情報}\\ \text{発言方法}\\ \text{色以外の発言}\\ \text{発言回数}\\ \text{勝利条件}\end{array}\right.$$

ここからは各要素について具体例なども挙げながら, さらにどのような多様なパズルが作成可能か見ていきます.

1.2.2 囚人数・色の数と帽子をどう見分けるか？

囚人の人数や色の数というのはもっとも分かりやすいパズル間の違いで, また一般化も考えやすい要素になっています.
たとえば 2 人 2 色であった Puzzle ??は, 2 人 3 色, 2 人 4 色, 2 人 5 色, . . . , 3 人 2 色, 3 人 3 色, 3 人 4 色, 3 人 5 色, . . . , 4 人 2 色, 4 人 3 色, 4 人 4 色, 4 人 5 色, . . . , という風に様々な組み合わせを考えることができます.
また囚人数・色の数は上記のように 2 人, 3 人, 4 人, . . . , 2 色, 3 色, 4 色, . . . という有限同士の組み合わせだけでなく, 囚人が無限にいる, 帽子に付いている色の種類が無限にある, というものも考えることができます.
改めて有限帽子パズル・無限帽子パズルという言葉について定義しておきます.

Definition 1.2.4.
帽子パズルのうち, 登場するプレイヤー（囚人）と, プレイヤーに被せる帽子の色の候補が共に有限なパズルを**有限帽子パズル**と, どちらか 1 つ以上が無限になっているパズルを**無限帽子パズル**とよぶ. ■

野暮なツッコミをすると, そもそも囚人が無限にいるとはどんな世界なのかというものでしょうか. ただ何度か説明しているとおり, ゲームのプレイヤーを囚人とするのは, 勝利することに全力を出す動機が説明しやすい, 想像しやすくなるから, が一番簡単に思いつく理由です. また帽子パズルのプレイヤーは当初囚人ではありませんでした. 帽子パズルを広めた第 1 人者と見てよい Gardner でさえ, その著作では単なる人間で, 囚人のような属性は付与されていません. いつから帽子パズルが「囚人と帽子のパズル」として紹介されたかの考察は, 1.3.1 節（36 ページ）についてすることにします.
ただ集合論ではこのような現実的に考えると突飛な例え話はたくさんあります. その例として挙げるなら「ヒルベルトの無限ホテルのパラドックス」（Wikipedia の該当ページとして [7]）で登場する, 無限の部屋を持つホテルがあります. これもツッコみだせばキリがない設定です. 無限に部屋があるということは無限に清掃員が必要とか.
しかし無限にいるという設定でも, 数学的な無限として扱うことは必要です. 必要ならば無限といっても, 可算無限なのか, それとも連続体濃度と同等の無限なのか, はたまたそれよりも大きい基数と同等の無限なのか, などなどです. これらについて厳密に議論にしていかないと禅問答になりかねません. この時点では曖昧さがありますが, 集合論を使って帽子パズルを形式化することで, 曖昧さは排除することができます. それについては 1.4 節（39 ページ）を見てください.
帽子に付ける色の候補の無限化に対しても同様なツッコミが可能です. 囚人たちは各帽子の違いを色で見分けています. そもそも色とは何か？という問いに対しては分かりやすい解説として [?] を挙げておきます. そのうえで（人間が見分けることのできる）色は何種類あるのか？という問いに対しての答えは一番大きいもので 1000 万です. 答えの理由として [?] を挙げておきます. 登場人物の囚人が単なる人間であるとするならば, 彼らに無限に色を見分けることもできないため, 帽子に付ける色の候補が無限にある無限帽子パズルは不思議な設定に感じます. 単に 2, 3 色ならばそのままでもいいかもしれませんが, 10 色くらいになるとパズルとして説明するのも煩わしくなります.
これらの解決方法としては帽子には色が付いているのではなく数字が書いてあるとすればよいです. そうすると見分けも簡単につくと想像できますし, パズルの説明も楽になります.
またパズルによっては帽子に数字が書いてあることが重要なものもあります. たとえば囚人は 2 人で, その 2 つの帽子に書かれている数字が連続するようにするとか, 囚人は 3 人で, 1 つの帽子に書かれている数は他の 2 つの数の合計になっている, などです. これは色では表現できない情報です. これについては 1.2.5 節（22 ページ）で具体例をあげることにします.
他には帽子は全て赤色であるが, その濃さが違うというものもあります. しかもその濃さは各正の実数に対応しているという設定でした. つまりこの場合は囚人に被せる帽子の候補は実数の数だけあるという設定です. この設定を活かした帽子パズルとして

1.2.3 帽子に付く色の個数

1.2.1 節（12 ページ）で紹介した 4 つのパズルはどれも囚人たちに被せた帽子は色が 1 つだけ付いていました.
複数の色が付いているというのは右のようなイラスト[1] が想像できます. ただ 2 個よりも多いと, もう帽子では考えにくくなりそうです.
これについて Smullyan はあるパズルを提案しています. それは帽子を被るのではなく, 色付きのシールを複数枚額に貼るという設定のパズルです. これだと個々の囚人に 3 色以上の色を対応させることも簡単に説明できそうです. しかし無限枚, いや十分に大きな枚数を貼るとなると, シールで顔が埋め尽くされた囚人を想像することになるので, そこは囚人の顔の表面積は無限になっているとしましょう. Smullyan はそれまでの帽子パズルを拡張しようとしてこのパズルを考えたのかどうかは不明です. Gardner はその著作 [35] にて, Gardner が考えていた帽子パズルの設定の曖昧さを排除できたものとしてこのパズルを紹介していました. おそらく帽子が単色でないことには, その書籍の中ではとくに注目していなかったのかもしれません.

図 1.1: いらすとや「紅白帽を縦にかぶった男の子のイラスト」

[1] https://www.irasutoya.com/2020/08/blog-post_27.html より入手.

Puzzle 1.2.5.
看守があるゲームをするために 3 人の囚人 a, b, c を同じ部屋に入れたあと, 以下のルールを説明します. そのルールとは,

1. 黒白のシールが 4 枚ずつある. 全ての囚人の額に 2 枚ずつ貼っていく. 自分がどの帽子を被っているのか知ることはできないが, 自分以外の囚人がどのシールを付けているかは見える.
2. そのあと自分に貼られた 2 つのシールの色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c の順に黒黒・黒白・白白か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
3. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c の順に 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色の組み合わせを発言すれば処刑される.

というものです. また囚人は自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします.
1 回目の発言では a, b, c は順番に「分からない」と答え, そのあとさらに a は「分からない」と発言しました. そのあと囚人 b は自分の色の組み合わせを言い当てることができました. なぜ囚人 b は自分の色が分かったのでしょうか？ ■

Answer まず全員が 1 度発言した後とします. そして囚人 b の立場にたって考えます. 囚人 b の額に貼ってあるシールの組み合わせは黒黒・黒白・白白のいずれかです. いま, 囚人 b は自身に黒黒とシールが貼ってあるとしてみます. そこから囚人 b は a の立場に立って考えると, 囚人 a は自身の額には黒白と貼ってあると発言するはずだと考えます.

> ∵ 囚人 a は自身が黒黒だったと考えてみます. しかしそれならば c からは黒が 4 つ見えていることになるので, c は自身が白白であると分かるはずですが, c は 1 度目に「分からない」と発言していたので, 囚人 a は自身が黒黒ではないと分かります.
> 次に囚人 a は自身が白白だったと考えてみます. さらに囚人 c に立場にたつと, もし囚人 c が白白ならば, 囚人 b から見て白が 4 つ見えています. しかし囚人 b が「分からない」と発言したことから, 囚人 c は自身が白白ではないと分かります. つまり囚人 c は a と同じ理由で自身が黒黒でないとも分かっているはずなので, 囚人 c は白白でも黒黒でもないことから黒白だと分かるはずです. しかし囚人 c は「分からない」と発言したことから, a は白白でないと分かります.
> よって残された候補から囚人 a は自身が黒白しかないと分かります.

しかし囚人 a が 2 度目の機会で「分からない」と発言したことから, 囚人 b は自身は黒黒ではないと分かります.
同様に囚人 b が自身には白白と貼ってあると考えてみると, これも囚人 a が 2 度目の機会で「分からない」と発言したことから, この貼り方ではないと分かります.
よって残された可能性である黒白のみが残り, b は自身のシールの組み合わせが分かります. □

[35] に書いてある通り, この問題は上記のような（ややこしい）推論をしなくても解くことができます.

Answer この問題では黒と白のシールの数は同じである. もし囚人 b が自身の色が黒黒だと分かったのならば, 黒黒だと分かった議論の中での白黒を反転させることで, 白白も答えになるはずです. しかし b が一意な答えを見つけたことから黒黒も白白も候補から外れて, 黒白だと分かったはずです. □

このパズルは非協力型の Dirac-Gardner の帽子パズルの拡張です. しかし複数の帽子を被せるという設定だけでも, 協力型の Hardin-Taylor の帽子パズルへ応用可能です. Hardin-Taylor の帽子パズルにて, 各囚人に 2 つ以上の色付き帽子を被せる帽子パズルのことを, 考案者の名前をとって **Smullyan の帽子パズル**とよぶことにします. これについての考察は 2.1.1 節（47 ページ）ですることにします. 今のところは Smullyan の名前を使っていますが, 彼が別の彼由来らしきパズルを考案している可能性も高い（なにせ論理パズル多産者としても有名）ので, そのようなパズルが見つかれば, この名前は再考することにします.

1.2.4　帽子の見え方

ここまでに見てきたパズルは全て, どの囚人も自分以外の全ての帽子が見えていた. 新たなバリエーションとしては, 何人かの囚人がいくつかの帽子を見えなくする, というものです. 一般的に見えない帽子が増えるということは, 使える情報が減ることになるので, 見えなくなる帽子が増えるほど（そして他のルールは変えなければ）, それだけ囚人は不利になります.
たとえば Puzzle **??**を以下のように改造してみます.

<u>Puzzle</u> 1.2.6.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人 a, b を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子は黒白どちらかの色で塗られています. 囚人 a は b の帽子の色が分かりますが, 囚人 b は（目隠しするなどして）a の帽子の色は分かりません. また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人でもいれば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます. もし 2 人とも不正解ならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

もともとのパズルでは囚人側に必勝戦略が存在しましたが, このパズルでは存在しません. つまり看守は囚人たちの作戦を知っていれば, 常に囚人 2 人ともが不正解になるように帽子を被せることができます.

<u>Answer</u>　囚人 b は部屋に入ってからとりうる行動は, 常に黒と発言する, 常に白と発言するのどちらかしかありません. テキトーにその時の囚人 b の気分で黒白の好きな方を発言するというのは, 論理的な行動でもないので 2 人の作戦には組み込めないとしておきます. ちなみに囚人たちの戦略を数学的に定義した場合でも, このような作戦は排除でき, このように何も見えていないような囚人は, 決まられた色を発言するくらいしか行動できないということも分かります. これについては 1.4 節（39 ページ）を見てください.
例えば囚人 b は常に黒と発言するという行動をすることにしたとします. すると看守は b に白の帽子を被せることに決めます. そうすることで b は必ず不正解になります. すると囚人 a がどのような作戦をとろうが, b の色が決まったことで a が何を発言するかも分かります. なので看守は a が発言しない方の色を被せれば a も不正解になります.
つまり看守はそのように被せたときには 2 人とも間違えることになり, 囚人たちは常に 1 人以上正解させることは不可能になります. □

Puzzle **??**では囚人たちは看守に作戦がバレていても常に勝利することができましたが, このパズルでは看守は上記の答えのようにして囚人たちが勝利しないようにすることができますし, 仮に作戦を知らなくてもたまたま上記の答えのように被せた場合でも囚人たちは敗北します.
さらに複雑な見え方をしているパズルは既にたくさん知られています. Dirac-Gardner の帽子パズルの例を 1 つあげます.

<u>Puzzle</u> 1.2.7.
看守があるゲームをするために 3 人の囚人 a, b, c, d を同じ部屋に入れたあと, 以下のルールを説明します. そのルールとは,

1. 囚人 a, b, c は一列に並べて, a は b, c の帽子のみが, b は c の帽子のみが, c, d はどちらも自分も含めてどの囚人の帽子も見えないように立たせる.
2. 4 つある帽子のうち 1 つずつを囚人全員に被せていく. 4 つのうち 2 つは白色に, 残り 2 つは黒色に塗られている.
3. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c, d の順に黒白どちらかの色か「分からない」のいずれかを発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる.
4. もし 1 人でも「分からない」と発言すれば, もう一度考えさせたあとに, 同じように再度 a, b, c, d の順に 3 択の中から発言させる. これを繰り返していき, その中で自分の帽子の色を言い当てることができれば, その囚人は釈放され, 間違った色を発言すれば処刑される.

というものです．また囚人は自分の色が分かっているのに「分からない」とは発言しないものとします．
まず a は「分からない」と答えましたが, それを聞いた b は自身の色を言い当てることができて釈放されました．なぜ囚人 c は自分の色が分かったのでしょうか？ ■

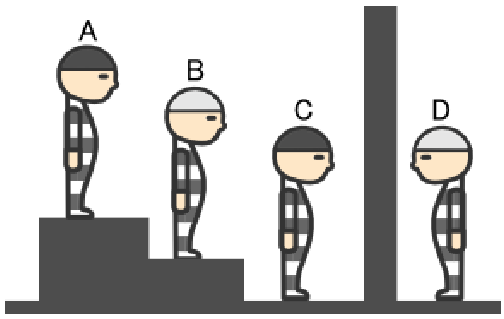

図 1.2: 囚人の立ち位置のイメージ画像

囚人たちは上の画像[2] のように立っていると考えられます．a, b, c の見え方は階段上に下の段に向かって立っているように表現できます．d は誰からも見えていないし誰の帽子も見えていないので, 画像のように目の前に壁があるように捉えることができます．

Answer 囚人 a はもし b, c を見て同じ色が 2 つ見えていれば, 自身が何色を被っているか分かるはずです．しかし「分からない」と発言したことから b, c は黒白を 1 つずつ被っていると分かります．よって c が見えている b は, c が被っていない方の色を被っていると分かります． □

続いて Hardin-Taylor の帽子パズルで例を 1 つ出します．

Puzzle 1.2.8.
看守があるゲームをするために 3 人の囚人 a, b, c, d を同じ部屋に入れたあと, 以下のルールを説明します．そのルールとは,

1. 囚人 a, b, c, d は一列に並べて, a は b, c, d の帽子のみが, b は c, d の帽子のみが, d は自分も含めてどの囚人の帽子も見えないように立たせる．
2. 各囚人に黒白どちらかの帽子を被せていく．この帽子はどちらも全囚人分あるとする．
3. そのあと自分の色が何であるかを考えさせたあとに, a, b, c, d の順に黒白どちらかの色を発言させ, そのさい自分以外の発言は聞こえる．
4. 全囚人の発言が終わったあと, 不正解者が 1 人以下, つまり 3 人以上が正解していれば囚人側の勝利として全員釈放される．

というものです．当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません．このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 4 人で戦略を相談することが可能です．このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

