SOU 数学ラボ　不完全性定理勉強会ノート

2022 年 11 月 5 日

目 次

第I部

不完全性定理勉強会ノート

このノートはとある不完全性定理の証明を目標としたゼミ形式勉強会にて, メイン発表者が予習・発表した内容をまとめたものです.
この勉強会では不完全性定理の証明という目標に対して, 数理論理学の入門書である『A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition』[11] を, ゼミ形式で読み進めていくことにしました. このテキストは嘉田先生による和訳版『論理学への数学的手引き』[20] もあります. その他さまざまなテキストを参考しています.
ノートの見方としては, 基本的には課題図書に沿って進めていますが, 節をスキップしたり, また行間を埋めたり, 数理論理学を学んだ立場から補足を入れたりしています. またそれに伴って, テキストにない定義や定理・補題, 記法の導入をしています. 例えば地の文にて「〇〇は明らか」とか書いてあった場合でも証明する価値があると判断した場合, 〇〇という主張に Proposition や Corollary のどちらかで名前を付けて証明しています. Theorem や Lemma は元のテキストでも使われているので, 私がこの言葉を使うと著者が名付けた意味が薄れてしまうので使わないようにしました. 自分で証明したことに Proposition や Corollary のどちらかを付けるかは, [27] の 76 ページからを参考にしています. ただ自分で用意した Proposition や Corollary にも採番しているので, テキストにある定理の番号とはズレていることがあります. そうなるとテキストを読みながらの勉強には不便だと思い, テキストにも載っている定義・定理などは, テキストのどの定義・定理に対応してるか, そして原著（E）・和訳（K）のどのページに載っているか記載しています. このノートを参考にする方は, 是非テキストを購入して見比べてもらえればと思います. また個人的な好みとして、定理の主張部分とその証明では「である調」で、それ以外では「です・ます調」で書いています。もしこのルールに当てはまらない場合を記述を見つけた場合、是非教えてください。その他ノートについてのご指摘は大歓迎します。
また基礎的な数学知識の補足は, 自分用の基礎知識学習まとめノートの第 II 部（45 ページ）から引用しています.

第0章　集合についての予備知識

このテキストを用いた勉強会の最初の注意として, 論理式という言葉をよく使います. これは数学においてよく現れる述語論理における記号を拝借して書いた, 日本語に翻訳可能な記号列のことを指します. より形式的な定め方をすれば, 2つの量化子と呼ばれる記号「$\forall$」と「$\exists$」と変数を指す記号の記号列である主部と, 主部に用いた量化子以外の変数を指す記号を用いて書かれた記号列である述部からなります. 数学に現れる「〇〇でない」「〇〇または××」「〇〇かつ××」「〇〇ならば××」という表現は, 論理式における述部において使用されますが, それらは「$\neg$」「$\vee$」「$\wedge$」「$\to$」に変換して記述します. さらに述部においてはそれまでの議論において定義された記号などが登場します.
主部と述部の区切りを明確にするために「$(,)$」を用いることにします. 人によっては「.」を使う人もいます. 例えば「$\forall x \exists y (x+y=0)$」を「$\forall x \exists y. x+y=0$」と書きます. さらに人によっては主部の先頭以外の量化記号の左に書いたりします. 例えば「$\forall x \exists y \forall z. x+y=z$」は「$\forall x. \exists y. \forall z. x+y=z$」と書きます. 個人的にはこれはやり過ぎに感じますし, 主部と述部の近いが分かりにくくなっていると思うので私は使用しません（あと単純にノートや板書の際に目立たなさすぎるという気もします）. 「$(,)$」は述部内において文章の結合をより明確にするためも使います. 例えば P, Q, R を何らかの数学的主張とするとき「$P \wedge Q \to R$」は「P と $Q \to R$ が $\wedge$ で結合されたもの」と読むか, 「$P \wedge Q$ と R が $\to$ で結合されたもの」と読むかで意味は大きく異なります. どちらの意図で書いたのかを明確にするために「$(,)$」を用いて, 「$P \wedge (Q \to R)$」と「$(P \wedge Q) \to R$」として書き分けることができます.
日常言語で書かれた数学的主張をわざわざ論理式に書き変えるメリットとして, その主張の理解が捗り, 定義の理解の補助となったり, 証明するときの目的が明確になるという点が挙げられます. よって数学では日常言語と論理式の相互翻訳する力が非常に重要になります. これについては数学をする中で, 数学的な議論に慣れていく仮定で形成されていく能力かもしれませんが, それを意識的に学ぶことについて書かれたテキスト, 例えば [17] もあります. このテキストでは論理式のことを数文, 日常言語で書かれた主張のことを和文とよび, 各々への翻訳のことをそれぞれ数文和訳, 和文数訳と呼称しています. この作業について私個人はとくに名前を付けたりはしませんが, その大事さへの共感はあります. よって, この勉強会の発表でも, その内容のまとめノートであるこのノートでも論理式は活用していこうと思っています.
しかし1つ問題もあります. 数学基礎論・数理論理学以外の数学では, おそらくその数学の対象として数学的主張に用いられる記号が登場することはありません. それゆえにこの分野以外の数学では論理式, もしくはここでいう論理式で用いる記号を日常言語を省略するために用いても何ら混乱を生むことはありません. しかしこの分野の対象は数学であり, もっといえば数学を記述しているその記号もその対象になります. つまり「日常言語の略記」として用いている論理式に使用する記号と, 「対象としている記号列」としての論理式に使用する記号が被ってしまいます. ありえない主張ではありますが, 「任意の全称量化子について〜」という主張もそれ自体は許容されており, その場合, これを論理式に雑に翻訳した場合「$\forall\forall(\sim)$」となり, （並び順などで分かるといえば分かるんですが）混乱します. つまりその対象に論理式に用いる記号が登場する可能性が高い分野では, 論理式の使用は非常に注意しなくてはなりません. 私たちが略記として用いる論理式に使用する記号のことをメタ記号, 対象となっている記号のことをオブジェクト記号という名付けて区別することもあり, それに合わせてメタ記号としての量化記号には〇で囲む, オブジェクト記号の方はそのまま使用するという方法もありますが, それはこの勉強会に必要がでてきたタイミングで導入する可能性があります. 今現在は慎重に用いればメタとオブジェクトの混乱はないだろうと思っています.
ここでは論理式に翻訳するさいに, 何もかも日本語の混ざっていない文章にしなくてはいけないという制約はないことにします. もちろん定義したあらゆる述語に対して日本語以外の文字（主にアルファベット）での略記方法を導入することも可能ですが, それだと記法を増やすだけです. なのでなるべく定義する記号を減らしつつ, 論理式を記述するために以下の述語用の記号を用意します.

Notation 0.0.1（コロン記法）.
「〇〇は××である」という数学的主張の略記として「〇〇 : ××」と書く. ■

上記の〇〇には大抵変数として使用する記号が入ります. 例えば「p を素数とする」という数学的主張を「p : 素数」と略記し

ます．これだけだと大した略記になっていないと思われるかもしれませんが，「素数は無限に存在する」つまり「任意の素数に対してそれより大きい素数が存在する」という主張は，「$\forall n\,(\ n:$ 素数 $\ \to\ \exists p(\ p:$ 素数 $\wedge\, n<p\ )\ )$」と表現できます．
数学では「$\forall x(x\in A\to x\in B)$」や「$\exists x(x>0\wedge x-1=0)$」という形の論理式を，「$\forall x\in A(x\in B)$」や「$\exists x>0(x-1=0)$」と省略することがあります．もっと抽象的に省略規則を定めます．

<u>Notation</u> 0.0.2（論理式の省略）．
ここでは $P(x)$ を x を用いた何らかの数学的主張, Q を何らかの数学的主張とします．

1. 「$\forall x(\ P(x)\to Q\ )$」という形の論理式があったとき，これを「$P(x)$ の x に $\forall$ をつけた記号列 (Q)」と略記できる．
2. 「$\exists x(\ P(x)\wedge Q\ )$」という形の論理式があったとき，これを「$P(x)$ の x に $\exists$ をつけた記号列 (Q)」と略記できる．■

たとえば $P(x)$ が $x>0$ だったとき, $\forall x(x>0\to Q)$ を $\forall x>0(Q)$ と, $\exists x(x>0\wedge Q)$ を $\exists x>0(Q)$ と略記できます．また $P(x)$ が $0<x$ だった場合は愚直に $0<\forall x$ とせずに, $P(x)$ を同値な言い換えを行って x が最左側に来るように, つまりすぐ上のように 0 と x を入れ替えて表現します．
ただどんな $P(x)$ でもできるとは限らないことには注意です． $P(x)$ が $0<x<1$ だったときは規則通りに略記するならば $0<\forall x<1$ となりますが, 私はなんとなくこの書き方は好みません（採用している人はいます）．
この略記が向く $P(x)$ は, x しか変数が登場しない短い数学的主張であることが多いと思います．よくあるのは $<$ や $\in$ などですが, 先に定義したコロン記法はこのとき非常に便利なものになります．例えば先ほどの「$\forall n\,(\ n:$ 素数 $\ \to\ \exists p(\ p:$ 素数 $\wedge\, n<p\ )\ )$」は，「$\forall n:$ 素数 $(\ \exists p:$ 素数 $(n<p)\ )$」と非常に短く, 分かりやすくなります．
テキストの内容に入るまでの自前の定義はここまでです．次はテキストに書いてある内容に注目していきます．

<u>Notation</u> 0.0.3（ジャーゴン (E:p1 2, K:p1 2)）．
数学用語になかで, このノートを通じて用いるものを 4 つ挙げる．

1. 定義や定理の主張の終わりを表す記号として ■ を, 証明の終わりを表す記号として □ を用いる．[1]
2. 「○○ならば××である」という含意を表す文章を「○○ $\Rightarrow$ ××」と略記する．[2] 逆向きの含意を表すのに $\Leftarrow$ を使うこともあります．
「○○であるのは, ××であるとき, かつそのときに限る」を「○○は××と同値である」と述べたり, 記号 $\Leftrightarrow$ を,「○○ $\Leftrightarrow$ ××」のように使ったりする．
3. 「したがって」という言葉の代わりに省略記号 $\therefore$ を,「なぜなら」という言葉の代わりに省略記号 $\because$ を用いる．とくに証明中に $\because$ を用いる場合はぶら下げを使って, その理由部分を書く．[3]
4. 関係を表す記号に斜線を重ねることでその関係の否定を表すことがある．例えば「$x=y$」の否定として「$x\neq y$」や「$x\in y$」の否定として「$x\notin y$」と書く．このテキストで新たに導入する記号, 例えば $\models$ に対しても同様に $\not\models$ のようにして, このルールを適用する．■

テキストでは「$\Rightarrow$」と「$\Leftrightarrow$」の 2 つの日常言語文の省略用記号の使い方も紹介しています．しかしこれらは「$\to$」や「$\leftrightarrow$」という記号を数学的対象として証明中に扱う, これからの議論においては利用方法次第では混乱を招くと考えました．私なりのこのノートでの利用方法については Notation 0.0.16（8 ページ）にて紹介します．

<u>Definition</u> 0.0.4（集合 (E:p1 2, K:p2)）．
ものの集まりのことを **set**（**集合**）という．
集合という集まりに属する「もの」のことをその集合の **member**（**要素**）または **element**（**元**）と呼ぶ．この「もの」のこと

[1] 原書でも和訳でも $\dashv$ となっていますが, 私が普段使わないので □ にさせてもらうことにしました．
[2] 「○○ $\Rightarrow$ ××」のような形の命題があったとき, ○○の部分をこの命題の前件, ××の部分をこの命題の後件と読んだりします．原著でも和訳でも「... ならば... である」と前件も貢献も「...」で表現されていますが, 細かいことをいうと, これだと前件も後件も同じ主張が入るのかなと誘導しそうだと思い, 自分では○○と××を使ってみました．
[3] $\therefore$ は普段から使わないのでこのノートでも使わないと思います．それとは別に $\because$ は普段から積極的に使っているので, ここに載せました．また $\because$ を使ったときにどこからどこまでがその理由であるか, 理由が長ければ長いほど分かりにくくなるので, ぶら下げを使うことにしています．これの利点は証明を読む場合にその理由を読む必要がなければ, ぶら下げ部分全体を目で飛ばしてしまえばいいからです．これと同じで証明中の場合分けや, 同値証明を含意方向別に見やすくするため, つまり必要条件確認と十分条件確認を分けて見やすくするために, その各部分にぶら下げを使ったりしています．

をオブジェクトとも呼んだりする．[4] オブジェクト x, y が同一のものであるとき, $x = y$ と表す．
もの t が集合 A の要素であることを $t \in A$ で表す．
集合 A, B に対して

どのオブジェクト t についても, $t \in A$ であれば $t \in B$ であり, かつ $t \in B$ であれば $t \in A$ である

（論理式で書けばたとえば $\forall t(\ t \in A \to t \in B\ \wedge\ t \in B \to t \in A\ )$ や, $\forall t(\ t \in A \Leftrightarrow t \in B\ )$ となる）をみたすとき, 集合 A, B は等しいと言い, $A = B$ で表す． ■

ここでいうオブジェクトとは集合として集めるべき価値のあるもの, すなわち数学的対象ともいうべきものだと思えます．日常言語的に用いる「もの」とオブジェクトを指す「もの」の区別を付けるために, オブジェクトを指す「もの」は以降「モノ」と書いたりもします．

Definition 0.0.5（E:p2, K:p2）．
モノ t と集合 A に対して, その要素が t か A に属する要素のみであるような集合を $A; t$ で表す．
のちに定義する和集合記号 $\cup$ を用いて定義しなおせば, $A; t \overset{\text{def}}{=} A \cup \{t\}$ となる．「$\overset{\text{def}}{=}$」という表記に関してはすぐ下の Notation を参照のこと．[5] ■

Notation 0.0.6（定義するための記号）．
モノ（数学的対象）を定義するさいに「$\overset{\text{def}}{=}$」, [6] （数学的な）述語を定義するさいに「$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$」を用いる．使い方としてはこれらに記号の左側に変数などを利用した新たな述語を記述し, 右側に日常言語で書かれたそれらの定義を書く．ここまでの定義を使用例を出すと

- $A; t \ \overset{\text{def}}{=}$ その要素が t か A に属する要素のみであるような集合（Definition 0.0.5）
- $A = B \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ どのオブジェクト t についても, $t \in A$ であれば $t \in B$ であり, かつ $t \in B$ であれば $t \in A$ である（Definition 0.0.4） ■

Proposition 0.0.7.
モノ t と集合 A に対して, $t \in A \ \Leftrightarrow\ A; t = A$. ■

Proof 同値であることを示すので, $t \in A \ \Rightarrow\ A; t = A$ と $A; t = A \ \Rightarrow\ t \in A$ の 2 つを示す必要がある．

$t \in A \ \Rightarrow\ A; t = A$ の証明
$t \in A$ とすると, t はすでに A の要素であるため, $A; t$ のどの要素も A の要素であり t も含めてそれ以外の要素が含まれることがない．つまり $A; t = A$.

$A; t = A \ \Rightarrow\ t \in A$ の証明
$A; t = A$ とすると, 集合 $A; t$ のどの要素も A の要素であるから, $A; t$ に属する t もまた A の要素でなくてはならない．つまり $t \in A$. □

Definition 0.0.8（空集合 (E:p2, K:p2 3)）．
要素を全く持たない集合を **empty set**（**空集合**）といい, $\emptyset$ で表す．集合 A が空であることは $A = \emptyset$ で表せ,（論理式で書けば例えば $\forall x(\ x \notin A\ )$ となる）空集合でない集合を **non empty** な（**空でない**）集合と呼ぶ． ■

Notation 0.0.9（E:p2, K:p3）．
自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ で, [7] 整数全体の集合 $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{Z}$ で, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す．[8] ■

[4] 個人的には「元」というと, その集合に何らかの数学的構造が入っているようなイメージがあるので, 単なる集合の属するものに対しては「要素」を使っていきます．このイメージを持っていると理由としては, 単位元とはいっても単位要素とはあまりいわれない点でしょうか．
[5] この $A; t$ という記法はここで初めて見た．どこまでメジャーなんだろうか．
[6] この記号はテキストでは導入されていないが, ほかの数学書でもよく使うし表現を簡略化するためにも積極的に使っていく．また「$\overset{\text{def}}{=}$」の代わりに「:=」はよく使われている印象がある．ただこれは証明内での一時的な定義にも使用している人もいるような気がする．
[7] ところで「$\mathbb{N}$ を自然数の集合とする」だと, 自然数の集合というものを定義して, それに $\mathbb{N}$ という記号を割り当てたという定義の主張に見えますが, ここにあるように「自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す」だと, 単に今後その記号を使うという記法の導入にも見えます．なのでここでは定義ではなく記法としてみました．
[8] 実数全体集合は今後も必要なので導入しておいた．

Definition 0.0.10（外延的記法 (E:p2, K:p3)）.
モノ $x, x_1, \dots, x_n$ に対して,

1. x のみを要素にもつ集合を $\{x\}$ で表す.
2. $x_1, \dots, x_n$ のみを要素にもつ集合を $\{x_1, \dots, x_n\}$ で表す.
3. $\{0, 1, 2, \dots\}$ は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を表し, $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ は整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を表す. ■

集合は要素の表現の順番を変えても同じ集合です. 以下の主張を示せばそれが分かります.

Proposition 0.0.11（E:p2, K:p3）.
モノ x, y に対して, $\{x, y\} = \{y, x\}$ である. ■

Proof 証明略. □

Definition 0.0.12（内包的記法 (E:p2, K:p3)）.
$\{\, x \mid \_x\_ \,\}$ と書いて $\_x\_$ をみたす全てのモノの集合を表す. [9] ■

テキストでは「この書き方はめいっぱい柔軟に用いることにする」とあり, その使用例として $\{\, \langle m, n\rangle \mid m, n$ は $\mathbb{N}$ の要素で $m < n \,\}$ が挙げられています. 論理式で書けば $\{\, \langle m, n\rangle \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n \,\}$ となります. ここにおいて「柔軟」という言い方も曖昧だと思います. 定義にある書き方になぞるならこの集合は $\{\, x \mid \exists m, n \in \mathbb{N}(\ x = \langle m, n\rangle \wedge m < n \,\}$ と書くべきでしょうか. ちなみに [19] では内包的記法における | の左に変数一文字ではなく, いくつかの変数を用いた表現が使われている記法を, 内包的記法と区別して置換型記法と呼んでいたりします. たしかにこの 2 つの記法は同じではないので, 区別する必要があると思われます（普通の数学書でそう区別はしないことは多いと思いますが）. なのでここの柔軟さはかなり曖昧に思えました. 置換型記法とはノート冒頭で論理式に対して定義した略記（Notation 0.0.2（6 ページ））の, 集合を定義するための応用と思うこともできます.
後々のための以下のような整数の部分集合を定義します.

Definition 0.0.13（整数の区間集合）.
$m < n$ な整数 m, n に対して, $\{m, \dots, n\} \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n \,\}$ [10] . ■

よく使うのは自然数 n に対して, $\{0, \dots, n\}$ や $\{0, \dots, n-1\}$ などですが, ここで $n = 0$ の場合, 前者は $\{0\}$, 後者はその定義から $0 < x < -1$ を満たす整数が存在しないため空集合になります.

Definition 0.0.14（部分集合 (E:p2, K:p3)）.
集合 A, B に対して集合 A の要素がすべて B の要素でもあるとき, A は B の **subset**（**部分集合**）であるといい, $A \subseteq B$ で表す. （論理式で書けば $\forall x(x \in A \to x \in B)$ となる） ■

Proposition 0.0.15（(E:p2, K:p3)）.
$\emptyset$ はどんな集合に対しても部分集合となる. ■

Proof 証明略. □

ここで改めて二重矢印記号の使い方について説明します. 私なりの運用方法は以下のようになっています.

Notation 0.0.16（二重矢印）.
ある定理の証明中において, 何らかの数学的主張, もしくはそのそれを表す記号である P, Q に対し, 「P を仮定し Q を証明する」という宣言の略記として「$P \Rightarrow Q$」を用いる.
数学的主張の同値な言い換えをつなぐ記号として $\Leftrightarrow$ を用いる. ■

[9] ここはテキストにならったのですが, $\_x\_$ はかなり曖昧だと思いました. x に関する命題とか文と言ってしまえば, これから命題や文という単語を対象につけることがあるような当分野においては避けたい表現ではある（そして表現という単語も今後登場する………）. $\_x\_$ の代わりに $P(x)$ や $\varphi(x)$ などを使って, x を変数とする命題かのように表現することもありますが, それもこの場合は意図的に避けたのだろうと思います. 避けた理由としては, 今度は主張における変数とは何かを説明しなくてはならないからでしょうか.

[10] 細かいことをいうと $m < x < n$ とは $m < x \wedge x < n$ の略記です.

「⇒」は例えば, 定理の主張内において (1), (2) と名付けられた主張に対しその 2 つが同値であることを示せというものがあったとき, その証明のどこからどこまでがどちらを仮定してどちらを示したのかを分かりやすくするために,「(1) ⇒ (2)」「(2) ⇒ (1)」を書き, その間にぶら下げを用いて証明を書きます. 証明の中では使用されていますが, 証明の議論展開が分かりやすくなるのと, 二重でない矢印記号との同レベルでの使用ではないため混乱をしにくいと思って活用しています.
「⇔」はその左右に数学的主張, もしくはそれを表す記号が入り, また主張は日常言語や論理式のどちらでもあり得ます. 例えば証明中に定義の確認をする目的で先の定義のための記号と併用して以下のような記述が可能です.

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\overset{\text{def}}{\iff} \forall x(\ x \in A \to x \in B\ ) \\ &\Leftrightarrow \text{ 任意の } x \text{ に対して } x \in A \text{ ならば } x \in B \\ &\Leftrightarrow \text{ 全ての } A \text{ の要素は } B \text{ の要素でもある.} \end{aligned}$$

Definition 0.0.17（べき集合 (E:p2, K:p3)）.
集合 A に対して A のすべての部分集合からなる集合を A の **power set**（**べき集合**）とよぶ, $\mathcal{P}(A)$ で表す. より正確には $\mathcal{P}(A) \overset{\text{def}}{=} \{\ X \mid X \subseteq A\ \}$. [11] ■

Example 0.0.18（E:p3, K:p4）.
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ■

Definition 0.0.19（和集合と共通部分 (E:p3, K:p4 5)）.
A, B を集合, $\mathcal{A}$ を全ての要素が集合であるような集合とする. [12] [13] さらに各自然数 n に対して集合 A_n が定まっているとする.

1. $A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{\ x \mid x \in A$ または $x \in B\ \}$（$= \{\ x \mid x \in A \vee x \in B\ \}$）とし, これを A と B の **union**（**和集合**）という.

2. $A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{\ x \mid x \in A$ かつ $x \in B\ \}$（$= \{\ x \mid x \in A \wedge x \in B\ \}$）とし, これを A と B の **intersection**（**共通部分**）という.

3. $A \cap B = \emptyset$ であるとき, A と B は **disjoint**（**交わらない**）という. $\mathcal{A}$ のどの 2 個の要素も交わらないとき, $\mathcal{A}$ は **pairwise disjoint**（**互いに交わらない**）という.

4. $\bigcup \mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{\ x \mid x$ は A のいずれかの要素に属する $\}$（$= \{\ x \mid \exists A(x \in A \wedge A \in \mathcal{A})\ \}$）とし, これを $\mathcal{A}$ の **union**（**和集合**）という.

5. $\bigcap \mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{\ x \mid x$ は A のすべての要素に属する $\}$（$= \{\ x \mid \forall A(x \in A$ $rightarrow A \in \mathcal{A})\ \}$）とし, これを $\mathcal{A}$ の **intersection**（**共通部分**）という.

6. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup \{\ A_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ とする. これを単に $\bigcup_n A_n$ と表すこともある. [14] ■

ここで集合族の共通部分に関して, テキストでは空でないことを要求していなかった. もし雑に万有集合を扱ってよいならば, 空な集合族の共通部分は万有集合になるとすればいいです. しかしそのような集合をモノとして扱うことのできない ZF 集合論のような立場では, 共通部分とは空でない集合族にしか定義できないと定めることが定石です. ここでいう「モノとして扱うことができない」とは, 公理から存在を保証できなかったり, 存在を仮定すると公理に対して矛盾したりすることをいいます.

Example 0.0.20（E:p3, K:p4 5）.
モノ t, 集合 A, B, 集合族 $\mathcal{A} = \{\{0,1,5\},\{1,6\},\{1,5\}\}$ に対して以下が成立.

1. $A; t = A \cup \{t\}$.

---

[11] テキストでは $\mathcal{P}A$ だが個人的には $\mathcal{P}(A)$ が好きなのでこちらを使っていくことにしました.
[12] テキストではいきなりこんな集合が登場したけど, なんで「集合族」のような語を用意しなかったのだろうか.
[13] テキストでは集合でも集合族でも単なる A で表現していた. 個人的には集合族には記号の衝突が起こらない（つまり理論を展開するさいに必須な記号と被らない）かぎり, 集合族には筆記体（カリグラフィーとどう違うのか分からないけれども………）を使うのが好み. ただ要素が集合であろうが（集合に見えない）モノであろうが、もし全てが集合である ZF 集合論のような世界では、集合と集合族に区別がないという意味でこの記法を採用しているならば、集合論研究者としては好感のもてる一貫性です。
[14] これは添え字付き集合族の和集合ともいえるものだけど, なぜ添え字付き集合族の共通部分は定義しなかったのだろう（単に今後使わないだけ？）.

2. $\bigcup \mathcal{A} = \{0, 1, 5, 6\}$.
   $\bigcap \mathcal{A} = \{1\}$.

3. $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$.

4. $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$. ■

Definition 0.0.21（順序対 (E:p3 4, K:p5)）.
モノ $x, y, z, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ に対して

1. $\langle x, y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$ とし，これを x と y の **ordered pair（順序対）**という．[15] 順序対 $\langle x, y\rangle$ における x, y をこの順序対の成分といい，とくに x を第一成分，y を第二成分と呼んだりする．[16]

2. $\langle x, y, z\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$ とし，より一般的に $n > 1$ に対して $\langle x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle$ と帰納的に定義する．

3. とくに $\langle x\rangle = x$ と定義する．[17] ■

Definition 0.0.22（有限列 (E:p4, K:p5)）.
集合 A に対して

1. S が A の要素からなる **finite sequence（有限列）**（あるいは **string（列）**）であるとは，ある正の整数 n について $S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ で各 x_i が A の要素であるときとする．（論理式で書くと $\exists n \in \mathbb{Z}(\ n > 0\ \wedge\ x_1, \ldots, x_n \in A\ \wedge\ S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle\ )$）
   またこのときの n を有限列 A の**長さ**とよぶ．[18]

2. A の要素からなる有限列 $S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ に対し，$1 \leq k \leq m \leq n$ な k, m でもって $\langle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m\rangle$ な形の有限列を S の **segment（区間）**という．とくに $k = 1$ な区間を S の **initial segment（始切片）**といい，$m \neq n$ な始切片を S の **proper initial segment（真の始切片）**という． ■

Proposition 0.0.23（E:p4, K:p6）.
モノ $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ に対して $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ ならば，$1 \leq i \leq n$ な各 i について $x_i = y_i$. ■

Proof 示すべきことを論理式で書くと

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(\ \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\,(\ \langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle\ \to\ \forall i(\ 1 \leq i \leq n \to x_i = y_i\ )\ )\ )$$

となる．よって $n \in \mathbb{N}$ について数学的帰納法を用いて証明する．

（Basis）
その定義より $\langle x\rangle = x$ だから，$\langle x_1\rangle = \langle y_1\rangle$ ならば $x_1 = y_1$ である．

（Induction step）
n のときに成立しているとする．任意に取った $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ に対して，$\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\rangle$ だったとする．一般的な順序 n 個組の定義から

$$\begin{aligned}\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle &= \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle,\\ \langle y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\rangle &= \langle\langle y_1, \ldots, y_n\rangle, y_{n+1}\rangle\end{aligned}$$

[15] これは順序対の Kuratowski 流の定義と言われています．他の流儀などは Wikipedia『順序対』[2] も参考に．
[16] 定義されていなかった言葉遣いだったのでなんとなく定義しておいた．
[17] これの妥当性として，すぐ後ろで $\langle x, y\rangle$ とは x, y とオブジェクトが並んだ列と見なすので，$\langle x\rangle$ とは $x1$ つが並んでいる初項のみの列と思えば $\langle x\rangle = x$ であるほうが自然に見える．また Kuratowski 流の定義によれば $\langle x, x\rangle = \{\{x\}\}$ となりこれと単なる x とを区別しやすくなる．
[18] テキストにおいて写像における有限列の定義について言及していますが，これは例えば長さ n の A の有限列 S は $\{1, \ldots, n\}$ から A への写像として定義できます．

であり, 今順序対の定義から第一成分・第二成分同士が等しいので,

$$\begin{aligned}\langle x_1,\dots,x_n\rangle &= \langle y_1,\dots,y_n\rangle,\\ x_{n+1} &= y_{n+1}\end{aligned}$$

となる. 今に任意に取られた n 個の要素たちについては

$$\langle x_1,\dots,x_n\rangle = \langle y_1,\dots,y_n\rangle \ \to\ \forall i(\ 1\le i\le n \to x_i = y_i\ )$$

が成立しているので, $x_{n+1}=y_{n+1}$ とまとめると, $\forall i(\ 1\le i\le n+1\to x_i=y_i\ )$ となるので, $n+1$ の場合も OK. □

ここで初めて登場した数学的帰納法の証明について補足します. 数学的帰納法は自然数全てに対しての主張もしくは, ある自然数以降の全ての自然数に対しての主張の証明に用いるものです. 自然数の性質として（場合によっては公理として要請される）数学的帰納法の原理とは, ある自然数に対しての数学的主張を $P(n)$ と書くことにしたとき, どんな主張 $P(n)$ に対しても

$$\Big(\ P(0)\wedge\forall n\big(P(n)\to P(n+1)\big)\ \Big)\ \to\ \forall n(P(n))$$

が成立するというものです. より一般的な数学的帰納法の原理とは, どんな主張 $P(n)$ に対しても

$$\Big(\ P(k)\wedge\forall n\ge k\big(P(n)\to P(n+1)\big)\ \Big)\ \to\ \forall n\ge k(P(n))$$

が成立することとなります. 先の原理は $k=0$ としたときの場合です. つまり「$\forall n(P(n))$」や「$\forall n\ge k(P(n))$」を証明したい場合は, 「$P(0)\wedge\forall n\big(P(n)\to P(n+1)\big)$」や「$P(k)\wedge\forall n\ge k\big(P(n)\to P(n+1)\big)$」を示せばよいということです. つまり証明は 2 つの部分に分かれるわけですが, 大抵は以下のように書きます.

Proof

（ $P(0)$ ）
…

（ $\forall n\big(P(n)\to P(n+1)\big)$ ）
…[19] □

ただ証明によって「$P(0)$」や（何らかの具体的な k について）「$P(k)$」などと書きわけるのも面倒です. どちらにしても証明の構造は変わらないですし, 今示そうとしているのが $P(0)$ なのか $P(k)$ なのかは文脈から明らかであると思うので, 私は先の証明のように「$P(0)$」や「$P(k)$」については「**Basis**」, もう 1 つの部分の証明に関しては「**Induction step**」と名付けています. Basis ではなく Base step という（より統一感のある）呼び名もありますが, 私が好きな [30] に合わせています. 以降の数学的帰納法を用いる証明も先の証明同様この表現方法で証明を記述していきます.

Lemma 0.0.24（E:p4 LEMMA 0A, K:p6 補題 0A）.
$\langle x_1,\dots,x_m\rangle=\langle y_1,\dots,y_m,\dots,y_{m+k}\rangle$ ならば $x_1=\langle y_1,\dots,y_{k+1}\rangle$. ■

Proof　示すべきことを論理式で書けば

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \Big(\ \forall m\in\mathbb{N}\forall x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_{m+k}\Big(\ \langle x_1,\dots,x_m\rangle=\langle y_1,\dots,y_m,\dots,y_{m+k}\rangle\ \to\ x_1=\langle y_1,\dots,y_{k+1}\rangle\ \Big)\ \Big)$$

となる. 任意に $k\in\mathbb{N}$ をとる. このあとの主張に対して $m\in\mathbb{N}$ についての数学的帰納法を用いる.

（Basis）
$m=1$ を仮定に代入すると $\langle x_1\rangle=\langle y_1,y_2,\dots,y_{1+k}\rangle$ となり, 定義より $\langle x_1\rangle = x_1$ から成立.

[19] 高校数学ではこのステップが「$n=k$ が成り立つとして $n=k+1$ とすると〜」なんて書き出したりしますが, 今にして思えば非常に気持ち悪い文章です. ですがおそらく高校数学においては n はいつでも自然数を表すグローバル変数のようなもので, k は 1 つの証明の中で用いるローカル変数のような気分で使っているとも思えるので, そこまで不思議でもなかったり.

