电动力学考前复习及习题练习

洛白

2023 年 6 月 20 日

目　录

1　矢量基础

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}e_x + \frac{\partial}{\partial y}e_y + \frac{\partial}{\partial z}e_z \tag{1.1.a}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.b}$$

1.1　向量表示

1.2　标量场

1.2.1　梯度 ∇f

定义 1.1 (方向导数)**.** 标量函数 f 沿着某一个方向变化的速率，可以记作 $grad\mathrm{f} \cdot \vec{e}$

最大的方向导数我们叫做**梯度**，记作 $grad\mathrm{f} \equiv \nabla\mathrm{f} = (\frac{\partial}{\partial x}e_x + \frac{\partial}{\partial y}e_y + \frac{\partial}{\partial z}e_z)f$

定义 1.2 (等值面)**.**

$$u(x, y, z) = c$$

1.3　矢量场

定义 1.3 (矢量线)**.** 它与 M 处 $\mathrm{d}r$ 平行，对于如下函数

$$\vec{A}(t) = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z$$

有

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z}$$

定义 1.4 (通量)**.** 对于一个矢量场 $\vec{F}$, 它穿过一

个面元 dσ 的通量为

$$d\psi = \vec{F} d\sigma e_n = \vec{F} d\sigma \cos\theta \tag{1.2}$$

1.3.1 散度 div $\nabla \cdot \vec{A}$

因为通量不能很好地反映曲面上某一点地发散性质，所以引入三度。他表示空间某点单位体积的通量，设在闭合曲面 S 上，下面极限存在

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\int d\psi}{\Delta v} = \Delta \cdot \vec{A} = (\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}) \tag{1.3}$$

1.3.2 环量和旋度 $\nabla \times \vec{A}$

定义 1.5 (环量).

$$\oint_l F \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_l F \cdot dl \cos\theta \tag{1.3}$$

$$rot\vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_l F \cdot d\mathbf{l}}{\Delta s} = \nabla \times \vec{A} \oint_l F \cdot d\mathbf{l} \tag{1.4}$$

1.4 矢量微积分定理

(1.5.a)

(1)

1.5 其他常用公式

1.5.1 矢量三重积

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \tag{1.8.a}$$

$$(A \times B) \times C = -C \times (A \times B) = -A(B \cdot C) + B(A \cdot C) \tag{1.8.b}$$

1.5.2 标量三重积

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \tag{1.7}$$

1.5.3 运算规律

$$grad\,[f(u, v)] = \frac{\partial f}{\partial u} gradu + \frac{\partial f}{\partial v} gradv \tag{1.6.a}$$

$$div(u\overrightarrow{A}) = udiv\overrightarrow{A} + gradu \cdot \overrightarrow{A} \tag{1.6.b}$$

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) \tag{1.6.c}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{1.6.d}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{1.6.e}$$

$$\nabla (A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla) B + (B \cdot \nabla) A \tag{1.6.f}$$

$$\nabla \times (A \times B) = (\nabla \cdot B)(A + B) - (\nabla \cdot A)(A - B) \tag{1.6.g}$$

1.6 坐标系的哈密顿算子和拉梅系数

拉梅系数如下

$$h_i = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial y}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial z}{\partial x_i})^2} \tag{1.7}$$

1.7 一些常用的公式