このパズルでは 1 つ前のパズルの a, b, c のように 4 人が階段上に並んで立っていると捉えることができます．この場合は a が最上段に, d が最下段に立っていて, ゆえに d は誰の帽子も見えていません．
このパズルは色の数は Puzzle **??**（**??**ページ）と同じ 2 色ですが, 囚人の数は倍になっていて, 自分以外の帽子が全て見えていた Puzzle **??**と比べれば, a 以外の囚人は多くの帽子が見えなくなっており, d にいたっては何も見えていません．一見かなり不利になっているように思えますが, 順番に発言しかつ自分以前の発言が聞こえることを活かせば, Puzzle **??**の最低 1 人以上という勝利条件よりもより不利な勝利条件「最低 3 人は正解する」というものでも, 必勝戦略が存在します．それは以下のような作戦です．

[2] `http://nazo-nazo.com/sp/cat400/post-78.html` より入手．

Answer　このゲームでは必勝戦略が存在します．まず囚人 a は黒が奇数個見えたら黒と, 偶数個見えたら白と発言するようにし, そのことを他の囚人にも教えておきます．囚人 b はその発言を聞けば自分含めた囚人たちに被せられた帽子の黒の数の偶奇を知ることができます．そして見えている c, d の帽子の黒の数から自分が黒か白か判定することができます．そして囚人 c は直前の b の発言が正解だったと仮定して（実際に正解していますが）, b と同じように自分含めた 3 人の囚人の黒の帽子の数の偶奇の情報と, b の発言と見えている d の色から自身の帽子の色が分かります．最後に d は直前 2 人の発言と a の発言から黒の帽子の数について考えれば, d も自身の色が分かります．
黒の帽子の数は必ず偶数・奇数にどちらかになることから囚人 a は必ずその個数を伝えることができ, そして a 以外の囚人は上記のようにして必ず正解するため, この作戦は必勝になっています． □

つまり囚人 a は他の囚人へ彼らのための情報を伝える役に徹することで, 残りの囚人が正解するようにする作戦です．ただそのまま黒の偶奇を伝えることはできないので, 自分が発言できる色を使って, その情報を暗号にするわけです．囚人たちはその暗号の意味さえ分かっていれば, 上記のように正解することができます．また別に黒の偶奇ではなく白の偶奇としても問題ありません．より分かりやすいのは帽子を白黒という色ではなく, $0, 1$ の数に置き換えて, 囚人 a は b, c, d の帽子の数を合計し, それを 2 で割った余り（必ず $0, 1$ どちらかになる）を発言する, というものすることができます．こちらの方が囚人にとっても覚えやすく間違えにくいと思われます．まぁ帽子パズルでは囚人はどのような作戦もきっちり暗記でき, ゲーム本番でも間違えることなく計算や判断をすることができると仮定されているわけですが.
上記の 2 つのパズルはどちらも発言に順番があるパズルでした．この要素については 1.2.6 節（23 ページ）にて解説しますが, 発言を全員同時にしなくてはいけないパズルでも, このような階段上に囚人が立っていると思えるようなパズルは考えることができます.
囚人が a, b という 2 人の場合は以下のような帽子の見え方の可能性があります.

1. 2 人とも互いに誰の帽子も見えていない.
2. a は b の帽子が見えているが, b は a の帽子が見えない.
3. b は a の帽子が見えているが, a は b の帽子が見えない.
4. 2 人とも互いに相手の帽子が見えている.

つまり 2 人という設定でもこれだけの見え方の候補があって, それにあわせてまた別のパズルを作ることができます.
一般的に囚人が n 人の場合は $2^{n(n-1)}$ パターンの帽子の見え方があります．この数だけ帽子パズルを考えることができるということです．さらにこれらはグラフ理論の言葉を使うことでより効率良く考察しやすくなります．それについては帽子パズルの用語を数学の言葉を使って定義していく, 1.4 節（39 ページ）を見てください.
また囚人が無限にいる場合では, 帽子の見え方のパターンも無限に増えます．そんな中でも特徴的なものを扱っていくとになります．たとえば囚人が自然数と同じだけいる, つまり各囚人に 1 つずつ自然数が割り振られているようなパズルにて, Puzzle **??**（**??**ページ）と同じように自分以外の帽子が全て見えているような設定とか, 自分より大きな番号を割り振られている囚人は全て見えて自分以下の番号の囚人は全て見えないような設定（これは階段上に並んでいるパズルの一般化です）とか, さらに自分が奇数なら自分より大きな偶数だけ見える, 自分が偶数なら自分より大きな奇数だけが見えるなんて設定も考えることができます．これらも日常言語ではなく数学の言葉を使うことで分かりやすくなると思います．どのような無限帽子パズルがあるかについては, 無限帽子パズルの概略説明の節, 3.1 節（49 ページ）に書くことにします.

1.2.5　帽子についての情報

帽子パズルにて「帽子についての情報」として基本的なものは, 色の付いた帽子がそれぞれいくつあるかというものです．またこの情報があればあるほど囚人たちは有利になります．一番囚人たちにとって役に立ちづらい情報は, 全ての色の帽子が囚人の数だけ用意されている場合です．この場合は帽子の被せ方の全てのパターンがありえることになります．Hardin-Taylor の帽子パズルの一番シンプルな場合である Puzzle **??**（**??**ページ）がそのようなパズルの代表例です．囚人たちが協力できない帽子パズルでは, この情報が重要になります．なぜなら被せ方の全てのパターンがありえるという情報だけならば, 囚人はもはや色の数だけ発言の可能性を持つことになり, 一向にその自身の色の繋がる推論をすることができないからです.
この情報が増えるだけで, 正解数という点で囚人たちが有利になることを, Puzzle **??**を改造することで確かめてみます.

<u>Puzzle</u> 1.2.9.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人 a, b を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます．その帽子は黒白どちらかの色で塗られています．しかし黒で塗られた帽子は 1 つしかありません．白のものは 2 つあります．囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています．また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません．この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人ならば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます．もし正解者が 2 人ならば釈放した上に賞金がもらえます．もし 2 人とも不正解ならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます．当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません．このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です．このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 最低でも 1 人正解, 帽子の被せ方次第では 2 人が正解するような戦略は存在するでしょうか？ ■

つまりこのパズルは正解数に応じてボーナスが付くようになりました．もちろん囚人は最低限負けることはなく, あわよくばボーナスも得られるような作戦を考えるはずです．そしてそんな作戦はもとのパズルでの必勝戦略を改造することで得られます．ちなみに元のパズルでの必勝戦略とは a が見えた色と同じ色を, b が見えた色と違う方の色を発言するというものでした．

<u>Answer</u>　囚人たちは以下のように作戦を立てます．a も b も基本的には Puzzle **??**のときと同じように発言しますが, もし黒色が見えた場合は元の作戦は気にせず白と発言します．これは黒黒という組み合わせがありえないということを考慮したうえでの作戦です．すると個々の被せ方パターンにおける発言は以下のようになります．比較のために元のパズル通りの作戦での発言も併記しておきます．※は「Puzzle **??**での発言」の省略です．

	パターン 1			パターン 2			パターン 3		
	帽子色	Puzzle **??**での発言	発言色	帽子	※	発言	帽子	※	発言
a	黒	白	白	白	黒	白	白	白	白
b	白	白	白	黒	黒	黒	白	黒	黒

また Puzzle **??**ではありえた 2 人とも黒を被っているというパターンがなくなっています．
パターン 1 と 3 の場合は Puzzle **??**と同じような発言をするので, 正解者は 1 人のままですが, パターン 2 の場合に a が黒が見えたために, 元の作戦通りに黒と発言せず白と発言しています．そうすることでこの場合には 2 人が正解しています．よってこのような作戦で囚人たちは最低でも 2 人, パターン 2 のような場合だけ 2 人正解するような作戦を立てることができます． □

もし Puzzle **??**にも, 2 人正解した場合のボーナスを設定したとします．しかしどのような戦略で臨んでも, 最低 1 人の正解を保証しつつ上手くいけば 2 人が正解するような作戦は存在しないことを証明することができます．つまりどんな必ず釈放される作戦もパターンごとの平均正解者数は 1 人ちょうどになります．上記のパズルでは平均正解者数は $\frac{4}{3}$ 人になっており, その観点からも囚人たちは有利になっています．
1.2.2 節（17 ページ）でも紹介した, 帽子に色ではなく数字が書いてあるという設定を考えると, 囚人たちに与える帽子について情報はより多彩になります．たとえば全ての囚人の数字は連続しているとかはどうでしょうか？また全ての囚人の数字の和は誰か 1 人の数字に一致するとか, 1 人の囚人の数字は他の囚人の和に等しいとか, 色では表現できなかった情報を囚人たちに与えることができます．
囚人も色の数も無限になれば, さらに数学的な情報も検討できます．たとえば各囚人に自然数が 1 つずつ割り振られていて, 帽子に書かれる数字の候補も全ての自然数から選ばれるとすれば, 全ての囚人に 1 つずつ帽子を被せれば, それは 1 つの自然数列を与えたことと同じ意味になります．ここで看守からその数列（つまり帽子の様子）は収束するというヒントを与えられたらどうでしょうか？このようにして無限の場合は数学概念を用いたより多彩で複雑な帽子パズルを考えることもできます．

1.2.6　発言方法

ここまでで発言方法は, Puzzle **??**（**??**ページ）や Puzzle **??**（**??**ページ）のように全員が同時に発言するものと, Puzzle **??**（**??**ページ）や Puzzle **??**（**??**ページ）のように順番に発言していくものがあった．このノートの作成段階ではもう 1 つの発言方法

も知られている．なのでここでは主にこれら 3 つについて扱っていくことにする．まずは発言方法についてまとめて定義しておく．

Definition 1.2.10.
帽子パズルにて囚人たちの発言の仕方を**発言方法**と呼ぶ．よく知られている発言方法に以下のように名前をつける．

1. **同時発言型**
   囚人たちは全員同時に発言する．同時ゆえに他の囚人の発言を聞くことはできない．

2. 1 **人先行型**
   1 人が最初に発言し，そのあと残りの囚人が同時に発言する．最初に発言する囚人を**先行発言者**と呼ぶことにする．先行発言者以外の囚人は，先行発言者の発言が聞こえている．
   誰が先行発言者になるかはゲーム開始前のルール説明時点で看守より伝えられるものとする．

3. **順次発言型**
   一列に整列できるように囚人たち全員に順番が割り振られており，その順番の中で一番小さい囚人から順に 1 人ずつ発言していく．どの囚人も自分より前の発言は全て聞こえている．
   どのような順番で発言するかはゲーム開始前のルール説明時点で看守より伝えられるものとする． ■

つまり Puzzle **??**と Puzzle **??**は同時発言型をゲームに採用しており，Puzzle **??**と Puzzle **??**は順次発言型を採用している．
同時発言型以外は，発言前の情報が増えるので協力型ならば正解者の数は増えやすい傾向があり，非協力型ならば個々の囚人は正解しやすくなります．1 人先行型における先行発言者と，順次発言型における一番最初に発言する囚人は，誰の発言を聞くことがないので，その意味では同時発言型の囚人たちと同じです．つまり正解のしやすさは同時発言と変わりない状況です．
Puzzle 1.2.8（21 ページ）も順次発言型の例ですが，この場合囚人たちの帽子の見え方と発言の順番が密接に関係していました．つまり自分が見えていない囚人の発言は全て聞こえるという関係がありました．よく一般に紹介される順次発言型のパズルではこの設定が多いですが，Puzzle **??**のように自分以外の囚人が見えていて，かつ順番に発言するというものも設定としてはありえます．
同時発言型と順次発言型は帽子パズルが現れた初期から登場する設定です．しかし最初に考案したのが誰かを特定するのは難しいと思います．なぜなら例えば Puzzle **??**は同時発言型ですが，これは元々Puzzle **??**を知った私が同時発言型になるように改良したものになります．そしてさらに元になったパズルはここまで細かくゲームについて説明されていませんでした．つまりパズルをより正確に伝えるためにどちらの発言型も採用できたということで，どちらの発言方法が先に考案されたかを考えることは難しいです．よくよく考えればこの区分を考えたのは私なので，これ以前のパズルに適用しにくいのは当然です．しかし 1 人先行型については最初に考案したのは Hardin と Taylor かもしれません．なぜならば彼らの著作にて [28] にて登場する以前の文献でまだ発見できていないからです．これについては 23 ページの Theorem 3.2.2 を見てください．ただこの本で登場するさいは無限帽子パズルに採用されており，有限帽子パズルではもしかしたら彼ら以前に発表しているかもしれません．
また非同時発言型の 2 つでは，誰がどの順番で発言するかはゲーム開始前に伝えられると定義しましたが，さらなるバリエーションとして「順番に発言するというルールは伝えるが，誰がどの順番で発言するかは部屋に入った後に伝えられる」というものも考えることができます．つまり囚人たちは自分がどの順番で発言することになったとしても勝利条件を満たすような作戦を練っておく必要があります．ただこのルール変更は有限の場合ではどちらでも大差がないように思われます．それについて研究が進んだ場合にはここに結果への案内を書くことにします．

1.2.7 色以外の発言

これまでのパズルでは囚人たちの色以外の発言としては「（自分の色が）分からない」というものだけでした．またそのパズルではこの発言を他の囚人も聞くことができたため，これがヒントして役に立つこともありました．
色以外の発言である「分からない」は私が沈黙という行為を発言に置き換えたものです．もともと私がアレンジする前は，Puzzle **??**（**??**ページ）は Gardner が紹介した以下のようなものでした（そのまま [35] の 138 ページより引用しています）．

Puzzle 1.2.11.
A, B, C の 3 人が目隠しされて，これから赤い帽子か緑の帽子を被せられると告げられる．彼らに帽子が被されたあとで目隠し

が外される．そして彼らは, 赤い帽子を見たら手を挙げるように, また, 自分の帽子の色が確信できたら部屋を退出するように告げられる．帽子は 3 つとも赤だったので, 3 人とも手を挙げた．数分後, 他の 2 人より賢かった C は, 部屋を出ていった．彼は, どのようにして自分の帽子の色を推測できたのだろうか？ ■

このパズルは Gardner 自身がその本で指摘しているとおり曖昧な点が 2 つあります．1 つは数分後という部分です．つまりその間は誰も発言しない沈黙の時間帯だったということです．そしてその沈黙が全ての囚人にとってのヒントになっています．これを Puzzle **??**では, 同時に「分からない」と発言し, その発言を他の囚人にも聞こえたことにしました．これ以外にも沈黙がヒントになっているものはたくさんあります．それらもこのように「分からない」という発言をしたことに変更可能だと思います．いま話題にしている色以外の発言という要素とは関係ありませんが, 曖昧なもう 1 つの点は「他の 2 人より賢かった」という部分です．この曖昧さを排除するために全員が同じ賢さ（論理的思考力？）を持っているとして（もしくは賢さに言及しないで）, 全員が同時に自分の色が分かり部屋を出ていったというアレンジをしているものもあります．
どの囚人にとっても必要な情報は, 最初に帽子を見ただけでは自分も含めて誰も自分の帽子が分からなかったというものです．なので Puzzle **??**（**??**ページ）では, それを聞いて推論していくようなイメージが付きやすいよう, 順番で発言させるという私のアレンジが入っています．
まとめると本来は色以外の発言しかできないようなルールにしておきながら, 囚人が沈黙してしまったという情報を色以外の発言という捉え方をすることにしました．おそらく私が初出なアレンジでも設定でもないとは思います．しかし他の帽子パズルでは沈黙という意味ではない, 色以外の発言をするものもあります．前置きが長くなりましたが, この節ではこのノート執筆時点で知られている色以外の発言をするパズルをいくつか紹介します．
まず Puzzle **??**（**??**ページ）のルールを変えたものと捉えることができるパズルを紹介します．ルールの変更部分は色を変えておきます．