（Induction step）

m のときに成立しているとする．$\langle x_1, \ldots, x_{m+1} \rangle = \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+1+k} \rangle$ を仮定する．一般順序組の定義から

$$\begin{aligned} \langle x_1, \ldots, x_{m+1} \rangle &= \langle \langle x_1, \ldots, x_m \rangle, x_{m+1} \rangle, \\ \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+1+k} \rangle &= \langle \langle y_1, \ldots, y_{m+k} \rangle, x_{m+k+1} \rangle \end{aligned}$$

となっている．つまり各第一成分が等しいということなので

$$\langle x_1, \ldots, x_m \rangle = \langle y_1, \ldots, y_{m+k} \rangle$$

が分かり, m のときに成立していたことから $x_1 = \langle y_1, \ldots, y_{k+1} \rangle$ であることが分かる． □

テキストでは例えとして「たとえば, A は集合で, A のどの要素も他の要素からなる有限列とは一致しないと仮定します．そのとき, $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ であって, x_i や y_i それぞれが A に属する場合, 上の補題によって $m = n$ です．さらに, 結果的に, それぞれの i について $x_i = y_i$ となります.」とありますが個人的に分かりづらかったので具体例を挙げます．

Example 0.0.25.
集合 A を $A = \{0, 1, \langle 2, 3 \rangle\}$ とすると, この A の要素で（集合として）等しくなるようなどんな 2 つの n 個組を作っても, それが等しい限りはその長さも構成成分の順番も等しくなる．
逆に $A = \{0, 1, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle\}$ として, A の有限列 S_1, S_2 を

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle \langle 0, 1, 0 \rangle, 1 \rangle, \\ S_2 &= \langle \langle 0, 1 \rangle, 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

とすると, この 2 つは（集合として）$S_1 = S_2$ ではあるが, S_1 の長さは 2 で S_2 の長さは 3, よって長さは一致せず, ゆえに構成成分も一致しない． ■

ここで有限列の長さの定義の曖昧さが少し影響がでてきます．たとえば Example 0.0.25 の S_1 は $\langle \langle 0, 1, 0 \rangle, 1 \rangle = \langle \langle 0, 1 \rangle, 0, 1 \rangle$ でもあるので, これの長さとして 2 か 3 のどちらを採用すればよいか混乱します．テキストに書いてある注意事項のように, 写像で定義すれば問題は解決できます．関数の定義の先取りにはなってしまいますが, たとえば S_1 を $S_1 \colon \{1, 2\} \to A$ として, $S_1(1) = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $S_1(2) = 1$ とすればよいです．すると S_1 と S_2 はそもそも定義域が違う別の関数となるので混乱がなくなります．しかしながら 1 章以降は $\{0, 1, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle\}$ のような集合から有限列を構成したりはしなません．つまり $\{0, 1, \langle 2, 3 \rangle\}$ のような「どの要素も他の要素からなる有限列とは一致しない」集合を扱うときには, 長さの定義に曖昧さがでることはないので, 特に長さの定義を意識する必要はないということです．最初にこれの注意に該当することは Theorem 0.0.40（16 ページ）や, Definition 1.1.1（24 ページ）下の注意事項 7 があてはまります．

Definition 0.0.26（直積集合 (E:p4, K:p6)）.
集合 A, B と $n > 1$ な $n \in \mathbb{N}$ に対し

1. $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ かつ } b \in B \}$ とし, これを A と B の **Cartesian product（直積集合）**という．
2. $A^n \stackrel{\text{def}}{=} A^{n-1} \times A$ と帰納的に定義する．たとえば $A^3 = (A \times A) \times A$ である． ■

Definition 0.0.27（関係 (E:p4 5, K:p6 7)）.
集合 A, B, R と $n > 0$ な $n \in \mathbb{N}$ に対し

1. R のすべての要素が順序対であるとき, R を **relation（関係）**という．
2. 関係 R に対して $\mathrm{dom}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid \text{ある } y \text{ について } \langle x, y \rangle \in R \}$ とし, これを関係 R の **domain（定義域）**という．
さらに $\mathrm{ran}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \mid \text{ある } x \text{ について } \langle x, y \rangle \in R \}$ とし, これを関係 R の **range（値域）**という．
さらに $\mathrm{fld}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$ とし, これを関係 R の **field（領域）**という．[20] [21]

[20] テキストでは $\mathrm{dom}(R), \mathrm{ran}(R), \mathrm{fld}(R)$ ではなく $\mathrm{dom}\, R, \mathrm{ran}\, R, \mathrm{fld}\, R$ と「()」が付いていないですが, 個人的な好みから「()」をつけることにします．その理由として板書した際に字体の書き分けが下手なので, 例えば dom と R の境目が分かりにくくなるからです．
[21] $\mathrm{fld}(R)$ というものはここで初めて見ました．

3. $R \subseteq A^n$ であるとき, そんな R を A 上の n 項関係という.

4. $B \subseteq A$ かつ R が A 上の n 項関係であるとき, $R \cap B^n$ を R の B への **restriction（制限）**という. ■

Example 0.0.28（E:p4 5, K:p6 7）.
集合 $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{N}^2$ に対し

1. $R_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ とおくと, R_1 は 0 から 3 までの数の間の大小関係となる. さらに $\mathrm{dom}(R) = \{0,1,2\}$, $\mathrm{ran}(R) = \{1,2,3\}$, $\mathrm{fld}(R) = \{0,1,2,3\}$ となる.

2. $R_2 = \{\, \langle m,n\rangle \mid m < n \,\}$ とおくと, R_2 は $\mathbb{N}$ 上の大小関係となり, $B = \{0,1,2,3\}$ とすれば $R_1 = R_2 \cap B^2$ となるから R_1 は R_2 の B への制限である. ■

Definition 0.0.29（写像 (E:p5, K:p7 8)）.
集合 A, B と関係 F に対して

1. F が「$\mathrm{dom}(F)$ のそれぞれの要素 x について, $\langle x,y\rangle \in F$ なる y がただひとつ存在する」(論理式で書くと $\forall x \in \mathrm{dom}(F)\exists! y(\langle x,y\rangle \in F)$）をみたすとき, F は **function（写像）**であるという. [22] このとき $x \in \mathrm{dom}(F)$ に対して一意的に存在している y のことを $F(x)$ で表し, F の x における **value（値）**という.

2. 写像 F が $\mathrm{dom}(F) = A$ かつ $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$ をみたすとき, F は A を B に**写す**といい, $F\colon A \to B$ で表す. [23]

3. $F\colon A \to B$ であるとき, $\mathrm{ran}(F) = B$ をみたすとき, F は A から B への **surjection（全射）**[24] であるといい, $F\colon A \xrightarrow{\text{onto}} B$ で表す. [25]
「$\mathrm{ran}(F)$ のそれぞれの要素 y について, $\langle x,y\rangle \in F$ をみたす x がただひとつ存在する」(論旨式で書くと $\forall y \in \mathrm{ran}(F)\exists! x(\langle x,y\rangle \in F)$)[26] をみたすとき, F は A から B への **injection（単射）**[27] であるといい, $F\colon A \xrightarrow{\text{1-1}} B$ で表す. [28]
全射かつ単射な写像を **bijection（全単射）**といい, [29] $F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ で表す. [30]

4. オブジェクト x, y とその順序対 $\langle x,y\rangle$ と写像 F に対して, $\langle x,y\rangle \in \mathrm{dom}(F)$ であるとき $F(\langle x,y\rangle)$ を単に $F(x,y)$ で表す. より一般的に $F(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ を $F(x_1,\ldots,x_n)$ で表す. [31]

5. $F = \{\, \langle x,x\rangle \mid x \in A \,\}$ であるとき, F を A 上の **identity function（恒等写像）**といい, この F を id_A で表す. [32] ■

Definition 0.0.30（演算 (E:p5, K:p8)）.
集合 A, B と関係 f, g に対して

1. $f\colon A^n \to A$ であるとき f を A 上の ***n*-ary operation（*n* 項演算）**であるという.

2. A 上の n 項演算 f と $B \subseteq A$ な集合 B に対して, $g = f \cap (B^n \times A)$ をみたす g を f の B への **restriction（制限）**という. [33]

---

[22] 個人的には map は写像, function は関数と訳すのが好みですが, ここはテキストとその和訳に合わせて function を写像と訳すことにします.
[23] これを見たときもしかしたら $\mathrm{ran}(R)$ の部分集合関係に合わせて $\mathrm{dom}(F) \subseteq A$ としなくてはいいのかと, 疑問に思う人もいるかもしれません. もしそうすると定義域に対応要素のない要素が存在することを許してしまいます. それを許したうえで $\mathrm{dom}(F) = A$ なる写像に**全域写像**と名付ける流儀もあります. たとえば [19] では $\mathrm{dom}(F) \subseteq A$ かつ $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$ なるものを「A から B への部分写像」, F による x の値が存在しないとき「$F(x)$ は未定義」といい, 部分写像が $\mathrm{dom}(F) = A$ を満たした場合にそれを全域写像もしくは単に写像と呼んでいます.
[24] このテキストでは「B 全体へ写す」と表現しています. それならまだしも「上への写像」という言い方もありますが, これは何が「上」なのか個人的にイメージしづらく使わないようにしています.
[25] これはテキストでは導入されていなかったけれど, あると便利なので導入しました.
[26] ここでの単射の定義は初見では違和感がありました. なぜなら普段私は $F \subseteq A \times B$ かつ $\forall a \in A\exists! b \in B(\langle a,b\rangle \in F)$ をみたすものを, A から B への写像とよび $F\colon A \to B$ と表し, $\mathrm{ran}(F) = B$ としていたためです. ここでの定義ならこれでよいと思われるが, 個人的にはやはり「$\forall x_1, x_2, y(\ \langle x_1,y\rangle \in F \wedge \langle x_2,y\rangle \in F \ \to\ x_1 = x_2\ )$」もっと分かりやすくして「$\forall x_1, x_2(\ F(x_1) = F(x_2)\ \to\ x_1 = x_2\ )$」か, 「$\to$」部分で対偶をとった「$\forall x_1, x_2(\ x_1 \neq x_2\ \to\ F(x_1) \neq F(x_2)\ )$」の方が好みです.
[27] このテキストでは「F が 1 対 1 である」と表現している. しかし全単射に対してこの言い方を使うテキストもあるし, 個人的には全単射の方が 1 対 1 なるイメージを持っているためここでは「単射」を使うことにしました.
[28] これも上に同様. 先の脚注で単射には「1 対 1」なるイメージがないためこの言葉を使わないと言いつつ、単射であることに略記にはそれを意味するような「$1-1$」を使ってしまっている点で、私の記法もそこまで一貫性があるわけではないとゼミ発表中に思いました。
[29] テキストでは定義されていなかったので用意しておいた.
[30] 同上.
[31] つまり普段 2 変数関数で使う記法を導入したことになります.
[32] テキストでは Id と書いていますが「A 上の」というからにはせめて Id_A と書く方が好き. そして Id より id が好きなのでこのように定義しました.
[33] この g のことを $f{\upharpoonright}B$ や $f|_B$ で表すことがあります. 個人的には $f{\upharpoonright}B$ が好き（初めて見た記法がこれだったからという理由で）.

3. A 上の n 項演算 f に対して, 集合 $B \subseteq A$ が f について閉じているとは, どの $b_1, \ldots, b_n \in B$ についても $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ をみたす（論理式で書くと $\forall b_1, \ldots, b_n \in B\big(\ f(b_1, \ldots, b_n) \in B\ \big)$）ときをいう. ■

Example 0.0.31（E:p5, K:p8）.
$S_1 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ と $S_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して

1. S_1 が任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $S_1(m,n) = m + n$ をみたすとすると, S_1 は $\mathbb{N}$ 上の加法という $\mathbb{N}$ 上の 2 項演算となる.

2. S_2 が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $S_2(n) = n + 1$ をみたすとすると, S_2 は $\mathbb{N}$ 上の直後の自然数を与えるという $\mathbb{N}$ 上の 1 項（単項）演算となる. [34]

3. $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対し $p(r_1 + r_2) = r_1 + r_2$ をみたすとすると, P は $\mathbb{R}$ 上の加法という $\mathbb{R}$ 上の 2 項演算となり, 1. の S_1 は P の $\mathbb{N}$ への制限, つまり $S_1 = P \cap \mathbb{N}^3$ となっている. ■

Example 0.0.32（E:p5, K:p8）.
集合 A, B に対して

1. f を A 上の n 項演算, $B \subseteq A$ とし, g を f の B への制限とする. g が B 上の n 項演算となることと, B が f について閉じていることは同値である.

2. A 上の恒等写像 id_A は（何もしない・作用しないという）A 上の単項演算である. ■

Proof　1. のみ示す. 主張「g が B 上の n 項演算となること」を (1),「B が f について閉じている」を (2) とおいて, (1) $\Rightarrow$ (2) と (2) $\Rightarrow$ (1) の 2 つを示す.

(1) $\Rightarrow$ (2)
f の B への制限 g が今 B 上の n 項演算であることから, $\mathrm{dom}(g) = B^n$ かつ $\mathrm{ran}(g) \subseteq B$ をみたしている, もっというと $g = f \cap B^{n+1} = f \cap (B^n \times B)$ をみたしている, これはつまり (2) をみたしていることになる.

(2) $\Rightarrow$ (1)
B が f について閉じている, つまり $g = f \cap B^{n+1} = f \cap (B^n \times B)$ となっているので, $\mathrm{dom}(g) = B^n$ かつ $\mathrm{ran}(g) \subseteq B$ をみたしている, これはつまり (1) をみたしていることになる. □

普段閉じている演算ばかりを見ているので, 逆に閉じてない演算とはどんな例があるかという議論があったのでここにまとめます.
$\mathbb{R}$ 上の 2 項演算 $+, -, \times$ にて $\mathbb{R}$ は閉じている. 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ とすると, $\mathbb{Q}$ 上のこれらの演算は $\mathbb{R}$ の演算の $\mathbb{Q}$ への制限となる. そして $\mathbb{Q}$ についても, そして $\mathbb{Z}$ についても閉じている. しかし演算 $-$ は $\mathbb{N}$ については閉じていない.
$\div$ についてはそもそもどう定義するか（0 で割ることをどう避けるか）によって議論が変わりそうでありますが, 通常通り掛け算の逆演算として定義すれば $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ については閉じていますが, $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ については閉じていません.

Definition 0.0.33（同値関係と順序関係 (E:p5 6, K:p8 9)）.
集合 A と関係 R に対して

1. R が A 上で **reflexive（反射的）**とは, 任意の $x \in A$ について $\langle x, x \rangle \in R$ であることをいう.

2. R が **symmetric（対称的）**とは, 任意の x, y に対して $\langle x, y \rangle \in R$ ならば $\langle y, x \rangle \in R$ であることをいう.

3. R が **transitive（推移的）**とは, 任意の x, y, z に対して $\langle x, y \rangle \in R$ かつ $\langle y, z \rangle \in R$ ならば $\langle x, z \rangle \in R$ であることをいう.

4. R が A 上で **trichotomy（三分律）**をみたすとは, 任意の $x, y \in A$ に対して $\langle x, y \rangle \in R,\ x = y,\ \langle y, x \rangle \in R$ のいずれか 1 つをみたすことをいう.

5. R が A 上の **equivalence relation（同値関係）**であるとは, R が A 上の 2 項演算でかつ A 上で反射的・対称的・推移的であるときをいう.

[34] これはよく**後者関数**と呼ばれています.

6. R が A 上の **ordering relation（順序関係）** であるとは, R が A 上の 2 項演算でかつ推移的であり A 上で三分律をみたすときをいう. ■

ここで上の定義は「A 上の」という言葉が付いたりそうでなかったりと一貫性がありません。これについてゼミ中に出た意見をまとめると、対称的、推移的という 2 つの概念は、関係 R がどんな集合から作ったものか、つまり $\mathrm{fld}(R)$ がどのようなものか意識せずとも議論できる性質になっています。一方で反射的や三分律をみたすといった概念はどの集合で議論するかでその定義を満たすかどうかが変わります。仮に $x, y \notin \mathrm{fld}(R)$ かつ $x \neq y$ なモノ x, y とそれを要素としても持つ集合 A があったとき、この集合上では常に反射的にも三分律をみたしません。なのでどの集合上で議論しているかがこの性質たちを満足するかどうかに関係してきます。例えば何らかの集合上に定められた二項関係についてしか議論することがないならば、この「A 上の」のような文言は全て除外する、もしくは全てに書くことで一貫性を与えることができます。おそらく著者はここでは関係を単なる順序対の集合という素朴な定義にしたため、このような定義になったのではと思われます。確かに定義に不要な単語を使用しないという点では、ここでの定義も一貫性があるといえます。
かねてよりの疑問として、この特別な関係についての用語は「〇〇的」と「〇〇律をみたす」が混在することが不思議に思っています。例えばここでは「三分律をみたす」のみが仲間外れなのでこれを「三分的」という用語に変えることも可能なはずです。和訳がこうなっているわけではなく、原著からこうなっています。つまり海外でもこの言葉たちの統一感のなさは当たり前である可能性があります。もし自分が何かテキストを書く機会があれば「〇〇的」か「〇〇律をみたす」のどちらかに（その時の好みに合わせて）統一してみたいと思っています。

Definition 0.0.34（同値類 (E:p6, K:p9)）.
集合 A 上の同値関係 R と $x \in A$ に対して $[x] \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, y \mid \langle x, y \rangle \in R \,\}$ とし, これを x の **equivalence class（同値類）** という.
さらに集合 $\{\, [x] \mid x \in A \,\}$ を $A \backslash R$ で表し, 集合 A の同値関係 R による **quotient set（商集合）** という. [35] ■

Proposition 0.0.35（E:p6, K:p9）.
集合 A 上の同値関係 R に対して, A の各要素の同値類全体は A の分割となる. ■

Proof $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が A の分割であるとは, $\mathcal{A}$ が互いに素でかつ $\bigcup \mathcal{A} = A$ をみたすこととし, これを $\{\, [x] \mid x \in A \,\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, つまり先に定義した $A \backslash R$ に対してこれを示す.

$\mathcal{A}$ が互いに素であること

任意に $X \neq Y$ な $X, Y \in A \backslash R$ をとると, それぞれに対し $x, y \in A$ が存在して $X = [x],\ Y = [y]$ となっている.
$[x] \cap [y] = \emptyset$ であることを示すため, $z \in [x] \cap [y]$ なる z が存在したとする. $z \in [x]$ より $\langle x, z \rangle \in R$, 同様に $\langle y, z \rangle \in R$.
$\langle y, z \rangle \in R$ と R が A 上の同値関係より対称的であることから $\langle z, y \rangle \in R$. さらに $\langle x, z \rangle \in R$ と R が推移的であることから $\langle x, y \rangle \in R$.
ここで $\forall a, b \in A(\ \langle a, b \rangle \in R\ \rightarrow\ [a] = [b]\ )$ である. （この証明には必要ないが $\forall a, b \in A(\ [a] = [b]\ \rightarrow\ \langle a, b \rangle \in R\ )$, つまり $\forall a, b \in A(\ \langle a, b \rangle \in R\ \Leftrightarrow\ [a] = [b]\ )$ も示せる）

$\because$ 任意に $a, b \in A$ をとり $\langle a, b \rangle \in$ とする. $[a] \subseteq [b]$ を示すためさらに任意に $c \in [a]$ をとる. $\langle a, b \rangle \in R$, $\langle a, c \rangle \in R$ より R が対称的かつ推移的なので $\langle b, c \rangle \in R$, つまり $c \in [b]$. 同様にして $[b] \subseteq [a]$ であることもわかる. つまり $[a] = [b]$.

よって $\langle x, y \rangle \in R$ から $[x] = [y]$ であるが, これは仮定の $[x] \neq [y]$ に矛盾.

$\bigcup A \backslash R = A$ であること

$\bigcup A \backslash R \subseteq A$ であることは明らか. $A \subseteq \bigcup A \backslash R$ を示すため任意に $x \in A$ をとる. R が A 上反射的であることから $x \in [x]$, つまり $[x] \neq \emptyset$ で, そして $[x] \subseteq A \backslash R$ より $x \in \bigcup A \backslash R$. □

ここからはテキスト通り, 集合の濃度の話に移ります（可算までしかでてこないけど）.

[35] テキストでは定義してなかったですが, すぐ下の補題を示すときに記法として欲しかったので定義しておきました.

Notation 0.0.36（E:p6, K:p9）.
自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ で表す[36] ■

ここに「個々の自然数そのものを集合を使って定義する方法もあります」とあって，テキストにある通り，それに触れている○○節を見ると，ZF 公理系からの数学展開でよくやる Neumann 流の順序数の定義の仕方を使うものだった.

Definition 0.0.37（E:p6, K:p9）.
集合 A に対して

1. 集合 A が **finite（有限）**であるとは，ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 写像 f があって，f が全単射になっていることをいう（論理式で書くと $\exists n \in \mathbb{N} \exists f(\ f\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \{0, 1, \ldots, n-1\}\ )$）.
2. 集合 A が **infinite（無限）**であるとは，有限でないときをいう．つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ への全単射写像が存在しないことをいう．言い換えればどんな A から $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ の写像も全単射にならないともいえる．[37]
3. 集合 A が **at most countable（高々可算）**であるとは，A から $\mathbb{N}$ への単射写像が存在するこという.
4. 集合 A が **countable（可算）**であるとは，A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在するこという．[38] ■

Proposition 0.0.38（E:p6, K:p9）.
有限集合は高々可算. ■

Proof A を有限集合とすると，その定義より A に対し存在する $n \in \mathbb{N}$ と $f\colon A \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ をそれぞれ固定します. $f_{\mathbb{N}}\colon A \to \mathbb{N}$ を $f_{\mathbb{N}}(a) = f(a)$ で定義すれば，$f_{\mathbb{N}}$ は確かに A から $\mathbb{N}$ への写像であり，f が単射であることから $f_{\mathbb{N}}$ が単射であることも明らかである. □

Proposition 0.0.39（E:p6, K:p9）.
高々可算な無限集合 A に対して A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在する. ■

Proof 高々可算な無限集合 A に対して，その定義から存在する単射写像 $f\colon A \to \mathbb{N}$ を 1 つ固定する．f は全射でない，つまり $\mathrm{ran}(f) \neq \mathbb{N}$ とする．$n_i \in \mathbb{N}$ を $\mathrm{ran}(f)$ の中での i 番目に小さい数，つまり $n_0 = \min \mathrm{ran}(f)$, $n_{i+1} = \min(\ \mathrm{ran}(f) \setminus \{n_0, \ldots, n_i\}\ )$ と帰納的に定義する．ここで A が無限であることと f が単射であることから，$\mathrm{ran}(f)$ は無限集合なので，n_i をとる操作が有限で止まったりはしないことに注意.
そして $\mathrm{ran}(f) = \{\, n_i \mid i \in \mathbb{N}\,\}$ である．$g\colon \mathbb{N} \to A$ を $g(i) = f^{-1}(n_i)$ で定めると，g はその作り方から全単射であり，$f'\colon A \to \mathbb{N}$ を $f'(a) = g^{-1}(a)$ で定めると，これもその作り方から A から $\mathbb{N}$ への全単射である．[39] □

Theorem 0.0.40（E:p6 THEOREM 0B, K:p10 定理 0B）.
A を高々可算集合とするとき，A の要素からなる有限列全体の集合も高々可算. ■

Proof $\mathcal{S}$ を A の要素からなる有限列全体の集合とすると，有限列の定義 Definition 0.0.22（10 ページ）から $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{n+1}$ となる．A が高々可算集合であるから，A から $\mathbb{N}$ への単射 f を 1 つ固定する．$\mathcal{S}$ から $\mathbb{N}$ への写像 g を，$s = \langle a_0, \ldots, a_m \rangle \in \mathcal{S}$ に対して

$$g(s) \;=\; \min\{\, 2^{f(b_0)+1} \cdot 3^{f(b_1)+1} \ldots p_n^{f(b_n)+1} \mid s = \langle b_0, \ldots, b_n \rangle \wedge \langle b_0, \ldots, b_n \rangle \in \mathcal{S}\,\}$$

[36] テキストではなぜか二度目の記法の導入でした.

[37] よくよく見てみれば「無限」であるということはキチンと定義されていなかったので追加しました．一般的には無限とは有限でないという定義なので（それゆえに説明する必要がなかったのかも），ここでいう有限の定義の否定をその定義とすることにしました.

[38] テキストではここでいう「高々可算」を「可算」と呼んでいます．つまり「高々可算」と「可算」を区別してません．個人的には高々可算は便利な言葉だと思っているのと，他のノートとの整合性をとるためにも高々可算と可算は区別しておこうと思います．ちなみに高々可算の「高々」は数学特有の言葉として説明しているものもあります．もし「高々有限」をこれと同じように定義すると，$\exists n \in \mathbb{N} \exists f(\ f\colon A \xrightarrow{1\text{-}1} \{0, 1, \ldots, n-1\}\ )$ となるでしょう．なので個別に「高々○○」を定義することも可能でしょうし，「高々○○」は○○であることを強調する，特有の言葉遣いとして説明する方法もありそうです．日常言語的には「せいぜい」とか「しょせん」とかそういう使い方です．「高々」を説明しているものとしては，例えば [3] や [27] の 37 ページなどです.
勉強会中にでた指摘として，英語圏ではここでいう高々可算を countable，可算の方を denumerable などと呼ぶ人もいたり，またはその逆だったりとまだ用語として統一されている様子ではないようです.

[39] テキストの口語的な説明の方が分かりやすいとは思ったけれど，あえて厳密に書くとこんな感じなのかなと.

で定める．ここで p_i は i 番目の素数を表しているとする．
ここで $g' \colon \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ を, $g'(\langle a_0, \ldots, a_m \rangle) = 2^{f(a_0)+1} \cdot 3^{f(a_1)+1} \ldots p_m^{f(a_m)+1}$ と定めると, g はこの g' を用いて, $g(s) = \min\{\, g'(s') \mid s' \in \mathcal{S} \land s' = s \,\}$ や, $g(s) = \min g'[\{\, s' \mid s' \in \mathcal{S} \land s' = s \,\}]$ と書くことができる．

そして g は well-defined である（これについてのさらなる議論は証明後に）．

> $\because$ $\mathcal{S}$ のような集合は, Example 0.0.25（12 ページ）の 2 つ目の A のように $s_1 = \langle a_0, \ldots, a_m \rangle, s_2 = \langle b_0, \ldots, b_n \rangle \in \mathcal{S}$ で, その長さが異なる, つまり $m \neq m$ であるにも関わらず,（集合として）$s_1 = s_2$ となる場合がある．そのような場合でも $g(s_1) = g(s_2)$ となることを確かめればよい．そしてそんな s_1, s_2 に対しても
>
> $$\begin{aligned} g(s_1) &= \min\{\, g'(s) \mid s \in \mathcal{S} \land s = s_1 \,\} \\ &= \min\{\, g'(s) \mid s \in \mathcal{S} \land s = s_2 \,\} \\ &= g(s_2) \end{aligned}$$
>
> となって, $g(s_1) = g(s_2)$ である．

写像 g は単射である．

> $\because$ 任意に $s_1 \neq s_2$ なる $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ をとり, $g(s_1) = g(s_2)$ だったとする．$g(s_1) = g(s_2)$ より $\min g'[\{\, s \in \mathcal{S} \mid s = s_1 \,\}] = \min g'[\{\, s \in \mathcal{S} \mid s = s_2 \,\}]$ だから, $n \in g'[\{\, s \in \mathcal{S} \mid s = s_1 \,\}] \cap g'[\{\, s \in S \mid s = s_2 \,\}]$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在することになる．そんな n に対して $g(s) = n$ かつ $s = s_1$ かつ $s = s_2$ なる $s \in \mathcal{S}$ が存在することになる．するとこの s を介して $s_1 = s_2$ となるが, これは矛盾.

よってそんな単射写像 g の存在から S は高々可算である． $\square$

証明に関するさらなる議論として, テキストでは $g(s) = g(\langle a_0, \ldots, a_m \rangle) = 2^{f(a_0)+1} \cdot 3^{f(a_1)+1} \ldots p_m^{f(a_m)+1}$ と定義してしまうと, つまり g' を g の定義としておくと,（こちらの方が各有限列を 1 つの自然数に対応させようと, 素数を使ってコーディングしようとしている意図が伝わって分かりやすいものの）, g は well-defined にならないことが書いてあります．どのような場合に well-defined にならないか具体的な例を挙げてみると, well-defined 性を確かめている部分にも書いてある通り, $A = \{0, 1, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle\}$ とし, その要素からなる以下のような 2 つの有限列 s_1, s_2 を,

$$\begin{aligned} s_1 &= \langle \langle 0, 1, 0 \rangle, 1 \rangle, \\ s_2 &= \langle \langle 0, 1 \rangle, 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

としてみる．すると 2 つの列は見かけ（の長さ）は違うものの, Example 0.0.25（12 ページ）で説明した通り, 集合としては同じものです．そして $\mathbb{N}$ への単射を

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\langle 0, 1 \rangle) = 2,\ f(\langle 0, 1, 0 \rangle) = 3$$

のように定めてみれば,

$$\begin{aligned} g(s_1) &= 2^{f(\langle 0,1,0 \rangle)+1} 3^{f(1)+1} &= 2^4 3^2, \\ g(s_2) &= 2^{f(\langle 0,1 \rangle)+1} 3^{f(0)+1} 5^{f(1)+1} &= 2^3 3^1 5^2 \end{aligned}$$

となり $g(s_1) \neq g(s_2)$ となりますが, 集合としては $s_1 = s_2$ であるため, $g(s_1) = g(s_2)$ とならなくてはならず, 口語的には写る先が 1 つに定まらないともいえて, これでは g が写像としては矛盾しています．

Example 0.0.25（12 ページ）のすぐ下でも書きましたが, 有限列は写像でもって定義することもできます. 例えば上の例にだした s_1, s_2 も, $s_1\colon \{0,1\} \to A, s_2\colon \{0,1,2\} \to A$ で,

$$s_1(0) = \langle 0,1,0 \rangle,\ s_1(1) = 1,$$
$$s_2(0) = \langle 0,1 \rangle,\ s_2(1) = 0,\ s_2(2) = 1$$

と定めれば,（写像として）$s_1 \neq s_2$ です. すると写像 g を, $s\colon \{0,\dots,m\} \to A$ に対し $s(i) = a$ なる $a \in A$ を a_i と表すことにすれば, つまり

$$g(s) \ = \ 2^{s^{-1}(a_0)+1} \cdot 3^{s^{-1}(a_1)+1} \dots p_m^{s^{-1}(a_m)+1}$$

と定めれば,[40] $g(s_1) \neq g(s_2)$ となって写像としても well-defined となり, 上のように min を使う必要もなくなります. つまり写像で定義すれば, 順序対の入れ子構造で定義したときのように長さが違うがモノとして異なるような例は, A がどんな集合でも生まれることはありません. なぜなら写像で定義した場合の「列の長さ」とは定義域の要素の数のことであり, つまり長さが違えば, それはつまり写像として定義域が異なることになって, その対応規則がどうあれ一致することはないからです.

そうは言い切ったものの, そのあとで本当にそうなのか疑問に思ってしまいました. なぜなら写像も順序対の集合であり, そうなると順序対を集合で書き直せば, 集合だけを用いて書き直すことができます（順序対よりも構造がかなり複雑にはなっていると思うが）. そうなると長さが異なるが集合として一致する順序対の例があるように, 定義域が異なる（つまり含まれる順序対の数が一致しない）が, 集合としては一致することはあるのだろうか？今後の課題としてまとめておきます.

今後の課題

対応規則（の数や内容）が異なる（写像としては異なるように見える）が, 要素になっている順序対も全て集合に書き直したとき, 集合として一致するような写像の組み合わせは存在するか？

ここから **tree（木）**についての話題が始まりますが, 今後どれほど大事なのか分からないので, 一旦飛ばすことにします.

続いて選択公理の話題が入ります. テキストでは「問題となる定理を可算な言語の場合に制限することで, 選択公理の使用はたいてい回避できます」とあります.

Definition 0.0.41（E:p7 , K:p12）.
集合族 $\mathcal{C}$ が **chain（鎖）**であるとは, 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $X \subseteq Y$ か $Y \subseteq X$ のいずれかが成立することをいう. ■

Lemma 0.0.42（E:p7 ZORN'S LEMMA, K:p12 ツォルンの補題）.
集合族 $\mathcal{A}$ が

$$\text{任意の } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ が鎖ならば } \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$$

を満たすとき, $\mathcal{A}$ には超集合関係にて極大な要素 A が存在する, つまり A はどの $X \in \mathcal{A}$ に対しても $A \subsetneq X$ となることはない. ■

基数

Definition 0.0.43（E:p8 , K:p12）.
集合 A, B に対して A から B への全単射写像が存在するとき, A と B は **equinumerous（対等）**であるといい, $A \sim B$ で表す. ■

Proposition 0.0.44（E:p8 , K:p12）.
$\mathbb{N}$ と整数全体の集合は対等である. ■

Proposition 0.0.45（E:p8 , K:p12）.
任意の集合 A, B, C に対して以下の 3 つが成立する.

[40] テキストでは導入されていないけれど, s^{-1} は s の逆写像を表しています.

1. $A \sim A$.
2. $A \sim B$ ならば $B \sim A$.
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$. ■

テキストでは単純に「対等である関係が反射的, 対称的かつ推移的であることは容易に確かめられる」と書いてあります. この記述は少し雑だと思います. 前の定義を見ると「関係○○が反射的」というのは本来ある集合 A を用いて「関係○○が集合 A 上で反射的」という風に, 何の集合上でかと一緒に語られるべき述語です. ここでの対称的と推移的は「どの集合上かは」記述する必要はなかったです. もちろん何を証明すればよいかが伝わるかどうかで見えれば, 伝わるとは思います. なので雑というのは, この「反射的」という言葉遣いに対しての感想なのですが, なぜ何故書かなかったかも推測することはできます. かなり細かいことをいえば, オブジェクトな「関係」とメタな「関係」が公理的集合論には存在します. 実際に存在を保証されている集合 A を用いて $R \subseteq A^2$ となっているような R は, 集合でもあるからオブジェクトな「関係」です. 一方この対応関係 $\sim$ というのは, 同値関係と同じような論理式を満たしはするものの, 上の R における集合 A に相当するものが存在ません. なぜなら対等関係とはある意味「全ての集合の集合」上の同値関係ということになりますが, 公理的集合論において「全ての集合の集合」とは集合にはなりません（こういうのは真のクラスと呼んだりします）. なのでそのような説明を避けるために, ある意味雑に書くしかなかったのでは推測します。

Definition 0.0.46（E:p8 , K:p13）.
集合 A に対して $\mathrm{card}(A)$ を, 任意の集合 B に対して

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \leftrightarrow A \sim B$$

を満たすものとし, [41] これを A の **cardninal numger（基数）** または **cardinality（濃度）** という. ■

ここの基数の定義は（数学的な）基数を始めて見る人にとってはかなり分かりにくいのではないだろうか？また逆に一度でも具体的なモノとして基数を定義したことがあるならば, それこそここに書いてあるように順序数を厳密に定義した上で, その中で特別な順序数として基数を定めたことがあるならば, この定義は本当に自分が知っている基数と同じものなのか不安に思うかもしれない. 著者自身はこの定義で問題ないと書いてある. ならば, この定義のやり方で納得できるよう, もう少し補足してみる. この定義の最大の不満点は基数というモノを, 具体的に構成することなく, その性質でもって定義していることだと思われる. テキストにある通り, よくよく考えれば, 私たちは 2 が「何か」は具体的に知らないのに, 2 のその性質「1 の次の数である」とか, 関係する事実「$1+1$ の演算結果」といったものから捉えて, 上手に 2 を利用できている. 「数」はある種極端な例としても, そのようなことは数以上に抽象的な数学の議論の中でも行われている. 私が思い浮かぶ例としては「順序対」である. このテキストでは x と y の順序対 $\langle x, y\rangle$ を, $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ でもって具体的に（集合でもって）定義している. しかし, テキストによっては

$$\forall x' \ y' \ (\ \langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \ \rightarrow \ x = x' \land y = y' \ )$$

をみたす組 $\langle x, y\rangle$ のこととして, つまり順序対が満たしてほしい性質でもって定義しているものもある（例えば [19] の 50 ページ, [26] の 14 ページ, [22] の 75 ページなど）. 単純に平面の 1 点の座標の表現としてとか, 直積集合の要素としてとかで順序対を必要としている場合は, これで十分である. 著者の専門分野的に基数の理解が浅いということはありえないので, このテキストにおける基数の扱いも, 先の [26] での順序対と同じようなもので, 著者なりの基数についての必要最低限がこの定義だと思われる.

