电动力学考前复习及习题练习

洛白

2023 年 6 月 22 日

目 录

1 矢量基础

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}e_x + \frac{\partial}{\partial y}e_y + \frac{\partial}{\partial z}e_z \tag{1.1.a}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.b}$$

1.1 向量表示

1.2 标量场

1.2.1 梯度 ∇f

定义 1.1 (方向导数)**.** 标量函数 f 沿着某一个方向变化的速率，可以记作 $grad\mathrm{f} \cdot \vec{e}$

最大的方向导数我们叫做**梯度**，记作 $grad\mathrm{f} \equiv \nabla \mathrm{f} = (\frac{\partial}{\partial x}e_x + \frac{\partial}{\partial y}e_y + \frac{\partial}{\partial z}e_z)f$

定义 1.2 (等值面)**.**

$$u(x, y, z) = c$$

1.3 矢量场

定义 1.3 (矢量线)**.** 它与 M 处 $\mathrm{d}r$ 平行，对于如下函数

$$\vec{A}(t) = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z$$

有

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z}$$

定义 1.4 (通量)**.** 对于一个矢量场 $\vec{F}$，它穿过一

个面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的通量为

$$\mathrm{d}\psi = \vec{F}\mathrm{d}\sigma e_n = \vec{F}\mathrm{d}\sigma\cos\theta \tag{1.2}$$

1.3.1 散度 div $\triangledown\cdot\vec{A}$

因为通量不能很好地反映曲面上某一点地发散性质，所以引入三度。他表示空间某点单位体积的通量，设在闭合曲面 S 上，下面极限存在

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\int \mathrm{d}\psi}{\Delta v} = \Delta\cdot\vec{A} = (\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}) \tag{1.3}$$

1.3.2 环量和旋度 $\triangledown\times\vec{A}$

定义 1.5 (环量)**.**

$$\oint_l F\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l F\cdot\mathrm{d}l\cos\theta \tag{1.3}$$

$$rot\vec{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l F\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}}{\Delta s} = \triangledown\times\vec{A}\oint_l F\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{1.4}$$

1.4 矢量微积分定理

(1.5.a)

(1)

1.5 其他常用公式

1.5.1 矢量三重积

$$A\times(B\times C) = B(A\cdot C) - C(A\cdot B) \tag{1.8.a}$$

$$(A\times B)\times C = -C\times(A\times B) = -A(B\cdot C) + B(A\cdot C) \tag{1.8.b}$$

1.5.2 标量三重积

$$A\cdot(B\times C) = B\cdot(C\times A) = C\cdot(A\times B) \tag{1.7}$$

1.5.3 运算规律

$$grad\,[f(u,v)] = \frac{\partial f}{\partial u}gradu + \frac{\partial f}{\partial v}gradv \tag{1.6.a}$$

$$div(u\overrightarrow{A}) = udiv\overrightarrow{A} + gradu\cdot\overrightarrow{A} \tag{1.6.b}$$

$$\nabla\cdot(A\times B) = B\cdot(\nabla\times A) - A\cdot(\nabla\times B) \tag{1.6.c}$$

$$\triangledown\times(\triangledown f) = 0 \tag{1.6.d}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 \tag{1.6.e}$$

$$\nabla(A\cdot B) = A\times(\nabla\times B) + B\times(\nabla\times A) + (A\cdot\nabla)B + (B\cdot\nabla)A \tag{1.6.f}$$

$$\nabla\times(A\times B) = (\nabla\cdot B)(A+B) - (\nabla\cdot A)(A-B) \tag{1.6.g}$$

1.6 坐标系的哈密顿算子和拉梅系数

拉梅系数如下

$$h_i = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial y}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial z}{\partial x_i})^2} \tag{1.7}$$