<u>Puzzle</u> 1.2.12.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます．その帽子は黒白どちらかの色で塗られています．囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています．また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません．この状態で帽子の色のどちらかか, 発言拒否を意味する「パス」を発言します．つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そうでなければ不正解, 「パス」と発言した場合は正解にも不正解とも扱いません．「そして正解者が 1 人以上いて, かつ不正解者が 0 人ならば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます．当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません．このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です．囚人たちは勝利する確率を最大どれくらいまで上げることが可能でしょうか？ ■

Puzzle **??**との違いは発言のパスが許されているところです．それゆえに囚人たちの勝利条件やパズルの問いも変わっています．「パス」は正解にも不正解にもなりません．Puzzle **??**での必勝戦略では常に正解者も不正解者も 1 人ずる発生することが分かるので, このパズルでは必勝戦略にはなりません．そしてこのパズルには必勝戦略は存在しません．ゆえに確率は 100 %になることはありません．そして最大確率は 50 %です．そのときの戦略は 1 人は常に「パス」を発言し, もう 1 人は黒か白か決めた色を（もう一人の色がなんであろうと）発言するというものです．
一見囚人数が増えても, 1 人がどちらかの色を, それ以外の全員がパスをするという 50 %勝率の戦略が最適化と思われますが, 実は囚人数が $n = 2^k - 1$ 人ならば Hamming 符号を用いることで, 勝率 $n/n + 1$ となる戦略を作ることができます．つまり 3 人ならば 75 %の, 7 人ならば 87.5 %という勝利の戦略が存在します．
よって以下の要素を持つパズルを **Eber の帽子パズル**と呼ぶことにします．

1. 囚人たちは協力してゲームに臨む．
2. 色以外の発言として「パス」が可能．

ちなみにこのように考案者の名前を借りて帽子パズルを命名する行為は, [28] の 1 ページ目にて著者である Hardin と Taylor が「Ebert' Hat problem」という記述を参考にしています．帽子パズルと総称するには種類が豊富過ぎると感じているので, 特徴的なものでかつ考案者が分かっており, そして考案者が特別な名前を付けていない場合に, このように勝手ではありますが名前を付けていきたいと思います．もし考案者が何か特別な名前を付けていれば, それに従うことにします．例えば下の deterministic coin flip 帽子パズルとかがそれにあたります．

色以外の発言が可能なパズルは, 発言が多様になったことで勝利条件という要素が正解数とは違う多様性を持ちます．その例が以下のパズルです．

Puzzle 1.2.13.
看守があるゲームをするために 8 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます．その帽子には実数が 1 つずつ書いてあります．どの囚人も自分以外の囚人が被っている帽子の数が見えています．そして部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません．部屋に入った後囚人たち全員に聞こえるように看守が 1 つの実数を発言します．そのあと囚人たちは同時に $0, 1$ のどちらかを発言します．看守が発言した実数よりも大きい数の帽子を被った m 人の囚人たちの中で, 0 を発言した囚人と 1 を発言した囚人の数がそれぞれ $\lfloor m/2 \rfloor$ を超えていた場合, 囚人たちの勝利として全員釈放されます．そうでなければ敗北となって全員処刑されます．当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかとどの実数を発現するかは, 囚人たちは入室するまで知りません．このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です．このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 看守がどの実数を発現したとしても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

このパズルも私のアレンジが入っています．元ネタは [17] の 15 ページにて紹介された「Hat Puzzle 2 (deterministic coin flip)」です．これまでの例では発現できるものの候補は, 色のみか, 色に色以外の「分からない」や「パス」を加えたものでしたが, このパズルでは色は発現できず数字の $0, 1$ しか発現できない点がこれまでのパズルと異なる点です．それにあわせてルールと勝利条件が変わっています．

1.2.8 発言回数

1.2.9 勝利条件

あるパズルがあったとき, その勝利条件を変えて別のゲームを作ることは容易です．協力型のゲームの場合, ある正解者数が囚人たちの勝利条件であり, かつその勝利条件に対して囚人側に必勝戦略が存在した場合, さらに要求される正解者数を（プレイヤーの人数を上限に）増やした新たなゲームに, 囚人側にまた必勝戦略があるか考察することは妥当な議論展開です．逆にその勝利条件に対して囚人側に必勝戦略が存在しない場合, 要求される正解者数を減らしてみて考察することもありえます．
すでに例にあげたとおり, Puzzle **??**（**??**ページ）を「最低 1 人正解」から「最低 2 人正解（つまりこの場合は全員正解と同意味)」へと変更できます．そしてその場合は必勝戦略はないことを示すことができます．看守より要求される最低正解者数を変更するパターンは, このパズルで他の要素を変えない限りはこれだけですが, 最低正解者数でない別の勝利条件も既に考えられています．勝利条件のみが変わったので, その部分だけ文字の色を変えておきます．

Puzzle 1.2.14.
看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます．その帽子は黒白どちらかの色で塗られています．囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています．また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません．この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 2 人もしくは 0 人のとき囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます．もし正解者・不正解者 1 人ずついるようならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます．当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません．

このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です．このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

つまり正解数が全員か 0 人かの極端な場合のみが勝利するというものです．この勝利条件に対しても必勝戦略は存在します．1 つは 2 人とも見えた色と同じ色を発言するというものです．もう 1 つは 2 人とも見えた色を異なる方の色を発言するというものです.

1.3 帽子パズルの歴史

帽子パズルは数学的対象としてはまだまだ歴史は浅いものの, 単なるパズルとしては歴史はかなり長いです．誰がどのように興味をもってきたのか, 自分なりにまとめていきたいと思います.
1.3.1 節（27 ページ）では帽子パズルの要素をもつパズルが, いつから人々に楽しまれてきたのかまとめていきます.
1.3.2 節（39 ページ）では帽子パズルが数学的対象となり, どのように研究されてきたのかをまとめていきたいと思います．1.3.1 節があくまで一般の書籍を主に調べているならば, この節は学術的論文を対象に調べています.
帽子パズルはいつからかプレイヤーが囚人となり, 囚人と帽子のパズルと呼ばれるようになりました．**??**節（**??**ページ）では, いつからそうなったのかを上記の節をまとめる傍らまとめてみたいと思っています.

1.3.1 パズルとしての帽子パズルの歴史

ここでは帽子パズルの重要な要素, 自身の色とは直接関係のない情報から自身の色を推測する, という要素をもったパズルの歴史をまとめていきます.
帽子パズルのパズルとしての歴史を探るには泥んこの子供たちのパズルの歴史を追うのが最善かもしれません．なぜなら,『100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル』[37] の 44 ページ, そしてこの本が引用している『The Freudenthal problem and its ramifications (Part III)』[20] を参考にすると, この著者たちは主に**泥んこの子供たちのパズル（Muddy Children Puzzle）**に注目しており, 帽子パズルはこれの亜種・変形であるという見方をしています.
泥んこの子供たちのパズルとは以下のようなものです．ここでは [37] を参考にします．この本では最初に一般的なパズルを紹介し, そのあと設定を簡略化したパズルを出して, 徐々に難しくしていくという形式をとっています．それに従って, まずは [37] の 27 ページの一般的なパズルを引用します.

Puzzle 1.3.1（[37]3 章「泥んこの子供たち」冒頭のパズル）.
外で遊んでいた子供の一団が, 父親に呼ばれて家に戻ってきた．父親の周りに集まると, 思ってたとおり, 子供たちの中の何人かは, 遊んでいる間に汚れていて, とくに顔に泥がついている．子供たちは, それぞれ他の子供の顔に泥がついているかどうかは見えるが, 自分自身の顔に泥がついているかどうかは見えない．このことは全員が分かっているし, 子供たちが完璧な論理的思考をすることは一目瞭然である．ここで, 父親はこう言う．「君らのうち, 少なくとも一人は泥で汚れている」そして, こう続ける．「自分が泥で汚れている分かった者は, 前に進み出なさい」これで誰も前に進み出なければ, 父親は, この指示を繰り返す．何回かこれを繰り返した時点で, 泥で汚れた子供全員が前に進み出る．全員で k 人の子供のうち, m 人が泥で汚れているとき, 何回目でこうなるか, そして, その理由は. ■

続けて同じ本から順に簡単バージョンのパズルを 2 つ紹介します.

Puzzle 1.3.2（[37] の Puzzle 8（28 ページ））.
外で遊んでいたアリスとボブが家に戻ってくる．二人の父親は, ボブの顔が汚れているのを見て, 二人が泥遊びをしていたことに気づく．二人は, それぞれ相手の顔が泥で汚れているのを見ることはできるが, 自分自身の顔が汚れているかは見ることができない．もちろん, 鏡を覗き込めば自分の顔を見ることができる．ここで, 父親は「二人のうち一人の顔は泥で汚れている」と言う．ボブはすぐに顔を洗いに向かった．しかし, ボブは鏡を見たわけではない．ボブはどのようにして自分が泥で汚れていると分かったのか. ■

以降この本では顔が泥で汚れている子供のことを「泥んこ」と呼ぶことにしています.

Puzzle 1.3.3（[37] の Puzzle 9（29 ページ））．
その翌日, アリスとボブはまた外で遊んでいたが, 今度は二人とも泥んこになった. 家に帰ったとき, 父親は, またしても, 「二人のうち少なくとも一人は泥んこだ」と言う. そして, 父親はボブにこう尋ねる. 「自分は泥んこかどうか分かるかな」ボブは「いや, 分からない」と答える. そこで, 父親はアリスにこう尋ねる. 「自分は泥んこか分かるかな」するとアリスは「ええ. 分かるわ. 私は泥んこね」どうして, 自分が泥んこだとアリスは分かったのに, ボブには分からなかったということが起こりうるのだろうか. ■

彼らが帽子パズルを泥んこの子供たちのパズルの亜種・変形と捉えている理由は, [37] に「泥で汚れているのではなく帽子を被っているという変形は, ある週刊誌に見ることができる」部分や, [20]216 ページの「この頃から, パズルコーナーや問題集に「泥んこ問題」が登場するようになった. 子供たちは哲学者，囚人，学生，修道士に変身し，泥だらけの額は塗り潰された顔，黒い十字架，緑の切手，赤い帽子，青い塊に変身することもある.」からも分かります. 彼らの帽子パズルは泥んこの子供たちのパズルの変形・亜種という見方は正しいと思います. なぜなら帽子パズルっぽい要素をもつものは 1832 年に現れており, そしてそれは泥んこの子供たちのパズルのように「顔が汚れる」という設定であり, 色付き帽子を被るという設定のものは, 今現在ではまだそれ以前には見つけられていないからです. つまり今現在, 1832 年のそれは帽子パズル・泥んこの子供たちのパズルの祖先です.

泥んこの子供たちのパズルの祖先「笑わずにつまむ」

ではそれはどのようなものだったのか. [20]（そしてそれを参考にしている [37]）によると, 1832 年にドイツの作家で翻訳家の Gottlob Regis（ゴットロープ・レジス）（1791-1854）が, フランス文学の古典である, François Rabelais（フランソワ・ラブレー）『ガルガンチュアとパンタグリュエル』（参考までに [6]）のフランス語からドイツ語への翻訳 [?] を完成させました. Regis は訳すさいにかなりの量の注釈をつけたようです. そしてその 103 ページには, フランス語の「pincer sans rire」をドイツ語の「ungelacht pfetz ich dich」と訳したことについて, 以下のような彼のコメントが掲載されています.

> Gesellschaftsspiel. Jeder zwickt seinenrechten Nachbar an Kinn oder Nase; wenn er lacht, giebt er ein Pfand. Zwei von der Gesellschaft sind nämlich im Complot und haben einenverkohlten Korkstöpsel, woran sie sich die Finger, und mithin denen, die sie zupfen, die Gesichter schw?rzen. Diese werden nun um sol?cherlicher, weil jeder glaubt, man lache über den anderen.

これを [20] で英語に訳し, それをさらに日本語に訳すと [37]44 ページにあるとおり以下のようになります.

> 「笑わずにつまむ」は室内遊戯の一つ. 全員が右隣の人の顎か鼻をつまむ. 笑ったら, その人は罰として何かをしなくてはならない. つまむ人の中の二人はこっそり指に消し炭をつけておくので, 彼らの隣の人の顔が黒くなる. 消し炭をつけられた二人は互いに, 全員がもう一人を見て笑っているのだと考えるので, 笑いものにされる.

消し炭を何人の指につけたのか全員が知っていれば, 仮に汚れている他人が見えたとしても「自分も汚れているかも」と考えるので笑うのを躊躇いますが, 彼らはそれを知らないので, 汚れた 1 人以上を見て笑っているというわけです. そして一番笑いものにされているのは, 自分も汚れているのに笑っている人ということです.
これはパズルではなく室内遊戯であり, それゆえにこれをパズルにしたとしても曖昧な点は多々あります. 例えば個々の参加者が笑い出すのはいつなのか？という点です. [37] の著者はこれを「同期がとれていない」と表現しています. しかし顎であれ鼻であれ, 自分に見えない汚れがついていて, それを各人見ることができない. そして他の人が汚れているかどうか分かるという点で, かなり帽子パズル・泥んこの子供たちのパズルと同様の要素を持っていることが分かります.
[37] の著者は, この遊びがフランスでいうところの「山羊ひげ」という, 二人が互いにあごをつまんで見つめ合い, 笑った方が負けという一種のにらめっこを装ったいたずらであると表現してます. そして彼らはこれがフランスの大人気漫画『Asterix the Gaul（アステリックスの冒険）』（参考までに [10]）シリーズの, 第 1 巻 [?] に登場しているとも補足しています. 確認してみると, 確かに 19 ページにそのような遊びが登場しています. ちなみにこの第 1 巻は 1959 年に出版されたもののようです.
この室内遊戯がきっかけになったかどうか定かではありませんが, 帽子パズル含めて似たようなパズルが後年たくさん登場します.
しかし現在見つかっているもので最も古いパズルの体裁を持っているものは, 1935 年まで進みます. つまり「笑わずにつまむ」

の登場から 100 年以上経ったあとのことです．もちろん調べられていないだけで・調べる手段がないだけで，「笑わずにつまむ」以前に, 1832 年と 1935 年の間に似たパズルは紹介されていた可能性は大いにあります．後者の可能性が高いこと，もしくは紹介されていたであろうということは, その 1935 年に登場したパズルたちについて調べることで分かります．
そしてその 100 年の間にも似た遊びはいくつも登場していたようです．[20] はそんな例を 1 つ挙げています．その例は, 当時のアメリカの子供たちに人気のあったゲームや歌のルールやメロディや動きなどを紹介している, 1883 年に William Wells Newell が出版した『Games and Songs of American Children』[?] から引用されています．それは 77 番目の項目「Laughter games」で紹介されている以下のような遊びです．

> Each child pinches his neighbor's ear; but by agreement the players blacken their fingers, keeping two of the party in ignorance. Each of the two victims imagines it to be the other who is the object of the uproarious mirth of the company.