Definition 0.0.47（E:p8 , K:p13）.
集合 A, B に対して, ある $B' \subseteq B$ があって $A \sim B'$ であるとき, A **dominated by** B（A は B で**おさえられている**）といい, $A \preceq B$ で表す. ■

Proposition 0.0.48（E:p8 , K:p13）.
$A \preceq B$ であるとき, A から B への単射写像が存在する. ■

[41] テキストでは「$\mathrm{card}(A)$」は「$\mathrm{card}\,A$」と書いていますが, 手書きでの見やすさも考慮して, また普段の自分の記法ともあわせて, このノートでも「$\mathrm{card}(A)$」と書くことにしました.

Definition 0.0.49（E:p8 , K:p14）.
集合 A, B に対して $A \preceq B$ であるとき, $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ であるとする. [42] ■

原著では上記の定義は「$\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$」で, 和訳では「$A \leqslant B$」になっている. これはおそらくこの部分だけでなく, 原著は前者で統一されており, 和訳は後者で統一されている. これはなぜかと和訳者である嘉田氏に聞いたところ, 版元の仕様らしい. つまり嘉田氏のソースファイルでは「$\leq$」となっているが, 印刷物として出力したときに「$\leqslant$」となるようになっているようだ. 今後このノートでは原著にあわせて（特に不都合もなさそうなので）$\leq$ で統一することにする.

Proposition 0.0.50（E:p9 , K:p14）.
任意の集合 A, B, C に対して以下の 2 つが成立する.

1. $A \preceq A$.
2. $A \preceq B$ かつ $B \preceq C$ ならば $A \preceq C$. ■

Proposition 0.0.45（18 ページ）と同様ここもテキストでは, 「「おさえられる」という関係は反射的かつ推移的」と書いてある. しかし Proposition 0.0.45（18 ページ）下の注意事項が同じように当てはまることに注意.

Proposition 0.0.51（E:p9 , K:p14）.
$A \preceq \mathbb{N}$ であることと, A が高々可算であることは同値. ■

**Theorem 0.0.52（E:p9 SCHÖDER-BERNSTEIN THEOREM,
K:p14 シュレーダー・ベルンシュタイン（Schröder-Bernstein）の定理）.**
集合 A, B と, 基数 κ, λ に対して,

(a) $A \preceq B$ かつ $B \preceq A$ ならば $A \sim B$.

(b) $\kappa \leq \lambda$ かつ $\lambda \leq \kappa$ ならば $\kappa = \lambda$. ■

Theorem 0.0.53（E:p9 THEOREM 0C, K:p14 定理 0C）.
集合 A, B と, 基数 κ, λ に対して,

(a) $A \preceq B$ または $B \preceq A$ の少なくとも一方が成り立つ.

(b) $\kappa \leq \lambda$ または $\lambda \leq \kappa$ の少なくとも一方が成り立つ. ■

Notation 0.0.54（E:p9, K:p14）.
$\mathrm{card}(\mathbb{N})$ を $\aleph_0$ で, $\mathrm{card}(\mathbb{R})$ を $2^{\aleph_0}$ で表す. ■

Definition 0.0.55（E:p9, K:p15）.
集合 A, B とその基数 $\mathrm{card}(A) = \kappa, \mathrm{card}(B) = \lambda$ に対して, その演算 $+, \cdot$ を以下のように定める.

1. $A \cap B = \emptyset$ のとき, $\kappa + \lambda \ = \ \mathrm{card}(A \cup B)$.
2. $\kappa \cdot \lambda \ = \ \mathrm{card}(A \times B)$. ■

Theorem 0.0.56（E:p9, K:p15）.
選択公理を仮定する. どんな無限集合も可算な無限部分集合をもつ. ■

Proof　任意に無限集合をとり, それを A とおく. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ とおくと, $\mathcal{A}$ は空でない集合の空でない集合族である. よって選択公理より $\mathcal{A}$ には選択関数 $f \colon \mathcal{A} \to A$ が存在する, つまり $\forall X \in \mathcal{A}(\ f(X) \in X\ )$ をみたす f が存在するので, そんな f を

[42] 欧米では「大きい（小さい）かまたは等しい」という記号を書くとき, イコールを表す部分が「$\leqq$」のように二重線になっているものは使わないと聞いたことがあります. Wikipedia にもそう書いてあったり（例えば [10] とか）. また同じ二重線でないものとして「$\leqslant$」も使われるようです. これは使用者の好みに寄るのかな.

1 つとって固定する. $a_i \in A$ を帰納的に以下のように定める.

$$\begin{aligned} a_0 &= f(A), \\ a_{i+1} &= f(\ A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_i\}\ ) \end{aligned}$$

$A' = \{\, a_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ とおくと, A が無限集合であることから A' も無限集合であり, 明らかに A' は可算な A の部分集合である. □

Theorem 0.0.57（E:p9 CARDINAL ARITHMETIC THEOREM, K:p15 基数算術の定理）.
$\kappa \leq \lambda$ かつ λ が無限な基数 κ, λ に対して,

1. $\kappa + \lambda \ = \ \lambda$.
2. $\kappa \neq 0$ ならば $\kappa \cdot \lambda \ = \ \lambda$.
3. κ が無限ならば $\aleph_0 \cdot \kappa \ = \ \kappa$. ■

Theorem 0.0.58（E:p10 THEOREM 0D, K:p15 定理 0D）.
無限集合 A に対して, A の要素からなる有限列全体の集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{n+1}$ の濃度は $\mathrm{card}(A)$ と同じ. ■

Proof　任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{card}(A^{n+1}) = \mathrm{card}(A)$ である.

$\because$ これは $n \in \mathbb{N}$ についての数学的帰納法から示せる.

（Basis）$A^{0+1} = A$ より明らか.

（Induction step）
ある $n \in \mathbb{N}$ について $\mathrm{card}(A^{n+1}) = \mathrm{card}(A)$ が成立しているとする. その定義から $A^{(n+1)+1} = A^{n+1} \times A$ であり, Definition 0.0.55（20 ページ）から

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(A^{n+1} \times A) &= \mathrm{card}(A^{n+1}) \cdot \mathrm{card}(A) \\ &= \mathrm{card}(A) \cdot \mathrm{card}(A^{n+1}) \end{aligned}$$

Theorem 0.0.57（21 ページ）における κ, λ を $\kappa = \mathrm{card}(A), \lambda = \mathrm{card}(A^{n+1})$ とすると,

$$= \ \mathrm{card}\, A^{n+1} \ = \ \mathrm{card}(A)$$

よって $\mathrm{card}(A^{(n+1)+1}) = \mathrm{card}(A)$ である.

すると $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{n+1} = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$ より,

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{n+1}) &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(A^2) + \mathrm{card}(A^3) + \dots \\ &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(A) + \dots \\ &= \aleph_0 \cdot \mathrm{card}(A) \end{aligned}$$

そしてもう一度 Theorem 0.0.57（21 ページ）より

$$= \ \mathrm{card}(A).$$ □

Example 0.0.59（E:p10, K:p16）.
実数における代数数的数全体の集合の濃度は $\aleph_0$ である. ■

普段研究対象とするようなものでないので, ここで代数的数について定義しておく（定義は [9] を参考にした）.

Definition 0.0.60.
複素数 α が **algebraic number（代数的数）**であるとは, ある整数係数 n 次多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$（$a_n \neq 0$ かつどの a_i も整数）があって, α が $f(x)$ の根になっている, つまり $f(\alpha) = 0$ をみたすことをいう. 代数的数でない複素数は **transcendental number（超越数）**とよぶ. ■

ただテキストでは実数の中での複素数にだけ注目しているように思われるので, 実数の中での代数的数のみに注目して, そんな数の集合が可算であることを示す.

Proof　実数かつ代数的数全ての集合を $\mathcal{A}$ とおく. この $\mathcal{A}$ が可算であることを示す. ある $n \in \mathbb{N}$ に対して, 全ての n 次多項式の全ての実数根を集めた集合を A_n とおく. つまり,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) = a_0(\ f(\alpha) = 0\ )\} = \mathbb{Z}, \\
A_1 &= \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) = a_1 x + a_0(\ f(\alpha) = 0\ )\}, \\
&\vdots \\
A_n &= \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0(\ f(\alpha) = 0\ )\}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

と定めると, $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)$ となる. そして各 A_n は可算集合である.

$\because$ n 次多項式は $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$（ただし $a_n \neq 0$）の組み合わせの数だけ存在する. つまり n 次多項式全体の集合の濃度は $\mathrm{card}(\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-1})$ であり, これまでの定理を用いて計算を進めると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{card}(\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-1}) &= \mathrm{card}(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cdot \mathrm{card}(\mathbb{Z}^{n-1}) \\
&= \mathrm{card}(\mathbb{Z}) \cdot \mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0
\end{aligned}
$$

であり, つまり n 次多項式はどれも可算無限に存在する.

そして各 n 次多項式の実数根は高々n 個であり, つまり $\mathrm{card}(A_n) \leq \aleph_0^n = \aleph_0$. よって $\mathrm{card}(A_n) = \aleph_0$ である. すると $\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \aleph_0 \cdot \mathrm{card}(A_n) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ より, $\mathcal{A}$ も可算集合である. □

第 1 章　文論理

1.0　形式言語についての, 非形式的な注意

とくにテキストの内容に対してコメントすることはありませんでした（そもそも節名通り、厳密な数学的議論を展開する箇所でもないわけで)。

1.1　文論理の言語

この章は文論理が対象である．ではそもそも sentential logic（**文論理**）とはなにものだろうか？ さらに何を学べば文論理を学んだことになるのか？またこれ以降に登場する一階述語論理（もっといえば他の論理と）とは何が違うのか・何が共通しているのか？そもそも論理を対象にした学問は何をやるべきなのだろうか？これには私はまだ自分の言葉で答えることはできない．よって私が好きな本である [30] から引用する．論理学がどのような学問なのかという問いにはこの本の 1 章にて多くの言葉を用いて答えている．続く 2 章にて 1 章で説明したような学問である（現代）論理学がなぜ人工言語を用いるのかが最初から書いてある．全てを引用すると長くなるので大事な部分だけ 17 ページから引用するならば（句読点はこちらに合わせたが, 強調は引用元まま）

> 「**自然言語では命題の論理形式が文法形式におおい隠されてしまうことがある**．したがって, 自然言語をそのまま使って論理学を展開することは得策ではない．これに対し, 記号論言語は, 命題内容に気を取られずにその形式を浮かび上がらせるのに好都合だ．なぜなら, 記号言語はこれから作るのだから, 我々の目的に応じて好きにつくってよいからだ．自然言語を使って我々はいろいろなことをやっている．その様々な用途のうち, 「**論証の妥当性とは何かを明確にする**」という目的だけに役立るように思い切って単純化した言語をつくってしまえばいいわけだ．

さらにこの本によれば「現代論理学とは記号論理学ともよばれるくらいにやたらと記号を使う」とある．すなわち「〇〇論理」という対象があったとき, それが記号論理学の対象ならば, 上記にあるようにその論理を検証するのに最適な人工言語を用意するところから始まる．また二つの全く別な論理という対象があったとき, この論理たちの最大の違いはその言語にある（と思われる）．だからこそ上記の本でも「命題論理（このテキストでいう文論理のこと)」という言葉が初めて導入されるのは, 一階述語論理という二つ目の人工言語が登場し, それとの違いを比較できるようになってからだ．
改めて先の問いに答えると「そもそも文論理とはなにものだろうか？」には他の論理と比較することで初めて答えれるようになると思われる．もちろんこの時点で上記の本を参考にして「単純命題の内部構造は問わない論理」と（単純命題とは何かを説明したうえで）答えることもできるが, これはやはりそうでない論理と比較して初めてより分かりやすい答えに近づくと思われる．続いて「何を学べば文論理を学んだことになるのか？」に答えると, まずは文論理に適した言語を定め, さらにその言語について構文論・意味論を定める．記号論理学もしくは数理論理学ならばそこからさらに演繹体系を定める．そして構文論・意味論・演繹体系それぞれに関する数学的な定理や, それらを横断するような（たとえば完全性定理など）数学的な定理を証明していくことになる．このステップを踏めば文論理について学んだことになると思われる．そして最後の問い「これ以降に登場する一階述語論理（もっといえば他の論理と）とは何が違うのか・何が共通しているのか？」に答えるならば, まず共通しているのは 1 つ上の問いの答えにあるステップの踏み方であると思われる．もちろん言語によって出てくる定理の数や内容は異なるであろうが, テキストの進め方は順番を除いて共通している（と個人的経験から推測する）．そして異なる点は先にも述べた通り, 議論の最初に用意する人工言語になると思われる．

学ぶ動機などについてもう一度再確認した理由は, 例えばこのテキストでは文論理から一階述語論理へと進むが, その際に用意する言語には共通の名前（たとえば整式など）を用いることがある．つまり整式といったときどの論理の（ないし言語の）整式なのか意識する必要があると思われた．そして例えば「これは文論理の整式だ」と書くときに, 「ではその文論理とは？」と聞

かれたときに答える用意も必要に思われた．もちろん自分できちんと答えたわけでもないし, 明確に答えたわけでもないが, 勉強会の参加者へ道しるべは示せたと思う．数理論理学の数学的な分析・議論が目的の 1 つである当勉強会においていささか寄り道に思われる話題ではあったものの, （数学的な議論ではないにしろ）参加者へ向けて答える必要があったのでここに書いておいた.

ではここから定義する言語についての定義や定理にはすべて「文論理の」という言葉がつくことを注意しておく.

まずはこれから使う記号という単語を定義する.

Definition 1.1.1（記号 (E:p13 14, K:p20)）.
互いに区別できる無限個のオブジェクトの列を用意し固定する．その列の成分となっているオブジェクトをそれぞれ **symbol**（**記号**）とよぶ.
　これらの記号のどれもが他の記号の有限な長さの列とは一致しないと仮定したうえで, 列の第一成分から以下の表の通りに記号に名前をつける.

記号	名称	注意
(	**left parenthesis（左括弧）**	区切り記号
)	**right parenthesis（右括弧）**	区切り記号
$\neg$	**negation symbol（否定記号）**	日本語でいう「〜でない」
$\wedge$	**conjunction symbol（連言記号）**	日本語でいう「かつ」
$\vee$	**disjunction symbol（選言記号）**	日本語でいう「(包含的な）または」
$\rightarrow$	**conditional symbol（条件記号）**	日本語でいう「○○ならば××」
$\leftrightarrow$	**biconditional symbol（双条件記号）**	日本でいう「○○のとき, かつ, そのときに限り××
A_1	1 個目の **sentence symbol（文記号）**	
A_2	2 個目の **sentence symbol（文記号）**	
...		
A_n	n 個目の **sentence symbol（文記号）**	
...		

Table 1.1: (E:p14 TABLE Ⅱ, K:p21 表 Ⅱ)

■

ここでテキストにあるものも含めていくつか注意を述べる．順番や内容はテキストとは異なっている.

1. Table 1.2 の「(」や「)」における注意事項「区切り文字」について
   これはこの記号を区切り文字として使うということである．区切り文字とは日常言語における「,」や「、」のことで, 文の読みやすさや文意が伝わりやすくするために用いる文字のことである．すなわちこの文論理の言語においては読みやすくするために「(」や「)」を使うということである.

2. Table 1.2 の「$\vee$」の注意事項における「包含的な」について
   これは日本語における「または」にも排他的なものと包含的なものと二種類あり, この場合の「または」はそのうちの包含的なものの方であるという意味である．排他的な「または」とは, つなげられた 2 つの主張が同時に満たされることのない「または」の用法である．たとえば「このランチにはコーヒーまたは紅茶がつきます」といったときの「または」を聞いてコーヒーと紅茶両方を注文する人はいない．つまり注文者はこの「または」を聞いてどちらか 1 つだけしかもらえないことを理解しているのである．一方銀行 ATM での通帳とカードのどちらでもできる操作（たとえば入金とか）において「通帳またはカードを入れてください」といわれたとき, 片方だけでも両方入れても同じように動作する（もちろん記帳するかどうかの結果は違いはあるかもしれないけれど）．よってこのときの「または」は包含的な方の「または」で

ある．[1]

3. **いくつかの記号の総称について**

   Table 1.2 の中の 5 つの記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ を **sentential connective symbol（文結合記号）** とよぶ．

   とくに $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ たちを 2 **項結合記号**とよぶ．[2]

   さらに括弧記号 2 つを総称して単に**括弧記号**とよぶ．[3]

   括弧記号と文結合記号をあわせて **sentential connective symbol（論理記号）** とよぶ．

   文記号は **parameter（パラメータ）**（または **nonlogivcal symbol（非論理記号）**）ともよぶ．

   また文記号 A_n を n **番目の命題記号**とよぶこともある．個人的にはこのテキストのように文論理ではなく命題論理の方がよくみてきたものではあるが，このテキストに従い命題記号という単語は使わず文記号とよぶことにする．[4]

4. **「互いに区別できる」部分について**

   ここでの「互いに区別できる」とは数学用語ではなく日常言語的な意味であろう．ではどのような意味で用いられているかと考えると，「それらの記号の運用者によって区別ができる」と意味であると思われる．この運用者とは今まさに紙とペンを持って記号を書きながら勉強している私たちのことかもしれないし，文論理の言語をプログラミング言語のように実装されたマシン（とそれを処理するアプリケーション）のことを指している．[5]

5. **オブジェクトについて**

   このオブジェクトとはテキストにある通りなんでもよく文論理の展開には無限個あるならばなんでもよいと思われる．[6]
   文論理の展開とは今テキストでやっていることを「実装する」ということを意味している．実装するとはすなわちこの文論理の記号たちとそれの使い方などを，プログラミング言語を用いて別のプログラミング言語を作るように実装するといったことを意味する．べつにプログラミング言語同士の話だけでなく例えば「ZFC から自然数論を展開可能」ということを簡単に証明するときに，集合（のように人間にとって思われる）という ZFC におけるオブジェクトを使ってペアノの公理を満たす集合たちとその上の演算や述語を作って自然数（と人間にとって思われている）を構成する作業も，その作業が似ていることから「ZFC における自然数論の実装」ともよべるだろう．
   自然数を使った文論理の簡単な（雑な）実装方法を挙げると，自然数列 $0, 1, 2, 3, \ldots$ を用意して，$0, 1$ に括弧記号，2 から 6 に論理記号，7 以降にパラメータを割り振る．[7] すると記号列 $\langle \neg, A_2 \rangle$ は対応した自然数が並んだ $\langle 2, 9 \rangle$ となる．つまり人にとっては単なる数字の羅列ではあるが，その解釈は私たちにとって目的としている文論理の記号列と思うわけである．
   こういうことは世の中にありふれたことだと思われる．現代のコンピュータは $0, 1$ のバイナリ情報しかやりとりできない（と思うことができる）わけで，[8] 画像ファイルも音楽ファイルも $0, 1$ が大量に書き込まれたテキストファイルでしかなく，どのアプリで開くかによって出力が変わってくる（だからこそどのアプリで開くべきかを教えてくれる拡張子に存在意義

---

[1] とはいえ昔とある銀行 ATM に同じように案内されて通帳とカード両方を入れてみたら「最初からやりなおしてください」と言われたことがあったり．つまりこの機械はおそらくいまでは珍しい？排他的な ATM だった．

[2] テキストでは定義していない言葉でしたが，なんとなく意味はわかるし不要かとも思ったけどもあえて定義しておきました．また $\neg$ は 1 項結合記号とよぶべきかもですが，そんな記号は 1 つしかないため，そのような総称は必要ないと判断しました．

[3] これも 2 項結合記号同様テキストでは定義していない言葉ではあるけれど，なんとなく意味はわかるし不要かとも思ったけどもあえて定義しておいた．

[4] テキストに書いてある命題記号の方の呼び名を使いたい理由はさておき，このノートの説明事項（3）にも書いた通り，新たに自分で証明した内容については proposition（命題）や corollary（系）など名前と番号を付けていくことになっています．とくに proposition は訳すと「命題」なため「命題」を対象の名前につける数理論理学とは相性が悪いのかもしれません．ただここでの proposition は証明すべき主張にしか使わないようにして，このノートでは他の定義や定理たちと同じように下線を引いていたり太字になっていたりするので紛らわしさはないから，併用しても問題はないと思います，脚注部分のような理由で「命題記号」という言葉は使わないようにしておきます．

[5] とは書いてみたもののあまり自信がありません．なぜなら人によって区別できない記号って「字が汚い」場合以外どんなことがあるのだろうかと．でも外国人からすると日本語の漢字の似たものの区別はつきにくいとも聞くし，そんな場合を指しているのだろうか．よくよく考えると数学の手書きの議論において小文字と大文字の c は同時に使うことを避けるか，どちらかにアレンジを加えると思われるので，こういうときに区別がつきにくい記号の用意の仕方といえるのかも．でもマシンによって区別がつきにくい記号とはいったいなんなのだろうか．画像認識しながら数学をやっている機械ならまだしも，それだって画像の解像度や画像処理アプリの性能の問題だと思うし．

[6] そういう意味ではテキストに書いてある通りおはじきは，現実のものに限れば無限個用意できないため不適と思いました．仮に無限個用意できても別の注意にある「互いに区別できる」部分が人にとっては難しそうに感じました．日本語での色の名前が有限しかない（[4]）ことから，人間が見分けできる色が高々有限種類しかないのでは？名前のない色は RGB 値で表現できるのかもしれないけれどそれでもたかだけ有限でしょう？（256^3 くらい？）また色以外で違いをつけようにも大きさや形にも限度はあろうし．まぁ野暮なツッコミかもしれません．
そんなことをする人がいたらかなり変人だと思うが，文論理の言語にある記号をオブジェクトとして使ってもいいと思う．そのままの対応では当たり前すぎるので例えば記号「(」に「A_1」を割り当てるといったように．これもやってもよいとはいってもやる人はまずいないと思うかなり天邪鬼な例え話．

[7] 運用者が人間の場合は，その自然数をその記号だと「思い込む」「頭の中では数を記号に変換する」といった方がいいだろうか．マシンだとその対応でもって変換してくれるアプリケーションを用意するといった感じだろうか．

[8] もちろん 3 進法コンピュータとかもあるんだろうけどあんまり聞かないし…だからここらへんの例え話もコンピュータに関する教養が足りず少し自信がありません．

がある）．

そうなると $\langle 2,9\rangle$ と $\langle 29\rangle$ は人間にとってはかなり見分けがつきにくいが, 機械にとってそもそも列の成分数も違うことから簡単に見分けがつき, そしてその記号の解釈も別のものになる（この実装方法で行くと $\langle 29\rangle$ は 22 番目の文記号 A_{22} となるから）．

集合による実装は, まず集合論内の議論によって自然数を構築する．よく知られた方法としては順序数理論を展開し順序数の中でも特別なものを自然数とする方法である．すると集合としての自然数を得ることができたので, それを使って（雑なものでよければ）さきの自然数を使ったものと同様にすればよい.

大事なことはこのテキストでは, 定義にある条件をみたしていればどのようなオブジェクトが使われているか, もしくはどのようなオブジェクトで実装されているかは意識しないし, またそれに依存しない理論の話が続いていく.

ではなぜするかどうかも分からない「実装する上での注意」なんて著者は併記したのだろうか？それはつまり実際に自然数論や集合論を使って文論理の理論を展開することがあるからである．また今後記号が割り振られたオブジェクトとその記号をとくに区別せず割り振られた方の記号を使って使っていく．つまり仮に自然数を使って上記のように実装したとしていても, オブジェクトとしての 0 は使わず, それに割り振られた記号「(」を議論のさいには使っていくということである.

6. **「無限個のオブジェクトの列」部分と「列の第一成分から」部分について**

   単に「無限個のオブジェクト」でも問題なさそうに見えるが, なぜ「無限個のオブジェクト**の列**」としたのだろうか．これも注意事項 5 と同じように実装上の注意事項だろうと思われる．列にすると並んだ記号たちに 0 から自然数を全て使って番号が付属していると思える．それこそ数学における数列やプログラミングにおけるハッシュ関数の返り値のように. [9]
   もし使いたい記号（というかその概念や名称）が有限個しかない言語ならば, 無限個のオブジェクトも要らず, また列でないなくともよいのかもしれない．しかし今から私たちが用意したい記号は無限個の文記号を含むため, オブジェクトも無限個必要である．よってそんな文記号用に無限の空きが必要なので, さきに有限個で済む文記号以外をオブジェクトの番号の小さいものから割り当てていき, 残った無限個のオブジェクトにその番号が小さいものから文記号についている番号の小さいもの順に割り当てていく．そうすれば一番分かりやすいと思われるため, だからこそ Definition 1.1.1 においても「列の第一成分から」とテキストにはないものを追加した．1 つ上の注意に書いた通り実装方法にはこだわらないのだから別にこの注意は不要でもあるのだが, この時点で勉強会で話した「お気持ち」を伝えるためにも付記しておいた.
   また別の実装方法もいくつも存在することを注意しておく．自然数を用いた実装方法として $0,1,2,3,\ldots$ を使って, それぞれに $(,A_1,),A_2,\neg,A_3,\wedge,A_4,\vee,A_5,\to,A_6,\leftrightarrow,A_7,A_8,\ldots$ と実装してもよい．だがこれよりは最初の例の方が分かりやすいし実装しやすいとも思われる.

7. **「これらの記号のどれもが他の記号の有限な長さの列とは一致しない」部分について**

   この条件も注意事項 5 と同じように実装上の注意事項だろうと思われる．例えば Example 0.0.25 に出したものを使って, こちらで用意したオブジェクトの列を（有限ではあるがいまは気にしない）$\langle 0,1,\langle 0,1\rangle,\langle 0,1,0\rangle\rangle$ として, これに $\neg,\to,A_1,A_2$ を割り当ててたとすると, $A_1=\langle 0,1\rangle=\langle\neg,\to\rangle$, $A_2=\langle 0,1,0\rangle=\langle\neg,\to,\neg\rangle$ となってしまい, $S_1=\langle\langle 0,1,0\rangle,1\rangle=\langle A_2,\to\rangle$, $S_2=\langle\langle 0,1\rangle,0,1\rangle=\langle A_1,\neg,\to\rangle$ となる．つまり意図としては列 S_1,S_2 は異なる列であってほしいが, この列を集合として扱う運用者からすれば, この 2 つの列は集合として一致しているので同じものとして扱わなくてはいけない．よってこのようなことが起こらないためにはこの条件は必要である．この条件と Lemma 0.0.24（11 ページ）や Example 0.0.25（12 ページ）の議論もあわせて, もし 2 つの記号の列が $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle=\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ で Definition 1.1.1 の条件をみたす記号ならば, $m=n$ かつ $a_i=b_i$ となる.

8. **無限の文記号を用意しない方法**

   テキストでは無限個の文記号を使う以外の方法が提示されている．1 個の文記号 A とプライム記号 $\prime$ を使って $A_1,A_2,A_3,\ldots$ の代わりに $A,A',A'',\ldots$ とするのである．こうするとたった 2 個の記号の無限個の記号を用意することができる．これはなるべくコンパクトな定義をしようとするならば良い方法に思われる．ただ実装するときになると各文記号に「A にどれだけのプライム記号をつけたのか」という情報を追加しなくてはならないようにも思えるので, どれほど他の実装方法と比べて楽になるのかはこの時点では分からない.
   今後議論するときに「任意の文記号をとる」ということをするが, そのさいにその任意に取った文記号を表すための記号

[9] プログラミングを知っている人に向けて用意した例え話なのだけれど, もしかしたらハッシュを使えないプログラミング言語ってあったりするのかな．かりに基本文法になかったとしてもライブラリや自作関数などで対応できそうだけれども．ちなみにハッシュ関数という言葉は Wikipedia『ハッシュ関数』[6] より拝借した（自分は普段は単にハッシュと呼んでるけれども）.

として $A_1, A_2, \dots$ などは使えないので, A や A_n または A' などを使うことにする．ちなみに A_n は定義を書くためのメタ的な表現であって実際に n という文字を使った A_n のような記号は文論理の記号ではない．

9. **オブジェクトの数について**
この定義によると文記号として用意すべきは可算無限個のオブジェクトが必要である．そして文記号以外の記号（つまり論理記号）の数は有限なので全ての記号を定めるのに必要な個数は結局可算無限個で十分である．しかし可算無限個でなくてはいけないというわけではない．例えば文記号全てを濃度が可算より大きい集合 $\mathbb{R}$ を使って定めてもよい．つまり各実数を文記号だと扱うわけである．

テキストにはないが便利のため以下の記法を用意しておく．

Notation 1.1.2.
その文論理の文記号の集合を PVAR で表す． ■

上の注意事項より何が文記号なのかはその時の議論によって変わるので, $\mathrm{PVAR} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ や $\mathrm{PVAR} = \{A, A', A'', \dots\}$ となったりする．また文記号は常に無限個用意されるので, $\mathrm{card}(\mathrm{PVAR}) \geq \aleph_0$ である．
つぎに「表現」という言葉を定義するため, 以降日常言語としての表現は使わないよう気をつける．

Definition 1.1.3（表現 (E:p15, K:p23)）.
Definition 0.0.22（10 ページ）の用語を用いる．

1. 文論理の記号の集合を以降 SIMB で表すことにする．

2. SIMB の要素からなる有限列を **expression（表現）** とよぶ．

   またすべての表現の集合を EXPR で表すことにする．
   また表現 $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$（ここで各 s_i は SIMB の要素である）をその成分を順番に並べて $s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n$ と書くこともある．以降どちらの使い方も柔軟に使っていくことにする．

3. $\alpha, \beta \in \mathrm{EXPR}$ に対してそれぞれ $\alpha = \langle a_1, \dots, a_m \rangle,\ \beta = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ とするとき, $\alpha\beta \overset{\mathrm{def}}{=} \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \rangle$ として, これを α と β の **string concatenation（文字列連結）** とよぶ．[10] ■

明らかに $\mathrm{PVAR} \subseteq \mathrm{SIMB}$ であり, $\mathrm{EXPR} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{SIMB}^n$ である．
表現の 2 通りの表し方についてだが当然私たちにとって分かりやすいのは $s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n$ の方である．だからその定義に踏み込んで議論する必要がないときには $s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n$ の方を優先的に使っていく．

この文字列結合は EXPR 上の 2 項演算, つまり演算結果 $\alpha\beta$ も表現である．またその意味もその名前のごとく α の列の後ろに β の列をそのまま並べたものになっている．

Example 1.1.4（E:p15, K:p23）.
表現 α, β に対して

1. $(\neg A_1)$ という（私たちにとって見やすい表し方をした）表現は厳密には有限列 $\langle (, \neg, A_1,) \rangle$ のことである．

2. $\alpha = (\neg A_1),\ \beta = A_2$ とおくとその文字列結合 $\alpha\beta$ は $(\neg A_1)A_2$ に, $(\alpha \to \beta)$ は $((\neg A_1) \to A_2)$ となる． ■

例の 2 つ目における $((\neg A_1) \to A_2)$ とは, $(\alpha \to \beta)$ の α, β 部分にその表現を代入したものである．Definition 1.1.3 でも使ったが改めて注意すると, α, β は文論理の記号ではなく, 文論理について議論している表現を変数のように使いたいための私たちの記号である．プログラミングでいうところのマクロのようなものともいえる．

Definition 1.1.5（式構成操作 (E:p17, K:p25)）.
$\alpha, \beta \in \mathrm{EXPR}$ と論理記号に対して

[10] これはテキストでは定義されていない言葉ではありますが, 定義しておくと便利かと思ったのでプログラミングにおける文字列結合演算（例えば [5]）を参考に定義しておきました．

- $\mathcal{E}_{\neg}(\alpha) = (\neg\alpha)$ と定める．より厳密には $\mathcal{E}_{\neg}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \langle(,\neg\rangle\alpha\langle)\rangle$ であり，これは Definition 1.1.3 で定義した表現の文字列連結である．つまり $\mathcal{E}_{\neg}$ は EXPR 上の 1 変数関数である．
- $\mathcal{E}_{\wedge}(\alpha,\beta) = (\alpha \wedge \beta)$ と定める．より厳密には $\mathcal{E}_{\wedge}(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \langle(\rangle\alpha\langle\wedge\rangle\beta\langle)\rangle$ であり, $\mathcal{E}_{\wedge}$ は EXPR 上の 2 変数関数である．同様にして EXPR 上の 2 変数関数として $\mathcal{E}_{\vee}, \mathcal{E}_{\to}, \mathcal{E}_{\leftrightarrow}$ を定義する．

これらの 5 つの演算をあわせて **formula-building operation（式構成操作）** とよぶ. ■

Definition 1.1.6（(素朴な) 整式の定義 (E:p16 17, K:p25)）．
well-formed formula（整式） とは以下のように帰納的に定義される．[11]

(a) 個々の文記号は整式である．

(b) α, β が整式ならば, $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ は整式である．

(c) (a)(b) にあてはまるものだけが整式である． ■

(b) はつまりすでに整式があったとき, それらの式構成操作の結果もまた整式であると主張している．
この定義は別に数学的に間違っているわけではない．しかしより厳密に定義することもできる．そうしたとき式構成操作を EXPR 上の関数として捉えることにも意味がでてくる．
簡単にいうと整式とは文記号から始めて式構成操作を有限回適用して構成できる表現のことと言えるが, この「有限回適用して」の部分を構成列というものを使って厳密に定義できる．

Definition 1.1.7（構成列と整式 (E:p17 18, K:p26 27)）．
表現の集合 EXPR の有限列 $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ が **construction sequence（構成列）** であるとは, 各 $i \le n$ に対して (1) から (3) のいずれかをみたすときをいう．

(1) ε_i は文記号.