并且有 $\mathrm{d}s_i = h_i\mathrm{d}x_i$, 所以在正交坐标系下有

$$\mathrm{d}\vec{l} = \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}s_i\vec{e}_i \tag{1.8.a}$$

$$dl^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = h_1^2dx_1^2 + h_2^2dx_2^2 + h_3^2dx_3^2 \tag{1.8.b}$$

$$dV = ds_1ds_2ds_3 = h_1h_2h_3dx_1dx_2dx_3 \tag{1.8.c}$$

$$dS = dS_{23}e_1 + dS_{13}e_2 + dS_{12}e_3 \tag{1.8.d}$$

$$dS_{23} = dS_2dS_3 = h_2h_3dx_2dx_3\text{其他同理} \tag{1.8.e}$$

1.7 哈莫顿算子的一般表达式

$$\nabla = \overline{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \overline{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \overline{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

1.7.1　不同坐标系的拉梅系数

坐标系	h_1	h_2	h_3
笛卡尔	1	1	1
圆柱坐标	1	r	1
球坐标	1	r	$r\sin\theta$

坐标系	x	y	z
笛卡尔	x	y	z
圆柱坐标	$r\cos\phi$	$r\sin\phi$	z
球坐标	$r\sin\theta\cos\phi$	$r\sin\theta\sin\phi$	$r\cos\eta$

1.7.2　对于一般的坐标系

$$\nabla = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}e_{x_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}e_{x_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{x_3}e_{x_3} \tag{1.9.c}$$

$$\nabla\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}e_{x_1} + \frac{1}{h_2}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial y}e_{x_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z}e_{x_3} \tag{1.9.d}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_2h_3\vec{A}_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1h_3\vec{A}_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1h_2\vec{A}_{x_3})}{\partial x_3}\right) \tag{1.9.e}$$

$$\nabla\times\vec{A} = h_1h_2h_3\begin{vmatrix} h_1e_{x_1} & h_2e_{x_2} & h_2e_{x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1\vec{A}_{x_1} & h_2\vec{A}_{x_2} & h_3\vec{A}_{x_3} \end{vmatrix} \tag{1.9.f}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right] \tag{1.9.g}$$

1.8　并矢和张量

1.9　一些常用公式

1.9.1　源点场点

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}' \tag{1.10}$$

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.11.a}$$

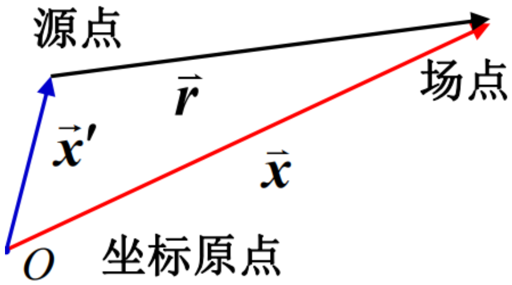
$$\nabla' r = -\frac{\vec{r}}{r} = -\nabla r \tag{1.11.a}$$

$$\nabla\cdot\vec{r} = -\nabla'\vec{r} = 3 \tag{1.11.b}$$

$$\nabla\times\vec{r} = \nabla'\times\vec{r} = 0 \tag{1.11.c}$$

$$\nabla f(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u \tag{1.11.d}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \nabla\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}u} \tag{1.11.e}$$



1.10　δ 函数

$$\int f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x \tag{1.12}$$

x_0 如果在积分范围里面就是 $f(x_0)$, 反之为 0;

1.11　矢量场 Helmholtz 定理

空间区域 V 上的任意矢量场，如果它的**散度**、**旋度** 和**边界条件** 已知，则该矢量场唯一确定，并可表示为无散矢量场和无旋矢量场的叠加

2　电磁现象

2.1　电场

定理 2.1 (库仑定律).

$$\vec{F} = \frac{qq'\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \vec{F'} = -\vec{F} \tag{2.1}$$

2.1.1 电场

(2.2)

2.1.2 高斯定律

2.2 磁场

2.3 麦克斯韦方程组

2.4 介质的极化

2.4.1 极化电流