訳すとまさしく上の「笑わずにつまむ」と同じ遊びになっています．違いはつまむ場所が耳になっているのと, 何で指が黒くなっているのか分からない点くらいで, 大した違いではありません．
私は同じ本から帽子パズルっぽい要素を持つ遊びを見つけました．それは 80 番目の項目「What Color?」です．ルールは以下のようなものです．

> A tumbler of water and a thimble are required. One child is sent out of the room, and to each of the others a different color is allotted. The first is then expected to name the color of some child. If she succeeds in her guess, a thimbleful of water is thrown in her face. The guessing is continued till this takes place, when the thrower becomes the guesser for the next turn.

どういう遊びなのか私はあまり分かっていませんが, プレイヤーに色が割り当てられる点, そしてプレイヤーは割り当てられた色が分からず, それを当てなくてはいけない点が, 帽子パズルと似ています．もし最初に帽子パズルっぽいものを考えた人の中には, 上の遊びよりもこちらの影響を受けたということもありえそうです．またここから考えられることは, 知ることのできない自分の状態について推測しなくてはいけないギミックをもつ遊びは, 古今東西存在していたということかもしれません．

1935 年の 2 つのパズル

では 1935 年にどのようなパズルが登場したのかですが, 実は帽子パズル的・泥んこの子供のパズル的なパズルが, この年に 2 つ同時に現れています．これらは [20] にて紹介されているものです．

まず 1 つ目は，1901 年より出版されている，学校現場での科学・数学の教育をテーマにした論文誌[3]『School Science and Mathematics』に, 1935 年 2 月に, ピッツバーグ公立高校の Werner E. Buker が投稿した『A puzzler for the thinkers』[21] に登場します．そのパズルは以下のようなものです．

Puzzle 1.3.4.
ある王が 3 人の臣下に目隠しをし, それぞれの額を触った．臣下たちは, 触った指がランプブラック[4] で覆われているかもしれないし, そうでないかもしれないことを知っていた．目隠しをはずすと，「黒い点が一つでも見えたら口笛を吹くように」との指示が出された．そして, 自分の額にランプブラックがついているかどうかがわかったら, すぐに口笛をやめるようにと指示された．3 人全ての額に黒点がついたため, そのうちの 1 人はやがて口笛を吹くことを止めた．なぜ彼は自分の額に黒点があるとわかったのだろうか． ■

このパズルの答えは同じ雑誌の後の号に掲載されました [22]．またこのパズルを紹介したとき, Buker は以下のような文章を添えてありました．

> 発案者が誰かは知りませんが, それほど悪い問題ではないので，「School Science and Mathematics」の読者で知らない人はやってみるのもいいかもしれませんね．

[3] `https://onlinelibrary.wiley.com/journal/19498594` の説明を参考にしました．
[4] 黒色絵の具のことらしい．

つまり彼は自身が発案者ではないと申告しており, 彼自身も誰かから・どこかで見知ったことが分かります．よって 1935 年以前のこのパズルないし, 同類のパズルを考えた人がいることを分かります．

2 つ目は, 数学者 Albert Arnold Bennett（このときはブラウン大学所属）[5] が, 雑誌『American Mathematical Monthly』に投稿したもの [18] です．American Mathematical Monthly の各号はいくつかのパートに分かれており, その 1 つに問題コーナーがあります．そこにはその名のとおり問題が投稿され, 誰か解答が思いつき, その解答を投稿したならば, 後の号にそれが載るという仕組みです．無限帽子パズルの先駆けとなったと考えられている問題も, このコーナーに投稿されたものだったりします．この 2 つ目のパズルもそのように投稿されたもので, 以下のような内容でした．

<u>Puzzle</u> 1.3.5.
精神反応速度[6] の異なる $n > 2$ の乗客を乗せた車がトンネルを通過し, そのため各乗客は無意識に自分の額にすすが付くことがある．どの乗客も以下の条件を満たします．

(1). 他の乗客の額が汚れていると笑い出して止まらなくなってしまうこと．

(2). 他の乗客の額はすべて見えること．

(3). 正しく推論すること．

(4). 推論して自分の額に汚れがあると判断したときだけ自分の額を拭くこと．

(5). これまでの条件を他の乗客も満たすことを知っていること．

最終的にはどの乗客も自身の顔を拭くことを示せ． ■

さきほどの Puzzle 1.3.4 に比べれば, かなり一般的な問いになっていることが分かります．Bennett はこの問題のあとに, 以下のようなコメントを書いています．

> $n = 3$ の場合は, プリンストン大学の Church 博士との対談で提案されたものです．

つまり, Church との対談によって Bennett はこのパズルを知った, もしくは思いつき, より一般的なパズルの問題に昇華させたということになります．ちなみにこれを紹介した [20] では, この Church とは,「プリストン大学の Church と書いてあるから, Alonzo Church のことだろうけど, 明確な証拠はない」というようなコメントを添えています．Bennett が誰とどのような対談をしたのかはさておき, このようなコメントを書いたことからも, 彼が完全なる考案者というわけではなさそうです．このパズルに対する解答は, 2 年後同じ雑誌に投稿されています [19]．

1935 年の Dirac 来日

1935 年にはもう 1 つパズルに関する逸話があります．それは、先の節のように論文などで紹介されたというものではなく, この年に人から聞いたという話が残っているものです．それは物理学者 Paul Adrien Maurice Dirac から, 日本の物理学者の竹内 時男（参考までに彼の Wikipedia[2] を）と, 大脳生理学者そして（推理）小説家であった木々 高太郎（参考までに彼の Wikipedia[16] を）に伝えられたというものです．ちなみに高太郎はたかたろうとよみ, 木々 高太郎はペンネームで本名は林 髞（はやし たかし）です．
Dirac が具体的にどのようなパズルを彼らに出題したかは不明ですが, 木々は 1956 年に『光とその影』という探偵小説の中で, そのパズルを出題し, このパズル（クイズ）は Dirac より, 友である竹内と一緒に聞いたものだとコメントしています．以下がその『光とその影』に登場したパズルです（[?] の 228 ページを参考にしました）．引用元との細かな違いは, 引用するさいに句読点をこのノートの記法にあわせてカンマとピリオドに変えたことだけです．

<u>Puzzle</u> 1.3.6.
ここに三人の人が居る．課長と係長と巡査部長としてもよい．トランプが 5 枚, そのうち三枚は黒で, 二枚は赤, 私が三人の人の背中に一枚ずつ貼りつける．三枚入り用．二枚はかくしてしまう．そこで, まず課長さんに, 係長と巡査部長の背中をみてくれ

[5] 彼については `https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=4344&fChrono=1` をメモしておきます．
[6] 原文の speeds of mental reaction を訳すとこうなるのだけれど, 感度が違うということかな．

給え, そして自分の背中のトランプの色が判るかとたずねる．いいですかな．課長は, かくした二枚を知っていればすぐ答えられるが, そうでないなら答えられない．じっくり考えて, よく考えたが判りませんと答えた．そこで今度は係長に, つまり神田さん, あんたに, 他の二人の背中をみて, 自分の背中のトランプの色が判りますか, と聞いた．すると係長は, 課長と巡査部長の背中をじっくりみて考えたが, 結局, 判りませんと答えた．よしかね．さて今度は巡査部長に, 他の二人のせなっかをみて下さい．キミの背中には既に二人の人に見られているが, あんたは他の二人の背中の色をみて, 自分の背中のトランプの色が判りますか, と聞いた．するてえと, 巡査部長はやがて眼をつむって, 課長さんと係長さんがよく考えて, 完全な推理の上で判らぬと仰言ったのがまちがいなければ, 私にはよく判る．私の背中の色は X 色ですと答えた．よしかな．何色でありましたか, そしてどうして判りましたかってんですよ． ■

パズルの中の神田さんは, 小説の登場人物の名前ですが, とくに気にしなくて大丈夫です．上でも書いたとおり, 木々はこのパズルを紹介したすぐあとに小説内にて以下のようにコメントを書いています．

（読者諸君はここで本をふせて, この問題を解いて下さい．これは実際にディラックが日本に来た時に著者及著者の一人の友に与えたもので, 著者は今までに知ったクイズのうち一番興味あるものと思っています．）

この「著者の一人の友」は以下の内容から分かるとおり, 竹内 時男のことです．
『数学史研究』という雑誌にて 1970 年に『光と影と赤い帽子』[39] という論文が, パズル研究家である高木 茂男によって投稿されました．この論文は二部構成になっていて, 第一部が「「光とその影」の波紋」, 第二部が「赤い帽子の波紋」という題になっています．第一部は, 『光とその影』出版後の, パズルの最初の考案者が誰かという争いをきっかけに, 高木がディラック来日以後のパズルの歴史を整理したものになっています．
その争いとは以下のようなものでした．まず高木の『光とその影』出版後の 1958 年, 推理小説雑誌『宝石』(参考までに Wikipedia[9] を）の昭和 33 年 6 月号に, 「推理小説早慶戦」と題する座談会記事 [?] が載りました．この記事は慶応大学の推理小説同会と, 新しくでき早大のワセダ・ミステリ・クラブの両メンバーが, 探偵小説について語り合うという趣向で, 探偵小説で有名な高木も参加していたのだろうか, この記事の中で高木はこのパズルについて以下のように述べたらしいです．

（前略）このナゾはね．僕が知っている限り最初にいったのはディラックというノーベル賞をとった物理学者ですが, これが戦前日本へきまして, 当時生きていた[a] 竹内時男というジャーナリズムでもちょっと名のあった物理学者ですが, この竹内がどっかへ案内したんですよ．なにかゆっくり山か何か上るようなところを歩きながら, ディラックが竹内君にこのナゾを解いてみろといって出した．ところがなかなかこれが解けない．ところが解けてしまっても非常にこれは面白いナゾなんだ．そのナゾをかけてみましょうね．何日かかかってお解きになれば面白いだろう。（下略）

[a] [2] によると, 竹内 時男は 1944 年に亡くなっている．

この記事は読者の反響を呼び, パズルの解答もいくつか寄せられましたが, その中に原寒（H.S）と名乗る人物から, 次のような投書があったそうです．投書そのものの内容は不明ですが, 高木はその内容を以下のように要約しています．

今月号の『宝石』で, キミはまた『光と影』の謎を言い出している．ところが君が『光と影』を創作した 1,2 年前（或いは 3 年前か）の『宝石』の新人応募作品の一篇にこの謎と殆ど同様のものがあり, （中略）それを知らないで得々としているのは, 君が非常に無知で無恥に見える

仮に原寒の主張が正しいとすると, 彼が見た同様のパズルは 1955 年から 1957 年の間に存在したということになります．これに対して高木は反論として, 『宝石』の 1958 年の 9 月号に『光と影の謎』という題で一文を載せました [?]．その内容は 1955 年のはるかに前から, 同等のパズルは存在した証拠を 2 つ挙げて, 原寒の主張を否定したものです．
1 つ目の証拠は, 『光と影』よりもはるかに前に高木自身が同類のパズルを扱った小説を書いていることです．それは『海の見える窓』という短い小説で, 『大洋』という雑誌の 1940 年の 4 月号に掲載されたようです．この事実は 1957 年の 12 月出版の『宝石』別冊第 72 号の 267 ページの, 永瀬三吾のまとめた年譜から分かるそうです．
2 つ目の証拠は, 1943 年に出版された, 藤村 幸三郎が書いた『最新数学パヅルの研究』[36] です．文献によっては「数学」が「數學」になっていたり, 「パヅル」が「パズル」になっていたりとはっきりしません．またこれは 1948 年に再販されているらしく, いまのところインターネットで見つかるのも, その再販されたものばかりです．ただどちらにせよ原寒の主張の否定になります．この本のなかで, 「赤い帽子と白い帽子」という題で, 似たようなパズルが紹介されています．その中で藤村はこのパズルのことを

> 最近友人から聞いたもので, その出典は不明

と書いているらしいです. こう書いた理由を高木は説明しており, 1 つ目の証拠にあった『海の見える窓』出版後に, 藤村は高木へ手紙を送っており, 自分がこのパズルについて研究していることと伝え, このパズルはどこで知ったのかと質問してきたようです.

ちなみに似たパズルならば, [39] でも挙げられているとおり, 海外でもこの時期に 2 つ発表されています. どちらも 1942 年の Maurice Kraitchik（参考までに Wikipedia[12] を）による『Mathematical recreations』[29][30]（和訳は『100 万人のパズル（上）』[40]）の, 第 1 章「Mathematics Without Numbers」で紹介されています. これらがどんなパズルだったかは 1.3.1 節（38 ページ）を見てください.

というわけで, 帽子パズルっぽいパズルは原寒が主張する年以前から存在することは分かりました. ではそれがいつからか気になりますが, この時系列で一番古い出来事は, Dirac が竹内・高木の二人にパズルを伝えたときになります. [37] の訳者あとがきでは, それは昭和 13 年, つまり 1938 年だとされています. しかし私はこれは間違っていると考えています. [37] は [39] を参考にしたと思われますが, [37] の訳者が 1938 年だと考えた理由は, おそらく [39] の以下の部分だと推測しています.

> この原寒の文に対する反論として, 「光と影の謎」という題で木々高太郎は「宝石」の昭和 33 年 9 月号に一文を載せた. それは要するに, （1）あの　は 20 年前に英国のノーベル賞受賞者ディラックが直接筆者と竹内時男（理博, 物理学者）とに出題したものであるから, 新人応募者が考えたものではないこと.

補足していくと, 昭和 33 年とは 1958 年になります. このコメント内の「筆者」とは高木を指しています. 「あの　は」部分は決して私の打ち損ねではなく, 資料でこう書かれているからです. おそらく空白の部分にはパズルという単語が入ると思われます. そして [37] の訳者は昭和 33 年の 20 年前ということで, 1938 年と考えたのではないでしょうか. しかしこの文章ではどの 20 年前かは少し曖昧に思われます. もちろんこの部分だけではそう考えても仕方ないとは思うのですが, 他の部分に対しても, この [39] はところどころ数字や文章に疑いを持ってしまう箇所が個人的にはあります. 例えば, この論文の 17 ページにて以下の文章があります.

> さて, このパズル入りの探偵小説が発表されてから 3 年たった. 「宝石」の昭和 33 年 6 月号に「推理小説早慶戦」と題する座談会記事が載った.