(2) ある $j < i$ があって $\varepsilon_i = \mathcal{E}_{\neg}(\varepsilon_j)$.

(3) ある $j, k < i$ があって $\varepsilon_i = \mathcal{E}_{\square}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)$.
　ここで $\square$ は 2 項結合記号のいずれかを表す．

ある表現 α で終わる（つまり末項が α である）ような構成列が存在するとき, そんな表現を **well-formed formula（整式）** とよぶ.
すべての整式の集合は今後 WFF で表すことにする．[12] ■

明らかに WFF $\subseteq$ EXPR である．
$\mathcal{E}_2$ を 2 項結合記号の集合とするとき, 有限列 $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ が構成列であることは論理式で

$$\forall i < n\big(\ \varepsilon_i \in \mathrm{PVAR}\ \vee\ \exists j < i(\varepsilon_i = \mathcal{E}_{\neg}(\varepsilon_j))\ \vee\ \exists j,k < i \exists \square \in \mathcal{E}_2(\varepsilon_i = \mathcal{E}_{\square}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ \big)$$

と書ける．ここで $\mathcal{E}_{\square}$ という書き方は直感的にはわかりやすいが, まるで $\mathcal{E}_{\square}$ という $\square$ を変数とした関数のようにも見えてしまうので, $\exists j,k < i \exists \square \in \mathcal{E}_2(\varepsilon_i = \mathcal{E}_{\square}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)$ の部分は本当は

$$\exists j,k < i\big(\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_{\wedge}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ \vee\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_{\vee}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ \vee\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_{\to}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ \vee\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_{\leftrightarrow}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ \big)$$

と書くべきだろうが, ここで初めて $\mathcal{E}_{\vee}$ に含まれている $\vee$ と, 各論理式をつないでいる $\vee$ とで記号の衝突が起きている．これが頭の中で完全に区別できている人たちの中で, 議論のさいにこう書くなら問題はないが（それでも多分良い顔はしないと思うけれど）, 初学者には余計な誤解やそれによる遠回りを与える可能性がある．ゆえにテキストでは（おそらく意図的に）一貫して（第 0 章（5 ページ）のような別に論理学に直接関係する概念でなくても）何かを定義するさいには, 日常言語で述べることにしたのであろう．

[11] テキストでは単に「式（formula)」とか, 原著だと「wff」などの呼び方も提示されていますが, 個人的な理由で整式のみで統一しようと思います．
[12] これもテキストではこの記号を与えたりはしていませんが, 個人的に便利なことが多かったので定めておきました．

Example 1.1.8.
整式 α を ($(A_1 \wedge A_{10})$ $\to$ ($(\neg A_3)$ $\vee$ $(A_8 \leftrightarrow A_3)$)) とすると, 以下の有限列は

$$\langle\ A_1,\ A_3,\ A_8,\ A_{10},\ (A_1 \wedge A_{10}),\ (\neg A_3),\ (A_8 \leftrightarrow A_3),\ ((\neg A_3) \vee (A_8 \leftrightarrow A_3)),\ \alpha\ \rangle$$

その構成列の一例である. ■

ここでテキストでは系統樹による説明がある（これより前から何度か登場しているけれど）. 第 0 章（5 ページ）によると木概念は非形式的な議論にしか使わないと書いてある. つまり系統樹を使って説明されている事柄はすべて定義に戻ればより厳密な数学的議論をすることができるということなので, このノートでは系統樹を使った説明は必要だと思ったときにします. [13]
Example 1.1.8 で私が書いた構成列には「先に使う文記号は列先頭からすべて書いておく」という個人的な好みが現れている. だがある整式に対する構成列は 1 つではない. 例えば（私の好みに反する）以下のような（必要になったときに文記号を挿入するような）整式の有限列も

$$\langle\ A_1,\ A_{10},\ (A_1 \wedge A_{10}),\ A_3,\ (\neg A_3),\ A_8,\ (A_8 \leftrightarrow A_3),\ ((\neg A_3) \vee (A_8 \leftrightarrow A_3)),\ \alpha\ \rangle$$

整式 α の構成列である.

ここからさらに（この時点で）テキストにない注意を例え話を入れながら追加する.

1. たとえば整式 $(A_1 \wedge A_2)$ の構成列として最も単純なものは $\langle A_1, A_2, (A_1 \wedge A_2)\rangle$ であろうが, 別に $\langle A_2, A_1, (A_1 \wedge A_2)\rangle$ でもよい. つまり構成列の定義をみたす範囲で文記号が現れる順番を変えてもよい. また構成列の定義をみたす範囲で余計な整式を構成列に混ぜてもよい. たとえば

$$S_1 = \langle A_1, A_2, A_3, (A_1 \wedge A_2)\rangle,$$
$$S_2 = \langle A_1, A_2, A_3, (\neg A_3), (A_1 \wedge A_2)\rangle$$

とおくと, S_1, S_2 どちらも $(A_1 \wedge A_2)$ の構成列である. しかし $\langle A_1, A_2, A_3, (A_1 \wedge A_2), A_3\rangle$ は整式 A_3 の構成列である. さらに $\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ も $\langle A_3, A_3, A_3\rangle$ も A_3 の構成列である.

2. ある構成列の始切片もまた構成列で, ゆえになんらかの整式に対応した構成列となる. 例えば

$$S'_1 = \langle A_1\rangle,$$
$$S'_2 = \langle A_1, A_2\rangle,$$
$$S'_3 = \langle A_1, A_2, A_3\rangle,$$
$$S'_4 = \langle A_1, A_2, A_3, (\neg A_3)\rangle$$

とおくと, それぞれ S_2 の始切片で, S'_1 は A_1 の, S'_2 は A_2 の, S'_3 は A_3 の, S'_4 は $(\neg A_3)$ の構成列である. これは単なる観察ではなく, つまりこの整式だけにあてはまる現象ではなくすべての整式に対して成立する. これは Proposition 1.1.9（30 ページ）で示した.

3. また例えば $\langle A_1\rangle$ は A_1 という整式の構成列であるが, 1 つ組の定義から $\langle A_1\rangle = A_1$ でもあるから, A_1 そのものは整式でもあり, かつ自分自身の構成列でもある. 当然これは他の文記号に関しても同様である.

4. A_3, $(\neg A_3)$ という $(A_1 \wedge A_2)$ に含まれていない文記号からなる整式を S_2 から取り除いても, つまり構成列 $\langle A_2, A_1, (A_1 \wedge A_2)\rangle$ は依然として $(A_1 \wedge A_2)$ の構成列のままである. 例えば Example 1.1.17（35 ページ）にて, 似たような問題を解いている. 上記の事をより一般的に証明してみたいので, 今後の課題としておく.

今後の課題

ある整式の構成列があったとき, その末項整式に含まれていない文記号を持つ整式が, その構成列に含まれていた場合に, そのような整式全てを構成列から除いても, その末項整式の構成列であることには変わらない.

[13] 決して系統樹を LaTeX で書くのがめんどくさいとかそういうことではない……もちろん視覚的には系統樹の方が分かりやすいのは知っているのだけれど.

5. またこの注意たちの前に整式に対応する構成列は 1 つではないと述べたが, もっといえば無数にある．例えば単に A_1 という整式の構成列でも長さが 2 のものに限っても, $\langle A_1, A_1\rangle$, $\langle A_2, A_1\rangle$, $\langle A_3, A_1\rangle, \ldots$ など無限にある．つまりある整式に対しての構成列は無限に存在するが, ある構成列はそれぞれ 1 つの整式に対応している．これを使えば「任意の整式に対して」という形の主張の証明に役立てることができる．どういうことかというと「任意の整式に対して〇〇」ということを示す代わりに,「任意の構成列に対して〇〇」を示してもよいということである．[14] もちろん最初の〇〇部分が整式のみしか扱えないならば, それを構成列に関するものへ変更する必要はある．
そして構成列は有限列ゆえにすべての構成列にはその「長さ」という情報が備わっている．これを利用して「任意の構成列に対して〇〇」を示す代わりに,「任意の長さの構成列に対して〇〇」を証明してもよい．こういう風に証明内容を変更する最大のメリットは長さという 0 より大きい自然数に対しての主張に変わったことにより, 種々の自然数に関する帰納法を用いられるようになったことである．もっと具体的にどのように示すかというと「任意の $n \in \mathbb{N}$ と構成列に対して, その構成列の長さが n ならば〇〇」を示す形になる．つまり証明の最初は任意に長さ n の構成列をとるところからはじまる．このほかにも表現や整式の単なる長さや整式に含まれる文記号の個数など, 表現・整式に備わる様々な「数」を使って証明していくことになる．

6. Definition 1.1.6（28 ページ）にある定義を採用するテキストも多い．これのメリットとしては「任意の整式に対して〇〇」という主張に対して**構成に関する帰納法**を使うことができることである．構成に関する帰納法は **structural induction**（**構造的帰納法**）と呼ばれることもある．なので以降は（カッコいい方の）構造的帰納法という呼び名を使っていく．[15] これは次の 2 つのことを示るやり方である．

   （Basis）すべての文記号が〇〇をみたすことを示す．

   （Induction step）整式 α, β が〇〇をみたしているとして, $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ が〇〇をみたしていることを示す．

   証明すべきことの名前（Basis とかのこと）は [30] から拝借した．もちろん [30] では整式の定義は Definition 1.1.6（28 ページ）と同じようになされている．
   ときどき余裕があればこちらのやり方でも証明してみることにする．もしかしたら主張によってはこちらの方が証明がやりやすくなることもあるかもしれない．

では練習がてら色々と自分で簡単な主張を用意して証明してみる．

Proposition 1.1.9.
構成列のどのその真の始切片もまた構成列である． ■

Proof 証明すべきことは「任意にとった構成列に対して, さらに任意にその構成列の始切片をとると構成列になっている」である．任意に構成列をとるかわりに任意の長さの構成列をとることにすると証明目的は「任意にとった $n \in \mathbb{N}$ と構成列に対して, その構成列の長さが n ならば, さらに任意にその構成列の始切片をとると構成列になっている」となる．この任意にとる n に対して, つまり構成列の長さに関して累積帰納法を使って示す．任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる．この帰納法の仮定は「長さが n 未満であるような全ての構成列が, そのどの始切片も構成列になっている」である．いま任意に長さ n の構成列 $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\rangle$ をとり, さらにその真の始切片として $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\rangle$ をとる．つまり $m < n$ である．ここで ε_m は構成列 $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\rangle$ の成分の 1 つなので,

(1′) $\varepsilon_m \in \mathrm{PVAR}$.

(2′) $\exists j < m\big(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_{\neg}(\varepsilon_j)\ \big)$.

(3′) $\exists j, k < m\big(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_{\square}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ \big)$. ここで $\square$ は 2 項結合記号のいずれかを表す．

を満たしている．つまり「ε_m は (1′) または (2′) または (3′) をみたす」となっている．
いま有限列 $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}\rangle$ は $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\rangle$ の真の始切片でかつ帰納法の仮定から構成列なので, 任意の $i \leq m-1$ に対して

[14] これまでの観察により構成列の個数は整式の個数よりもはるかに多いため, この証明は整式に対して証明するものと加えるとかなり無駄が多いように思ってしまう．でも証明のやりやすさが上がることもあるし, まぁダブっていても足りなくなっていないのならばそれで OK なのだ．
でも「任意の構成列に対して〇〇」という形の主張を示すときに,「任意の整式に対して〇〇」という主張を証明してはいけない．これは明らかに構成列をすべて取りつくしていないから, ということになる．

[15] この呼び方は Wikipedia『構造的帰納法』[7] より知りました．

(1″) $\varepsilon_i \in \mathrm{PVAR}$.

(2″) $\exists j < i(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$.

(3″) $\exists j, k < i(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\Box(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ )$. ここで $\Box$ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

を満たしている. つまり「任意の $i \le m-1$ に対して (1″) または (2″) または (3″) をみたす」となっている. ここまでの議論をまとめて「」で囲った 2 つの主張を合わせると, 任意の $i \le m$ に対して

(1) $\varepsilon_m \in \mathrm{PVAR}$.

(2) $\exists j < m(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$.

(3) $\exists j, k < m(\ \varepsilon_m = \mathcal{E}_\Box(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ )$. ここで $\Box$ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

を満たしていることになり, これは $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \rangle$ が構成列になっていることを表している. □

Theorem 1.1.10.
帰納法の原理 (E:p18 INDUCTION PRINCIPLE, K:p27 帰納法の原理) すべての文記号が属し, かつすべての式構成操作について閉じている整式の集合は, すべての整式からなる集合である. ■

証明の前にいくつか注意事項を書いておく

1. 定理の主張の条件をみたしている整式の集合を $\mathcal{A}$ で表すことにすると, 集合として $\mathcal{A} = \mathrm{WFF}$ を示すことが証明の目的となる. $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{WFF}$ であることは明らかなので $\mathrm{WFF} \subseteq \mathcal{A}$ を示すだけでよい. 部分集合の定義に戻ると, これは「任意の整式 α に対して $\alpha \in \mathcal{A}$」を示すことになったため, Example 1.1.8 下の注意事項 5 にある通り, 構成列の長さに関する帰納法, とくにこの場合は累積帰納法を用いて証明する.

2. $\mathcal{A}$ がすべての文記号が属するとは, 論理式で書けば $A \in \mathrm{PVAR}(A \in \mathcal{A})$ となる.
また全ての式構成操作について閉じるということをもう少し厳密に見ると, $\mathcal{E}_\neg$ は EXPR 上の 1 項演算, それ以外の式構成操作は EXPR 上の 2 項演算であり, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{EXPR}$ である. たとえば $\mathcal{E}_\neg\colon \mathrm{EXPR} \to \mathrm{EXPR}$ について, この演算の $\mathcal{A}$ への制限と考えることもできる. さらにこの $\mathcal{A}$ は $\mathcal{E}_\neg$ について閉じている, つまり $\forall \alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_\neg(\alpha) \in \mathcal{A})$ と表すことができる. 2 項演算である $\mathcal{E}_\wedge$ についても $\mathcal{A}$ が $\mathcal{E}_\wedge$ について閉じているとは, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_\wedge(\alpha, \beta) \in \mathcal{A})$ と表すことができる. 他の 2 項演算についても同様である.

Proof　証明すべきことは「任意にとった $n \in \mathbb{N}$ と任意にとった構成列に対して, その構成列の長さが n ならば, その構成列に対する整式（構成列の末項）は $\mathcal{A}$ に属する」である. 任意にとる n に対して累積帰納法を用いて示す.
任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる. 帰納法の仮定は「長さが n 未満であるような全ての構成列に対して, それに対応する整式が $\mathcal{A}$ に属する」となる. いま長さ n な任意の構成列 $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle$ をとる. この ε_n が $\mathcal{A}$ に属することを示すことが目的である.
構成列の定義から ε_n は以下のいずれかをみたす.

(1) $\varepsilon_n \in \mathrm{PVAR}$.

(2) $\exists j < n(\ \varepsilon_n = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$.

(3) $\exists j, k < n(\ \varepsilon_n = \mathcal{E}_\Box(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ )$. ここで $\Box$ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

それぞれの場合について $\varepsilon_n \in \mathcal{A}$ であることを示す.

(1) $\varepsilon_n \in \mathrm{PVAR}$ のとき.
整式 ε_n は文記号一文字の整式であり, 仮定より $\mathrm{PVAR} \subseteq \mathcal{A}$ だから $\varepsilon_n \in \mathcal{A}$ である.

(2) $\exists j < n(\ \varepsilon_n = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\ )$ のとき.
そのような ε_j を固定する. $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j \rangle$ は, 構成列 $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle$ の真の始切片であり, Proposition 1.1.9（30 ページ）より構成列である. この構成列は ε_j に対応する構成列でその長さは n 未満なので, 帰納法の仮定より $\varepsilon_j \in \mathcal{A}$ である. そして仮定より $\mathcal{E}_\neg$ が $\mathcal{A}$ 上閉じていることから $\mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j) \in \mathcal{A}$ である. つまりこれは $\varepsilon_n \in \mathcal{A}$ を表す.

(3) $\exists j, k < n\big(\ \varepsilon_n = \mathcal{E}_{\Box}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\ \big)$（□は 2 項結合記号のいずれか）のとき．
たとえば□を $\land$ として，そんな $\varepsilon_j, \varepsilon_k$ を固定する．$\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j \rangle, \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle$ は，構成列 $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ の真の始切片であり，Proposition 1.1.9（30 ページ）より構成列である．この 2 つの構成列はどちらも長さが n 未満なので，帰納法の仮定より $\varepsilon_j, \varepsilon_k \in \mathcal{A}$ である．そして仮定より $\mathcal{E}_\land$ が $\mathcal{A}$ 上閉じていることから $\mathcal{E}_\land(\varepsilon_j, \varepsilon_k) \in \mathcal{A}$ である．つまりこれは $\varepsilon_n \in \mathcal{A}$ を表す．ほかの 2 項結合記号について同様である． □

この証明を構造的帰納法にて証明することも可能であるので確かめてみる．

Theorem 1.1.10 の構造的帰納法による証明　Theorem 1.1.10 の下に書いた注意事項を参考にして，WFF $\subseteq \mathcal{A}$，つまり任意に取った整式が $\mathcal{A}$ に属することを示す．これについて構造的帰納法を用いる．

（Basis）
任意に文記号 A をとる．仮定より $A \in \mathcal{A}$.

（Induction step）
任意に整式 α, β をとり，$\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ とする．仮定よりすべての式構成操作について $\mathcal{A}$ が閉じているので $(\neg\alpha), (\alpha \land \beta), (\alpha \lor \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ はすべて $\mathcal{A}$ に属する． □

整式全体に関する定理の証明に対して帰納法の原理を使うことができる．

Example 1.1.11（E:p18 EXAMPLE, K:p28 例）．
どの整式もそれに含まれる右括弧・左括弧の個数は同じである．[16] ■

Proof　$\mathcal{A}$ を含まれる両括弧記号の数が同じな整式の集合とする．$\mathcal{A}$ が全ての整式の集合であることを示せばよい．以下の 2 点を示せば

1. $\mathcal{A}$ には全ての文記号（1 つのみの整式）を含むこと
2. $\mathcal{A}$ は全ての式構成操作について閉じていること

Theorem 1.1.10（31 ページ）より $\mathcal{A} = \mathrm{WFF}$ であることがわかる．

1. （$\mathcal{A}$ には全ての文記号（1 つのみの整式）を含むこと）
任意に $A \in \mathrm{PVAR}$ をとる．A はそれぞれの括弧記号の数は 0 個，つまり両括弧記号の数は同じなので $A \in \mathcal{A}$ である．

2. （$\mathcal{A}$ は全ての式構成操作について閉じていること）
任意に $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ をとり，それぞれの左括弧記号の個数を k_α, k_β とおくと，$\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ より右括弧記号の個数も k_α, k_β 個である．
$\mathcal{E}_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$ より整式 $\mathcal{E}_\neg(\alpha)$ の左右の括弧の数はどちらも $k_\alpha + 1$ となって，つまり両括弧記号の数は同じであるので，$\mathcal{E}_\neg(\alpha) \in \mathcal{A}$ である．つまり演算 $\mathcal{E}_\neg$ について $\mathcal{A}$ は閉じている．
次に $\mathcal{E}_\land(\alpha, \beta) = (\alpha \land \beta)$ より整式 $\mathcal{E}_\land(\alpha, \beta)$ の左右の括弧の数はどちらも $k_\alpha + k_\beta + 1$ となって，つまり両括弧記号の数は同じであるので，$\mathcal{E}_\land(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ である．つまり演算 $\mathcal{E}_\land$ について $\mathcal{A}$ は閉じている．他の 2 項結合記号に関しても同様に証明できる． □

演習問題

Exercise 1.1.12（E:p19 1., K:p29 1.）．
日本語の文をみっつ挙げ，それらの文を私たちの形式言語に翻訳しなさい．文は，なんらかの意味のある構造を持つように，また，翻訳が 15 個以上の記号からなる列になるように選びなさい． ■

Answer　5 つの文記号とその日本語での意味を以下のように定める．

[16] テキストでは「左括弧の数が右括弧の数より多い表現は整式ではない」となっていますが，実際に証明している，テキストにて証明末尾に書いてある主張は，同じ意味ではあるものの，ここに書いたものになっていたので，こちらに合わせました．この例は後で Lemma 1.3.1（41 ページ）にて再度登場するけれど，そのときの主張の書き方はこちらの書き方に変わっているので，この書き方でも問題ないと思いました．

P_1：〇〇月××日の△△小学校周辺の天気は晴れ
P_2：〇〇月××日に△△小学校には運動場がある
P_3：〇〇月××日に△△小学校には生徒が 1 人以上いる
P_4：〇〇月××日に△△小学校には教師が 1 人以上いる
Q：〇〇月××日に△△小学校にて運動会が開催されている

これらを使って以下のように 3 つの整式を作る

$$\varphi_1 = ((((P_1 \land P_2) \land P_3) \land P_4) \to Q)$$
$$\varphi_2 = ((\neg Q) \to ((((\neg P_1) \lor (\neg P_2)) \lor (\neg P_3)) \lor (\neg P_4)))$$
$$\varphi_1 = ((((P_1 \land P_2) \land P_3) \land P_4) \land (\neg Q))$$

すると φ_1 は「〇〇月××日に△△小学校周辺の天気は晴れで, △△小学校に運動場があり, △△小学校に生徒も教員も 1 人以上いれば, 運動会が開催されている」となり, φ_2 は「〇〇月××日に△△小学校にて運動会が開催されていないならば, 同日に△△小学校周辺の天気が晴れでないか, △△小学校に運動場・生徒・教員のいずれかが存在しない」となり, φ_3 は「〇〇月××日に△△小学校周辺の天気は晴れで, △△小学校に運動場・生徒・教員も存在するが, 運動会は開催されていない」となる. [17] □

次の Exercise を証明するために 2 つの Proposition を証明しておく.

Proposition 1.1.13.
いずれかの式構成操作の結果となっている整式は長さが 4 以上である. つまり文記号 1 文字という表現でない整式は, その長さは 4 以上となる. ■

Proof α は文記号 1 文字という表現でないとする. ある表現 β_1, β_2 があって, $\alpha = \mathcal{E}_\neg(\beta_1)$ となっていたとすると, β_1 の長さは 1 以上であるから, α の長さは $(,), \neg$ の 3 つ分長さが増えて 4 以上となる.
$\alpha = \mathcal{E}_\land(\beta_1 m \beta_2)$ となっていたとすると, β_1, β_2 のいずれの長さも 1 以上であるから, α の長さは $(,), \neg$ の 3 つ分と β_1, β_2 を合わせて 5 以上となる. つまりこの場合でも長さは 4 以上となり, 他の 2 項結合記号による式構成操作でも同様である. □

Proposition 1.1.14.
整式でない表現に式構成操作を行っても整式にはならない.
もっというと α を整式でない表現とすると $\mathcal{E}_\neg(\alpha)$ は整式でない.
2 つの表現 α, β のどちらか 1 つは整式でないとすると, $\mathcal{E}_\Box(\alpha, \beta)$（□ は 2 項結合記号のどれか）のいずれも整式でない. ■

Proof α を整式でない表現とする. すると整式でないということは α を末項とするようないかなる表現の有限列も構成列とはならない.
$\mathcal{E}_\neg(\alpha)$ が整式となるとすると, 構成列 $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ が存在して $\varepsilon_n = \mathcal{E}_\neg(\alpha)$ となっている. 構成列の定義 Definition 1.1.7（28 ページ）から $\exists j < n\big(\varepsilon_n = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)\big)$ となっているから, そのような j を固定すると, $\varepsilon_j = \alpha$ である. すると $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j \rangle$ は $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ の真の始切片であり, Proposition 1.1.9（30 ページ）から $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j \rangle$ も構成列である. $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j \rangle$ という構成列の存在から α が整式となるが, これは矛盾.
2 つの表現 α, β のどちらか 1 つは整式でないとする. $\mathcal{E}_\land(\alpha, \beta)$ が整式となるとすると, 同様に構成列の定義から $\exists j, k < n\big(\varepsilon_n = \mathcal{E}_\land(\varepsilon_j, \varepsilon_k)\big)$ となっているから, そのような j, k を固定すると,$\varepsilon_j = \alpha,\ \varepsilon_k = \beta$ である. もし α が整式でないとすると, $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j \rangle$ は $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ の真の始切片であり, 先ほどと同様の理由で矛盾する. β が整式でなかった場合も同様に, またそれ以外の 2 項結合記号に関する式構成操作に関しても同様に示せるので省略する. □

Exercise 1.1.15（E:p19 2., K:p29 2.）.
長さが 2,3,6 の整式は存在しないこと, そして, それら以外のすべての正整数の長さをもつ整式は存在することを示しなさい. ■

Proof 以下のように細かく分けて証明する.

[17] 問題文によれば, 何も同じ記号で 3 つの文章を作れとはなっていないが, めんどくさかったので……また意味のある文章を作るためにもすでに作った φ_1 の, φ_2 はその対偶に, φ_3 はその否定とすることで楽をさせてもらった. こういうのはそれこそ教養があると面白い回答を出せるのだろう.

- 長さが 2 または 3 のどんな表現も整式でないこと
  α を長さが 2 である表現とする．α はその長さから文記号 1 文字だけの表現ではないため, 何らかの式構成操作の結果であるが, Proposition 1.1.13（33 ページ）よりいずれの式構成操作の結果も長さが 4 以上になり, 長さが 2 である α は整式ではない．
  α の長さが 3 である場合も同様なので省略する．

- どんな長さが 6 の表現も整式でないこと
  α を長さが 6 である表現とする．α はその長さから文記号 1 文字だけの表現ではないため, 何らかの式構成操作の結果である．
  なんらかの表現 β があって $\alpha = \mathcal{E}_\neg(\beta)$ となっていたとする．すると α は $(\neg\beta)$ という形の表現であり, β の長さは 3 である．しかし長さが 3 の整式は存在しないため, β も整式でない．そして Proposition 1.1.14（33 ページ）より α も整式とならない．
  続いてなんらかの表現 β_1, β_2 があって, $\alpha = \mathcal{E}_\wedge(\beta_1, \beta_2)$ となっていたとする．すると α は $(\beta_1 \wedge \beta_2)$ という形の表現であり, β_1, β_2 の長さはどちらかは 1, どちらかは 2 という配分になっている．かりに β_1 の長さを 2 とすると, 長さが 2 の整式は存在しないため β_1 は整式でない．そして Proposition 1.1.14（33 ページ）より α も整式とならない．他の 2 項結合記号に関しても同様なので省略する．

- 長さが $1, 4, 5$ の整式が存在すること
  A, A' を文記号のいずれかとする．表現 $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ を, $\alpha_1 = A,\ \alpha_4 = (\neg A),\ \alpha_5 = (A \wedge A')$ とおくと, それぞれ長さが $1, 4, 5$ で, いずれも構成列を構築できることから整式である．

- 長さが $7, 8, 9$ の整式が存在すること
  1 つ上で示したことより長さが $1, 4, 5$ の整式が存在するので, それらの中から 1 つとり $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ とおく（添え字はその長さを表している）．表現 $\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$ を, $\alpha_7 = (\neg\alpha_4),\ \alpha_8 = (\neg\alpha_5),\ \alpha_9 = (\alpha_1 \wedge \alpha_5)$ とおくと, それぞれ長さが $7, 8, 9$ で, いずれも構成列を構築できることから整式である．

- 10 以上の任意の長さの整式が存在すること
  任意に 10 以上の自然数 n をとる．n に対してある自然数 m があって, $n = 7 + 3m$ また $n = 8 + 3m$ または $n = 9 + 3m$ のいずれかである．$n = 7 + 3m$ な n に対しては, 表現 α を $\alpha = \mathcal{E}_\neg^m(\alpha_7)$ とおく．ここで α_7 は 1 つ上で示したことにより存在する長さが 7 の何らかの整式で, $\mathcal{E}_\neg^m(\alpha_7)$ は α_7 に $\mathcal{E}_\neg$ 演算を m 回施したものとする．すると表現 α は長さが n であり, 構成列を構築できることから整式である．
  $n = 8 + 3m$ または $n = 9 + 3m$ であっても長さが $8, 9$ の整式を用いることで同様に示せるので省略する． □

Exercise 1.1.16（E:p19 3., K:p29 3.）．
α を整式として, α の中で 2 項結合記号が出現する箇所の数を c で, α の中で文記号が出現する箇所の数を s で表します．（たとえば, α が $(A \to (\neg A))$ の場合は, $c = 1,\ s = 2$ です．）帰納法の原理を使って, $s = c + 1$ であることを示しなさい． ■

Proof 整式の集合 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} = \{\alpha | s_\alpha = c_\alpha + 1\}$ とする．ここで s_α は α の中で文記号が出現する箇所の数, c_α は α の中で 2 項結合記号が出現する箇所の数とする．以下の 2 つのことを示せば帰納法の原理である Theorem 1.1.10（31 ページ）より証明完了となる．

- $\mathcal{A}$ にはすべての文記号が属すること
  任意に文記号をとり A とおく．A1 文字だけという表現は整式でもある．A という整式の 2 項結合記号の数は 0, 文記号の数は 1 より $\mathcal{A}$ に属する条件をみたす．

- $\mathcal{A}$ がすべての式構成操作について閉じていること
  任意に $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ をとる．それぞれの整式に対する $\mathcal{A}$ の条件にある数を $c_\alpha, s_\alpha,\ c_\beta, s_\beta$ とおくと, $s_\alpha = c_\alpha + 1,\ s_\beta = c_\beta + 1$ をみたしている．整式 γ に対して同様に c_γ, s_γ を定めておく．
  $\gamma = \mathcal{E}_\neg(\alpha)$ とすると, γ は α から 2 項結合記号も文記号も増えていない, つまり $c_\gamma = c_\alpha,\ s_\gamma = s_\alpha$ であり, 仮定より $s_\gamma = c_\gamma + 1$ をみたし $\gamma \in \mathcal{A}$, つまり $\mathcal{A}$ は式構成操作 $\mathcal{E}_\neg$ について閉じている．
  続けて $\gamma = \mathcal{E}_\wedge(\alpha, \beta)$ とすると, γ はその作り方から 2 項結合記号の出現する箇所の個数は α, β の 2 つのものに加えて

$\wedge$1 つが増えているので, $c_\gamma = c_\alpha + c_\beta + 1$ である. γ は α, β の 2 つに含まれるもの以外には文記号が増えていないので, $s_\gamma = s_\alpha + s_\beta$ である. すると

$$\begin{aligned} s_\gamma &= s_\alpha + s_\beta \\ &= (c_\alpha + 1) \ + \ (c_\beta + 1) \\ &= (c_\alpha + c_\beta + 1) \ + \ 1 \ = \ c_\gamma + 1 \end{aligned}$$

より $\gamma \in \mathcal{A}$, つまり $\mathcal{A}$ は式構成操作 $\mathcal{E}_\wedge$ について閉じている.
他の 2 項結合記号に関する式構成操作について同様なので省略する. □

Exercise 1.1.17（E:p19 4., K:p29 4.）.
φ で終わる構成列があって, φ は記号 A_4 を含んでいないとします. この構成列から A_4 を含む表現をすべて取り去ったとしても, その結果はやはり正しい構成列になっていることを示しなさい. ■

Proof $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ を $\varepsilon_n = \varphi$ な構成列とし, φ は記号 A_4 を含んでいないとする. $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ を $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ から A_4 を含む表現をすべて取り去った表現の有限列とする. 仮定より $\varepsilon'_m = \varphi$ である. ここで $m = n$ ならば「$\forall i(\varepsilon_i = \varepsilon'_i)$」となって, もともと $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ のどの表現にも A_4 が含まれていなかったことになり, 証明することがなくなってしまうので, $m < n$ としておく. Definition 1.1.7（28 ページ）より $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ は「$\forall i \leq n(\ (1) \vee (2) \vee (3) \ )$」をみたしている. いま, $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ が構成列でなかったとする. つまり「$\exists i' \leq m(\ \neg(1') \wedge \neg(2') \wedge \neg(3') \ )$」として, そんな i' を 1 つ固定する. ここで

$\neg(1')$ $\varepsilon'_{i'} \notin$ PVAR.

$\neg(2')$ $\forall j < i'\big(\ \varepsilon'_{i'} \neq \mathcal{E}_\neg(\varepsilon'_j) \ \big)$.

$\neg(3')$ $\forall j, k < i'\big(\ \varepsilon'_{i'} \neq \mathcal{E}_\square(\varepsilon'_j, \varepsilon'_k) \ \big)$.
ここで □ は 2 項結合記号のいずれかを表す.

である. $\varepsilon'_{i'} = \varepsilon_i$ なる $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ に含まれる表現が存在するので, それも固定する.
ε_i が (1) をみたす, つまり文記号だったとすると, $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ の作り方から文記号だったものがそうでない表現に変わることはないので, $\varepsilon'_{i'}$ も文記号となるが, これは $\varepsilon'_{i'}$ が $\neg(1')$ をみたすことに反する.
つぎに ε_i が (2) をみたす, つまり $\exists j < i\big(\ \varepsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j) \ \big)$ だったすると, $\varepsilon'_{i'}$ が $\neg(2')$ をみたすことから, $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ のときに存在していた ε_j が $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ を作ったさいに取り去られた, つまりそのような ε_j は A_4 を含んでいたことになる. すると $\varepsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j)$ より ε_i も, そして $\varepsilon'_{i'}$ も A_4 記号を含んでいることになるが, これは $\langle \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m \rangle$ の作り方に矛盾.
ε_i が (3) をみたすときも同様に示せるので省略. □

Exercise 1.1.18（E:p19 5., K:p29 5.）.
α は否定記号 $\neg$ を含まない整式とします.

(a) α の長さ（記号列を構成する記号の個数）は奇数であることを示しなさい.