ここの「パズル入りの探偵小説」とは『光と影』のことだと思われますが, 他の箇所では『光と影』は 1956 年に出版されたことになっています. そして昭和 33 年とは 1958 年ですから, 年数は 2 年であるべきです.

さらに, 31 の「（前略）」で始まるコメントにおいて

> このナゾはね. 僕が知っている限り最初にいったのはディラックというノーベル賞をとった物理学者ですが, これが戦前日本へきまして, 当時生きていた竹内時男というジャーナリズムでもちょっと名のあった物理学者ですが, この竹内がどっかへ案内したんですよ. なにかゆっくり山か何か上るようなところを歩きながら, ディラックが竹内君にこのナゾを解いてみろといって出した.

において, ここでは高木・竹内二人に対して Dirac が教えたというよりは, 竹内 1 人にしか伝えていないように捉えられると思います. しかし他の部分でも, 『光と影』内でのコメントでも, まるで 2 人同時に Dirac から聞いたような書き方をしています. よって [39] は, よくよく読み込めば, 少し疑問に思ってしまう箇所があるので, 他の部分においてもある程度気を付けて読むべきだと思われます. なので私は上記の 20 年前もそのまま受け取ることはしませんでした.

もう 1 つ重大な疑問として, Dirac は 1938 年にはおそらく来日していないということです. つまりそもそも竹内とは日本では会っていない可能性が高いということです. Dirac の生涯をかなり細かく綴った『The Strangest Man -The Hidden Life of Paul Dirac, Quantum Genius-』[?], 和訳は『量子の海、ディラックの深淵　天才物理学者の華々しき業績と寡黙なる生涯』[?] がありますが, この本は Dirac の生涯を描く文献としては, かなり信頼がおけるものだと思っています. なぜなら Dirac の生涯を数か月・数年ごとに分け, それを章にあてて, 多くの文章をもって説明しているからです. なので彼の物理学者として充実していて, かつ彼の周りの人物から彼に対する証言を得やすかった時期においては, 彼がどこか外国に滞在したというような, 比較的大きなニュースは見逃していないと考えられます.

この文献では [?] の 211 ページには, Werner Karl Heisenberg（参考までに Wikipedia[13]）と 2 人で, 日本へ出発した話が始ま

ります. 彼の来日はこれが 1 度目で, 日本での滞在は 1929 年 9 月上旬からです. これは [?] の 211 ページにて 8 月中旬にサンフランシスコ港から 2 週間かけて日本にたどり着いたことからも, 『長岡半太郎の新資料について』[?] の 10 ページにおいて, 「ハイゼンベルク・ディラック両氏最近物理学講演会日程」という資料に, 彼の最終公演の日にちが 1929 年の 9 月 7 日であったことからも分かります. 続く 2 度目の来日は [?] の 340 ページの以下の部分から 1935 年だったことが分かります.

> 一九三五年六月三日, ディラックはオッペンハイマーに別れを告げ, 大日本帝国海軍艦船に乗り込んだ.

彼は日本, 中国, に寄り道しながら, ソビエト連邦を目指していたようで, 出発から 6 週間後にはモスクワ駅に到着したらしいです. なのでこの期間の間に, Dirac の 2 度目の来日があったということになります. 『仁科記念財団案内』[?] という資料の「ディラックの逸話（仁科先生の帝大新聞への寄稿）」部分には, ディラックの 2 度目の来日についての新聞記事の切り抜きが提示されています. そして来日予定は 6 月 19 日であることも書いてあり, 上記の本とも矛盾しないと思います.
そして 1938 年までに, それ以降 Dirac が短期間滞在目的でも日本へ出発したような記述は [?] にはありませんし, また 3 度目の来日があった事実も見つけられていません.
よって戦前である 1938 年までの Dirac の来日は, まず 1929 年, そして 1935 年の 2 回のみです. つまり Dirac が日本にて誰かにパズルのことを伝えられた機会は, この 2 回のみ, また, 竹内の Wikipedia[2] によれば, 彼は 1928 年から 1930 年においては渡欧していたらしいので, 必然的に Dirac と竹内が日本で会えたのは 1935 年ということになります. ただ 1935 年に竹内が日本にいたという証拠もまだ見つけられていません. ただもしそんな資料が見つかれば, 高木の発言はすべて嘘になってしまいますので, そこまでは疑うことは止めておきます.
よって私は各資料を比較することで, Dirac は 1935 年に来日したさいに登山ないしハイキングに参加し, そのさい竹内にパズルを教える. そのあとに登山には参加していなかった高木に, 竹内から伝えたのではないかと考えています. これで 1938 年ということ以外は, これまでの資料とも一致する推測になっていると思います.
この推察の証拠をいくつか挙げます. まず私の疑問としては, この調査をする前の Dirac の印象は寡黙で, 物理学以外にはまり興味を持っていない人物というものでした. それはあながち間違っていなくて, 彼についての周囲の人の評判も似たようなものです. 寡黙であるということを表すエピソードとしては, [?] の 121 ページにケンブリッジ大学での彼の同僚が作った「ディラック」という単位です. これは 1 時間あたり 1 語という単位で, つまりそれくらい彼は話さなかった, もしくは無駄な会話はしなかったという評判だったと思われます. そんな彼が異国に来たからといって, 登山の最中にパズルを他人に話すということをしそうでしょうか. また, 登山・パズルという物理学以外のものに彼は興味は持っていたのでしょうか.
まず彼は散歩やハイキング・登山といったものは好きだったようです. [?] の 210 ページにはそれを示す以下のような箇所があります.

> （前略）六月, 彼は趣味と実益を兼ねることにして, アイオワとミシガンで量子力学に関する一連の講演を行ったのと並行して, グランド・キャニオンの高低差の激しい地勢を歩きまわったり, ヨセミテ国立公園やカナディアン・ロッキーでハイキングしたりした. 北アメリカの壮大な景色に始めて触れたわけだが, ディラックはその後数十年のあいだに数回北アメリカを訪問する, その都度, そんな壮大な風景のなかを徒歩で探るのだった.

そして [?] の 212 ページによると, 当時の学者が日本に来たさいのおもてなしのお決まりのコースがあって, まず東京に滞在して, 続いて京都に訪れるというものだったそうです. なので, その旅程の中で, どこかでハイキングを行っても不思議ではありません. 事実, 『生命情報科学の源流『第 3 回　1937 年：仁科芳雄とニールス・ボーア』』[?] という WEB 記事によると, ディラックの 1 度目の来日では, 彼を日光に案内したことが書いてありますし, [?] の 13 ページには以下のような記述があります.

> この物理学界の大立て者である Dirac は，昨年来米国プリンストン大学に招聘せられて居たのであるが，ケンブリッヂ，への帰途来る六月十九日の浅間丸でやって来る．来朝はこれで二度目で，昭和四年の九月に Heisenberg と一緒に来て，わが理論物理学界を賑わした．その影響か又は偶然かどうか解らないが，その頃量子論を始めた人々は我国の新しい理論の方で最も活躍して居られる様に思う．前に来られた時もやはり三週間の滞在ではあったが，伊勢神宮詣で迄やって日本の風物に余程興味を持って居た様であった．比叡山に登った時，「富士山が見えるか」という聞から,「もし中間に遮るものが無いとした時に，富士を比叡の頂から見て，水平線に隠れるか隠れぬか」で，Dirac と Heisenberg とが議論したのもツイ昨日の様な気がする．（下略）

つまり彼は登山中においては上記のように饒舌に議論している様子から, 2 度目の来日のさいにも同様の滞在行程だったならば, 登山中にパズルについて説明したとしても不思議ではありません.

そして彼がパズルに興味を持っていたかどうかですが, これには直接的な証拠はありません. しかし彼は囲碁が非常に好きだったというエピソードがあります.
1 つは 1980 年の東京大学教養学部で催された第 26 回定例仁科記念講演会における, 戸田 盛和の講演資料『自然現象と非線形数理』[**?**] の, 「仁科先生と私」という朝永 振一郎と藤岡 由夫との対談記事です. この中で以下のような部分があります.

（前略）

藤岡 それで碁をネ, やったしネ．それからディラックは碁を自分で研究して, 右のはじと左のはじとつながる碁を発明した．

朝永 ところがネ, 実は今日, 学士院で水島三一郎さんとディラックの碁の話がでてネ, かれはどこかから聞いてきたらしいんですけど, ディラックが発明したんじゃないんだって．

藤岡 ああそう．

朝永 マックス・ニューマンとかいう数学者が, 考えたんだって．そう言ってましたヨ．

藤岡 そうですか．

朝永 だけど, ひろめたのはおそらくディラックでしょう．日本までやってきたんだから．

藤岡 それからネ, ディラックが, 二度目に日本に来るという電報があったけど, ベックと二人で来るより前に一人で来たのかしら．ディラックとベックと一緒だったかしら．

朝永 いや, あれは偶然一しょになった．だから, ディラック一人で来たんでしょ．あのときは碁ばかり打ってた．

藤岡 ええ, 仁科さんは宇宙線の話をしようと．予告は c̈osmic rays という演題なんだ．ところが宇宙線の話をいくらして見えても, フンフンと言っているだけで, ちっとも興味を示さないで, 碁ばかりやっていた．

朝永 そう．

藤岡 それが 1935 年だったですね．で, ベックとはこっちで一しょになった．

朝永 そう, そのときぼくおぼえているのは, ディラックは, 帝国ホテルに泊っていたんですが, 仁科先生がネ, ディラックがあそこに泊っている, 一緒にめしでもたべに行くから一緒に来ないかって言う．それで行ったんですが, そしてロビーでしばらく話をしていたら, 仁科さんに碁をうつかってディラックがきいたんです．仁科さんがキミはどうだいっていうけど, ぼくは全然だめですってことわるとディラックがやろうやろうって言うんで仁科さん断れない．そしてディラックはボーイ呼んで碁盤持って来いって言っちゃって, ボーイが持って来た．そしてサァやろうっていうわけで, 仁科さんもサスガ弱ったらしいんだけどね, そいじゃやる, とかなんとか言って, 仁科先生が先手黒を持って真ん中へポイと置いた．

藤岡 ハハハ

朝永 碁盤の真ん中へ置いた．ディラックがどこかへ置くとそれと対称のところに置く．そんなことやって, そして仁科さんニヤニヤしてる．

藤岡 そういう手があるんだネ．

朝永 あるんだ．太閤さんがやったとかいう．

藤岡 一つ先に打っておけば, きっと勝つという．

朝永 それでディラックもこれじゃダメだと思ったのか, しまいまでやったんじゃない, 途中でやめたんだと思いますがネ．

藤岡 仁科さん, そんなこと, 本当に太閤の碁の話を知っててやったんだな．

朝永 ディラックは, 理研へやってきてミナガワ（皆川理氏）とか杉浦（義勝）さんとかああいいう連中, それから西川（公治）先生も碁のお相手したらしいんだ．それで例のあの端のないのをやり, はじめ日本人はみな勝手がちがうんで負けてたらしいけど, そのうち勝ちだしたらいいですね。（下略）

彼が囲碁が好きだったというエピソードはもう 1 つあり, 物理学者田崎 晴明の彼の個人 HP の日記にあります．そのページの

3/6/2004（土）部分において, 以下のような記述があります.

> ただ, この話は, それほど華々しいものではなく,
>
> > 地球物理学者（だっけ？）の竹内均氏が Oxford に滞在したとき Dirac に碁を教えろと言われて教えた. 何度対戦しても竹内氏が勝つのだが, ある日, Dirac は周期境界の碁盤でやろうと提案し, それ以降は, ずっと Dirac が勝った.
>
> ということだそうです. これだと, 竹内氏の碁の腕がどれほどのものか, わからないので, どの程度 Dirac がすごいのかはわからない. （いや、Dirac はすごいんですけどね.）実際, 囲碁に詳しい K さんからは,
>
> > 初手を黒がど真ん中に打ち, それに白が絡んでいく, 天元碁というのがある. この場合, しばらくは境界の影響はないので, 周期境界碁と実質的には同じ. これは例外的な打ち方ではあるが, とうぜん, ある程度の定石などはある. すぐ攻め合いになってしまい, 「生き死に」ついての経験と知識がものを言うはずだ. いくら頭のよい人でも, 周期境界にしただけで, 経験者を負かすというのはきわめて考えにくい.
>
> という, ジャンプを毎週買いつづけ「ヒカルの碁」を読むことでのみ仕入れた知識にもとづく, ご意見をいただきました. もし, それが正しいとすると, 竹内氏の碁の腕前はそれほどではなかった, ということなのでしょうか？それとも, Dirac がゲームの天才でもあったのか？

この話は 1 つ上の逸話とあわせると, その内容からもかなりの信ぴょう性を持っています. しかし 1 つだけ疑問があります. 竹内均が Oxford にて Dirac に囲碁を教えたという部分です. 1 つ上の対談記事を参考にすると, Dirac は 1935 年の来日時点で碁を知っていたことになります. なので, 竹内 均が Dirac に碁を教えたのはそれ以前ということになります. ただ彼の Wikipedia[14] によると, 彼は 1920 年生まれです. なので 1935 年時点でも 15 歳です. そんな彼がそれ以前に Oxford に行き, Dirac に会って碁を教えたというのはかなり不思議に思えます.
上記の話はパズルを好んでいなかったという証拠にはならないでしょうし, またそれらのエピソードから, 彼は囲碁を誰かと楽しむことも好きだったことも分かっていますから, 彼がパズルなどを人に披露して, それについて対話することを行ったとしても不思議ではないような気がします.

もう一度まとめると, Dirac は 1935 年に来日したさいに登山ないしハイキングに参加し, そのさい竹内にパズルを教える. そのあとに登山には参加していなかった高木に, 竹内から伝えたのではないかと, 私は考えています.
最後の疑問は, 登山中に Dirac が竹内に教えたパズルは, Dirac が考えたものなのかどうかです. [39] によると, 高木は以下のようなコメントを, 何らかの文献（多分上記の「光と影の謎」のことだろうか）の中でしていたようです.

> ディラックがつくったものかどうかたしかめてはいない. 然し, それなら英国へ問合せの手紙を出すとよかったが, それはしてないし, 先年英国へ行った時は, 謎のことなど忘れていたのでさがしてみなかった.

ここで彼が問い合わせていれば, パズルの歴史についての調査も前進していたかもしれません.
さらに [39] では上記の藤村 幸三郎のコメントも引用しています.

> 年代的に正確なところは判明しないので, 私の憶測にすぎないが, これはどうもディラックの創作ではないかと思う.

そして [39] の著者の高木 茂男も, この論文のなかでディラック創作説を支持していました.
ただ前節の 2 つのパズルの登場があったことを考えると, 仮に Dirac が考えたものだったにせよ, 彼が最初だったか可能性はかなり低いです. Werner E. Buker の『A puzzler for the thinkers』[21] の出版は 1935 年の 2 月で, Dirac が来日した 6 月よりも前ですし, そして [21] の中で, Buker は自身が思いついたのではなく伝聞だったと書いてあるからです.

そのあとのパズル史概観

前の 2 つの節で分かったことは, 1935 年に 3 つの, パズルが世間に現れた話があったということです. しかし, そのどれもそれ以前にパズルを考えていた人, もしくはパズルを載せた出版物があった可能性を示唆しています. 今時点では, そんな文献やエピソードは見つけられていません.

次の節から 1935 年以降の帽子パズルや, それっぽいパズルに関する情報を年代順にまとめていくことにします．ただこの節では, 2 つのテーマがあって, 1 つは, 1935 年以降の論文でない文献の中で, とくにおさえておくべきと私が思うものを 4 つ挙げるものです．これで帽子パズルの歴史を概観しようと思います．2 つ目は, 帽子パズルがいつから, 色付き帽子を被った囚人が主人公になったのかを考察するものです．

では 1 つ目のテーマとした, おさえておくべき文献を挙げていくことにします．
1 つ目はパズル作成者としても大変有名な数学者 Martin Gardner の, 1961 年の『The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions』[24] です．これに Gardner によって加筆されたものとして『Origami, Eleusis, and the Soma Cube Martin Gardner's Mathematical Diversions (The New Martin Gardner Mathematical Library, Series Number 2)』[25] が, そして [25] を岩沢 宏和と上原 隆平の 2 人が和訳したものとして『ガードナーの数学娯楽 (完全版 マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 2)』[35] があります．これを挙げる理由として, 多くの帽子パズル研究者が帽子パズルとは何かを紹介するさいに, この 1961 年の本を引用するからです．もちろん帽子パズルの歴史の中では, これまで説明したとおりかなり後発に位置するものですが, 彼のパズル作家として知名度もあって, この本をきっかけにさらにパズルが広まったのではないかと推測できます．Gardner がパズル作家として有名なことは, 例えば Wikipedia『List of Martin Gardner Mathematical Games columns』[11] に書いてある, 彼が 1957 年 1 月から 1980 年 12 月の 24 年間にわたって, 計 300 近いパズルに関するコラムを執筆していることからも分かります．ここでどのように帽子パズルが紹介されていたかは, 1.3.1 節（39 ページ）にて後述します．ちなみに泥んこの子供たちのパズルや帽子パズルのようなパズルは, Induction Puzzle と総称することもあるらしく, その Wikipedia[4] では帽子パズルは 1961 年のこの本にさかのぼると書いてありますが, ここまで書いたり説明してきたことからも, 帽子パズルはさらに昔までさかのぼることができます．

2 つ目は 2001 年 4 月 10 日の New York Times 誌に掲載された,『Why Mathematicians Now Care About Their Hat Color』[31] という記事です．これを書いたのは Sara Robinson という方ですが, この人についての情報はまだ得られていません．この記事の数年前に帽子パズルを扱った論文が執筆されており, それについて着目して, 関係者や学者にインタビューした記事です．これによって, 帽子パズルは再度ブームになったと思われます．また帽子パズルが単なるパズルではなく, 学者が研究対象にするようなものであることも, 一般の人たちに広まったはずです．その意味でも, この記事は帽子パズルの普及にとって, 大きな影響があったと思っています．これがどのような内容の記事だったかは, 1.3.1 節（39 ページ）にて後述します．

3 つ目は 2013 年 10 月 28 日に発売された『The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-』[28] です．数理論理学・集合論研究者の 2 人, Christopher S. Hardin と Alan D. Taylor によって書かれた数学書です．なのでこれまで挙げた文献のように一般向けというわけではありません．しかし, このノート執筆時点で（そしておそらくしばらく先まで）唯一の, 帽子パズルだけをテーマに書かれた数学書です．また学術書としても唯一だと思われます．この本の登場で, 帽子パズルが研究テーマとして意義のあるものだということが世間にも伝わるはずです．またこれ以後の帽子パズルがテーマの論文では大抵これが引用されています．またこの本によって無限化した帽子パズルという研究テーマが存在することが, とくに数学者には広まるきっかけになったのではないかと思います．この本は私の研究にとっても重要なもので, かつ内容もかなり豊富なので, そのためのパートを作ってまとめていくことにしています．そのパートは第**??**部（**??**ページ）です．ちなみに, 現在帽子パズルを扱う学術書として唯一であることを利用して, 私や指導教官である先生はこの本を「帽子パズル本」と呼んでいます．この本との出会いや帽子パズルが私の研究テーマになったきっかけについては, 1.3.1 節（39 ページ）にて書いてあります．

4 つ目は 1 つ上と同じ年の 2013 年の 11 月 30 日に出版された『チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題』[34] です．これは数理論理学者である田中 一之によって書かれたもので, 帽子パズル以外にも様々なパズルが取り上げられています．日本語で書かれた帽子パズルを紹介しているものは, これ以前にもたくさんありましたが, この本が重要な点は, この本が日本語で書かれた, 囚人の人数を無限人に拡張した結果を紹介した最初の本であるということです．この本によって, 囚人と帽子のパズルは無限に拡張できること, それが単なる禅問答で終わるのではなく, 数学を用いて厳密に研究できることを日本の人たちに知らせる機会を与えたと思います．現在調査中ではありますが, 無限な帽子パズルを紹介した一般向けの本として, 日本を除いても最初だった可能性があります．この本では有限・無限含めて多くの帽子パズルが紹介されているので, それがどのようなものであったかは, 1.3.1 節（39 ページ）にて書くことにします．

以上までで, 帽子パズルの歴史の中で私が重要だと思う文献を挙げました. もちろん学術的な論文として重要なものは多々ありますが, それについては 1.3.2 節（39 ページ）に書くことにします.

次のテーマは帽子パズルのようなパズルにて, プレイヤーが色付き帽子を被った囚人になったのは, いつが初めてなのかという疑問に対する考察です.
まずプレイヤーが囚人になったパズルはいつ登場したかというと, 1942 年の Maurice Kraitchik（参考までに Wikipedia[12] を）による『Mathematical recreations』[29][30]（和訳は『100 万人のパズル（上）』[40]）の, 第 1 章「Mathematics Without Numbers」で紹介されたパズルが, いま現在見つかっているもので一番古いものです. 具体的にどんなパズルだったかは, Puzzle 1.3.8（38 ページ）を見てください. このパズルは確かにプレイヤーは囚人でしたが, 色付き帽子を被せるのではなく, 色付きの円盤を背中に貼り付けるというものでした. ちなみにこのパズルは, 囚人たちがなぜ逮捕されたのかのストーリーまで説明されていたりします.

続いてプレイヤーに被せるものが色付きの帽子になったパズルがいつ登場したのかというと, 1943 年に出版された, 藤村 幸三郎が書いた『最新数学パヅルの研究』[36] に登場した, 「赤い帽子と白い帽子」として紹介されたパズルが, いま現在見つかっているもので一番古いものです. ただ現在この文献は入手できていないのですが, [39] ではプレイヤーに色付きの帽子を被せたと書かれています.

1936 年から 1960 年

1.3.1 節（29 ページ）と 1.3.1 節（30 ページ）に書いた内容とも被るところもありますが, 1936 年以降に現れた帽子パズルっぽいものたちを紹介している文献を年代順にまとめていきます.
まずは 1940 年の木々 高太郎によって書かれた短編探偵小説『海の見える窓』です. これは Dirac ないし竹内 時男から聞いたパズルを木々がこの小説に登場させたというものです. この事実は [39] に書かれています. しかし木々の Wikipedia[16] によると, このような短編を書いた事実は見当たりません. ただ Wikipedia には短編集の出版もいくつか明記されているため, そのようなものに含まれているのかもしれません. またこの短編は [39] によると, 『大洋』という雑誌の昭和 15 年 4 月号にて発表されたということであり, どのような内容か知るのは難しくとも存在したのは間違いなさそうです.

続いては, 1942 年の Maurice Kraitchik（参考までに Wikipedia[12] を）が書いた『Mathematical recreations』[29][30]（和訳は『100 万人のパズル（上）』[40]）です. その第 1 章「Mathematics Without Numbers」では帽子パズルのようなパズルが 2 つ紹介されています. 1 つ目はその章の 3 番目のパズル「**the problem of the three philosophers**」, いわゆる「**3 人の哲学者の問題**」という呼ばれているパズルです.

Puzzle 1.3.7.
ギリシャの 3 人の哲学者は, 論争に疲れ, 夏の暑さに耐えかねて, アカデミーの木の下で少し昼寝をしていた. ところが, ある悪戯者が彼らの顔に黒いペンキを塗ってしまった. やがて彼らは一斉に目を覚まし, それぞれ相手を笑い始めた. 突然, 一人が自分の顔にペンキが塗られていることに気づき, 笑うのをやめました. 彼はなぜ笑うのをやめたのでしょうか. ■

2 つ目は, 上のパズルに続く無題のパズル（和訳版だと「白は自由の色」と名付けられています）で, 以下のような内容です.

Puzzle 1.3.8.
革命に失敗した 3 人が国境を越えて脱出し, ある小さな町の留置場に収容された. 保安官は囚人たちに同情し, 彼らを自由にする方法を探した. ある日, 保安官は白い円盤を 3 枚, 黒い円盤を 2 枚持って刑務所に入り, 囚人たちに言った. 「お前たちの背中に, この円盤を一枚ずつ貼ろう. お前たちは仲間の円盤を見ることができるが, 自分の円盤は誰も見ることができない. 白い円盤を貼られた者が, 自分の円盤が白であることを正しく当てることができれば, 彼は自由を得ることができる. そうでなければ, その者は無期限に拘留される。」こう言って, 彼はそれぞれの背中に白い円盤を貼り付け, 彼らを監視係の部下に預けた. 3 人の囚人 A, B, C は, それぞれ自分の円盤が白いかどうかをどのように推論すれば言い当てることができるだろうか？ ■

つまりこの本では泥んこの子供たちのパズルと帽子パズルの 2 つが同時に収録されていたことになります.

1961 年から 1999 年

2000 年から現在まで

1.3.2　数学的対象としての帽子パズルの歴史

1.4　帽子パズルの形式化

では帽子パズルを数学的対象にするため, 帽子パズルに登場する用語たちを, 数学概念を使って定義していきます.
しかしいきなり全てのパズルを対象にしてしまうと分かりにくくなりそうなので, 一番シンプルな Hardin-Taylor の帽子パズルを形式化して, Hardin-Taylor の帽子パズルになかった要素を続けて形式化していくことにします.
まず, 1.2.1 節（12 ページ）でも紹介したとおり, 帽子パズルの要素とは以下のものでした.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{囚人たちが協力する}\\ \text{囚人たちが協力しない}\end{array}\right. \times \left\{\begin{array}{l}\text{囚人数}\\ \text{色の数}\\ \text{帽子の見分け方}\\ \text{帽子に付く色の個数}\\ \text{帽子の見え方}\\ \text{帽子についての情報}\\ \text{発言方法}\\ \text{色以外の発言}\\ \text{発言回数}\\ \text{勝利条件}\end{array}\right.$$

そして再掲しますが, Hardin-Taylor の帽子パズルとは以下のようなものでした.

Puzzle ??の再掲

看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子は黒白どちらかの色で塗られています. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています. また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人でもいれば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます. もし 2 人とも不正解ならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？

このパズルがシンプルだと私が思う理由は, 帽子に付く色の個数は帽子 1 つにつき 1 つであり, 帽子についての情報はなく, 色以外の発言は不可能で, 発言回数も全員 1 回のみという点です. つまり特別な定義が他のパズルに比べて一番少ない点にあります. またこのパズルは囚人たちが協力するタイプですが, 囚人たちが協力しないタイプのパズルを研究するさい, 協力するタイプとは研究目的も変わることがあり, それによってその形式化も大きく異なります. 協力しないタイプのパズルを研究するうえで, どのように形式化するのかについては 1.4 節（45 ページ）で書いてみることにします.

Hardin-Taylor の帽子パズルの形式化

では Hardin-Taylor の帽子パズルのようなパズルを形式化していきます. ここでは『The mathematics of Coordinated Inference』[28] の 2 ページの形式化をベースにして個人的な考えから少し手を加えていきます.
まず囚人たち, 帽子に付ける色たちの範囲を定めるために集合を使います.

Definition 1.4.1（囚人と色の集合）.
集合 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{K}$ と書いたとき, A を**囚人集合**といい, A の要素を**囚人**（**prisoner**）または **agent** とよぶ. K を**色集合**といい, K の要素を**色**（**color**）とよぶ. ■

agent という呼び方は [28] にあったものです. 囚人の集合ならば A ではなく P とすべきだと思いますが, [28] の意図としては P はのちに predictor という重要な概念に使用するために, P という記号が先に予約されたのではと思います. 同様に色の集合ならば K ではなく C とすべきでしょうが, これも同じテキストではのちに coloring の集合という概念のために使用するからだと思います. しかし, 例えば素直に囚人集合に P, 色集合に C を使っている文献もあります. 例えば [23] などです.
補足すると色集合とは, 囚人に被せる帽子に付く色の候補の集合というべきかもしれません.
Puzzle **??**の場合は, 囚人が二人なので, 囚人 2 人を a, b で表現すると $A = \{a, b\}$ となります. 帽子には白黒の色がつくので, $K = \{$ 白, 黒 $\}$ となります.
ゲームに参加する囚人の人数, 使用する帽子の色の数は, それぞれ A と K の濃度で表現できます. ゲームに参加する囚人が 1 人のものは考える意義があまりありません. なぜならとくに追加要素などがなければ, その囚人は運でしか勝敗が決まらないからです. 同様にどれだけたくさん囚人がゲームに参加しても, 帽子につく色が 1 つだけなら（その色を答えるだけでいいので）ゲームが成立しません. なので, とくに断らなくともいつでも A, K は一元集合でないとしておきます. 同じことですが, いつでも A, K の濃度は 2 以上だとしておきます.

ゲームにおいて部屋に入ったあとに, 全囚人に色付きの帽子を 1 つずつ被せますが, この操作は A の各要素に対して K の中から 1 つずつ選ぶ操作に等しいです. これは A から K への写像を 1 つ与えることと同じことです. すなわち, 各帽子の被せ方 1 つ 1 つは, それぞれ何らかの写像 $f : A \to K$ で表現できます. それに対して呼び名を与えることにします.

Definition 1.4.2（coloring）.
A, K に対して写像 $f\colon A \to K$ を **coloring** とよぶ. あるゲームにおいて, 囚人たちが被せられる可能性のある帽子の被せ方, つまり coloring の集合を C で表す. ■

再度 Puzzle **??**を例に出します. 囚人の集合を $A = \{a, b\}$ と, 色の集合は白と黒の集合なので $K = \{\mathrm{W}, \mathrm{B}\}$ とおきます. このパズルでは全ての帽子の被せ方があり得るので, A から K への写像全ての集合が C になります. 集合 X, Y に対して X から Y への写像全ての集合 $\{ f \mid f\colon X \to Y \}$ を ${}^{X}Y$ で表すことがあります. なので Puzzle **??**の場合は, $C = {}^{A}K$ です. 一般的にどんな帽子パズルでも $C \subseteq {}^{A}K$ となりますが, Hardin と Taylor の帽子パズルではいつでも $C = {}^{A}K$ です. Puzzle **??**における coloring は 4 種類あります. その 4 種類の coloring を f_1, f_2, f_3, f_4 とおき, それぞれの coloring の対応規則を以下の表に定めます.

	f_1	f_2	f_3	f_4
a	B	B	W	W
b	B	W	B	W

Table 1.3: Puzzle **??**における coloring の一覧

たとえば f_1 は a, b 二人とも黒色を被せたものになります.