(b) α を構成する記号のうち, 文記号が占める割合が 1/4 を超えることを示しなさい. ■

Proof (a)(b) に関してテキストのヒントを使って同時に示す.
$\mathcal{A} \subseteq$ WFF を否定記号 $\neg$ を含まない整式の集合とする. 整式に含まれる左括弧記号の個数[18] に関する累積帰納法を用いる. 任意に $n \in \mathbb{N}$ をとる. 帰納法の仮定は「n 個未満の左括弧記号を含む任意のの整式に対して, ある $k \in \mathbb{N}$ があって, その長さは $4k + 1$ で, 文記号の数は $k + 1$ になっている」とする.
任意に左括弧記号の個数が n 個な整式 $\varphi \in \mathcal{A}$ をとる. いま $n = 0$, つまり φ が文記号 1 文字という形の整式ならば明らか.
よって $n > 0$ とすると, φ は否定記号以外の記号による式構成操作によって出来上がったものであるため, ある $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ があって $\varphi = \mathcal{E}_\wedge(\alpha, \beta)$ となっていたとすると, φ は $(\alpha \wedge \beta)$ という形になっている. φ の左括弧記号の個数が n 個であることから, α, β

[18] 別の言い方をすれば, その整式に対して施された否定記号以外の式構成操作の回数ともいえる. また Example 1.1.11（32 ページ）にある通り, どんな整式に含まれる左括弧と右括弧記号の数は同じということを知っていれば, 別に右括弧記号の個数でも一緒である.
また個人的にはもう少し証明に有利になるような帰納法の回し方はないものかとも思っている.

はそれぞれそれ未満, つまり n 個未満であるため, 帰納法の仮定からそれぞれに対してある $k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{N}$ があって, α, β のそれぞれの長さは $4k_\alpha+1, 4k_\beta+1$ となっていて, それぞれに含まれる文記号の個数は $k_\alpha+1, k_\beta+1$ 個である. すると φ の長さは, その形から α と β の長さに加えて, $(. \neg,)$ の 3 つの記号があることから, $k \in \mathbb{N}$ を $k = k_\alpha + k_\beta + 1$ とおけば,

$$\begin{aligned}(4k_\alpha+1)\ +\ (4k_\beta+1)\ +\ 3\ &=\ 4(\ k_\alpha+k_\beta+1\ )\ +\ 1\\ &=\ 4k+1\end{aligned}$$

である.
φ に含まれる文記号の個数は α, β に含まれるものから増えていないので, $(k_\alpha+1)+(k_\beta+1)\ =\ (k_\alpha+k_\beta+1)+1\ =\ k+1$ である. よってそんな k の存在から左括弧記号が n 個のときも成立. そして φ が他の式構成操作によって出来上がったものであっても同様に示せるので省略する.
これまでに示したことにより, $\mathcal{A}$ に属する任意の整式 φ の長さは何らかの自然数 k をもって $4k+1$ となっているので, その長さは奇数, つまり (a) は成立する.
そして φ を構成する記号の個数とはその長さと同じだから $4k+1$ 個, そして文記号の個数は $k+1$ であるから, 文記号の占める割合とは

$$(\varphi \text{ に含まれる文記号の個数})/(\varphi \text{ を構成する記号の個数})\ =\ (k+1)/(4k+1)\ > 1/4$$

となって 1/4 を超えているため (b) も成立している. □

1.2 真理値割り当て

<u>Definition</u> 1.2.1（真理値割り当て (E:p20 21, K:p30 32)）.
$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{PVAR}$ とする.

1. Definition 1.1.1（24 ページ）とは別に新たに 2 つの記号を用意する. それらを F（これを **falsity（偽）** とよぶ）, T（これを **truth（真）** とよぶ）とする.
2. $v\colon \mathcal{A} \to \{F, T\}$ なる v を文記号の集合 $\mathcal{A}$ に対する **truth assignment（真理値割り当て）** という.
3. $\bar{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ から始めて 5 種類の式構成操作を使って構成できる整式全体の集合とする.
4. 真理値割り当て $v\colon \mathcal{A} \to \{F, T\}$ に対して, $\bar{v}\colon \bar{\mathcal{A}} \to \{F, T\}$ を各 $A \in \mathcal{A}$ と $\alpha, \beta \in \bar{\mathcal{A}}$ について以下の 6 条件をみたすものとする.

   4-0. $\bar{v}(A) = v(A)$

   4-1. $\bar{v}((\neg\alpha)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = F \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-2. $\bar{v}((\alpha \wedge \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = T \text{ かつ} \bar{v}(\beta) = T \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-3. $\bar{v}((\alpha \vee \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = T \text{ または} \bar{v}(\beta) = T \text{（もしくはその両方）のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-4. $\bar{v}((\alpha \to \beta)) = \begin{cases} F & \bar{v}(\alpha) = T \text{ かつ} \bar{v}(\beta) = F \text{ のとき} \\ T & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

   4-5. $\bar{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \begin{cases} T & \bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta) \text{ のとき} \\ F & \text{それ以外のとき} \end{cases}$ ■

テキストにあるなし関わらず気になったことを注意しておくと,

1. 上記定義 1. では新たな記号が定義されたが, Definition 1.1.1（24 ページ）では記号を割り当てるもの（それを今後記号と同一視して使っていくもの）として, オブジェクトの列を使用したが, ここでは列であるようなことは書かれていない. それは Definition 1.1.1（24 ページ）の注意事項 6 でも書いたように, 今から無限個の記号を用意するわけでもないので, 列でもなくともよいということなのかもしれない.
もっというともし議論の進め方次第では先にすべての使う記号を定義しておく流儀もありえて, そのような場合には表 1.2 の括弧記号の前にこの T, F を追加してやればよい. ただその場合, 記号の有限列であるという表現の定義にて「真理値を表す記号は除く」と付け加えなくてはいけないだろう. これ以外にも定義や議論の中で煩わしい問題が増えるのかもしれない. ならばこのタイミングて新たな記号として用意するのが妥当なのかもしれない.

2. **真理値は記号なのか？**
このテキストでは文記号の表現を構成するモノも, 真理値として使用するモノもどちらも初めに用意された「記号」という同じ種類のものである. 他のテキストだと真理値とは何と定めているかを, 勉強会運営時点で所持していたロジックの入門書などをまとめて眺めてみた結果をこれから記す. 文論理の記号としては真理値を定めていないもの, つまり文記号や論理記号と真理値を同じ種類のものである（このテキストのようにどちらも記号であるなどと言い切っている）としていないものとして, [30], [28], [29], [21], [25] があった. 細かく見ていくと [30] ではここでいう文論理の記号を記号とは呼ばず語彙と呼んでいる. そして真偽を表すものとして $1, 0$ を使うとしている. [28] でも真偽を表すものとして $1, 0$ を使っているが, ここでいう文記号を命題変数, それ以外の記号を論理記号と呼ぶ流儀で, 文論理の表現を構成するものは全て記号であるというこのテキストと異なる点が興味深い. [29],[21] ではこのテキストとほぼ同じ形で文論理の記号を記号として導入している. しかし特徴的なのは, 真偽を表すものとして $1, 0$ といった数学の記号ではなく, 日本語の漢字そのまま真, 偽を使っている点だろうか. ある種英語圏の人が $1, 0$ ではなく T, F を使うような感覚と似たようなものかもしれない. ただしこのテキストは真理値割り当てをこのテキストのように変数記号から真理値への関数であるというような数学的に厳密な定義をしていない（なんなら真理値割り当てという言葉の定義も明瞭でない）. そんな議論の進め方をするテキストだからこそ, とくに真理値が漢字であっても困らないのであろう. むしろそれによって日本人にとって分かりやすい部分もあるように思える. [25] では真理値とは記号であると書いている. そして単なる記号でもないと表すためか T, F ではなく $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ としている. ただここでいう文記号とは何らかの集合の要素であるとし, 記号とは捉えず命題変数と呼んでいる. 「文記号や論理記号と真理値を同じ種類のものであるとしていない」という共通点はあれど, それ以外の定義の仕方も様々なことが分かる. これはいま気になっていることがそこまで大きな問題でないことを表しているし, そのときの議論の進めやすさや, その人それぞれのキャラクター・教育的配慮の表れに過ぎないのかもしれない.
ちなみに私がこの時点で所持していた本の中で明確に「文記号や論理記号と真理値を同じ種類のものである」という議論の進め方をしているものはなかった. [19]

3. **真理値が 2 値でない論理**
テキストでは「このテキストでは 2 値論理だけを考える」としているが, 別の, つまりもっと真理値が多い論理についても言及されている. 例えば 3 値論理, 真理値が $\aleph_0$ 個の論理, さらには真理値の集合を単位区間 $[0, 1]$ や適当な空間とするものなどがある.

4. 3. ではテキストの書き方に合わせたが, 「式構成操作を**有限回**施した整式全体」などと言ってもよいと思われる. そうすると 0 回の操作をした（なにもしていない）, つまり文記号 1 文字だけの整式も $\bar{\mathcal{A}}$ に属することが明瞭になる. そうすると $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$ であり, $\mathcal{A} = \operatorname{dom} v \subseteq \operatorname{dom}(\bar{v}) = \bar{\mathcal{A}}$ となって, $v = \bar{v} \restriction \mathcal{A}$ と分かるから, v は $\bar{v}$ の $\mathcal{A}$ への制限であるし, $\bar{v}$ は v の拡大である. [20]

5. テキストにあるとおり, 条件 4-1. から 4-5. までは以下のような表で表すこともできる.

---

[19] 私は初めてこの本を読んだとき, 真理値を文論理の記号として扱うことに驚きました. それは単にそのような流儀を初めて見たからです. 使い方として真理値以外の記号は文論理の表現を構成するためのもので, 真理値はそれらを充足関係などで評価するためのものという印象がありました. しかしこれまで何度か意識してきた通り, これから何らかの公理系の上にこれから文論理を実装していこうしているならば, 例えば集合論の公理系から文論理の議論を展開しようとしているのならば, 文論理の定義を記述するためのモノも全て同じ集合になる（集合論の公理系で扱えるものは集合だけなのだから）から, もともとから特に身分差を付け辛いという点では, 真理値も同じ記号（の仲間）としてしまう方が分かりやすいのかもと思いました. そうなると 1 つ上の注意事項後半の事柄を意識する必要があるとも思います.

[20] テキストでは拡張と書いてありますが, 写像の拡張概念はこのテキストでは定義されているわけではありません. もちろん単なる日常会話として十分に理解はできるのだけれど, 私が拡大とよぶ概念を拡張とよぶ流儀もあるので, 言葉として使うならば定義しておくべきだと思いました. かなり揚げ足ぎみなツッコミではあるとは承知しつつ, そのセットとして語られそうな制限概念については定義していたので, なおさら書いた次第です.

α	β	$(\neg\alpha)$	$(\alpha\wedge\beta)$	$(\alpha\vee\beta)$	$(\alpha\to\beta)$	$(\alpha\leftrightarrow\beta)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Table 1.2: (E:p21 TABLE Ⅲ, K:p32 表 Ⅲ)

Example 1.2.2（E:p21 23, K:p32 34）.
整式 α を

$$((\,A\ \to\ (A_1\to A_6)\,)\ \leftrightarrow\ (\,(A_2\wedge A_1)\ \to\ A_6\,)\,)$$

とし, $\mathrm{dom}(v)=\{A_1,A_2,A_6\}$ な真理値割り当て v を, $v(A_1)=T,\ v(A_2)=T,\ v(A_6)=F$ で定めると, $\bar{v}(\alpha)=T$ である. ■

この例はテキストにて木を用いて解説されているし, とくに付け加えることもないので次の話題に移る.

Theorem 1.2.3（E:p23 THEOREM 12A, K:p34 定理 12A）.
集合 $\mathcal{A}\subseteq \mathrm{PVAR}$ へのどんな真理値割り当て v についても, Definition 1.2.1（36 ページ）の条件 4-0. から 4-5. までに合致する写像 $\bar{v}\colon \bar{\mathcal{A}}\to\{T,F\}$ がただひとつ存在する. ■

次の記法は今後便利に思えたので導入する.

Definition 1.2.4.
$\Sigma\subseteq\mathrm{WFF}$ に対して, その全ての要素である整式に含まれる文記号の集合を $\mathrm{PVAR}(\Sigma)$ で表す. またある $\alpha\in\mathrm{WFF}$ でもって $\Sigma=\{\alpha\}$ となっていた場合は, $\mathrm{PVAR}(\Sigma)=\mathrm{PVAR}(\{\alpha\})$ を単に $\mathrm{PVAR}(\alpha)$ と略記する. ■

例えば $\Sigma=\{\,(A_1\wedge A_2),(\neg A_2),A_3,(A_1\to A_9)\,\}$ だったとき, $\mathrm{PVAR}(\Sigma)=\{A_1,A_2,A_3,A_9\}$ となる. これを用いるとテキストよりは（記号は増えるものの）以下の定義の主張が少しは見やすくなるのではと考えた.

Definition 1.2.5（充足関係 (E:p23 24, K:p34 36)）.
整式の集合 Σ と整式 τ,σ に対して,

1. $\mathrm{PVAR}(\tau)\subseteq\mathrm{dom}(v)$ な真理値割り当て v に対して $\bar{v}(\tau)=T$ であるとき, v **satisfies** τ（v は τ を**充足する**）という.
2. $\mathrm{PVAR}(\Sigma)\cup\mathrm{PVAR}(\tau)$ を定義域として含むすべての真理値割り当てに対して, それが Σ のすべての要素を充足するならば τ をも充足するとき, Σ **tautologically implies** τ（Σ は τ を**トートロジー的に含意する**）といい, $\Sigma\models\tau$ で表す.
3. $\emptyset\models\tau$ であるとき, つまり $\mathrm{PVAR}(\tau)$ を定義域として含むどんな真理値割り当ても τ を充足するとき, τ は **tautology**（**トートロジー**）であるといい, 単に $\models\tau$ で表す.
4. Σ が一元集合であるとき, つまり $\{\sigma\}\models\tau$ であるとき単に $\sigma\models\tau$ と表すことにする.
   $\sigma\models\tau$ かつ $\tau\models\sigma$ であるとき, σ と τ は **tautologically equivalent**（**トートロジー的に同値**）であるといい, $\sigma\models\!\!\!=\!\!\!|\,\tau$ で表す. ■

Example 1.2.6（E:p23, K:p35 36）.
$A,B\in\mathrm{PVAR}$ とする.

1, Example 1.2.2（38 ページ）で挙げた整式 α と真理値割り当て v について, v は α を充足すると述べたが, それ以外のどの真理値割り当ても α を従属する. つまり α はトートロジーである.

2. $\{A,(\neg A)\}\models B$ である.

3. $\{A, (A \to B)\} \models B$ である. ■

Proof　テキストより少し詳しく解説・証明する.

1. 改めて, 整式 α は
$$(\ (\ A \ \to \ (A_1 \to A_6) \ ) \ \leftrightarrow \ (\ (A_2 \wedge A_1) \ \to \ A_6 \ ) \ )$$
となっていた. $\{A_1, A_2, A_6\} \subseteq \mathrm{dom}(v)$ な真理値割り当て v は, $v{\restriction}\{A_1, A_2, A_6\}$ を考えると, 以下の v_1 から v_8 のいずれかになるので,

	A_1	A_2	A_6
v_1	T	T	T
v_2	T	T	F
v_3	T	F	T
v_4	T	F	F
v_5	F	T	T
v_6	F	T	F
v_7	F	F	T
v_8	F	F	F

α がトートロジーであることを示すには v_1 から v_8 のいずれも α を充足することを確かめればよい. 1.2 節（40 ページ）を参考にして真理値表を書いて作業的に確かめることもできるが, ここではあえて真理値表を使わずに確かめてみる.
α_1 を $(A \to (A_1 \to A_6))$ と, α_2 を $((A_2 \wedge A_1) \to A_6)$ とおくと, α は $(\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$ で表せる. もし真理値割り当て v が $\bar{v}(\alpha) = T$ ならば $\bar{v}(\alpha_1) = \bar{v}(\alpha_2)$ でなくてはならない.
いまある真理値割り当て v が $v(A_2) = F$ ならば A_1, A_6 の値に関わらず $\bar{v}(\alpha_1) = T = \bar{v}(\alpha_2)$ となることが分かるので, v_3, v_4, v_7, v_8 は OK.
つぎに $v(A_2) = T$ とすると, $\bar{v}(\alpha_1) = T$ とするには $v(A_1) = F$ か, $v(A_1) = T$ かつ $v(A_6) = T$ とすればよい. $v(A_1) = F$ な v は $\bar{v}(\alpha_2) = T$ であるし, $v(A_1) = T$ かつ $v(A_6) = T$ な v も $\bar{v}(\alpha_2) = T$ である. よって $v(A_1) = F$ な v_5, v_6 も, $v(A_1) = T$ かつ $v(A_6) = T$ な v_1 も OK.
残るは v_2 だが, これは Example 1.2.2（38 ページ）で確かめているので OK.

2. 示すべき $\{A, (\neg A)\} \models B$ を定義に戻って論理式も使って書くと, $\{A, B\} \subseteq \mathrm{dom}(v)$ な任意の真理値割り当て v に対して
$$\forall \varphi \in \{A, (\neg A)\} \big(\ \bar{v}(\varphi) = T \ \to \ \bar{v}(B) = T \ \big) \tag{†}$$
となる. そして $\{A, B\}$ に対するどのような真理値割り当ても, $\{A, (\neg A)\}$ の全ての要素を同時に充足することはない, つまり式 (†) の前件は常に成立しないので, v が B を充足するかどうかに関係なく, $\{A, (\neg A)\} \models B$ である.

3. $A, (A \to B)$ のどちらも充足する真理値割り当て v は, $v(A) = v(B) = T$ となるものだけである.

> ∵ $\models$ の左右に現れる整式に含まれる文記号は A, B だけなので, A, B に関する割り当てだけ, つまり 4 種類だけに注目すればよい. そのすべてについて真理値表などで確かめてもよいが, 議論だけで確かめると, まず $\models$ の左の集合に A という整式があるので, 探すべき割り当て v は $v(A) = T$ でなくてはならない. そして $v(A) = T$ かつ $\bar{v}((A \to B)) = T$ とするには $v(B) = T$ でなくてはならない. そして他の値の組み合わせはどれも $A, (A \to B)$ を同時に充足することはない.

そしてそんな v はすでに $v(B) = T$ であるから, $\{A, (A \to B)\} \models B$ である. □

ここで以下の定理が紹介されていますが, テキストにある通りこの定理の証明は 1.7 節（42 ページ）にて出てきます.

Theorem 1.2.7（コンパクト性定理 (E:p24 COMPACTNESS THEOREM, K:p36 コンパクト性定理)）.
Σ は無限個の整式からなる集合で, いかなる Σ の有限な部分集合 Σ_0 についても, Σ_0 のすべての要素を同時に充足する真理値割り当てが存在するとする．このとき, Σ のすべての要素を同時に充足する真理値割り当てが存在する． ■

真理値表

主要なトートロジーの一覧

1. $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ の結合律と交換律.[21] ここでは $\wedge$ のみ記す
   associative laws（結合律）：$(\ ((A \wedge B) \wedge C) \ \leftrightarrow\ (A \wedge (B \wedge C))\ )$.
   commutative laws（交換律）：$(\ (A \wedge B) \ \leftrightarrow\ (B \wedge A)\ )$.

2. distributive laws（分配律）

$$(\ (A \wedge (B \vee C)) \ \leftrightarrow\ ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))\ ).$$
$$(\ (A \vee (B \wedge C)) \ \leftrightarrow\ ((A \vee B) \wedge (A \vee C))\ ).$$

3. 否定

   $(\ (\neg(\neg A)) \ \leftrightarrow\ A\ )$.

   $(\ (\neg(A \to B)) \ \leftrightarrow\ (A \wedge (\neg B))\ )$.

   $(\ (\neg(A \leftrightarrow B))\ ((A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B))\ \ )$.

   de Morgan' laws（ド・モルガンの法則）

$$(\ (\neg(A \wedge B)) \ \leftrightarrow\ ((\neg A) \vee (\neg B))\ ).$$
$$(\ (\neg(A \vee B)) \ \leftrightarrow\ ((\neg A) \wedge (\neg B))\ ).$$

4. その他

   excluded middle（排中律）：$(A \vee (\neg A))$.

   contradiction（矛盾律）：$(\neg(A \wedge (\neg A)))$.

   対偶：$(\ (A \to B) \ \leftrightarrow\ ((\neg B) \to (\neg A))\ )$.

   移出：$(\ ((A \wedge B) \to C) \ \leftrightarrow\ (A \to (B \to C))\ )$.

演習問題

Exercise 1.2.8（E:p27 1., K:p41 1.）.
■

Exercise 1.2.9（E:p27 2., K:p41 2.）.
■

Exercise 1.2.10（E:p27 3., K:p41 3.）.
■

[21] テキストでは結合律と交換律と書いてあるだけでした．いくらある程度数学に慣れている学部 3 年から 4 年の学生向け（このことは原著のまえがきに書いてあります）とはいえ, 一例だけでも書いてあげた方が丁寧かなと思い, 追記しました.

Exercise 1.2.11（E:p27 4., K:p42 4.）.

■

Exercise 1.2.12（E:p27 5., K:p42 5.）.

■

Exercise 1.2.13（E:p27 6., K:p42 6.）.

■

Exercise 1.2.14（E:p28 7., K:p42 7.）.

■

Exercise 1.2.15（E:p28 8., K:p43 8.）.

■

Exercise 1.2.16（E:p28 9., K:p43 9.）.

■

Exercise 1.2.17（E:p28 10., K:p43 10.）.

■

Exercise 1.2.18（E:p28 11., K:p44 11.）.

■

Exercise 1.2.19（E:p29 12., K:p44 12.）.

■

Exercise 1.2.20（E:p29 13., K:p44 13.）.

■

Exercise 1.2.21（E:p29 14., K:p45 14.）.

■

Exercise 1.2.22（E:p29 15., K:p45 15.）.

■

1.3 構文解析のアルゴリズム

構文解析のアルゴリズム

Lemma 1.3.1（E:p30 LEMMA 13A, K:p46 補題 13A）.
どの整式もそれに含まれる右括弧・左括弧の個数は同じである. ■

Lemma 1.3.2（E:p30 LEMMA 13B, K:p46 補題 13A）.

■

ポーランド記法

括弧の省略

演習問題

Exercise 1.3.3（E:p33 1., K:p51 1.）.

■

Exercise 1.3.4（E:p33 2., K:p52 2.）.

■

Exercise 1.3.5（E:p34 3., K:p52 3.）.

■

Exercise 1.3.6（E:p34 4., K:p52 4.）.

■

Exercise 1.3.7（E:p34 5., K:p52 5.）.

■

Exercise 1.3.8（E:p34 6., K:p52 6.）.

■

Exercise 1.3.9（E:p34 7., K:p52 7.）.

■

1.4　帰納法と再帰

帰納法

再帰

演習問題

1.5　文結合記号

演習問題

1.6　スイッチング回路

演習問題

1.7　コンパクト性と実効性

帰納法

再帰

演習問題

第 II 部

基礎固めノート

色々な基礎的なことをまとめるノートです．また他のノートの参照先としても機能させるつもりです.

第2章　基礎数学

ここではある程度テキストなどでまとまっている, 学部レベルの分野を勉強したものをまとめています.

2.0　数学をするための準備

aaaaa

2.1　素朴集合論

ここでは（素朴）集合論の範囲内の知識や用語を整理します. 基本的には [19] や [18] を参考にしています.

2.1.1　集合の基礎

2.1.2　関係

あとでまとめるけど今は必要なものだけ.

Definition 2.1.1（帰納的半順序集合と Zorn の補題）.
半順序集合 $(X, \leq)$（つまり反射律, 推移律, 反対称律を満たす）に対して

- $(X, \leq)$ が**帰納的** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 全ての全順序部分集合（上記 3 つに加えて三分律が成立）が上界をもつ
- $a \in X$ が $(X, \leq)$ において**極大** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\neg\exists x \in X(\ a \leq x\ \wedge a \neq x\ )$

Zorn の補題とは「帰納的半順序集合は少なくとも 1 つの極大元をもつ」という主張のこと. ■

2.1.3　写像・関数

Definition 2.1.2.
集合 X, Y に対して, 「f が X から Y への**写像**（**mapping** または **map**）」であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことをいう.

(f1) $f\ \subseteq X \times Y$.

(f2) $\forall x \in X\ \exists! y \in Y \big(\ \langle x, y\rangle \in f\ \big)$.

「f が X から Y への写像」であることを $f : X \to Y$ で表す.
$f : X \to Y$ のとき

- X を写像 f の**定義域**（**domain**）, または**始域**（こちらも **domain**）と呼び, $\mathrm{dom}(f)$ で表す.
- Y を写像 f の**値域**（**range**）, または**終域**（**codomain**）と呼び, $\mathrm{ran}(f)$ で表す. ■

文献によっては（どの文献かは忘れた）, $f : X \to Y$ で値域である Y が $\mathbb{N}$ や $\mathbb{R}$ といった数の集合であるときに**関数**（**function**）と呼んで, 写像と関数を使い分けたりするが, このノートでは特に使い分けせず, どちらも混ぜて使います（でも関数が多いと思う）.

上の順序対での写像の定義に, 普段よく使う記法を適用します.

<u>**Notation**</u> **2.1.3.**
$f : X \to Y$ であるとき,「$\langle x, y\rangle \in f$」を「$f(x) = y$」で表し「$f$ は x を y へ写す」や「x の f による値は y」と言ったりする. $f(x)$ を「x の f による値」と呼ぶ.
この記法を用いれば写像の定義 (f2) は以下のように書き換えられる.

$$\forall x \in X \ \exists! y\big(\ f(x) = y\ \big)$$

つまり定義域の任意の要素は一意的な値域の要素に対応していると言える. ■

ここでは写像を（順序対の）集合として定義したため, 集合に関する記法を使って議論することができます. それを踏まえて, 様々な用語を定めておきます.

<u>**Definition**</u> **2.1.4.**
2 つの関数 f, g に対して, この 2 つを単なる順序対の集合とみて, $f \subseteq g$ が成立しているとき f を g の**部分関数**, g を f の**拡大**と呼ぶ.
さらに集合として f と g が等しいとき, つまり $f \subseteq g$ かつ $g \subseteq f$ なとき（写像として）f と g は**等しい**といい, 集合と同じで $f = g$ で表す.
定義域や値域にまで踏み込んだ定義が続きます.

(1) 関数 $f : X \to Y$ と $A \subseteq X$ に対し $f{\restriction}A = (A \times Y) \cap f$ とおく. つまり $f{\restriction}A$ は f の対応規則はそのままに定義域を A へ狭めた A から Y への関数のことです. $f{\restriction}A$ は関数 f の A への**制限**と呼びます.
つまり $f{\restriction}A$ は f の部分関数, f は $f{\restriction}A$ の拡大といえます.

(2) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ な 2 つの関数 f, g があったとき, $f \bigtriangleup g \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq g(x)\}$.

(3) ${}^{X}Y$ は $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$ なる関数全体の集合を表します. つまり ${}^{X}Y \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : X \to Y\}$. ■

写像が集合として表現できれば, 2 つの写像に集合演算を適用することができます. しかしその演算結果もまた写像になるかどうかはわかりません. 例えば $f(x) \neq g(x)$ な $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ が存在したときです. f, g の定義域が互いに素なとき, つまり $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \neq \emptyset$ なとき, $f \cup g$ は $\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)$ から $\mathrm{ran}(f) \cup \mathrm{ran}(g)$ への関数になります. つまり対応規則が

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathrm{dom}(f) \\ g(x) & x \in \mathrm{dom}(g) \end{cases}$$

な関数です.

2.1.4 集合族

2.1.5 色々な用語

様々な分野で現れる用語をまとめておきます.

<u>**Definition**</u> **2.1.5.**
集合 X と X の部分集合の族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が X の**分割**（**partition**）であるとは以下の 3 つの条件を満たすことをいう.

- $\emptyset \notin \{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.
- $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda(\lambda \neq \lambda' \to Y_\lambda \cap Y_{\lambda'} = \emptyset)$.
- $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$. ■

<u>**Definition**</u> **2.1.6.**
集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が**有限交叉性**（**finite intersection property**）をもつ $\overset{\text{def}}{\iff} \forall L \in [\Lambda]^{<\omega}\big(\ \bigcap_{i \in L} X_i \neq \emptyset\ \big)$. ■

compact 位相空間について述べる時のための定義を用意します.

<u>Definition</u> 2.1.7.
集合 X, $A \subseteq X$, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して

- $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の**被覆**（**covering**） $\overset{\text{def}}{\iff} A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.
- A の被覆 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\Lambda' \subseteq \Lambda$ に対して, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ もまた A の被覆のとき $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ を $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**部分被覆**という. とくに $|\Lambda'| < \omega$ のとき, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ は $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**有限部分被覆**とよぶ. ■

2.1.6　選択公理と直積の一般化

有限個の集合の直積を一般化する.

<u>Definition</u> 2.1.8.
Λ を添え字集合とした集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積 $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を以下のように定義する.

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{\ f : \lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda\big(\ f(\lambda) \in X_\lambda\ \big)\ \}. \quad ■$$

$\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の要素は**選択関数**と呼びます. $\forall\lambda \in \Lambda(\ X_\lambda \neq \emptyset\ )$ であれば $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ も空にならないように思えますが, それについては選択公理で保証しなくてはいけません. また $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が空でないという主張は選択公理と同値になります.

<u>Lemma</u> 2.1.9.
集合族 $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ はどの要素も空でないとする. つまり $\forall\lambda \in \Lambda(A_\lambda \neq \emptyset)$. このとき以下は同値.

(1) （選択公理）$\mathcal{A}$ に選択関数が存在する.

(2) （直積定理）直積集合 $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が空でない. ■

<u>Proof</u>　(1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathcal{A}$ 上の選択関数を $f_{AC} : \mathcal{A} \to \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とおく. つまり $\forall\lambda \in \Lambda(f_{AC}(A_\lambda) \in A_\lambda)$ が成立しています. $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{\ f : \mathcal{A} \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda(\ f(A_\lambda) \in A_\lambda\ )\}$ という定義から $f_{AC} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1)
$\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ よりある $f \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ が存在するが, これは $\mathcal{A}$ 上の選択関数です. □

よって以降は選択公理は常に仮定します. ですが, その公理を明記した場合には明記するようにします.

<u>Definition</u> 2.1.10.
Λ を添え字集合とした集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とその直積 $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ があったとき, $\lambda \in \Lambda$ に対して, $p_\lambda : \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を $p_\lambda(f) = f(\lambda)$ で定義して, p_λ を $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の λ 成分への射影と呼ぶ. ■

簡単に分かることを示しておきます.

<u>Lemma</u> 2.1.11.
$\forall\lambda \in \Lambda(\ X_\lambda \neq \emptyset\ )$ ならば, どの射影 p_λ は全射. ■

<u>**Proof**</u>　選択公理によって $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ です．よって 1 つ $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ をとり固定します．全射であることを示すため, 任意に $x_\lambda \in X_\lambda$ をとります．関数 $g : \lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

$$g \;=\; \{\langle\lambda, x_\lambda\rangle\} \;\cup\; f \restriction (\Lambda \setminus \{\lambda\})$$

で定義すると, $g \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で, $p_\lambda(g) = x_\lambda$ です．そんな g の存在から p_λ は全射です． □

2.2 位相空間論

この節では位相空間の基本事項をまとめていきます．基本的には [18] を（かなり）参考にしています．ゆえにここに書いている証明は, そのノートを自分なりに整理したものになっています．

2.2.1 距離空間入門事項

ここでは距離空間に関する定義をまとめておく．

<u>**Definition**</u> **2.2.1.**
集合 X に対して,$d : X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の**距離関数（metric）**であるとは, 以下の 3 条件を満たすことをいう．

(d1) (i) $\forall x, y \in X \big(\ d(x,y) \geq 0\ \big)$
　　(ii) $\forall x, y \in X \big(\ d(x,y) = 0 \ \leftrightarrow\ x = y\ \big)$

(d1) $\forall x, y \in X \big(\ d(x,y) = d(y,x)\ \big)$

(d1) $\forall x, y, z \in X \big(\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\ \big)$

d が X 上の距離関数のとき, 組 (X, d) を**距離空間（metric space）**という．d が文脈から明らかならば単に「距離空間 X」と呼ぶ． ■

続いて部分空間について定義しておく．

<u>**Definition**</u> **2.2.2.**
距離空間 (X, d) と $A \subseteq X$ に対して, 組 $(A, d{\restriction}A \times A)$ を (X, d) の**部分距離空間（metric subspace）**, あるいは単に**部分空間**という． ■

続いて距離空間の構造を調べるための写像を定義します．

<u>**Definition**</u> **2.2.3.**
距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) に対して,

- $f : X \to Y$ が**距離を保つ**, あるいは**等長写像（isometry）**
  $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, x' \in X \big(\ d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))\ \big)$
- X と Y が距離空間として**等長（isometric）**, あるいは**同型（isomorphic）**であるとは, X から Y への全射等長写像が存在することをいう． ■

通常「同型」とは構造（この場合は距離）が同じで, 全単射写像が存在する場合に使う言葉ですが, 上記の定義では全射であることしか要求していません．これは等長写像が常に単射であることが示せるからです．それを含めた細かな主張をまとめておきます．

<u>**Proposition**</u> **2.2.4.**
距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) と $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ に対して

(1) f が等長写像ならば単射.

(2) f, g が等長写像ならば, その合成 $g \circ f : X \to Z$ も等長写像

(3) f が全射等長写像ならば, その逆写像も等長写像

(4) f が全射等長写像ならば, X と $f[X]$ は距離空間として等長, つまり同型.

(5) X と Y が同型ならば, 等長写像 $f' : X \to Y,\ g' : Y \to Z$ が存在して $g' \circ f' = id_X,\ f' \circ g' = id_Y$ が成立する.

(6) $A \subseteq X$ に対して, 包含写像 $i_A : X \to X$ は (X, d_X) から部分空間 $(A, d{\restriction}A \times A)$ への等長写像. ■

Proof

(1) $f(x) = f(x') \land x \neq x'$ なる $x, x' \in X$ が存在したとします. x' より $d(x, x') > 0$,$f(x) = f(x')$ より $d_Y(f(x), f(x')) = 0$ ですが, これは f が等長写像であることに矛盾.

(2) 任意に $x, x' \in X$ をとります. $d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d_Z(\ g(f(x)), g(f(x'))\ )$ で, g が等長写像であることから $d_Z(\ g(f(x)), g(f(x'))\ ) = d_Y(\ f(x), f(x')\ )$. そして f が等長写像であることから $d_Y(\ f(x), f(x')\ ) = d_X(x, x')$. まとめると $d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d_X(x, x')$ より $g \circ f$ は等長写像.

(3) (1) より f は単射でもあるので,f は全単射より逆写像 f^{-1} が存在. ある $y, y' \in Y$ に対して $d_Y(y, y') = d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y'))$ でなかったとします. f は等長写像なので $d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = d_Y(\ f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(x'))\ ) = d_Y(y, y')$ となって矛盾.

(4) $f' : X \to f[X]$ を $f'(x) = f(x)$ とすれば, f' は X から $f[X]$ への等長写像で,f' はその作り方から全射. そんな全射等長写像の存在から X と $f[X]$ は同型です.

(5) X と Y が同型なので, その間の等長写像を f とおく. (1) より f は単射, X と Y が同型なので f は全射, 故に逆写像 f^{-1} が存在する. (3) より f^{-1} も等長写像で, f^{-1} が逆写像であることから $f^{-1} \circ f = id_X,\ f \circ f^{-1} = id_Y$ です. 等長写像 $f' : X \to Y,\ g' : Y \to Z$ が存在して $g' \circ f' = id_X,\ f' \circ g' = id_Y$ が成立する.

(6) 包含写像の定義と, 恒等写像が明らかに等長写像であることから, ここまでの議論より明らか. □

Definition 2.2.5.
距離空間 (X, d),$x \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して

- $U_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \{\ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\ \}$ として, これを x を中心とする半径 ε の**開球（open ball）**, **開円盤（open disc）**あるいは**ε 近傍**と呼ぶ.
- $S_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \{\ y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\ \}$ として, これを x を中心とする半径 ε の**球面（sphere）**と呼ぶ. ■

Definition 2.2.6.
距離空間 (X, d) と空でない $A \subseteq X$ に対して, $\delta(A) \overset{\text{def}}{=} \sup\{\ d(x, y) \mid x, y \in A\ \}$ として, これを A の**直径（diameter）**と呼ぶ. 必要ならば $\delta(\emptyset) = -\infty$ と約束する.
$\delta(A) < +\infty$ のとき,A は**有界（bounded）**という. ■

Proposition 2.2.7.
距離空間 (X, d) と $A, B \subseteq X$,A は空でないとするとき

(1) $A \subseteq B$ ならば $\delta(A) \leq \delta(B)$.

(2) A が有界 $\leftrightarrow \forall x \in X \exists r > 0\big(\ A \subseteq U_r(x)\ \big)$

(3) A が有界 $\leftrightarrow \exists x \in X \exists r > 0\big(\ A \subseteq U_r(x)\ \big)$

(4) $A \in [X]^{<\omega}$ ならば A は有界.

(5) $\forall x \in X \forall r > 0\big(\ \delta(U_r(x)) \leq 2r\ \big)$ ■

Proof

(1) 実数の 2 つの部分集合 R, R' に対して $R \subseteq R'$ ならば $\sup R \leq \sup R'$ です．$A \subseteq B$ だから $\{\ d(x,y) \mid x,y \in A\ \} \subseteq \{\ d(x,y) \mid x,y \in B\ \}$ なので, 両方の sup をとれば $\delta(A) \leq \delta(B)$ です.

(2) $(\rightarrow)$ A が有界なので, ある $s \in \mathbb{R}$ でもって $\delta(A) = s$ です．任意にとった x に対して，もう 1 つ $a \in A$ をとっておく．$r = s + d(x,a) + 1$ とおくと, $A \subseteq u_r(x)$ です．なぜならば任意に $b \in A$ をとると

$$\begin{aligned} d(x,b) &\leq d(x,a) + d(a,b) && \text{(d3) より} \\ &\leq d(x,a) + s \\ &\leq r \end{aligned}$$

つまり $b \in U_r(x)$ なので,$A \subseteq U_r(x)$ です.

$(\leftarrow)$ 任意に $x \in X$ をとり, それに対して存在する $r > 0$ を固定します．$A \subseteq U_r(x)$ より (1) より $\delta(A) \leq \delta(U_r(x))$, そしてその定義から $\delta(U_r(x)) \leq 2r$, つまり $\delta(A) \leq 2r < +\infty$ より A は有界です.

(3) (2) より明らか.

(4) A は有限なので, 集合 $\{\ d(x,y) \mid x,y \in A\ \}$ も有限です．するとこれは実数の有限集合なので最大元が存在し, 故に有界です.

(5) 任意の $y, z \in U_r(x)$ に対して

$$d(y,z) \ \leq\ d(y,x) + d(x,z) \ <\ r + r \ =\ 2r$$

より, その定義から $\delta(U_r(x)) \leq 2r$. □

(5) についてですが, これは距離空間やその r の取り方によって等号が成立したりしなかったりします．例えば n 次元ユークリッド空間（Example 2.2.10）ならば, $\delta(U_r(x)) = 2r$（Proposition 2.2.11(8)）となり, 離散距離空間（Example 2.2.12）ならば, ある r に対して $\delta(U_r(x)) < 2r$（Proposition 2.2.13(3)）となります.

Definition 2.2.8.
距離空間 (X,d) と空でない $A, B \subseteq X$ に対して, $d(A,B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\ d(a,b) \mid a \in A \land b \in B\ \}$ として, これを A と B の**距離**と呼ぶ.
とくに A が一元集合のとき $A = \{a\}$ とおくならば, $d(\{a\},B)$ を単に $d(a,B)$ と書いて,a と B の距離という．つまり $d(a,B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\ d(a,b)$
$B\ \}$ ■

Proposition 2.2.9.
距離空間 (X,d) と空でない $A, B \subseteq X$ に対して,$A \cap B \neq \emptyset$ ならば $d(A,B) = 0$. ■

Proof $A \cap B \neq \emptyset$ なので $x \in A \cap B$ を 1 つ取れば, $d(x,x) \in \{\ d(a,b) \mid a \in A \land b \in B\ \}$, そして $d(x,x) = 0$ より,$d(A,B)$ の定義から $d(A,B) = 0$ です. □

しかしこの命題の逆は一般的には成立しません．Proposition 2.2.11(7) を見てください.

2.2.2　距離空間の例

ここでは 2.2.1 節の用語を使いながら, 距離空間の例をいくつか挙げていきます.

Example 2.2.10.
$n \in \omega$, $\mathbb{R}^n = \{\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \}$,$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

とおくと, d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.
$(\mathbb{R}^n, d)$ は ***n* 次元ユークリッド空間**（**n-dimensional Euclidian space**）と呼ばれる. ■

<u>**Proof**</u>　距離空間の 3 条件を d が満たすか確かめる.

(d1)　(i) 各 $(x_i - y_i)^2$ は 0 以上, 非負なので, 故に $d(x, y)$ もいかなる $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対しても $d(x, y) \geq 0$ である.

(ii) ある $x, y \in \mathbb{R}^n$ があって $d(x, y) = 0$ とすると, 各 i に対して

$$0 \ \leq \ (x_i - y_i)^2 \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \ = 0$$

より $(x_i - y_i)^2 = 0$, つまり $x_i - y_i = 0$ だから $x_i = y_i$. これが各 i について成立し, ゆえに $x = y$.

(d2) 各 i に対して $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ だから, d の定義より明らか.

(d3) 任意に $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ をとって, z も $z = (z_1, \cdots, z_n)$ とおく. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, つまり $d(x, y) + d(y, z) - d(x, z) \geq 0$ を示すことが目標になりますが, (d1) より $d(x, z), d(x, y), d(y, z)$ は非負なので, $\left(\ d(x, y) + d(y.z)\ \right)^2 - \left(\ d(x, z)\ \right)^2 \geq 0$ を示せば, 目標の証明になっている. $a_i = x_i - y_i$,$b_i = y_i - z_i$ とおくと, $x_i - z_i = a_i + b_i$ となる. すると

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\ ,\ d(y.z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}\ ,\ d(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2}$$

となって

$$\begin{aligned}
&\left(\ d(x, y) + d(y.z)\ \right)^2 - \left(\ d(x, z)\ \right)^2 \\
&= \left(\ d(x, y)^2 + 2d(x, y)d(y, z) + d(y, z)^2\ \right) - \left(\ d(x, z)\ \right)^2 \\
&= \left(\ \textstyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \right) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \\
&= \left(\ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \right) - \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2) \\
&= \ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 - \left(\ \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \right) \\
&= \ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} \ - \ 2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \ = \ 2\left(\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} \ - \ \sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\ \right)
\end{aligned}$$

より,$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} \ - \ \sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \ \geq \ 0$ を示す. そのために

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)^2 \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\right)$$

を示します. 上記の式は **Schwarz の不等式**（の別表現）と呼ばれています.
$\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 = 0$ ならば, 全ての b_i が 0 だと分かり, 両辺 0 になって成立.

$\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \neq 0$ とする．どの b_i^2 も非負なので，$\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 > 0$ です．任意に $t \in \mathbb{R}$ をとり，$\sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)^2$ を考えるとこれも非負，そして

$$0 \ \le\ \sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)^2 \ =\ \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2t\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) + t^2\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2$$

で，$\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 > 0$ より，これを t を変数とした不等式とすると，その判別式は

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right) \ -\ 4\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\right) \ \le 0$$

つまり

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right) \ -\ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\right) \ \le 0$$

よって，$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)^2 \ \le\ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\right)$ が証明できた．□

この空間について前節の用語を振り返ります．

Proposition 2.2.11.
1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d)$ と $x, y \in \mathbb{R}$,$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$

(2) $U_\varepsilon(x) \ =\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

(3) $S_\varepsilon(x) \ =\ \{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}$

(4) 何らかの $r \in \mathbb{R}$ に対して，$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x_r$,$g(x) = x - r$ とすれば，f, g は 1 次元ユークリッド空間から自身への等長写像になっている．

(5) $d{\restriction}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ や $d{\restriction}\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ 上の距離関数となり，この距離により $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ は 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分距離空間になる．

2 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ と $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$（$\mathbb{R}$ の要素を (x, y) と書くと区間に見えるので，ここでは $\langle x, y\rangle$ と書くことにした），$\varepsilon > 0$ に対して

(6) $U_\varepsilon(\langle x, y\rangle) \ =\ \{\ \langle x', y'\rangle \mid (x'-x)^2 + (y'-y)^2 < \varepsilon^2\ \}$

(7) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を $A = \{\langle 0, x\rangle | x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{\langle x, \frac{1}{x}\rangle | x \in \mathbb{R}\}$ とおくと，$A \cap B = \emptyset$ かつ $d(A, B) = 0$ が成立．

n 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ と $x \in \mathbb{R}^n$,$r > 0$ に対して

(8) $\delta(U_r(x)) = 2r$. ■

Example 2.2.12.
集合 X に対して,$d : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) \ =\ \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

で定めると，d は X 上の距離関数で，距離空間 (X, d) は**離散距離空間**（**discrete metric space**）と呼ぶ．■

Proof (d1), (d2) はその定義より明らか．(d3) に関しては任意にとった 3 点 $x, y, z \in X$ を，$x = y \wedge y = z$, $x \neq y \wedge y = z, \cdots$ など場合分けすれば，その全てにおいて成立することが確かめられる．□

Proposition 2.2.13.
離散距離空間 (X, d) と $x \in X$,$\varepsilon > 0$ に対して

(1) $U_\varepsilon(x) = \begin{cases} \{x\} & \varepsilon \leq 1 \\ X & \varepsilon > 1 \end{cases}$

(2) $S_\varepsilon(x) = \begin{cases} \emptyset & \varepsilon \neq 1 \\ X \setminus \{x\} & \varepsilon = 1 \end{cases}$

(3) $r \leq 1$ のとき, $\delta(U_r(x)) = 0$, つまり $\delta(U_r(x)) < 2r$. ■

2.2.3 位相空間の定義と閉集合

位相空間を以下のように定義する.

Definition 2.2.14.
空でない集合 X に対して, そのべき集合の部分集合 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X 上の**位相**（**topology**）であるとは, 以下の 3 条件をみたすことである.

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\ O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\ )$.

(O3) $\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}(\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}\ )$.

X と X 上の位相 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**（**topological space**）という.
$(X, \mathcal{O})$ が位相空間であるとき, $\mathcal{O}$ の要素を（その位相空間の）**開集合**（**open set**）という. ■

また位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における $\mathcal{O}$ のことを位相ではなく, その空間の**開集合系**（**system of open sets**）とよぶこともある.

ある集合に位相を入れるとか, 位相を定めるというのは, 上の 3 条件をみたす集合たちを定めること, つまり開集合全体を定めるという意味になる.
位相を入れられた集合, つまり $(X, \mathcal{O})$ における X のことを, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の**台集合**（**underlying set**）と呼ぶこともある[1]
.
位相空間によっては開集合はなんであるかを提示しにくい場合もあるそのために位相の定め方は他にもいくつかある.

開集合の双対概念として閉集合がある.

Definition 2.2.15.
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, $F \subseteq X$ が**閉集合**（**closed set**）であるとは, $X \setminus F$ が X の開集合, つまり $X \setminus F \in \mathcal{O}$ となることである.
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合全体の集合をその位相空間の**閉集合系**（**system of closed sets**）とよび, $\mathcal{F}$ や $\mathcal{C}$ などで表す[2] . ■

閉集合が開集合の双対概念である由縁は以下のような開集合と似た（対照的な）性質を持つことにある.

Proposition 2.2.16.
$\mathcal{F}$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合系とするとき, $\mathcal{F}$ は以下の 3 つの性質をみたす.

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.

(F2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\ F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}\ )$.

(F3) $\forall \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}(\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}\ )$. ■

Proof 証明は省略する. □

[1] 台集合とは Wikipedia の「数学的構造」[8] によると, (何の構造も持たない) 単なる「はだか」の集合という意味で使い, とくにその構造は位相でなくても使うことができる. 個人的には便利な言葉だと思うので以降も使っていく.
[2] ここらへんはテキストによっても変わるので, 自分もその時々の記号の使われ具合によって変えることにする.

集合 X に位相を定めるとき, 開集合が何かを定めるのではなく, 閉集合とは何かを定めた上でその補集合全体を開集合と定める方法もある．これは Definition 2.2.14（55 ページ）の下の文章にも書いた, 開集合を直接定める以外の位相を定める方法の 1 つである．これは以下のような定理を示すことで分かる．

Theorem 2.2.17.
集合 X に対して $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が Proposition 2.2.16（55 ページ）の (F1)〜(F3) をみたしているとする．このとき $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を

$$\mathcal{O} \ = \ \{ \ O \subseteq X \mid X \setminus O \in \mathcal{F} \ \}$$

で定めると,

(1) $\mathcal{O}$ は X の位相となり,

(2) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{O}$ の閉集合系になっている.

(3) また位相空間の開集合系から定めた位相はもとの位相と一致する. ■

Proof (1) と (2) の証明は省略する.
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ とその閉集合系 $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \{ \ O \subseteq X \mid X \setminus O \in \mathcal{F} \ \}$ とおく．証明すべきことは $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ である.
$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ を示すため任意に $O \in \mathcal{O}$ をとる．$F = X \setminus O$ とおくと, $X \setminus F = X \setminus (X \setminus O) = O$ より $X \setminus F \in \mathcal{O}$, つまり F は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合より $F \in \mathcal{F}$. すると $X \setminus O = F \in \mathcal{F}$ より $O \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.
$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{O}$ も同様に示せるので省略する. □

2.2.4 開基と準基

Definition 2.2.18.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**開基**（**open base**）であるとは, 任意の開集合が $\mathcal{B}$ に属する集合の和集合で表現できるときをいう．論理式で書くと $\forall O \in \mathcal{O} \exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B} \big(\ O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \ \big)$ です. ■

Definition 2.2.19.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間が**第二可算公理**（**second axiom of countability**）を満たすとは, $(X, \mathcal{O})$ に高々可算な開基が存在するときをいう. ■

Definition 2.2.20.
集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{G}$ が生成する位相とは, $\mathcal{G}$ を含む位相全ての共通部分, すなわち $\mathcal{G}$ の元が全て開集合になるような最弱の位相のことをいい, $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ で表す. ■

Definition 2.2.21.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**準基**（**sub base**）であるとは, $\mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の開基になること, つまり $\{ \ \bigcap_{i \in [n]} B_i \mid \{B_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{B} \ \}$ が $\mathcal{O}$ が開基になっているということです. ■

$\mathcal{B}$ の 0 個の元の共通部分は X であると決めておきます.
ある集合族で生成される位相は, どんな集合が開集合になっているか分かりにくい．以下の補題で少しは分かりやすくなると思います.

Lemma 2.2.22.
集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{G}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ の準基になっている．つまり $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ における開集合とは,「$\mathcal{G}$ の元の有限個の共通部分」たちの和集合で表せます. ■

Proof $\mathcal{G}$ の有限個の元の共通部分として表せる集合全体を $\hat{\mathcal{G}}$ と表す, つまり

$$\hat{\mathcal{G}} \ = \ \{ \ \bigcap_{i \in [n]} G_i \mid \{G_i\}_{i \in n} \subseteq \mathcal{G} \ \}$$

です．さらに $\hat{\mathcal{G}}$ の元の和集合全体として表せる集合全体を $\mathcal{O}$ で表す, つまり

$$\hat{\mathcal{O}} \;=\; \{\; \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \mid \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \hat{\mathcal{G}} \;\}$$

示すべきをここまでの定義を使って書けば $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{G})$ です．

- $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$
  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$ で,$\mathcal{O}(\mathcal{G})$ は定義から位相です．すると位相は, 有限共通部分で閉じているから $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$, そしてそれらの和集合で閉じているから $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{G})$ です．

- $\mathcal{O}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{O}$
  その定義から $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}$ なので, $\mathcal{O}$ が位相であることを示せば OK です．なぜならば $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$ を含む最小の位相だからです．

  - $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
    $\emptyset$ は $\hat{\mathcal{O}}$ の 0 個の元の和集合として表現できます．X は $\mathcal{B}$ の 0 個の元の共通部分として $\hat{\mathcal{O}}$ に属し, それの 1 つの和集合として $\mathcal{O}$ に属します．
  - 有限共通部分で閉じること
    任意に $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ をとると，$\{O^1_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$，$\{O^2_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$ があって，$O_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_i} O^i_\lambda$（$i = 1, 2$）です．$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda_1\times\Lambda_2} O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}$ で, $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ とおけば,$\{O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}\}_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda}$ は, 各 $O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}$ が $\hat{\mathcal{G}}$ に属することから, $\hat{\mathcal{G}}$ の部分集合族であり, つまり $O_1 \cap O_2$ は $\{O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2}\}_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\in\Lambda}$ の和集合なので $\mathcal{O}$ に属します．
  - 和集合で閉じること
    任意に $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ をとります．各 O_λ に対し,Λ^λ を添え字集合とした集合族 $\{O_\mu\}_{\mu\in\Lambda^\lambda} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$ があって $O_\lambda = \bigcup_{\mu\in\Lambda^\lambda} O_\mu$ です．$\Lambda' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Lambda^\lambda$ とおくと,$\{O_\mu\}_{\mu\in\Lambda'}$ も $\hat{\mathcal{G}}$ の集合族で $\bigcup_{\mu\in\Lambda} O_\mu \in \mathcal{O}$ です．そして $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\mu\in\Lambda} O_\mu$ より,$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ です． □

開基の双対概念として閉基というものがあります．これについて性質も含めて簡単にまとめておきます．

Definition 2.2.23.
X を位相空間とし, $\mathcal{C}$ をその閉集合全体の集合とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の**閉基**（**base for the closed sets**）であるとは, 任意の閉集合が $\mathcal{B}$ に属する集合の共通部分で表現できるときをいう．[3] ■

定義だけなら [24] にも載っていましたが, 閉基にどのような性質があるかは Wikipedia の『開基』のページ [1] を参考にしました．以下の命題はそれに載っていたものです．

Proposition 2.2.24.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $\mathcal{C}$ をその閉集合全体の集合とするとき, 以下は同値．

(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の閉基である．

(2) $\mathcal{F} = \{F | \exists C \in \mathcal{B}(F = X \setminus C)\}$ が $\mathcal{O}$ の開基． ■

Proof

(1) $\Rightarrow$ (2)
$\mathcal{F}$ がその定義から開集合の族であることは明らか．開基であることを示すため, 任意に開集合 $O \in \mathcal{O}$ をとる．$C = X \setminus O$ とすると, C は閉集合であることと $\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の閉基であることから,

$$\exists\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(\; C = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \;)$$

が成立するので，そんな $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を 1 つとって固定する．そして $X \setminus O = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ より，$O = X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X \setminus C_\lambda)$．ここで $F_\lambda = X \setminus C_\lambda$ とおくと，各 F_λ は $\mathcal{F}$ に属し，これは O が $\mathcal{F}$ の要素の和集合で表せた，つまり $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることを示したことになる．

[3] 開基が open base なので閉基は closed base なのかと思ったが, どうやらそのような呼び方は定着していないっぽい．

(2) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (2) の議論を反転させることで同様に示すことができるので省略する. □

開基・閉基について成り立つことで, 証明がパラレルに済みそうなものをまとめてみます.

Proposition 2.2.25.
位相空間 X の開集合全体を $\mathcal{O}$, 閉集合全体を $\mathcal{C}$ とおき, さらに $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して, 以下の (1-1) と (1-2), (2-1) と (2-2) はそれぞれ同値である.

(1-1) $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基.

(1-2) 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して, ある $U \in \mathcal{B}$ が存在して, $x \in U$ かつ $U \subseteq O$ となる.

(2-1) $\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の閉基.

(2-2) 任意の $C \in \mathcal{C}$ と $x \notin C$ に対して, ある $F \in \mathcal{B}$ が存在して, $A \subseteq F$ かつ $x \notin F$ となる. ■

Proof

(1-1) $\Rightarrow$ (1-2)

任意に $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ をとる. この O に対して $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから, $\mathcal{B}_O \subseteq \mathcal{B}$ があって $O = \bigcup \mathcal{B}_O$ となっている. すると $x \in O$ より $x \in \bigcup \mathcal{B}_O$ より, ある $U \in \mathcal{B}_O$ があって $x \in U$. そして $U \in \mathcal{B}_O$ より $U \subseteq O$. そんな U の存在から (1-2) は成立.

(1-2) $\Rightarrow$ (1-1)

任意の $O \in \mathcal{O}$ をとる. (1-1) より各 $x \in O$ に対して存在する $\mathcal{B}$ の要素を U_x とおく. すると $O = \bigcup_{x \in O} U_x$ であり, $\{U_x\}_{x \in O} \subseteq \mathcal{B}$ の存在から $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基である.

(2-1) $\Rightarrow$ (2-2)

任意に $C \in \mathcal{C}$ と $x \notin C$ をとる. $\mathcal{B}\mathcal{C}$ の閉基であることから, ある $\mathcal{B}_C \subseteq \mathcal{B}$ があって $C = \bigcap \mathcal{B}_C$ となっている. ここで $\exists B \in \mathcal{B}_C (x \notin B)$ が成立する.

> $\because$ もし $\forall B \in \mathcal{B}_C (x \in B)$ とすると, $x \in \bigcap \mathcal{B}_C$ より, $C = \bigcap \mathcal{B}_C$ と $x \notin C$ に矛盾する.

そんな B を 1 つとると, $C = \bigcap \mathcal{B}_C \subseteq B$ と $x \notin B$ より, そんな B の存在から (2-2) が成立.

(2-2) $\Rightarrow$ (2-1)

任意に $C \in \mathcal{C}$ をとる. 各 $x \in X \setminus C$ に対して (2-2) より存在する F を F_x とおく. すると $\{F_x\}_{x \in X \setminus C}$ は $C = \bigcap_{x \in X \setminus C} F_x$ をみたす. そんな $\{F_x\}_{x \in X \setminus C} \subseteq \mathcal{B}$ の存在から $\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ の閉基. □

さきの命題を利用して集合族が開基・閉基になる別の同値条件を紹介する.

Proposition 2.2.26.
$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して以下の (1) と「(2-1) かつ (2-2)」は同値. さらに (3) が成立する.

(1) $\mathcal{B}$ は集合 X のある位相の開基である.

(2-1) $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(2-2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \in B_1 \cap B_2$ に対して, ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \in B$ かつ $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

(3) 「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を開基とする集合 X の位相は一意的である. ■

Proof

(1) ⇒ (2-1) かつ (2-2)
$\mathcal{B}$ を X の位相 $\mathcal{O}$ の開基とする．

(2-1) であること．
$X \in \mathcal{O}$ より $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから，$\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{B}$ があって $X = \bigcup \mathcal{B}_X$ となっている．$\bigcup \mathcal{B}_X \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ より $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(2-2) であること．
任意に $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ をとると，$\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基であることから $B_1, B_2 \in \mathcal{O}$ より $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{O}$．このときある x が $x \in B_1 \cap B_2$ ならば $\exists B \in \mathcal{B}(\ x \in B \ \wedge\ B \subseteq B_1 \cap B_2\ )$．これは Proposition 2.2.25（58 ページ）より明らか．

(2-1) かつ (2-2) ⇒ (1)
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が (2-1) かつ (2-2) をみたしているとする．

$$\mathcal{O} \ = \ \{\ \bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\ \} \tag{†}$$

するとこの $\mathcal{O}$ は X の位相になっている．それを確かめるため位相の定義の 3 条件（Definition 2.2.14（55 ページ））を示す．

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ を $\mathcal{A} = \emptyset$ とすれば，$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \emptyset = \emptyset$ より，そんな $\mathcal{A}$ の存在から，$\emptyset \in \mathcal{O}$.
$X = \bigcup \mathcal{B}$ より $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ とすれば，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ で $\bigcup \mathcal{A} = X$ より，そんな $\mathcal{A}$ の存在から，$X \in \mathcal{O}$.

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\ O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\ )$.
任意に $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ をとると，$\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$ があって $O_i = \bigcup \mathcal{A}_i$ となっている（$i = 1, 2$）．x を $x \in O_1 \cap O_2$ とすると，$x \in O_i = \bigcup \mathcal{A}_i$ より，ある $B_i \in \mathcal{A}_i$ があって $x \in B_i$ かつ $B_i \subseteq O_i$ となっている．そんな B_1, B_2 を 1 つ固定する．すると $x \in B_1 \cap B_2$ となっていて，(2-2) よりある $B_x \in \mathcal{B}$ があって $x \in B_x$ かつ $B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq O_1 \cap O_2$ である．各 x ごとに存在するそんな B_x を集めた集合を $\mathcal{A}$ とおくと，つまり

$$\mathcal{A} \ = \ \{\ B_x \mid x \in O_1 \cap O_2 \ \wedge\ x \in B_x \ \wedge\ B_x \subseteq O_1 \cap O_2\ \}$$

であり，その定義から $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ であり，$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x \in O_1 \cap O_2} B_x$ であることに注意すれば，$\bigcup \mathcal{A} = O_1 \cap O_2$ である．そんな $\mathcal{A}$ の存在から，$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) $\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}(\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}\ )$.
任意に $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ をとると，$\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって，各 $\mathcal{A}_\lambda$ が $\mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$ かつ $O_\lambda = \bigcup \mathcal{A}_\lambda$ となっている．すべての $\mathcal{A}_\lambda$ が $\mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$ より，$\mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とおくと $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ である．すると $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup \mathcal{A}_\lambda = \bigcup \mathcal{A}$ となるので，$\mathcal{A}$ の存在から，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

明らかに $\mathcal{B}$ はこの位相 $\mathcal{O}$ の開基である．

(3)
「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を開基とする位相を $\mathcal{O}$ とおくと，開基の定義から $\mathcal{O} = \{\ O \mid \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(O = \bigcup \mathcal{A})\ \}$ である．これは † での $\mathcal{O}$ と同じもの，つまり $\mathcal{B}$ を開基とする位相はこの $\mathcal{O}$ のみである．□

同様の事実が閉基についても成立する．

Proposition 2.2.27.
$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して以下の (1) と「(2-1) かつ (2-2)」は同値．さらに (3) が成立する．

(1) $\mathcal{B}$ は集合 X のある位相の閉基である．

(2-1) $\emptyset = \bigcap \mathcal{B}$.

(2-2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \notin B_1 \cup B_2$ に対して，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \notin B$ かつ $B_1 \cup B_2 \subseteq B$.

(3) 「(2-1) かつ (2-2)」をみたす $\mathcal{B}$ を閉基とする集合 X の位相は一意的である．■

Proof 「(1) ⇒ (2-1) かつ (2-2)」は Proposition 2.2.26（58 ページ）と同様にできるので省略する．

(2-1) かつ (2-2) ⇒ (1)
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が (2-1) かつ (2-2) をみたしているとする．

$$\mathcal{F} \;=\; \{\, \bigcap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \,\} \tag{†}$$

するとこの $\mathcal{F}$ は X の閉集合系になっている．それを確かめるため閉集合系の 3 つの性質（Proposition 2.2.16（55 ページ）の (F1)〜(F3)）を確かめる．

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
$\emptyset = \bigcap \mathcal{B}$ より $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ とおけば, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ かつ $\emptyset = \bigcap \mathcal{A}$ より, そんな $\mathcal{A}$ の存在から $\emptyset \in \mathcal{F}$.
なんらかの $\mathcal{A}$ に対して集合族の共通部分の定義から $\bigcap \mathcal{A} = \{\, x \in X \mid \forall A \in \mathcal{A}(x \in A) \,\}$ より, $\mathcal{A} = \emptyset$ とおくと, $\forall A \in \emptyset(x \in A)$ はどんな x についても成立する, つまり $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \emptyset = X$ となる．そんな $\mathcal{A}$ の存在から $X \in \mathcal{F}$.

(F2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\ F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}\ )$.
任意に $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ をとると, $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$ があって $F_i = \bigcap \mathcal{A}_i$ となっている（$i = 1, 2$）．x を $x \notin F_1 \cup F_2$ とすると, $x \notin F_i = \bigcap \mathcal{A}_i$ より, ある $B_i \in \mathcal{A}_i$ があって $x \notin B_i$ かつ $F_i \subseteq B_i$ となっている．そんな B_1, B_2 を 1 つ固定する．
すると $x \notin B_1 \cup B_2$ となっていて, (2-2) よりある $B_x \in \mathcal{B}$ があって $x \notin B_x$ かつ $F_1 \cup F_2 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq B_x$ となっている．各 x ごとに存在するそんな B_x を集めた集合を $\mathcal{A}$ とおくと, つまり

$$\mathcal{A} \;=\; \{\ B_x \mid x \notin F_1 \cup F_2 \ \wedge\ x \notin B_x \ \wedge\ F_1 \cup F_2 \subseteq B_x \ \}$$

であり, その定義から $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ であり, $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{x \notin F_1 \cup F_2} B_x$ であることに注意すれば, $\bigcap \mathcal{A} = F_1 \cup F_2$ である．

∵ どの B_x も $F_1 \cup F_2 \subseteq B_x$ より $F_1 \cup F_2 \subseteq \bigcap \mathcal{A}$ は明らかである．
$\bigcap \mathcal{A} \subseteq F_1 \cup F_2$ を示すために $X \setminus F_1 \cup F_2 \subseteq X \setminus \bigcap \mathcal{A}$ を確かめる．任意に $x \in X \setminus F_1 \cup F_2$ な x, つまり $x \notin F_1 \cup F_2$ な $x \in X$ をとると $x \notin B_x$ かつ $B_x \in \mathcal{A}$ なる B_x がある．そんな B_x の存在から $x \in \mathcal{A}$ である．

そんな $\mathcal{A}$ の存在から, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

(F3) $\forall \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}(\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}\ )$.
これは Proposition 2.2.26（58 ページ）の (O3) を反転させればできるので省略する．

Theorem 2.2.17（56 ページ）のようにこの $\mathcal{F}$ を用いて位相を定めれば, 明らかに $\mathcal{F}$ はその位相の閉基である．

(3)
すぐ上のように X に位相を定めたとすると, あとは Proposition 2.2.26（58 ページ）と同様にできる． □

2.2.5 直積位相

有限個の集合の直積集合には以下のように位相を入れるのが一般的です．

Definition 2.2.28.
$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．X と Y の**直積空間**（**product space**）とは, $X \times Y$ に $\{\, O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathcal{O}_X, O_Y \in \mathcal{O}_Y \,\}$ が生成する位相を入れた位相空間のことで, この位相を**直積位相**（**product topology**）という． ■

より一般的な直積集合に対しては以下のように位相を定義します．**??**節（**??**ページ）の Definition 2.1.8 とそのあとの議論も参考にしてください．

Definition 2.2.29.
$\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする．この集合族の**直積空間**とは，$\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に $\{\, p_\lambda^{-1}[O] \mid O \in \mathcal{O}_\lambda\}$ が生成する位相を入れた空間のこと，この位相を**直積位相**という．■

直積空間を構成する X, Y や X_λ のことを**因子空間**と呼びます．
直積位相は以下の補題から，どのような集合が開集合になっているか分かりやすくなります．

Lemma 2.2.30.
直積位相空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に対して

$$\{\, \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \mid \exists L \in [\Lambda]^{<\omega} \big(\, \lambda \in L \to B_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \ \vee\ \lambda \notin L \to B_\lambda = X_\lambda \,\big) \,\}$$

は直積位相の開基になっている．■

Proof　証明は Lemma 2.2.22 より明らかです．□

2.2.6　compact な位相空間

被覆の定義,Definition 2.1.7 も参考にしてください．

Definition 2.2.31.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間として

- $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ が $A \subseteq X$ の被覆のとき，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の**開被覆（open covering）**とよぶ．
- $(X, \mathcal{O})$ が **compact** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: X の開被覆 ($\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が有限部分被覆をもつ)
- $A \subseteq X$ が **compact** $\overset{\text{def}}{\iff} (X, \mathcal{O})$ の部分空間 A が compact．■

その定義からどんな有限集合上の位相も compact になります．

Lemma 2.2.32.
集合 X が $|X| < \omega$ ならば，任意の X 上の位相 $\mathcal{O}$ に対し $(X, \mathcal{O})$ は compact．■

Proof　$|X| < \omega$ より $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ とおきます．任意に X の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとると，X の被覆なので各 $i \le n$ に対して $x_i \in O_\lambda$ なる λ が存在するので，それを λ_i とおき，$\Lambda' = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\}$ とします．$X = \bigcup_{0\le i\le n}\{x_i\} \subseteq \bigcup_{\lambda_i\in\Lambda'} O_{\lambda_i}$ より $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ は $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆だから，その存在から $(X, \mathcal{O})$ は compact．□

有限交叉性と compact 性の関係について述べます．

Lemma 2.2.33.
位相空間 X に対して，以下は同値．

(1) X が compact．

(2) $\forall\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$：閉集合の族 $\big(\, \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: FIP をもつ $\to \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset \,\big)$．■

Proof

(1) → (2)
任意に有限交叉性をもつ閉集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$ だったとすると，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^C = X$ より $\{F_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆です．ここで F^C とは F の補集合を表しています．(1) より $\{F_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限部分被覆をもつので，それを $\{F_i^C\}_{i\in L}$ とおけば $X = \bigcup_{i\in L} F_i^C$，つまり $\emptyset = \bigcap_{i\in L} F_i$ となりますが，これは $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限交叉性に矛盾．

(2) → (1)
任意に X の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．X が有限部分被覆を持たなかった, つまり $\forall L \in [\lambda]^{<\omega}\big(\ X \neq \bigcup_{i\in L} O_i\ \big)$ です．任意に $L \in [\lambda]^{<\omega}$ をとると, $X \neq \bigcup_{i\in L} O_i$ より $\exists x \in X\big(\ \forall i \in L(x \notin O_i)\ \big)$ です．そんな x を 1 つとれば $\forall i \in L(x \in O_i^C)$ が成立, つまり $x \in \bigcap_{i\in L} O_i^C$ なので $\bigcap_{i\in L} O_i^C \neq \emptyset$ です．これは閉集合の族 $\{O_\lambda^C\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性を持つことを表しているので, (2) より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda^C \neq \emptyset$ でなくてはいけませんが, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda^C = \emptyset$ よりこれは矛盾, つまり X は有限交叉性をもちます. □

因子空間が有限個であるような直積空間は, 因子空間全てが compact ならば compact になります.