各囚人がどのように他の囚人が見えているかを表現するためには, 有向グラフという概念が便利です.

Definition 1.4.3（視野グラフ）.
囚人集合 A に対して, A 上の有向グラフ $\boldsymbol{V}$ がループを持たないとき, V を（A 上の）**視野グラフ**（**visibility graph**）とよぶ. $a, b \in A$ と A 上のなんらかの視野グラフに対して,

- V において a から b への辺が存在するとき, a は b の**帽子が見えている**, もしくは単に a は b が**見えている**といい, $a \overrightarrow{\boldsymbol{V}} b$ と表す.
- V において a が見えている囚人全体の集合を $V(a)$ で表す. つまり $V(a) = \{b \in A : a \overrightarrow{V} b\}$ であり, この $V(a)$ を囚人 a の**視野**と呼ぶ. ■

[28] では, $a\overrightarrow{V}b$ ではなく単に $a \to b$ や aVb などと書いていたりしますが, このノートでは, どの視野グラフで, どちらが見えているのかが分かりやすいと思ったので, 私が考えた $a\overrightarrow{V}b$ で統一します.

あるパズルにおいて囚人たちがどのように他の囚人を見えているかを定めるとは, その囚人集合上の視野グラフを 1 つ与えることに対応します. V を A 上の二項関係と捉えれば, ループを持たないとは二項関係 V が非反射的, つまり以下を満たすと表現できます.

$$\forall a \in A(\ \langle a, a\rangle \notin V\ ).$$

なぜ視野グラフがいつでもループが存在しないと仮定するかというと, もし $a\overrightarrow{V}a$ な囚人 $a \in A$ がいたとすると, そんな囚人は自分自身の帽子が見えています. そんな囚人は必ず自身の色を言い当てることができるので, 正解数という観点では考える意味のない存在になってしまいます. よってどのようなパズルでももつ「全ての囚人は自分自身の帽子が見えない」という設定を表現するために, どんな視野グラフもループをもたないとします.

視野グラフを導入する最大の利点として考えられるのは, 帽子の見え方をグラフ理論の言葉で表現できるからだと思います. 例えば Puzzle **??**の帽子の見え方は「自分以外の帽子が全て見えている」と表現できます（2 人しかいないので自分以外全員といってもたった 1 人なので少し強めの主張に見えてしまいますが）. 見えているというのは視野グラフにおいて有向辺があるということでしたから, グラフ理論の言葉で言い換えると「その視野グラフにおける全ての頂点は他の頂点へ有向辺がある」となります. そしてあるグラフが「全ての頂点は他の頂点へ有向辺がある」を満たすとき, そんなグラフはグラフ理論では**完全**グラフであると呼ばれます. すなわち, Puzzle **??**は「視野グラフが完全グラフであるような帽子パズルである」と表現できます.
別の見方として Puzzle **??**には, $a \to b \to a$ という始点と終点が同じになっている path が存在します. このような path のことを **cycle** といい, 1 つの cycle からなるグラフのことを**閉路**グラフと呼ぶそうです（[3] を参考にしました）. なので Puzzle **??**は「視野グラフが閉路グラフであるような帽子パズルである」とも表現できます. もちろん頂点数（囚人数）が 2 のときに完全グラフと閉路グラフが同じ意味になるので, Puzzle **??**ではたまたまこのようになりました.
このほかにも例えばグラフ理論には**独立集合**という言葉があります. これはある有向グラフにおいて, 自分からの有向辺がない頂点の集合（ないし部分グラフ）のことを指します. つまりある帽子パズルの視野グラフにおける独立集合とは, そのゲームにおいてどの囚人の帽子も見えていない囚人たちの集合を意味します. 上の定義を借りると, ある視野グラフ V における独立集合 X とは $X = \{\, a \in A \mid V(a) = \emptyset \,\}$ と表現できます. Puzzle **??**では独立集合は存在しません. たとえば, このパズルで囚人 a を b の帽子が見えなくする（つまり何も見えなくなる）と, そんな視野グラフにおいて集合 $\{a\}$ は独立集合です.
その定義からいつでも $V(a) \subsetneq A \setminus \{a\}$ なので, どの囚人の視野 $V(a)$ も A の真部分集合になります.

Table 1.4 において, f_1 と f_3 は関数として異なりますが, 囚人 a から見て黒が見えていることに変わりはなく, 囚人 a は黒が見えたとしても, 自分たちの帽子の様子がどちらの coloring になっているかは判定できません. こういった状況を 1 つ上の視野の定義を借りて定義します.

<u>Definition</u> 1.4.4（coloring の「見分けがつかない」関係）.
囚人集合 A と $a \in A$, A 上の視野グラフ V に対して, C 上の二項関係 $\equiv_a$ を

$$\begin{aligned} f \equiv_a g \ &\overset{\text{def}}{\iff} \forall b \in V(a)\big(\ f(b) = g(b)\ \big) \\ &\iff f{\restriction}V(a) = g{\restriction}V(a) \end{aligned}$$

と定義する. 2 つの coloring $f, g \in C$ に対して, $f \equiv_a g$ であるとき, f, g は a にとって**見分けがつかない**という. ■

$\restriction$ は関数の定義域の部分集合への制限を表す記号です.
Table 1.4 を参考にすると, Puzzle **??**では, $f_1 \equiv_a f_3$, $f_2 \equiv_a f_4$ であり, $f_1 \equiv_b f_2$, $f_3 \equiv_b f_4$ です. この定義はこのあとのそれぞれの囚人の戦略を定義するときに役立ちます.

Example **??**（**??**ページ））のように, 全ての囚人が同時に発言する様式のことを**同時発言型**と呼びます. Example **??**（**??**ページ）のように, 囚人の集合 A がなんらかの順序関係によって整列順序付けされているとき, その順序で最小な囚人から発言していく様式のことを**順次発言型**と呼びます. 例えに出しませんでしたが, ある決まった 1 人が先に発言しその次に残りの囚人が同

時に発言するような様式を 1 **人先行型**と呼んでいます．同時でない発言様式では各囚人は発言前に聞いた他の囚人の発言も自身の発言の参考にすることができます．発言様式は囚人数・色数・視野グラフといったこれまでの定義と絡めて形式化するのは難しいですが, 戦略を定義するさいには意識することになります．

ここまでの用語を用いれば Example **??**（**??**ページ）は 2 **人** 2 **色視野完全同時発言型パズル**, Example **??**（**??**ページ）は 5 **人** 2 **色前方完全順次発言型パズル**と（ちょっと長いですが）一言で言いあわらすことができます．このように呼称しているのは私だけですが, 個人的にはパズルの結果を体系的に分類するために便利だと考えています．

部屋に囚人が入れられ帽子を被せられているような状況だとします．ここから各囚人は見えている帽子の様子, つまり coloring から自身の色を推測して発言するわけですが, その作業は C から K への関数で表現できます．$A,\ K,\ C,\ V$ を固定します．$a\in A$ の**戦略**（**(guessing)strategy**）G_a とは関数 $G_a : C\to K$ のことで

$$\forall f,g\in C\big(\ f\equiv_a g\ \to\ G_a(f)=G_a(g)\ \big)$$

を満足するとします．囚人 $a\in A$ にとって見分けがつかない 2 つの coloring に対して, エスパーでもない限り別々の色を発言することは出来ないので満たすべき条件はそれを表現しています．この戦略の定義は同時発言型パズルの囚人や, 順番がついていて 1 番最初に発言する囚人にしか当てはまりません．発言前に 1 人の発言, つまり色をヒントに使えるような囚人の戦略 G は $G : C\times K\to K$ で

$$\forall f,g\in C\ \forall k_1,k_2\in K\big(\ (f\equiv_a g\wedge k_1=k_2)\ \to\ G_a(\langle f,k_1\rangle)=G_a(\langle g,k_2\rangle)\ \big)$$

を満たすものと定義できます．同様にして発言前に n 人の発言を聞ける囚人の戦略も定義することができます．一般化されても聞いたヒントが同じで見え方が同じような coloring に対して, 同じ色を発言しなければいけないことは変わりません．囚人 a が戦略 G_a で $f\in C$ の下で**正解**しているとは $G_a(f)=f(a)$ で, **不正解**であるとは $G_a(f)\neq f(a)$ で表現できます．f とは A から K への関数でしたから $f(a)$ とは f において a が被っている帽子の色を表しています．

$A,\ K,\ C,\ V$ と各囚人 $a\in A$ それぞれに戦略 G_a が固定されているとします．**predictor**（あえて和訳するならば**発言予測**とかだろうか）とは写像 $P : C\to C$ で $\forall a\in A\big(\ P(f)(a)=G_a(f)\ \big)$ を満たすものとします．なぜこれを予測と呼ぶのかですが, 各囚人 $a,b,c,\cdots$ の戦略 $G_a,G_b,G_c,\cdots$ が定まっていれば $f\in C$ が一つ与えられたとき各発言 $G_a(f),\ G_b(f),\ G_c(f),\ \cdots$ が定まります．すると $\{\langle a,G_a(f)\rangle\mid a\in A\}$ は 1 つの coloring でもありますし, 囚人たちの発言の様相という見方もできます．なので perdictor とは「各囚人が△△な戦略で来て, この状況（coloring）ならば, こういう発言をするはず」という予測を形式化したものなります．このことから定義にある $\forall a\in A\big(\ P(f)(a)=G_a(f)\ \big)$ とは

$$\forall f\in C\big(\ P(f)\ =\ \{\langle a,G_a(f)\rangle\mid a\in A\}\ \big)$$

とも言えます．
predictor を C から C への写像という見方ではなく, 単に戦略の集合と捉えて $P=\{G_a\mid a\in A\}$ や $P=\{\langle a,G_a\rangle\mid a\in A\}$ と扱うこともあります．帽子パズルとは「△△なパズルに対して◇◇な predictor は存在するか？」と問われていると考えられます．この時点では説明するのは難しいですが, なにゆえ個々の戦略と, 戦略の集合に対して別の用語を与えているかというと, Example **??**（**??**ページ）の解答となる predictor は最初に発言する囚人以外の全員が（きちんと形式化すれば）同じ戦略をとっているので個々の戦略の区別が特になく, 個々の戦略 G_a に注目せず predictor で議論した方が証明が見やすくなります．しかし Example **??**（**??**ページ）の解答になる predictor のようにそれぞれの囚人が異なる戦略を取るならば, それぞれの戦略 G_a に注目する必要があります（しかしこの戦略も上手く形式化すれば同じように記述できたりします）．predictor と戦略 $G_a,G_b,G_c,\cdots$ は互いに依存しています．つまり「個々の戦略が定まっているならば発言も予測出来るだろうし, 発言が予測できるならば個々の戦略が特定出来る」ということです．よってこれから証明などにおいて「**任意に predictor をとる**」とは「各囚人の戦略を固定する」の言い換えとも思えます．視野グラフと同様に特徴的な predictor には名前が付いています．例えば example 1.1.1 で求められたようなどのように帽子を被せても必ず 1 人以上が正解するような predictor を **minimal predictor** と呼びます．predictor P が minimal であることは

$$\forall f\in C\exists a\in A\big(\ P(f)(a)=f(a)\ \big)$$

や

$$\forall f \in C\big(\ |\{a \in A \mid P(f)(a) = f(a)\}|\ \geq\ 1\ \big)$$

などとより具体的に書けます．次に example 1.1.2 で求められたどのように帽子を被せても不正解者が 1 人以下になるような predictor を **up to one errror predictor** と呼んでいます．その定義は同様に

$$\forall f \in C\big(\ |\{\ a \in A \mid P(f)(a) \neq f(a)\ \}|\ \leq\ 1\ \big)$$

と具体的に記述できます.

パズルに対する共通な定義はこれで終わりです．これで十分な理由は**??**節（**??**ページ）において, 各パズルの特徴, つまり違いは以下の 5 つであると述べたからです.

- 囚人数
- 色数
- 各囚人の帽子の見え方
- 発言方法
- どのように帽子を被せた場合でも要求される正解者数, もしくは不正解者数

ここまでの用語を用いれば Example **??**（**??**ページ）の結果は「2 人 2 色視野完全同時発言型パズルに minimal predictor が存在する」, Example **??**（**??**ページ）の結果は「5 人 2 色前方完全順次発言型パズルに up to one errror predictor が存在する」と言い換えられます．このようにパズルに関する数学的定理の基本的な形は「△△なパズルに対して◇◇な predictor は存在する（しない）」となります.

ここまで抽象的な定義だけだったので, 最後に example 1.1.1 を題材に形式化してみます.

囚人の集合を $A = \{a, b\}$ と, 色の集合は赤と白の集合なので $K = \{\mathrm{R}, \mathrm{W}\}$ とおきます.

4 種類の coloring を $f_1, f_2, f_3, f_4, : A \to K$ とおき, 各 coloring の対応規則を

Table 1.4:

	f_1	f_2	f_3	f_4
a	R	R	W	W
b	R	W	R	W

とします. つまり f_1 は二人とも赤色が被せられています．coloring の集合 C は $\{f_1, f_2, f_3, f_4, \}$ となります.

視野グラフ V は $V = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$ となっていて, それぞれの視野は $V(a) = \{b\}, V(b) = \{a\}$ です．すると f_1 と f_3 は a から見て両方 R なので見分けが付きません．つまり $f_1 \equiv_a f_3$ です．同様に $f_2 \equiv_a f_4$, $f_1 \equiv_b f_2$, $f_3 \equiv_b f_4$ です.

a,b がとれる戦略は 4 つずつあります．a の 4 つの戦略を G_a^1 , G_a^2 , G_a^3 , G_a^4 と, b の 4 つの戦略を G_b^1 , G_b^2 , G_b^3 , G_b^4 とおきます．戦略を単なる関数として表現してしまうと, その戦略の意味が分かりづらいので表にして意味を付け加えました.

Table 1.5:

	f_1, f_3	f_2, f_4	戦略の意味
G_a^1	R	R	いつでも赤を宣言
G_a^2	R	W	見えた色と同じ色を宣言
G_a^3	W	R	見えた色と違う色を宣言
G_a^4	W	W	いつでも白を宣言

Table 1.6:

	f_1, f_2	f_3, f_4	戦略の意味
G_b^1	R	R	いつでも赤を宣言
G_b^2	R	W	見えた色と同じ色を宣言
G_b^3	W	R	見えた色と違う色を宣言
G_b^4	W	W	いつでも白を宣言

$f_1 \equiv_a f_3$ なのでどの G_a も f_1, f_3 に対しては同じ色を返します. なので表でも他の戦略も同様にまとめて書いています. G_a^1 と f_1, f_3 の位置に R が書いてあるのは, f_1, f_3 に対して戦略 G_a^1 で a は R と発言することを表しています.
先の coloring の表と見比べれば, coloring f_1 の下で戦略 G_a^1 で $G_a^1(f_1) = \mathrm{R} = f_1(a)$ より a は正解しています. しかし $G_a^1(f_3) = \mathrm{R} \neq \mathrm{W} = f_3(a)$ より, f_3 の下で G_a^1 では a は不正解です.