Theorem 2.2.34.
位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が共に compact ならば, 直積位相空間 $X \times Y$ も compact ■

Proof $\mathscr{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $X \times Y$ の開被覆として, $\mathscr{O}$ の有限部分被覆を構成します.

$$\mathcal{A} = \{O_\lambda^X\}_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{A}}} = \left\{\ O_\lambda^X \in \mathcal{O}_X \mid \exists G_1, \cdots, G_n \in \mathscr{O}\left(\ O_\lambda^X \times Y\ \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} G_i\right)\ \right\}$$

とおくと,$\mathcal{A}$ は X の開被覆です.

∵ 各点 $x \in X$ が何らかの $\mathcal{A}$ の要素に属することを示す．任意に $x \in X$ をとる．この x に対し Y の部分集合族 $\mathcal{B}_x$ を以下のように定義する.

$$\mathcal{B}_x = \{\ O^Y \in \mathcal{O}_Y \mid \exists O^X \in \mathcal{O}_X\ \exists G \in \mathscr{O}\big(\ x \in O^X\ \wedge\ O^X \times O^Y \subseteq G\ \big)\ \}$$

このとき $\mathcal{B}_x$ は Y の開被覆.

∵ 各点 $y \in Y$ が何らかの $\mathcal{B}_x$ の要素に属することを示す．任意に $y \in Y$ をとる．この y と先に固定されている x に対して, $\mathscr{O}$ は $X \times Y$ の開被覆だから $\langle x, y\rangle$ はある要素 $G \in \mathscr{O}$ に属するのでその 1 つを改めて G として固定する．つまり $\langle x, y\rangle \in G$．ここで G は $X \times Y$ の開集合なので直積位相の定義から, ある $O^X \in \mathcal{O}_X$, $O^Y \in \mathcal{O}_Y$ があって $G = O^X \times O^Y$ となっている．この O^Y は O^X, G の存在から $O^Y \in \mathcal{B}_x$ で, $y \in O^Y$.

Y の compact 性より

$$\exists V_1, \cdots, V_m \in \mathcal{B}_x\left(\ Y = \bigcup_{1\le i\le m} V_i\right)$$

この V_i を固定すると, それぞれに対して $\mathcal{B}_x$ の定義から $U_i \in \mathcal{O}_X$, $G_i \in \mathscr{O}$ $(1 \le i \le m)$ があって $U_i \times V_i \subseteq G_i$ となっている．$U_x = U_1 \cap \cdots \cap U_m$ とおけば, $x \in U_x$ と $U_x \in \mathcal{O}_X$ が成立する.

$$\bigcup_{1\le i\le m}(U_x \times V_i)\ =\ U_x \times \left(\bigcup_{1\le i\le m} V_i\right)\ =\ U_x \times Y$$

そして $\forall i(\ U_x \times V_i \subseteq G_i\ )$ が分かるから

$$U_x \times Y \subseteq \bigcup_{1\le i\le m} G_i$$

よって $u_x \in \mathcal{A}$ で, この U_x が x が属する $\mathcal{A}$ の要素になる.

X の compact 性より

$$\exists O_1^X, \cdots, O_m^X \in \mathcal{A} \left(X = \bigcup_{1\le i\le m} O_i^X \right)$$

が成立. 各 O_i^X に対して $\mathcal{A}$ の定義から

$$\exists O_{i_1}, \cdots, O_{i_n} \in \mathscr{O} \left(O_i^X \times Y \subseteq \bigcup_{1\le j\le n} O_{i_j} \right).$$

すると

$$\begin{aligned} X \times Y &= \left(\bigcup_{1\le i\le m} O_i^X \right) \times Y = \bigcup_{1\le i\le m} (O_i \times Y) \\ &\subseteq \bigcup_{1\le i\le m} \left(\bigcup_{1\le j\le n} O_{i_j} \right) \end{aligned}$$

よって $X \times Y$ が $m \times n$ 個の, すなわち有限個の $\mathscr{O}$ の要素で被覆できた. □

しかし上記の定理の一般系（Tychonoff の定理）を示すには選択公理が必要です. またその主張は選択公理と同値になります. この証明は [26]（117 ページあたりから）を参考にした.

Lemma 2.2.35（選択公理は Tychonoff の定理と同値）.
以下は同値.

(1) 選択公理

(2) （Tychonoff の定理）
$\{ (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) \}_{\lambda\in\Lambda}$ を compact 位相空間の族とし, $(Y, \mathcal{O})$ をその直積位相空間とすれば,Y は compact. ■

Proof

(1) ⇒ (2)
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ を有限交叉性をもつ閉集合の族として, $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ であることを示す.

$$\mathcal{F} = \{ \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(Y) \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \ \wedge \ \mathcal{A}': \text{有限交叉性をもつ} \}$$

と定義すれば, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は帰納的半順序集合です.

∵ $(\mathcal{F}, \subseteq)$ が半順序集合であることの確かめは省略します. 任意に全順序部分集合 $C \subseteq \mathcal{F}$ をとれば, その和集合 $\bigcup C$ は C の上界になっています. その存在から $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は帰納的です.

選択公理より Zorn の補題をこの $(\mathcal{F}, \subseteq)$ に適用できるので $(\mathcal{F}, \subseteq)$ は少なくとも 1 つの極大元を持つから, それを $\mathcal{B}$ とおきます. この $\mathcal{B}$ に対して以下の 2 つが成立.

(i) $\forall F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{B}(\ F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathcal{B}\ )$

(ii) $\forall A \subseteq Y(\ \forall F \in \mathcal{B}(A \cap F \neq \emptyset) \ \to \ A \in \mathcal{B}\ )$

∵ (i) は $\mathcal{B}$ が有限交叉性を持つ範囲で $\mathcal{A}$ を大きくしていった集合であることから, (ii) は $\mathcal{B}$ の極大性より明らかです.

$p_\lambda : Y \to X_\lambda$ を射影とすると以下が成立.

$$\exists y = \langle x_\lambda \in X_\lambda \rangle_{\lambda\in\Lambda} \in Y \big(\forall F \in \mathcal{B}\ \forall\lambda \in \Lambda (\ x_\lambda \in (p_\lambda[F])^a\ )\ \big)$$

∵ ある $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathcal{P}(X_\lambda)$ を

$$\mathcal{B}_\lambda \ = \ \{ \ (p_\lambda[F])^a \mid F \in \mathcal{B} \ \}$$

と定義すれば $\mathcal{B}_\lambda \subseteq X_\lambda$ で, 閉包の定義から閉集合の族になっていて, 有限交叉性をもちます.

∵ 任意に $\mathcal{B}_\lambda$ の 2 要素をとり, 定義からそれに対応する $\mathcal{B}$ の 2 要素を F_1, F_2 とおきます. つまり $(p_\lambda[F_1])^a$, $(p_\lambda[F_2])^a \in \mathcal{B}_\lambda$ です. $\mathcal{B}$ は有限交叉性をもつので $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. ここから $\emptyset \neq p_\lambda[F_1 \cap F_2] \subseteq p_\lambda[F_1] \cap p_\lambda[F_2]$ より $p_\lambda[F_1] \cap p_\lambda[F_2] \neq \emptyset$ です. 閉包の定義から $p_\lambda[F_i] \subseteq (p_\lambda[F_i])^a$ なので $(p_\lambda[F_1])^a \cap (p_\lambda[F_2])^a \neq \emptyset$ です.

$(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ の compact 性から $\bigcap \mathcal{B}_\lambda \neq \emptyset$ が成立する. 集合族 $\{ \bigcap \mathcal{B}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ に選択公理を適用して $\langle x_\lambda \in X_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ を作れば, これが求めるべき y になっています.

この y は全ての $\mathcal{B}$ の要素の触点になっています. つまり $\forall F \in \mathcal{B}(\ y \in F^a \ )$

∵ 任意に $F \in \mathcal{B}$ をとる. y が F の触点であるとは, 任意の y の近傍が F と交わることなので任意に y の近傍 N をとる. 近傍の定義からこの N に対して $\mathcal{O}$ の開集合 O があって $y \in O \subseteq N$ となっている. ここで直積位相の定義から, この O に対して $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ とそれに対応する $U_i \in \mathcal{O}_{\lambda_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ があって, $O = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ となっている, つまり以下が成立しています.

$$y \ \in \ \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}] \ \subseteq \ N$$

$p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ とは U_{λ_i} と λ_i 以外の X_λ との直積だから, $y \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}]$ より, $p_{\lambda_i}(y) = x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}$ が成立しています.
$F \cap N \neq \emptyset$ を示すため $F \cap p_{\lambda_1}^{-1}[U_{\lambda_1}] \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}[U_{\lambda_n}] \neq \emptyset$ を示す. そのためにまず以下が成立することを確かめる.

$$\forall i(\ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}] \ \in \ \mathcal{B} \ )$$

∵ $\{ \ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}] \ \}_{i \leq n}$ は有限交叉性を持ちます. なので $\mathcal{B}$ の極大性より, $\{ \ p_{\lambda_i}^{-1}[U_{\lambda_i}] \ \}_{i \leq n} \subseteq \mathcal{B}$ です.

よって $\mathcal{B}$ の性質 (i) から $F \cap p_{\lambda_1}^{-1}[U_{\lambda_1}] \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}[U_{\lambda_n}] \neq \emptyset$ が成立します. つまり $F \cap N \neq \emptyset$.

任意に $A \in \mathcal{A}$ をとると A は閉集合なので $A^a = A$ で, $\mathcal{B}$ の定義からどの A も $\mathcal{B}$ に属する. そして y の性質からどの A^a にも y は属する, つまり A に属する. よって $\forall A \in \mathcal{A}(y \in A)$ という y の存在から $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

選択公理そのものではなく同値な直積定理を証明します. 示すことは Lemma 2.1.9 より各要素が空でない集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $\displaystyle\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ を示す.

まずどの A_λ にも属さない, つまり $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ に属さない元を 1 つとり, それを α とおきます. 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $X_\lambda = A_\lambda \cup \{\alpha\}$ とします. $\mathcal{O}_\lambda = \{\ B \subseteq X_\lambda \mid |X_\lambda \setminus B| < \omega\ \} \cup \{\emptyset,\ \{\alpha\}\}$ とおくと $\mathcal{O}_\lambda$ は X_λ 上の compact な位相です.

> $\because$ 補有限位相での証明を参考にしてください（まだ書いてない）.

$Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおくと, $f : X_\lambda \to \{\alpha\}$ という要素があるので $Y \neq \emptyset$ です. $Y \neq \emptyset$ と因子空間全てが compact であることより, 仮定の Tychonoff の定理（Theorem 2.2.35）から直積空間 Y も compact です. 射影 $p_\lambda : Y \to X_\lambda$ を用いて各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $F_\lambda = p_\lambda^{-1}[A_\lambda]$ とおくと, どの F_λ も Y において閉集合です.

> $\because$ 直積位相は各射影 $p_\lambda : Y \to X_\lambda$ が連続になる位相で, 各 A_λ は X_λ において $\{\alpha\}$ が開集合であることより閉集合だから, 連続写像 p_λ による逆像 $p_\lambda^{-1}[A_\lambda]$ もまた閉集合です.

さらに $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交叉性をもちます.

> $\because$ 有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ を任意にとる. $y = \langle x_\lambda \in X_\lambda \rangle_{\lambda\in\Lambda}$ を
>
> $$x_\lambda = \begin{cases} \alpha & \lambda \notin \Lambda \setminus \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \\ x_\lambda \in A_\lambda & \exists i(\ \lambda = \lambda_i\ ) \end{cases}$$
>
> な点とすれば,$y \in Y$ であることは明らか. また $\forall i(\ y \in F_{\lambda_i}\ )$ が成立します. なぜなら $x_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i}$ より $p_{\lambda_i}(y) \in A_{\lambda_i}$, つまり $y \in p_{\lambda_i}^{-1}[A_{\lambda_i}] = F_{\lambda_i}$ だからです. すなわち $\bigcap_{1\le i\le n} F_{\lambda_i} \neq \emptyset$ です.

よって $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は compact 空間 Y の有限交叉性をもつ閉集合の族だから $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ です. そして $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^{-1}[A_\lambda] = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ なので $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ です. □

第3章　その他細かなテーマ

ここでは教科書一冊になるほどではないが, 重要なテーマ・勉強したテーマをまとめいます.

3.0　Ideal と Filter 入門事項まとめ

ここでは ideal や filter についてまとめておきます. また filter に対しては ultra filter についてもまとめておきます. [15] の基礎部分を参考にしています.

3.0.1　ideal と filter の定義と例

ideal と filter の定義をして, 名前がついているものを紹介していきます.

Definition 3.0.1.
集合 A に対して $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が集合 A 上の **ideal** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下の 3 条件を満たすもののこと.

1. $\mathcal{I} \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{I}(\ X \cup Y \in \mathcal{I}\ )$.
3. $\forall X, Y(\ X \subseteq Y \wedge Y \in \mathcal{I}\ \rightarrow\ X \in \mathcal{I}\ )$.

集合 A に対して $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が集合 A 上の **filter** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下の 3 条件を満たすもののこと.

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{F}(\ X \cap Y \in \mathcal{F}\ )$.
3. $\forall X, Y(\ X \subseteq Y \wedge X \in \mathcal{F}\ \rightarrow\ Y \in \mathcal{F}\ )$. ■

いくつかの例を紹介します. それが ideal であること, filter であることの証明は省略します.

Example 3.0.2.
集合 A に対して,

(1) $\mathcal{P}(A)$ は A 上の ideal かつ filter.

(2) $\{\emptyset\}$ は A 上の ideal, $\{A\}$ は A 上の filter.

(3) $x \in A$ に対して, $\{X \subseteq A | x \notin X\}$ は A 上の ideal, $\{X \subseteq A | x \in X\}$ は A 上の filter. このような ideal を **principal ideal**, **principal filter** と呼んだりする.

(4) $S \subseteq A$ に対して, $\{X \subseteq A | X \subseteq S\}$ は A 上の ideal, $\{X \subseteq A | S \subseteq X\}$ は A 上の filter.

以降 A は無限集合として

(5) A の有限部分集合全体 $[A]^{<\omega}$ は A 上の ideal, A の補有限集合全体 $\{X \subseteq A \mid |A \setminus X| < \omega\}$ は A 上の filter. $|A \setminus X| < \omega$ とは $A \setminus X \in [A]^{<\omega}$ とも表現できる. またこのような filter を **Fréchet filter** とも呼ぶ.

(6) 上の例を拡張して, 基数 κ に対して $[A]^{<\kappa}$ は A 上の ideal. ■

ideal, filter には proper と呼ばれるものがあり, 大抵 proper であることは仮定されます.

Definition 3.0.3.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$, filter $\mathcal{F}$ に対して

- $\mathcal{I}$ が **proper** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A \notin \mathcal{I}$.
- $\mathcal{F}$ が **proper** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\emptyset \notin \mathcal{F}$. ■

proper であることを仮定するのは, proper でないとすると ideal も filter も $P(A)$ という自明なものになってしまいますからです. このノートでも以降 proper なものだけ扱います.
また Example 3.0.2(3) に対応して, non-principal と呼ばれる性質があります.

Definition 3.0.4.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$, filter $\mathcal{F}$ に対して,

- $\mathcal{I}$ が **non-principal** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in A(\ \{a\} \in \mathcal{I}\ )$.
- $\mathcal{F}$ が **non-principal** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall X \subseteq A(\ A \setminus X \in [A]^{<\omega} \to X \in \mathcal{F}\ )$. ■

その定義から Fréchet filter は non-principal です.

ideal と filter は双対な概念です. どういうことかというと, ある ideal $\mathcal{I}$ があったとき, 補集合が $\mathcal{I}$ に属するような集合全体は同じ集合上の filter になります. そういったものを表現するための用語を定義します.

Definition 3.0.5.
集合 A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して

- $X \subseteq A$ が $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**-measure zero** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X \in \mathcal{I}$.
- $X \subseteq A$ が **positive** $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**-measure** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X \notin \mathcal{I}$.
- $X \subseteq A$ が $\boldsymbol{\mathcal{I}}$**−measure one** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A \backslash X \in \mathcal{I}$.

さらに

- $\boldsymbol{\mathcal{I}^+}$ $\overset{\text{def}}{=}$ $\{\, X \subseteq A \mid X \notin \mathcal{I}\,\}$: positive $\mathcal{I}$-measure 全体.
- $\boldsymbol{\mathcal{I}^*}$ $\overset{\text{def}}{=}$ $\{\, X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{I}\,\}$: $\mathcal{I}$-measure one 全体.

これらの定義は filter に対しても用いる. ■

この定義や記法は [13] の 4 ページを参考にしました.
A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して $\mathcal{I}^*$ は A 上の filter になります. このとき $\mathcal{I}^*$ は ideal $\mathcal{I}$ の **dual filter** と呼びます. その逆で A 上の filter $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}^* = \{\, X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{F}\,\}$ は A 上の ideal となり, それを $\mathcal{F}$ の **dual ideal** と呼びます.

3.0.2　もっと filter について

ここでは filter に関する話題をさらに掘り下げていきます.
proper な filter はその定義から有限交叉性を持ちます. しかし A の部分集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が有限交叉性をもつからといって filter になるとは限りません. 有限交叉性をもつ集合族から filter を作る方法を提示します.

Proposition 3.0.6.
集合 A に対して, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ は $\mathcal{S} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{S}$ は有限交叉性をもつとします. $\mathcal{F} = \{\, X \subseteq A \mid \exists E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}(\ \bigcap E \subseteq X\ )\,\}$ は filter であり, $\mathcal{S}$ を含み, $\mathcal{S}$ を含む filter の中で極小なものになっている. ■

<u>**Proof**</u>　先に $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ であることを示します．そのために任意に $X \in \mathcal{S}$ をとります．$E = \{X\} \in [\mathcal{S}]^{<\omega}$ とおけば，$X = \bigcap E$ より，そんな E の存在から $X \in \mathcal{F}$ です．
続けて $\mathcal{F}$ が filter であることを示します．$\mathcal{F} \neq \emptyset$ であることは，$\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ より分かります．続いて任意に $X, Y \in \mathcal{F}$ をとります．$\mathcal{F}$ の定義から X, Y に対して存在する $[\mathcal{S}]^{<\omega}$ の要素をそれぞれ E_X, E_Y とおきます．$E = E_X \cup E_Y$ とおくと，$E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}$ で，$E_X, E_Y \subseteq E$ より $\bigcap E \subseteq \bigcap E_X \wedge \bigcap E \subseteq \bigcap E_Y$ です．よって $\bigcap E \subseteq \big((\bigcap E_X) \cap (\bigcap E_Y) \big) \subseteq X \cap Y$ だから，そんな E の存在より $X \cap Y \in \mathcal{F}$ です．filter の最後の定義，超集合関係で閉じることは $\mathcal{F}$ の定義より明らかなので割愛します．
最後に $\mathcal{F}$ の極小性を確かめるために，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}'$ なる filter $\mathcal{F}'$ を任意にとります．さらに任意に $X \in \mathcal{F}$ をとると，$\exists E \in [\mathcal{S}]^{<\omega}(\bigcap E \subseteq X)$ な E を 1 つ固定します．$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}'$ より $E \subseteq \mathcal{F}'$ です．$|E| < \omega$ と $\mathcal{F}'$ が filter であることから $\bigcap E \in \mathcal{F}'$ です．もう一度 $\mathcal{F}'$ が filter であることと $\bigcap E \subseteq X$ から，$X \in mathcalF'$ です．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$，つまり $\mathcal{S}$ を含むような filter の中で極小になっています．□

このような作り方をした filter のことを，$\mathcal{S}$ が生成する filter という呼び方があります．有限交叉性を持たない $\mathcal{S}$ から生成した filter は，proper にならず，つまり $\mathcal{P}(A)$ という自明な filter になってしまいます．

ある集合上の filter 全体は部分集合関係で半順序集合になります．この順序での極大な filter のことを **maximal filter** と呼びます．
つまり A 上の filter $\mathcal{F}$ が maximal であることの定義は

$$\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)\big(\ \mathcal{A}\text{: filter} \ \rightarrow\ \neg(\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{A})\ \big)$$

を満足することになります．

それとは別に ultra という性質もあります．

<u>**Definition**</u> **3.0.7.**
A 上の filter $\mathcal{F}$ が **ultra** であるとは，任意の $X \subseteq A$ に対して $X \in \mathcal{F}$ か $A \setminus X \in \mathcal{F}$ のどちらか一方が成立するときをいう．$\veebar$ を排他的論理和を表すための記号とするならば

$$\mathcal{F}\text{: ultra} \overset{\text{def}}{\iff} \forall X \subseteq A(\ X \in \mathcal{F}\ \veebar\ A \setminus X \in \mathcal{F}\ ) \tag{3.1}$$

と表現できます．■

proper な filter を考えている範囲では，maximal であること ultra であることは同値になります．故に書き手によっては極大であることを ultra であることの定義として，上記の定義は性質の 1 つとして挙げているものもあったりします．その定理の証明の前に ultra filter について分かることをまとめておきます．

<u>**Proposition**</u> **3.0.8.**
集合 A に対して

- A 上の proper filter $\mathcal{F}$ が ultra でない $\iff$ $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{F} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{F}\ )$.
- $\mathcal{F}$ が A 上の proper ideal $\mathcal{I}$ の dual filter（つまり $\mathcal{F} = \mathcal{I}^*$）ならば，$\mathcal{F}$ が ultra でない $\iff$ $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{I} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{I}\ )$.

A 上の ultra filter $\mathcal{U}$ と $X, Y \subseteq A$ と $\{X_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して

- $X, Y \notin \mathcal{U}\ \rightarrow\ X \cup Y \notin \mathcal{U}$.
- $X \in \mathcal{U} \wedge Y \notin \mathcal{U}\ \rightarrow\ X \setminus Y \in \mathcal{U}$.
- $\bigcup_{i \in [n]} X_i \in \mathcal{U}\ \rightarrow\ \exists i \in [n](X_i \in \mathcal{U})$. ■

<u>**Proof**</u>　(1) 排他的論理和 $\veebar$ を用いた論理式について考えます．P, Q を命題を表す記号として $P \veebar Q$ とは，他の論理記号を用いて論理的同値な式に書き換えると，$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ です．さらに論理的同値なものとして $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ があるので，今回はこれを使います．すると $\mathcal{U}$ が ultra であることを書き直せば，

$$\forall X \subseteq A\big(\ (X \in \mathcal{U} \vee A \setminus X \in \mathcal{U})\ \wedge\ (X \notin \mathcal{U} \vee A \setminus X \notin \mathcal{U})\ \big)$$

となり, それを否定すれば

$$\exists X \subseteq A\big(\ (X \notin \mathcal{U} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{U})\ \wedge\ (X \in \mathcal{U} \wedge A \setminus X \in \mathcal{U})\ \big)$$

です. $X \in \mathcal{U} \wedge A \setminus X \in \mathcal{U}$ とすると, $\mathcal{U}$ が filter より $X \cap (A \setminus X) \in \mathcal{U}$ ですが, これは $\emptyset \in \mathcal{U}$ となって $\mathcal{U}$ が proper であることに矛盾します. よって成立するのは $X \notin \mathcal{U} \wedge A \setminus X \notin \mathcal{U}$ となります.

(2) (1) にそのまま当てはめると, $\exists X \subseteq A(\ X \notin \mathcal{I}^* \wedge A \setminus X \notin \mathcal{I}^*\ )$ です. $X \notin \mathcal{I}^*$ とは, その定義から $A \setminus X \notin \mathcal{I}^*$, $A \setminus X \notin \mathcal{I}^*$ とは $X \notin \mathcal{I}^*$ です.

(3) $X \cup Y \notin \mathcal{U}$ を示すため, $A \setminus (X \cup Y) \in \mathcal{U}$ を示します. $A \setminus (X \cup Y) = (A \setminus X) \cap (A \setminus Y)$, そして仮定より $A \setminus X, A \setminus Y \in \mathcal{U}$ なので, $(A \setminus X) \cap (A \setminus Y) \in \mathcal{U}$, つまり $A \setminus (X \cup Y) \in \mathcal{U}$ です.

(4) $X \setminus Y \notin \mathcal{U}$ とすると, $\mathcal{U}$ が ultra より $A \setminus (X \setminus Y) \in \mathcal{U}$ です. $A \setminus (X \setminus Y) = (A \setminus X) \cup Y$ で, 仮定からの $A \setminus X, Y \notin \mathcal{U}$ と, (3) より $(A \setminus X) \cup Y \notin \mathcal{U}$ でなくてはなりませんが, これは矛盾です.

(5) $\forall i \in [n](X_i \notin \mathcal{U})$ だったとします. $\mathcal{U}$ が ultra より $\forall i \in [n](A \setminus X_i \in \mathcal{U})$ です. $\mathcal{U}$ が filter であることから $\bigcap_{i \in [n]}(A \setminus X_i) \in \mathcal{U}$ です. すると $A \setminus \big(\ \bigcap_{i \in [n]}(A \setminus X_i)\ \big) = \bigcup_{i \in [n]} X_i \notin \mathcal{U}$ ですが, これは仮定に矛盾です. □

では maximal であること ultra であることが同値であることを証明します.

Proposition 3.0.9.
A 上の filter $\mathcal{F}$ に対して, 以下は同値

(1) $\mathcal{F}$ は A 上の proper filter の中で極大（maximal）.

(2) $\mathcal{F}$ は ultra. ■

Proof

(1)→(2)
任意に $X \subseteq A$ をとります. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもつかどうかで場合分けします. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもっていたとします. $\mathcal{F} \cup \{X\}$ から生成される filter を $\mathcal{F}'$ とおくと, その定義から $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \cup \{X\}$ と, $\mathcal{F} \cup \{X\} \subseteq \mathcal{F}'$ より, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ ですが, $\mathcal{F}$ は maximal より $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ となることはない, つまり $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ です. すなわち X は最初から $\mathcal{F}$ に属していた, つまり $X \in \mathcal{F}$ です.
$\mathcal{F} \cup \{X\}$ が有限交叉性をもっていなかったとします. $\mathcal{F}$ は filter なので有限交叉性をもちますが, X を加えると有限交叉性をもたなくなったということなので, $\exists \{Y_i\}_{i \in [n]} \subseteq \mathcal{F}\big(\ (\bigcap_{i \in [n]} Y_i) \cap X = \emptyset\ \big)$ です. $Y = \bigcap_{i \in [n]} Y_i$ とおくと, $\mathcal{F}$ が filter であることより $Y \in mathcalF$. $Y \cap X = \emptyset$ より $Y \subseteq A \setminus X$ で, $\mathcal{F}$ が filter であることから $A \setminus X \in \mathcal{F}$ です.

(2)→(1)
対偶「$\mathcal{F}$ が maximal でないならば, $\mathcal{F}$ が ultra でない」を示します. $\mathcal{F}$ が maximal でないことから, $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ なる proper filter $\mathcal{F}'$ が存在します. $X \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ を 1 つとると, $A \setminus X \notin \mathcal{F}$ です. なぜならば $A \setminus X \in \mathcal{F}$ だとすると, $A \setminus X \in \mathcal{F}'$ となって, $X \cap A \setminus X \in \mathcal{F}'$ ですが, これは $\emptyset \in \mathcal{F}'$ となって, $\mathcal{F}'$ が proper であることに矛盾します. よって $X, A \setminus X \notin \mathcal{F}$ なる X の存在から $\mathcal{F}$ は ultra ではありません. □

maximal な, つまり ultra な filter の形は 2 つに定まります.

Proposition 3.0.10.
集合 A 上の maximal filter は principal か non-principal のいずれか一方になる. ■

Proof A 上の maximal filter $\mathcal{F}$ が $\exists D \in [A]^{<\omega}(D \in \mathcal{F})$ か $\forall D \in [A]^{<\omega}(D \notin \mathcal{F})$ かどうかで場合分けします.
$\exists D \in [A]^{<\omega}(D \in \mathcal{F})$ だったとき, そんな有限集合 D を固定すれば $\exists ! x \in D(\{x\} \in \mathcal{F})$ です.

$\because$ $\forall x \in D(\{x\} \notin \mathcal{F})$ だったとすれば, filter が $\mathcal{F}$ であることから $\forall x \in D(X \setminus \{x\} \in \mathcal{F})$ です．$\mathcal{F}$ は filter なので $\bigcap_{x \in D}(X \setminus \{x\}) \in \mathcal{F}$ ですが, $\bigcap_{x \in D}(X \setminus \{x\}) = X \setminus D$ より，これは $D \in \mathcal{F}$ に矛盾．一意性については $x, x' \in D$ に対して $\{x\}, \{x'\} \in \mathcal{F}$ とすれば, $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset \in \mathcal{F}$ となって, $\mathcal{F}$ が proper であることに矛盾です．

そんな $x \in D$ を固定すれば, $\mathcal{F} = \{ X \subseteq A \mid x \in X \}$ であること，つまり $\mathcal{F}$ が principal であることは明らかです．
$\forall D \in [A]^{<\omega}(D \notin \mathcal{F})$ だったとき, $\mathcal{F}$ が ultra より $\forall D \in [A]^{<\omega}(A \setminus D\mathcal{F})$ です．任意に取った $X \subseteq A$ が補有限集合とするならば, $\exists D \in [A]^{<\omega}(X = A \setminus D)$ です．つまり $X \in \mathcal{F}$ より, $\mathcal{F}$ がどの補有限集合も要素に持つことから $\mathcal{F}$ は non-principal です． □

ここまでの証明と同じようにして極大な ideal についても同様のことを示すことができます．ただ慣習なのか ultra filter と同様の性質をもつ ideal を ultra ideal と呼んだりはしないようです．

Corollary 3.0.11.
A 上の ideal $\mathcal{I}$ に対して, 以下は同値

(1) $\mathcal{I}$ は A 上の proper ideal の中で極大（maximal）．

(2) $\forall X \subseteq A(\ X \in \mathcal{I}\ \veebar\ A \setminus X \in \mathcal{I}\ )$. ■

Corollary 3.0.12.
集合 A 上の maximal ideal は principal か non-principal のいずれか一方になる． ■

最後に ultra filter は存在するのかを確かめます．それを示すためには選択公理, それと同値な Zorn の補題を必要とします．

Lemma 3.0.13（ultra filter の補題）．
選択公理を仮定する．集合 A 上の任意の filter $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}$ を含むような A 上の ultra filter が存在する． ■

Proof　任意に A 上の filter $\mathcal{F}$ をとります．$\mathfrak{F} = \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A) \mid \mathcal{A}\text{: filter} \wedge \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \}$ とおくと, $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ は半順序集合で, 帰納的です．なぜならば任意に $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ の全順序部分集合 $\mathfrak{C}$ をとると, $\bigcup \mathfrak{C}$ が $\mathfrak{C}$ の極大要素になっているからです．Zorn の補題から, $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ には極大要素, つまり maximal filter が存在しますが, Proposition 3.0.9 より, それは $\mathcal{F}$ を含む A 上の ultra filter です． □

Corollary 3.0.14.
集合 A に対して $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が有限交叉性をもつならば, $\mathcal{S}$ を含むような A 上の ultra filter が存在する． ■

Proof　$\mathcal{S}$ より生成された filter $\mathcal{F}$ に対して, Lemma 3.0.13 と同様にして証明できます． □

3.0.3　ω 上の ultra filter

ここでは ω 上の ultra filter についてまとめます．まずは p-filter について定義します．

Definition 3.0.15.
ある集合上の filter $\mathcal{F}$ が **P-filter** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \{X_n\}_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{F}\ \exists X \in \mathcal{F}\big(\ \forall n \in \omega(\ X \subseteq^{\star} X_n\ )\ \big)$. ここで $X \subseteq^{\star} X_n$ とは $|X \setminus X_n| < \omega$ ということです．ある filter が P-filter かつ ultra だったとき, そんな filter を **P-point** と呼ぶ． ■

3.1　Cantor 空間と Baire 空間まとめ

Cantor 空間と Baire 空間は公理的集合論の基本的な対象です．しかし丁寧な解説を私はあまり見たことがありませんでした．なので自分なりに位相空間論をベースにして，この 2 つの空間についての知識をまとめておきます．
まずここで定義だけ簡単にまとめておきます．そのさい 2.2.5 節（60 ページ）での直積位相の知識を用います．

$\{\ (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\ \}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とします. $\forall\lambda, \lambda' \in \Lambda(\ X_\lambda = X_{\lambda'}\ \wedge\ \mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{\lambda'}\ )$ の場合, つまり因子空間が全て同じだった場合を考えます. このとき同じ位相空間の Λ 個の直積と思えます. すると

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \ = \ {}^{\Lambda}X_\lambda \ = \ \{\ f \mid f\colon \Lambda \to X_\lambda\ \}$$

となります. つまり $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は Λ から X_λ への関数全体と一致します. よってこの位相空間の点は, すべて同じ定義域・値域の関数になっています.
$\{\ X_\lambda\ \}_{\lambda\in\Lambda}$ が全ての要素が空でなく異なる要素が属す可能性がある一般的な場合には, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ であることを主張するには選択公理が必要（直積定理,Lemma 2.1.9）でしたが, この場合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は単なる関数の集合なので, それが空であることを主張するのに選択公理は必要ありません.
また X_λ は λ ごとに区別する必要がないため, ${}^{\Lambda}X_\lambda$ を単に ${}^{\Lambda}X$ と書くことにします.
X を離散位相空間とし, $\Lambda = \omega,\ X = 2 = \{0, 1\}$ とした直積位相空間を ${}^{\omega}2$ と, $\Lambda = \omega,\ X = \omega$ とした直積位相空間を ${}^{\omega}\omega$ と表すことにします. この 2 つの空間に以下のように名前が付いています.

Definition 3.1.1（Cantor 空間と Baire 空間）.
Cantor 空間とは, 直積位相空間 ${}^{\omega}2$ のことで, ここで各 $2 = \{0, 1\}$ には離散位相が入っているものとする.
同様に Baire 空間とは, 直積位相空間 ${}^{\omega}\omega$ のことで, ここで各 ω には離散位相が入っているものとする. ■

3.1.1 Cantor 空間と Baire 空間の開集合

何らかの位相空間が与えられたとき, どんな集合がその空間の開集合になっているかは, 1 つの（もしかしたら一番大事な）関心事だと思います. Definition 3.1.1（72 ページ）で定義した 2 つの位相空間の開集合はどのようなものか説明します.
まずは以下のような関数の集合を定義します.

Definition 3.1.2.
集合 A に対して

$$\begin{aligned} {}^{<\omega}A &\overset{\text{def}}{=} \{\ s \mid \exists X \subseteq \omega\big(\ |X| < \omega\ \wedge\ s\colon X \to A\ \big)\ \} \\ &= \ \{\ s\colon X \to A \mid X \subseteq \omega \wedge\ |X| < \omega\ \}. \end{aligned}$$ ■

$A = 2$ とした ${}^{<\omega}2$ について考えると, $s \in {}^{<\omega}2$ とはその定義から, 定義域が ω の有限部分集合で, 値域が 2 であるような, 何らかの関数のことです. $t \in {}^{<\omega}\omega$ も同様に定義域が ω の有限部分集合で, 値域が ω であるような, 何らかの関数のことです. このような関数には以下のような名前が付いています.

Definition 3.1.3.
$s \in {}^{<\omega}2$ と $t \in {}^{<\omega}\omega$ に対して

- s は ω から 2 への**有限部分関数**（**finite partial function**）という.
- t は ω から ω への**有限部分関数**（**finite partial function**）という.

ゆえに ${}^{<\omega}2$ は ω から 2 への有限部分関数全体の集合に, ${}^{<\omega}\omega$ は ω から ω への有限部分関数全体の集合になります. ■

finite partial function という名前は [16] の 173 ページを参考にして, 有限部分関数はそれを訳したものです.
各 $s \in {}^{<\omega}2$ や $t \in {}^{<\omega}\omega$ を用いることで, ${}^{\omega}2$ や ${}^{\omega}\omega$ の部分集合を定義します.

Definition 3.1.4.
$s \in {}^{<\omega}2$ と $t \in {}^{<\omega}\omega$ に対して

$$\begin{aligned} O(s) &\overset{\text{def}}{=} \{\ f \in {}^{\omega}2 \mid \forall n \in \operatorname{dom} s\big(\ s(n) = f(n)\ \big)\ \} \\ &= \ \{\ f \in {}^{\omega}2 \mid s = f{\restriction}\operatorname{dom}(s)\ \} \\ &= \ \{\ f \in {}^{\omega}2 \mid f \text{ は } s \text{ の拡大}\ \}. \end{aligned}$$

同様に $O(t) \overset{\text{def}}{=} \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid \forall n \in \operatorname{dom} t\big(\ t(n) = f(n)\ \big)\,\}$.
$O(s)$ を s を元にした ${}^{\omega}2$ の **basic set** とよぶ. 同様に $O(t)$ を t を元にした ${}^{\omega}\omega$ の **basic set** とよぶ. [1] ■

$O(s)$ という記法は [14] を参考にしています. この $O(s)$ はテキストによっては $[s]$ と表したりします（例えば [23] など）.
$O(s)$ や $O(t)$ は s, t を拡大した関数全体の集合であり, その定義から $O(s) \subseteq {}^{\omega}2$, $O(t) \subseteq {}^{\omega}\omega$ です.
この basic set でもって ${}^{\omega}2$ や ${}^{\omega}\omega$ の開集合を表現します.

Proposition 3.1.5.
集合 $\mathcal{B}$ に対して

- $\mathcal{B} = \{\, O(s) \mid s \in {}^{<\omega}2\,\}$ のとき, $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}2$ は Cantor 空間の開基である.
- $\mathcal{B} = \{\, O(s) \mid s \in {}^{<\omega}\omega\,\}$ のとき, $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ は Baire 空間の開基である. ■

この証明は○○にてやることにします（今はこの空間たちを使えるようになることだけを目的としてます）.
つまり集合 $O \subseteq {}^{\omega}2$ が ${}^{\omega}2$ の開集合ならば, ある $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ があって $O = \bigcup \mathcal{A}$ となっている. よって $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}2)$ を ${}^{\omega}2$ の開集合系とすると, $\mathcal{O} = \{ \bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \}$ となります. Baire 空間も同様です.
開基の定義から basic set は Cantor 空間や Baire 空間の開集合です. よって一般的には basic set は **basic open set** と呼ばれることが多いです.
位相空間の定義から $\emptyset, {}^{\omega}2$ は ${}^{\omega}2$ の開集合です. $\emptyset \in \mathcal{O}$ であるとは $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ を $\mathcal{A} = \emptyset$ とすれば明らかです.
${}^{\omega}2 \in \mathcal{O}$ であることを示すために, ある $n \in \omega$ を用いて $s_0, s_1 \colon \{n\} \to 2$ を $s_i(n) = i$ な, たった 1 つの対応規則のみの関数とします. 関数を順序対の集合としてとらえるなら $s_i = \{\langle n, i \rangle\}$ です. すると $O(s_i)$ は n の値が i になる ω から 2 への関数全体の集合になり, $O(s_0) \cup O(s_1)$ は n の値が 0 か 1 かの ω から 2 への関数全体の集合, つまり ω から 2 への関数全体の集合, すなわち ${}^{\omega}2$ になります. よって ${}^{\omega}2 \in \mathcal{O}$ を示すためには $\mathcal{A} = \{O(s_0), O(s_1)\}$ とすればよいです.
同様にして $\mathcal{O} \subseteq {}^{\omega}\omega$ を Baire 空間の開集合系とすると, $\emptyset \in \mathcal{O}$ も同様に明らかで, ${}^{\omega}\omega \in \mathcal{O}$ はある n を用いて

$$\mathcal{A} \ = \ \{\, O(s_i) \mid i \in \omega \ \wedge \ s_i(n) = i \,\}$$

とすれば, $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \omega} O(s_i) = {}^{\omega}\omega$ となります.
実は Proposition 3.1.5（73 ページ）よりも要素が少なくなった別の開基が存在します. 次節にてそれについてと, 有限部分関数とそれを元にした basic set との関係を紹介します.

3.1.2　Cantor 空間と Baire 空間の別の開基表現

Cantor 空間と Baire 空間は Proposition 3.1.5（73 ページ）にあるような開基で議論されることは少ない（ような気がします）.
これからの議論に使うための basic set の集合を定義しておきます.

Definition 3.1.6.
$\mathcal{B}_{\triangleleft} \subseteq {}^{\omega}2, {}^{\omega}\omega$ を以下のように定める.

- $\mathcal{B}_{\triangleleft} \ = \ \{\, O(s) \mid \exists n \in \omega(\ s \colon n \to 2\ )\,\}$.
- $\mathcal{B}_{\triangleleft} \ = \ \{\, O(s) \mid \exists n \in \omega(\ s \colon n \to \omega\ )\,\}$. ■

同じ用語を 2 つの意味で使うことになりますが, 2 つの空間を同時に扱わなければ混乱はないと思うので, このまま使っていくことにします.
ある $n \in \omega$ について, $s \colon n \to 2, t \colon n \to \omega$ は確かに ω から 2 や ω への有限部分関数, つまり $s \in {}^{<\omega}2, t \in {}^{<\omega}\omega$ ですが, $n \in \omega$ より定義域が単なる ω の有限部分集合ではなく, 何らかの（順序数の意味での）自然数 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ となっています. つまり $\mathcal{B}_{\triangleleft} \subseteq \mathcal{B}$ であり, 元の定義の開基よりも明らかの要素が減っているため, これもまた開基になるのか一見明らかではないですが, 確かに $\mathcal{B}_{\triangleleft}$ もまた, Cantor 空間や Baire 空間の開基となります.

[1] 一般的には「s を元にした」は付けない. ただ言葉の成り立ちからそのような前置きが必要ではと感じてこのように名前を付けました.

Proposition 3.1.7.
$\mathcal{B}_{\triangleleft}$ は Cantor 空間の開基である.
また $\mathcal{B}_{\triangleleft}$ は Baire 空間の開基である. ■

Proof まずは Cantor 空間について示します. $\mathcal{B}_{\triangleleft} \subseteq \mathcal{B}$ であるので, 任意の $\mathcal{B}$ の要素を $\mathcal{B}_{\triangleleft}$ の要素の和で表現できることを示せばよいので, 任意に $O(s) \in \mathcal{B}$ をとります. $s \in {}^{<\omega}2$ の定義域 $\mathrm{dom}(s)$ を $\mathrm{dom}(s) = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ とおくと, $\mathrm{dom}(s) \subseteq a_m = \{0, 1, \ldots, a_{m-1}\}$ です. s に対して $T_s \subseteq {}^{<\omega}2$ を $T_s = \{\, t\colon a_m \to 2 \mid t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s \,\}$ と定めます. T_s とは s の拡大で, s の定義域の中で a_{m-1} までの足りない自然数を全て補った関数全体の集合です. あとは $O(s) = \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ を示せば証明終わりです.

集合の等号関係を示す.

$O(s) \subseteq \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ の証明
任意に $f \in O(s)$ をとる. $t = f{\restriction}a_m$ とおくと $\mathrm{dom}(s) \subseteq a_m$ より $t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s$ より $t \in T_s$ です. よって $f \in O(t)$, つまり $f \in \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ です.

$\bigcup_{t \in T_s} O(t) \subseteq O(s)$ の証明
任意に $f \in \bigcup_{t \in T_s} O(t)$ をとると, ある $t \in T_s$ があって $f \in O(t)$, つまり $f{\restriction}\mathrm{dom}(t) = t$ です. $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $f{\restriction}\mathrm{dom}(s) = t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s$ なので, $f \in O(s)$ です.

ここまで特に各 s, t などの値域が 2 であることに依存した証明をしていないので, Baire 空間についても同様に示すことができます. □

この証明によって Proposition 3.1.5（73 ページ）の $\mathcal{B}$ も $\mathcal{B}_{\triangleleft}$ のどちらも Cantor 空間, Baire 空間の開基なので, どちらを証明に用いても問題なく, そのときの議論や証明にあわせて使いやすい方を適宜選択します.
便利の為以下のような定義をしておきます. 記法は（多分）オリジナルです.

Definition 3.1.8.
${}^{<\omega}2$ や ${}^{<\omega}\omega$ の部分集合として以下のようなものを定義する.

- ${}^{\triangleleft\omega}2 \overset{\text{def}}{=} \{\, s \in {}^{<\omega}2 \mid \exists n \in \omega(n = \mathrm{dom}(s)) \,\}$.
- ${}^{\triangleleft\omega}\omega \overset{\text{def}}{=} \{\, s \in {}^{<\omega}\omega \mid \exists n \in \omega(n = \mathrm{dom}(s)) \,\}$. ■

どのような点に便利かというと上の議論での開基 $\mathcal{B}_{\triangleleft}$ を, 簡単に $\{\, O(t) \mid t \in {}^{\triangleleft\omega}2 \,\}$ と書き表すことができます. またこれらの集合は有限列の集合ともとらえることができます.

この節の最後の話題として, ${}^{\triangleleft\omega}2, {}^{\triangleleft\omega}\omega$ の性質をまとめおきます.
${}^{<\omega}2$ などとの違いとして, どの $s, t \in {}^{\triangleleft\omega}2$ に対しても, $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ か $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(s)$ のどちらかもしくは両方が成立します. $s, t \in {}^{<\omega}2$ ならば $\mathrm{dom}(s) \cap \mathrm{dom}(t) = \emptyset$ となって, 上記のようにはならないことがありえます.
続いて ${}^{<\omega}2$ や ${}^{\omega}2$ の要素に関する用語を定義します. ここからは [14] や [16] を主に参考にしています.

Definition 3.1.9.
$s, t \in {}^{<\omega}2$ と $f \in {}^{\omega}2$ に対して,

(1) $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ かつ $\forall n \in \mathrm{dom}(s)\big(\, s(n) = t(n) \,\big)$ を満たすとき, s を t の **initial segment**（**始切片**）と呼び, $s \trianglelefteq t$ で表す.

(2) $\forall n \in \mathrm{dom}(s)\big(\, s(n) = f(n) \,\big)$ と満たすときも, s を f の **initial segment**（**始切片**）と呼び, $s \trianglelefteq f$ で表す.

$s, t \in {}^{<\omega}\omega$ や $f \in {}^{\omega}\omega$ に対しても同様に定義し, 同じように initial segment と呼び, $\trianglelefteq$ を使って表す. ■

$s, t \in {}^{\triangleleft\omega}2, {}^{\triangleleft\omega}\omega$ だった場合, s, t を有限列ととらえると initial segment という言葉遣いにも納得してもらえると思います. initial segment とは整列集合のある条件を満たす部分集合のことを指したりもしますが, その場合とは区別が容易なので, ここでは特に別の呼び方を考えたりはしません.
initial segment を表す記号として [14] では $\triangleleft$ を用いていますが, そこの定義でも $s = t$ の場合を含んでいたので, $\trianglelefteq$ を使うことにしました.
s, t が ${}^{\triangleleft\omega}2$ や ${}^{\triangleleft\omega}\omega$ の要素だけで議論しているときに, s, t を順序対の集合と見れば, $s \trianglelefteq t$ とは単に $s \subseteq t$ となります.
そして $\trianglelefteq$ という関係は推移的です. つまり $s, t, u \in {}^{<\omega}2$ と $f \in {}^{\omega}2$ に対して, $s \trianglelefteq t$ かつ $t \trianglelefteq u$ ならば $s \trianglelefteq u$, そして $s \trianglelefteq t$ かつ $t \trianglelefteq f$ ならば $s \trianglelefteq f$ です.
$\trianglelefteq$ を用いた定義を 1 つ用意します. これも [14] にあったものです.

Definition 3.1.10.
$s, t \in {}^{<\omega}2$ に対して, $s||t \overset{\text{def}}{\iff} s \trianglelefteq t \vee t \trianglelefteq s$.
また $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ に対しても同様に定義する. ■

これは有限列同士のどちらかがどちらかの始切片であるという関係になります. もちろん $s||t$ には $s \trianglelefteq t \wedge t \trianglelefteq s$, つまり $s = t$ である場合も含まれています.
[14] では $s||t$ を s, t が compatible, $s||t$ でないことを $s \perp t$ で表し incompatible と呼んでいます. 私自身この言葉は強制法の議論のさいに見たことがあるもので, その定義は似ていますが少し異なります. その理由の考察としては, 本来の $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ が compatible（これは $s \not\perp t$ で表す）であるとは, s, t が共通拡大を持つことになっています. そして [14] ではそもそも ${}^{\triangleleft\omega}\omega$ の要素しか議論しないため, $s, t \in {}^{\triangleleft\omega}\omega$ が共通拡大を持つとはそもそもどちらかがもう一方の拡大になっているときになります. よって $s||t$ に compatible という言葉を充てるのは, それほど間違ってはいません. このノートでは強制法も扱うかもしれないので, ここでは $s||t$ には呼び方を与えず, このまま使っていくことにします.
これまでの用語と basic set に関する簡単な命題を紹介します. [14] に載っていたものです.

Proposition 3.1.11.
$s, t \in {}^{\triangleleft\omega}2$ に対して

(1) $s \trianglelefteq t \iff O(t) \subseteq O(s)$

(2) $s||t \iff \big(\, O(t) \subseteq O(s) \vee O(s) \subseteq O(t) \,\big)$

(3) $\neg s||t \iff O(s) \cap O(t) = \emptyset$

(4) $O(s) \cap O(t)$ は何らかの basic open となるか, または $\emptyset$ のどちらかになる

また $s, t \in {}^{\triangleleft\omega}\omega$ に対して同様に成立する. ■

Proof $s, t \in {}^{\triangleleft\omega}2$ についてのみ示す.

(1) 両辺が同値であることを示す.

($\Rightarrow$) 任意に $f \in O(t)$ をとる. $f{\restriction}\mathrm{dom}(t) = t$ と $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $f{\restriction}\mathrm{dom}(s) = t{\restriction}\mathrm{dom}(s) = s$ だから, $f \in O(s)$.

($\Leftarrow$) 先の議論より $s, t \in {}^{\triangleleft\omega}2$ に対して $\mathrm{dom}(t) \subsetneq \mathrm{dom}(s)$ か $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ のいずれかが成立. まず $\mathrm{dom}(t) \subsetneq \mathrm{dom}(s)$ だったとすると, $n = \min\big(\mathrm{dom}(s) \setminus \mathrm{dom}(t)\big)$ とおき, $t' = t \cup \{\langle n, 1 - s(n)\rangle\}$ とすると $t' \in {}^{\triangleleft\omega}2$ です. そして t^{prime} の何らかの拡大を f とおくと, $t \trianglelefteq t'$ と $t' \trianglelefteq f$ より $t \trianglelefteq f$, つまり $f \in O(t)$ と仮定より $f \in O(s)$ だが, $f(n) \neq s(n)$ より $f \notin O(s)$ となって矛盾.
続けて $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ として $\exists n\, \mathrm{dom}(s)\big(\, s(n) \neq t(n) \,\big)$ だったとし, そんな n を 1 つ固定しておく. 任意に $f \in O(t)$ をとると, $f{\restriction}\mathrm{dom}(t) = t$, そして $n \in \mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より $t(n) = f(n) \neq s(n)$, よって f は s の拡大ではない, つまり $f \notin O(s)$ だが, これは仮定に矛盾.

(2) これは $s||t$ と (1) より明らか.

(3) 両辺が同値であることを示す.

(⇒) 先の議論より $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ か $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(s)$ のどちらかが成立するので, $\mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ だとすると仮定と合わせて $n\,\mathrm{dom}(s)\big(\ s(n) \neq t(n)\ \big)$ となるので, そんな n を 1 つ固定します. いま, $f \in O(s) \cap O(t)$ とすると $s \trianglelefteq f \wedge t \trianglelefteq f$ と, $n \in \mathrm{dom}(s) \subseteq \mathrm{dom}(t)$ より, $s(n) = f(n) \wedge t(n) = f(n)$ から $s(n) = t(n)$ となるが, これは n の定義に矛盾.

(⇐) $O(s) \cap O(t) = \emptyset$ より $O(s) \subseteq O(t)$ でも $O(t) \subseteq O(s)$ でもない, つまり $s \trianglelefteq t$ でも $t \trianglelefteq s$ でもないことになり, つまり $\neg s || t$.

(4) $s||t$ だったとすると (2) より $O(s) \subseteq O(t) \vee O(t) \subseteq O(s)$ となり, そして仮に $O(s) \subseteq O(t)$ だとすると $O(s) \cap O(t) = O(s)$, つまり basic open になっている.
$\neg s||t$ だとすると (3) より $O(s) \cap O(t)$ は $\emptyset$ となる. □

3.1.3 Cantor 空間と Baire 空間の開基についてさらに詳しく

この節ではこれまで使用してきた Proposition 3.1.5（73 ページ）の証明を目標とします. つまり何故全ての basic open set の集合が, どちらの空間においてもその空間の開基になるのかをまとめてみます.
もう一度一般的に議論すると, 添え字集合が ω, 各因子空間の台集合が X であるような直積位相空間 ${}^{\omega}X$ において, その位相は $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}X)$ を

$$\mathcal{G} \;=\; \{\, p_i^{-1}[O] \mid i \in \omega \wedge O \text{ は } X \text{ の open set} \,\}$$

とおいたときの, $\mathcal{G}$ が生成する位相のことでした. ここで各 $\in \omega$ において p_i は第 i 成分の射影です.
${}^{\omega}2$ において $\mathcal{G}$ がどのような集合になるか見てみます. ${}^{\omega}2$ において各因子空間 2 には離散位相が入っています. よって位相空間 2 では $\emptyset, \{0\}, \{1\}, 2$ の 4 つが開集合です. それぞれの開集合の, 各射影での逆像がどのようになるのかというと, ある $i \in \omega$ において $p_i^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ です. $p_i^{-1}[\{0\}]$ とは, ${}^{\omega}2$ の各要素を $0, 1$ の可算列と捉えた場合第 i 成分が 0 になっているような, ${}^{\omega}2$ の各要素を ω から 2 への関数と捉えた場合 i を 0 に写すような, そんなものたちの集合になっています. つまり後者でとらえた場合は,

$$p_i^{-1}[\{0\}] \;=\; \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) = 0 \,\}$$

です. $\{1\}$ も同様にして $p_i^{-1}[\{1\}] \;=\; \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) = 1 \,\}$ となります. そして $p_i^{-1}[2]$ とは ${}^{\omega}2$ の要素の中で i の値が 0 または 1 になっているもの全体ということで, つまり $p_i^{-1}[2] = {}^{\omega}2$ となります. 一般的には $O \subseteq 2$ に対して

$$p_i^{-1}[O] \;=\; \{\, f \in {}^{\omega}2 \mid f(i) \in O \,\}$$

となります.
${}^{\omega}\omega$ においても同様に各因子空間 ω には離散位相が入っている, つまり ω のどの部分集合も ω の開集合です. なので $O \subseteq \omega$ に対して

$$p_i^{-1}[O] \;=\; \{\, f \in {}^{\omega}\omega \mid f(i) \in O \,\}$$

となります.
開集合 O が一元集合のときは, $p_i^{-1}[O]$ は 1 つの basic set になります. それを元にする有限部分関数のための記法を用意します.

Definition 3.1.12.
$i, i_0, \ldots, i_n \in \omega$ に対して

- $k \in 2$ に対して $[i \mapsto k] \;=\; \{\langle i, k\rangle\}$ と定めます. つまり i を k に写すというたった 1 つの対応規則のみの関数のことです. $k \in \omega$ に対しても同様に $[i \mapsto k]$ を定めます.

- $k_0, \ldots, k_n \in 2$ に対して
$$[i_0, \ldots, i_n \mapsto k_0, \ldots, k_n] \;=\; \{\, \langle i_m, k_m\rangle \mid 0 \leq m \leq n \,\}$$
として定め, $k_0, \ldots, k_n \in \omega$ についても同様に定める. ■

つまり $k \in 2$ に対して $p_i^{-1}[\{k\}] = O([i \mapsto k])$ となります. $k \in \omega$ の場合も同様です. より一般的には以下のようになります.

Proposition 3.1.13.
$A \subseteq 2$ に対して $p_i^{-1}[A] = \bigcup_{a \in A} O([i \mapsto a])$. $A \subseteq \omega$ の場合も同様.
とくに

$$p_i^{-1}[2] \;=\; O([i \mapsto 0]) \cup O([i \mapsto 1]) \;=\; {}^{\omega}2.$$
$$p_i^{-1}[\omega] \;=\; \bigcup_{k \in \omega} O([i \mapsto k]) \;=\; {}^{\omega}\omega. \qquad \blacksquare$$

よって ${}^{\omega}2$ の場合, $\mathcal{G}$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} \;&=\; \{\, p_i^{-1}[\emptyset] \mid i \in \omega \,\} \;\cup\; \{\, p_i^{-1}[\{0\,] \mid i \in \omega \,\} \;\cup\; \{\, p_i^{-1}[\{1\,] \mid i \in \omega \,\} \;\cup\; \{\, p_i^{-1}[2] \mid i \in \omega \,\} \\
&=\; \{\emptyset, \emptyset, \ldots\} \;\cup\; \{\; O([0 \mapsto 0]), O([0 \mapsto 1]), \ldots \;\} \;\cup\; \{\; O([1 \mapsto 0]), O([1 \mapsto 1]), \ldots \;\} \;\cup\; \{{}^{\omega}2, {}^{\omega}2, \ldots\} \\
&=\; \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \;\cup\; \{\, O([i \mapsto 0]) \mid i \in \omega \,\} \;\cup\; \{\, O({}^{<)i}1 \mid i \in \omega \,\} \\
&=\; \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \;\cup\; \{\, O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in 2 \,\}
\end{aligned}$$

となります. ${}^{\omega}\omega$ の場合 $\mathcal{G}$ は同様にして

$$\mathcal{G} \;=\; \{\emptyset, {}^{\omega}\omega\} \;\cup\; \{\, O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in \omega \,\}$$

となります.
ここまでの議論をまとめておきます.

Proposition 3.1.14.
$\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}2), \mathcal{G}_\omega \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}\omega)$ を

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2 \;&=\; \{\emptyset, {}^{\omega}2\} \;\cup\; \{\, O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in 2 \,\}, \\
\mathcal{G}_\omega \;&=\; \{\emptyset, {}^{\omega}\omega\} \;\cup\; \{\, O([i \mapsto k]) \mid i \in \omega \wedge k \in \omega \,\}
\end{aligned}$$

とすると, Cantor 空間の位相は $\mathcal{G}_2$ が生成する位相, Baire 空間の位相は $\mathcal{G}_\omega$ が生成する位相である. $\blacksquare$

もう一度位相空間論に戻ると, ある集合 $\mathcal{G}$ が生成する位相とは, $\mathcal{G}$ の全ての要素を開集合とするような最弱の位相で, それは Lemma 2.2.22（56 ページ）より $\mathcal{G}$ を準基とするような, つまり開基の $\mathcal{G}$ の要素の有限個の共通部分全体になります. よってそんな開基を $\mathcal{B}$ とおくと

$$\mathcal{B} \;=\; \{\; \bigcap_{0 \le i \le n} G_i \;\mid\; n \in \omega \wedge G_0, \ldots, G_n \in \mathcal{G} \,\}$$

です.
よって先ほどの Proposition 3.1.14（77 ページ）での $\mathcal{G}_2$ や $\mathcal{G}_\omega$ の有限個の要素で共通部分をとるとどのようになるか調べます.

Proposition 3.1.15.
互いに異なる $i, i_0, \ldots, i_n \in \omega$ と $A_0, \ldots, A_n \subseteq \omega$ に対して

1. $k_0, k_1 \in 2$ が $k_0 \neq k_1$ ならば $O([i \mapsto k_0]) \cap O([i \mapsto k_1]) = \emptyset$.
   より一般的には $O([i \mapsto k]) \cap O([i \mapsto 1-k]) = \emptyset$.
2. $k_0, \ldots, k_n \in 2$ に対して $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} O([i_m \mapsto k_m]) = O([i_0, \ldots, i_n \mapsto k_0, \ldots, k_n])$.
3. $k_0, \ldots, k_n \in \omega$ に対して $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} O([i \mapsto k_m]) = \emptyset$.
4. $\displaystyle(\bigcup_{a \in A_0} O([i \mapsto a])) \cap (\bigcup_{a \in A_1} O([i \mapsto a])) = \bigcup_{a \in A_0 \cap A_1} O([i \mapsto a])$.
   とくに $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ のとき $\displaystyle(\bigcup_{a \in A_0} O([i \mapsto a])) \cap (\bigcup_{a \in A_1} O([i \mapsto a])) = \emptyset$.
5. $\displaystyle\bigcap_{0 \le m \le n} \;(\; \bigcup_{a \in A_m} O([i_m \mapsto a]) \;) = \bigcup_{a_0 \in A_0, \ldots, a_n \in A_n} O([i_0, \ldots, i_n \mapsto a_0, \ldots, a_n])$. $\blacksquare$

参考文献

[1] Wikipedia『基底 (位相空間論)』, 6 2018. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9F%BA%E5%BA%95_(%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%96).

[2] Wikipedia『順序対』, 5 2019. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%A0%86%E5%BA%8F%E5%AF%BE.

[3] Wikipedia『高々 (数学)』, 4 2020. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%AB%98%E3%80%85_(%E6%95%B0%E5%AD%A6).

[4] Wikipedia『日本の色の一覧』, 11 2020. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A5%E6%9C%AC%E3%81%AE%E8%89%B2%E3%81%AE%E4%B8%80%E8%A6%A7.

[5] Wikipedia『文字列結合』, 1 2020. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%96%87%E5%AD%97%E5%88%97%E7%B5%90%E5%90%88.

[6] Wikipedia『ハッシュ関数』, 9 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8F%E3%83%83%E3%82%B7%E3%83%A5%E9%96%A2%E6%95%B0#%E8%AA%9E%E6%BA%90.

[7] Wikipedia『構造的帰納法』, 4 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%A7%8B%E9%80%A0%E7%9A%84%E5%B8%B0%E7%B4%8D%E6%B3%95.

[8] Wikipedia『数学的構造』, 7 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E7%9A%84%E6%A7%8B%E9%80%A0.

[9] Wikipedia『代数的数』, 8 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B0%E7%9A%84%E6%95%B0.

[10] Wikipedia『不等号』, 8 2021. https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%8F%B7.

[11] Herbert Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition.* Academic Press, 12 2000. https://www.elsevier.com/books/a-mathematical-introduction-to-logic/enderton/978-0-08-049646-7
Amazon の URL.

[12] Christopher S Hardin and Alan D Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-*. 11 2012. おそらく [13] の出版前原稿.
http://qcpages.qc.cuny.edu/~rmiller/abstracts/Hardin-Taylor.pdf.

[13] Christopher S Hardin and Alan D Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference -A Study of Generalized Hat Problems-*. Springer, 10 2013. 本当はタイトルに「-」は入っていないがファイル名として採用できるようにこのように修正した.[12] も同様.
https://www.springer.com/gp/book/9783319013329
Amazon の URL.

[14] Yurii Khomskii. Infinite games-summer course at the university of sofia, bulgaria, 7 2010. https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/infinitegames2010/Infinite%20Games%20Sofia.pdf.

[15] Alex Kruckman. Notes on ultrafilters, 7 2011. 著者の HP（https://akruckman.faculty.wesleyan.edu/notes-slides/）から発見したもの.toolbox seminar という企画で発表したものらしい. 他にも面白そうな PDF がたくさん配置されている.
https://akruckman.faculty.wesleyan.edu/files/2019/07/ultrafilters.pdf.

[16] Kenneth Kunen. *Set Theory (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations)*. College Publications, 11 2011. https://www.collegepublications.co.uk/logic/mlf/?00016
Amazon の URL.

[17] 新井紀子. 数学は言葉. 東京図書, 9 2009. http://www.tokyo-tosho.co.jp/books/ISBN978-4-489-02053-7.html
Amazon の URL.

[18] 佃修一. 幾何学序論講義ノート, 4 2013. http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/note_2013.

[19] 嘉田勝. 論理と集合から始める数学の基礎. 日本評論社, 12 2008. https://www.nippyo.co.jp/shop/book/4116.html
Amazon の URL.

[20] 嘉田勝. 論理学への数学的手引き. 1 月と 7 月, 11 2020. [11] の和訳.
Amazon の URL.

[21] 佐野勝彦, 倉橋太志, 薄葉季路, 黒川英徳, 菊池誠. 数学における証明と真理 様相論理と数学基礎論. 共立出版, 3 2016. https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320111486
Amazon の URL.

[22] 中島匠一. 集合・写像・論理 -数学の基本を学ぶ. 共立出版, 2 2012. https://www.kyoritsu-pub.co.jp/kenpon/bookDetail/9784320110182
Amazon の URL.

[23] 渕野昌. 実数の集合論の基礎の基礎, 10 2003. https://fuchino.ddo.jp/notes/set-th-of-reals-kiso-no-kiso.pdf.

[24] 齋藤正彦. 数学の基礎 集合・数・位相 (基礎数学 14). 東京大学出版会, 8 2002. http://www.utp.or.jp/book/b302226.html
Amazon の URL.

[25] 菊池誠. 不完全性定理. 共立出版, 10 2014. https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320110960
Amazon の URL.

[26] 内田伏一. 集合と位相 (数学シリーズ). 裳華房, 11 1986. https://www.shokabo.co.jp/mybooks/ISBN978-4-7853-1401-9.htm
Amazon の URL.

[27] 佐藤文広. 数学ビギナーズマニュアル 第 2 版. 日本評論社, 2 2014. https://www.nippyo.co.jp/shop/book/6447.html
Amazon の URL.

[28] 坪井明人. 数理論理学の基礎・基本. 牧野書店, 3 2012. Amazon の URL.

[29] 鹿島亮. 数理論理学 現代基礎数学 15. 朝倉書店, 10 2009. https://www.asakura.co.jp/detail.php?book_code=11765
Amazon の URL.

[30] 戸田山和久. 論理学をつくる. 名古屋大学出版会, 10 2000. https://www.unp.or.jp/ISBN/ISBN4-8158-0390-0.html
Amazon の URL.

索 引