このとき戦略の組み合わせは $4 \times 4 = 16$ パターンあるので predictor も 16 個あります.

Table 1.7:

	G_a^1	G_a^2	G_a^3	G_a^4
G_b^1	P_1	P_2	P_3	P_4
G_b^2	P_5	P_6	P_7	P_8
G_b^3	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
G_b^4	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}

表の見方ですが G_a^1 と G_b^1 の位置にある P_1 は囚人 a が戦略 G_a^1 を, 囚人 b が G_b^1 をとるような predicotr $\{G_a^1, G_b^1\}$ であることを表しています.

最後に各 predictor がそれぞれの coloring に対してどのような発言をするか, すなわち C から C への関数と考えたときにどのような coloring を返すかを表にします.

Table 1.8:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3	f_1	f_1	f_3	f_3	f_2	f_2	f_4	f_4	f_2	f_2	f_4	f_4
f_2	f_1	f_3	f_1	f_3	f_1	f_3	f_1	f_3	f_2	f_4	f_2	f_4	f_2	f_4	f_2	f_4
f_3	f_1	f_1	f_3	f_3	f_2	f_2	f_4	f_4	f_1	f_1	f_3	f_3	f_2	f_2	f_4	f_4
f_4	f_1	f_3	f_1	f_3	f_2	f_4	f_2	f_4	f_1	f_3	f_1	f_3	f_2	f_4	f_2	f_4

f_1 のとき predictor の値が f_1, f_2, f_3 のいずれかであれば一人でも正解者がいることになります．f_2 のときは f_1, f_2, f_4, f_3 のときは f_1, f_3, f_4, f_4 のときは f_2, f_3, f_4 です．するといかなる coloring でも一人以上正解者がいる, つまり minimal な predictor は P_7, P_{10} だけです．表 1.7 より P_7 は G_a^3, G_b^2, P_{10} は G_a^2, G_b^3 という戦略を組み合わせた predictor でした．各戦略の意味を表 1.5, 1.6 を参考にすれば, パズルの答えである「一人は見えた色と同じ色を, もう一人は見えた色と違う色を発言する」と一致します.

Hardin-Taylor の帽子パズルにない要素の形式化

非協力的な帽子パズルの形式化

1.5 帽子パズルの限界

第 2 章　有限な帽子パズル

2.1 Hardin-Taylor の帽子パズル

2.1.1 Smullyan の帽子パズル

第 3 章　無限な帽子パズル

3.1　概略と節案内

第4章　他のパズルとの関係

第 5 章　論文精読と文献調査

説明文です.

5.1　100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル

基本情報

タイトル：100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル

著者・作者：川辺 治之

年月日：2016 年 11 月 22 日, 出版元：日本評論社

所持 ?: 所持, 公式 HP または入手場所：ここ, Amazon の URL：ここ

メモ：[33] の和訳版.

タグ：Puzzle009, 文献番号：[37]

非数学的情報まとめ

この本は『One Hundred Prisoners and a Light Bulb』[33] の和訳です．動的認識論理を応用できる, 様々な論理パズルが扱われています．構成としては, まずいろいろなパズルが紹介され, 個々にその解答や発展問題などが続きます．最後にこれまでのパズルを振り返りつつ, 形式化しながら動的認識論理の入門事項の説明が始まります．単なるパズル本に見えて, 後半いきなり記号論理学が始めるのは, パズル本と思って買った人はビックリするかも．
この本の特徴はもう 1 つあって, どのパズルにも, その歴史がかなり詳細に調べられている点です．また和訳にあたって訳者の川辺氏がさらに帽子パズルについて調べた結果を訳者あとがきに載せています．これがあったからこそ日本にてどのようにパズルが知られていったかが調べやすくなりました．
著者の 2 人がオランダ人かどうかは分かりませんが, この本は最初オランダ語で書かれています．そのことは [33] の商品レビュー欄にも書かれています．そのタイトルは『Honderd Gevangenen en een Gloeilamp』[32] でした．これは訳すとそのままこの本のタイトルになります．そのあと英訳されたものが『One Hundred Prisoners and a Light Bulb』[33] であると思います．そしてそれを和訳したのがこの本であると思われます（時系列的に判断すると）．
著者や訳者についての情報をまとめておくと, Hans van Ditmarsch（ハンス・ファン・ディトマーシュ）氏は専門は多岐に渡るようで, 認識論理の研究もその 1 つだと思われます．それはロレーヌ計算機科学・応用研究所において認識論理に関する研究チームを率いていることからも判断できます．彼は博士号をオランダ北部の University of Groningen（フローニンゲン大学）[8] で取得しています．エルデシュ数 [5] は 2 らしい．彼の個人 HP はこちら [?] です．
もう 1 人の著者 Barteld Kooi（バーテルド・クーイ）氏は University of Groningen にてモンティホール問題について修士論文を書いています．おそらくその中でディトマーシュ氏とも知り合ったのかもしれない．彼の個人サイト [?] には彼との出会いについては書かれていないので, はっきりしたことは分からなかったです．
訳者の川辺 治之氏は個人サイトを持っていないと思われるので, 詳しいことは分からないが 1985 年に東京大学理学部数学科卒業, そして 2016 年時点では日本ユニシス株式会社上席研究員だったようです．日本ユニシス株式会社は金融系を主とするシステムインテグレータらしい（[15] によると）．つまり何か学位を持っているわけでないっぽい．しかし彼の Twitter アカウント（`https://twitter.com/p314159265`）には, 彼の出版歴へのリンクが書いてあり, かなりの量のパズルに関する本を和訳していることが分かります．

ちなみに訳者あとがきにて, 川辺氏は編集にあたってお世話になった人として, 日本評論社の飯野 玲氏を挙げているが, この方は数学セミナーにて帽子パズル記事（[38]）を書くときに私もお世話になった.
この本では主に 1 章「連続する自然数」, 3 章「泥んこの子供たち」, 7 章「和と積」を読みました. 3 章はまさに帽子パズルと同様のパズルですし, それ以外も帽子パズルと同じ要素を持っています. 各節では発展問題なども出題されますが, 1 章・7 章では帽子パズル的にアレンジされた問題も出されています.

数学的事実まとめ

得られた知見・考察

各節では, そのパズルの歴史も詳細に書かれています.
3 章「泥んこの子供たち」では, このパズルの起源について書かれていますが, この部分は主に [20] を参考にしていると思われます. ただ [20] の方がさらに詳しいので, 「泥んこの子供たち」パズルの起源を知るには, こちらの方がいいと思います. 訳者あとがきではさらに帽子パズルの歴史について追記されていますが, この部分で川辺氏はおそらく [39] を参考にしていると思われます. この部分で得た歴史に関する知識は 1.3.1 節（27 ページ）で活かされています.

参考文献

[1] Prisoner hat puzzle —— 10 prisoners —— red & blue hats, 1 2017. https://www.youtube.com/watch?v=RtidKw-qDxY.

[2] Wikipedia『竹内時男』, 3 2020. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%AB%B9%E5%86%85%E6%99%82%E7%94%B7.

[3] Wikipedia『cycle graph』, 12 2021. https://en.wikipedia.org/wiki/Cycle_graph.

[4] Wikipedia『induction puzzles』, 7 2021. https://en.wikipedia.org/wiki/Induction_puzzles#cite_note-8.

[5] Wikipedia『エルデシュ数』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A8%E3%83%AB%E3%83%87%E3%82%B7%E3%83%A5%E6%95%B0.

[6] Wikipedia『ガルガンチュワとパンタグリュエル』, 4 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AC%E3%83%AB%E3%82%AC%E3%83%B3%E3%83%81%E3%83%A5%E3%83%AF%E3%81%A8%E3%83%91%E3%83%B3%E3%82%BF%E3%82%B0%E3%83%AA%E3%83%A5%E3%82%A8%E3%83%AB#%E6%97%A5%E6%9C%AC%E8%AA%9E%E8%A8%B3.

[7] Wikipedia『ヒルベルトの無限ホテルのパラドックス』, 10 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%92%E3%83%AB%E3%83%99%E3%83%AB%E3%83%88%E3%81%AE%E7%84%A1%E9%99%90%E3%83%9B%E3%83%86%E3%83%AB%E3%81%AE%E3%83%91%E3%83%A9%E3%83%89%E3%83%83%E3%82%AF%E3%82%B9.

[8] Wikipedia『フローニンゲン大学』, 10 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%83%8B%E3%83%B3%E3%82%B2%E3%83%B3%E5%A4%A7%E5%AD%A6.

[9] Wikipedia『宝石 (雑誌)』, 12 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%9D%E7%9F%B3_(%E9%9B%91%E8%AA%8C).

[10] Wikipedia『asterix』, 1 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/Asterix.

[11] Wikipedia『list of martin gardner mathematical games columns』, 1 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Martin_Gardner_Mathematical_Games_columns.

[12] Wikipedia『maurice kraitchik』, 1 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/Maurice_Kraitchik.

[13] Wikipedia『werner heisenberg』, 1 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg.

[14] Wikipedia『竹内均』, 1 2022. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%AB%B9%E5%86%85%E5%9D%87.

[15] Wikipedia『日本ユニシス』, 1 2022. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A5%E6%9C%AC%E3%83%A6%E3%83%8B%E3%82%B7%E3%82%B9.

[16] Wikipedia『木々高太郎』, 1 2022. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%9C%A8%E3%80%85%E9%AB%98%E5%A4%AA%E9%83%8E.

[17] Amos Fiat Andrew V. Goldberg Jason D. Hartline Nicole Immorlica Aggarwal, Gagan and Madhu Sudan. Derandomization of auctions. *Games and Economic Behavior*, Vol. 72, No. 1, 6 2010. https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/99342.

[18] Albert A. Bennett. Problem no. 3734. *American Mathematical Monthly*, Vol. 42, , 1935.

[19] Albert A. Bennett, E.P. Starke, and G.M. Clemence. Solution to problem no. 3734. *American Mathematical Monthly*, Vol. 44, No. 5, 1937.

[20] Axel Born, Cor A.J. Hurkens, and Gerhard J. Woeginger. The freudenthal problem and its ramifications (part iii). *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science, EATCS*, Vol. 95, , 2008. https://research.tue.nl/en/publications/the-freudenthal-problem-and-its-ramifications-part-iii.

[21] Werner E. Buker. A puzzler for the thinkers. *School Science and Mathematics*, Vol. 35, No. 2, 2 1935. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1949-8594.1935.tb12823.x.

[22] Werner E. Buker, R. Wood, and O.B. Rose. Solution to science question 686: A puzzler for the thinkers. *School Science and Mathematics*, Vol. 35, , 1935.

[23] Holly Crider. Finite and infnite hat problems. 5 2010. https://www.siue.edu/~aweyhau/teaching/seniorprojects/crider_final.pdf.

[24] Martin Gardner. *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*. Simon & Schuster, 5 1961.
https://bobson.ludost.net/copycrime/mgardner/gardner02.pdf
Amazon の URL.

[25] Martin Gardner. *Origami, Eleusis, and the Soma Cube Martin Gardner's Mathematical Diversions (The New Martin Gardner Mathematical Library, Series Number 2)*. Cambridge University Press, 11 2008. [25] の海賊版？
https://www.amazon.co.jp/gp/product/0521735246/ref=ppx_yo_dt_b_asin_title_o01_s00?ie=UTF8&psc=1.

[26] Alex Gendler. Can you solve the prisoner hat riddle? - alex gendler, 10 2015. https://www.youtube.com/watch?v=N5vJSNXPEwA&t=58s.

[27] Christopher S Hardin and Alan D Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-*. 11 2012. おそらく [28] の出版前原稿.
http://qcpages.qc.cuny.edu/~rmiller/abstracts/Hardin-Taylor.pdf.

[28] Christopher S Hardin and Alan D Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-*. Springer, 10 2013. 本当はタイトルに「-」は入っていないがファイル名として採用できるようにこのように修正した.[27] も同様.
https://www.springer.com/gp/book/9783319013329
Amazon の URL.

[29] Maurice Kraitchik. *Mathematical recreations*. Dover Publications, 1942.

[30] Maurice Kraitchik. *Mathematical recreations*. Dover Publications, 1953.

[31] Sara Robinson. Why mathematicians now care about their hat color, 4 2001. https://www.nytimes.com/2001/04/10/science/why-mathematicians-now-care-about-their-hat-color.html.

[32] Hans van Ditmarsch and Barteld Kooi. *Honderd gevangenen en een gloeilamp*. Epsilon Uitgaven, 2013.

[33] Hans van Ditmarsch and Barteld Kooi. *One Hundred Prisoners and a Light Bulb*. Copernicus, 7 2015. https://www.springer.com/gp/book/9783319166933
Amazon の URL.

[34] 田中一之. チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題. 東京大学出版会, 11 2013. http://www.utp.or.jp/book/b306613.html
Amazon の URL.

[35] 岩沢宏和, 上原隆平. ガードナーの数学娯楽 (完全版 マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 2). 日本評論社, 4 2015. [24] の和訳.
https://www.nippyo.co.jp/shop/book/6820.html
Amazon の URL.

[36] 藤村幸三郎. 最新数学パヅルの研究. 研究社, 1943.

[37] 川辺治之. 100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル. 日本評論社, 11 2016. [33] の和訳版.
https://www.nippyo.co.jp/shop/book/7303.html
Amazon の URL.

[38] 静間荘司. 囚人と帽子のパズル もし囚人が無限にいたら, 6 2021. https://www.nippyo.co.jp/shop/magazine/8572.html
Amazon の URL.

[39] 高木茂男. 光と影と赤い帽子. 数学史研究, Vol. 8, No. 2, 4 1970. http://www.wasan.jp/sugakusipdf/sugakusi45.pdf.

[40] 金沢養. 100 万人のパズル（上）. 白揚社, 1968. Amazon の URL.

索 引

color, 40
coloring, 40

Hat (Guessing) Game, 10
Hat Problem, 10
Hat Puzzle, 10

Muddy Children Puzzle, 27

prisoner, 40

the problem of the three philosophers, 38

visibility graph, 41

色, 40

3 人の哲学者の問題, 38

視野グラフ, 41
  視野, 41
囚人, 40
囚人と帽子のパズル, 10
  Ebert の帽子パズル, 25
  Smullyan の帽子パズル, 19
  Dirac-Gardner の帽子パズル, 16
  Hardin-Taylor の帽子パズル, 16
  無限帽子パズル, 18
  有限帽子パズル, 18

先行発言者, 24

泥んこの子供たちのパズル, 27

発言方法, 24
  順次発言型, 24
  同時発言型, 24
  1 人先行型, 24

帽子パズル, 11
  無限帽子パズル, 12
  有限帽子パズル, 12
帽子パズルっぽいパズル, 11

（coloring が）見分けがつかない, 41