

术语表

1. 矩阵统一用大写字母表示, 如 A, X 标量用小写字母表示, 如 x, y ;
 - 对于返回值是矩阵的函数, 同理应该为 $F(X)$, 标量函数就记作 $f(x)$
 - 另外, 对于不混淆意思的 $x * 1$ 维度矩阵, 也就是**向量**, 允许用小写字母表示, 如 x, y, x_i
2. 对于矩阵的行列数, 统一用 $\{m, n\}$ 下标表示, 如 $A_{\{m, n\}}$

内参数矩阵 – Camera Intrinsic 6

外参数矩阵 – Camera Extrinsic: 一个 $3 * 4$ 的矩阵 T ,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T'$$

6

λ – **特征值**: 对于矩阵 A , 如果满足

$$Ax = \lambda x$$

λ 就是 A 的特征值, x 是特征向量

10

linear space – 线性空间 2

Tr – 迹: Tr 表示矩阵的迹, 是用于求矩阵对角元素之和的算子

$$\text{Tr}[X] = \sum_i X_{ii}$$

9

数学知识杂烩

1 矩阵论

1.1 线性空间与线性变换

1.1.1 线性空间

在矩阵论中, 将在线性代数的基础上, 推广向量空间 R^n , 一般地定义线性空间的概念。这里参考杨明教授的《矩阵论》¹ 和 Strang, Gilbert 的《Linear Algebra and Its Applications》²。

Definition 1.1.1.1 (线性空间 (linear space)): V 是一个非空集合, F 是一个数域, 在其中定义两种运算, 加法($\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta \in V$)和数乘($\forall k \in F, \alpha \in V, k\alpha \in V$), 如果满足若干运算法则, 就称 V 是数域 F 上的线性空间。

比如 $F_{\{n,1\}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_i \in F\}$ 是 F 上的 $\{n, 1\}$ 维线性空间。

$F_{\{n,m\}} = \{A = (a_{ij})_{\{m \times n\}} \mid a_{ij} \in F\}$ 是 F 上的 $\{m, n\}$ 维矩阵空间 记作 $R_{\{2,2\}}$ ¹

$P_n(x) = \{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i \mid a_i \in R\}$ 称为多项式空间 $P_{n[x]}$

Definition 1.1.1.2: 如果对于线性空间 V 存在一组**线性无关**的向量 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 使得空间中任意一个向量可以由它表示, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 张成了向量空间, 此时有 V 的维度

$$\dim(V) = n$$

Definition 1.1.1.3 (矩阵的逆): 如果对于向量 A , 如果存在 B 使得 $AB = I$, 则称 B 是 A 的逆矩阵, 记作 A^{-1} , 并且说 A 是可逆的, 有时候也叫做非奇异矩阵²。并且

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. A 的各列线性无关, $\dim(A) = n$

1.1.2 内积空间

1.1.2.1 欧氏空间和酉空间

Definition 1.1.2.1.1: 对数域 F 上的线性空间 $V_n(F)$, 定义一个从 $V_n(F)$ 到 F 的二元运算 (α, β) , 记作 $(\alpha, \beta) : V_n(F) \rightarrow F$, 满足以下条件

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$
3. $(\alpha, \alpha) \geq 0$, $(\alpha, \alpha) = 0$ 仅当 $\alpha = 0$

¹这里与教科书上 $R^{2 \times 2}$ 的写法不同, 读者注意。

²在数值运算中, 我们很少求解矩阵的逆, 计算他的计算量是行变换解方程的三倍²

我们就称这个二元运算是线性空间的一个内积，并且定义了内积的线性空间称作内积空间 $[V_n(F); (\alpha, \beta)]$ 。如果 $F = R$ （实数域）就称作欧氏空间；如果 $F = C$ （复数域）就称作酉空间。

下面举几个欧氏空间的例子

1. $[\mathbb{R}^n; (\alpha, \beta) = \alpha^T \beta]$, 习惯上，我们直接将 \mathbb{R}^n 记作欧氏空间。
2. $[R_{\{n,n\}}; (A, B) = \text{Tr}[AB^T]]$
3. $[P_n[x]; (f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx]$

Definition 1.1.2.1.2 ($\|\alpha\|$): 在内积空间，称

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

为向量 α 的长度。在欧式空间中，也称作**欧几里得范数**。下面给出几条它的性质

1. **(Cauchy 不等式)** $|(\alpha, \beta)|^2 \leq \|\alpha\| \|\beta\|$
2. $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$
3. 定义 α, β 夹角 $\theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}$

1.1.2.2 标准正交基

Definition 1.1.2.2.1: 在 V_n 中一组基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 满足

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1, (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad 0 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

就称作其为标准正交基。

从一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 转换到标准正交基 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 有

$$\beta_i = \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\alpha_i, \beta_k)}{(\beta_k, \beta_k)} \beta_k$$

证明方法参考¹ [p. 18], 这里略去。用矩阵的方式表示为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{bmatrix} (\beta_1, \beta_1) & (\alpha_2, \beta_1) & \dots & (\alpha_n, \beta_1) \\ & (\beta_2, \beta_2) & \dots & (\alpha_n, \beta_2) \\ & & \dots & \dots \\ & & & (\beta_n, \beta_n) \end{bmatrix}$$

1.1.2.3 线性变换

Definition 1.1.2.3.1 (线性变换): 如果存在一个单射 $T: V_n(F) \rightarrow V_n(F)$, 满足

1. $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$
2. $T(k\alpha) = kT(\alpha)$

就称 T 是一个 $V_n(F)$ 上的线性变换。

Definition 1.1.2.3.2 (线性变换的矩阵): $\forall \alpha \in V_n(F)$, 取一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

$$[T(\alpha_1) \ T(\alpha_2) \ \dots \ T(\alpha_n)]^T = A^T [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$$

称 A 为基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵。

Theorem 1.1.2.3.1: 如果 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 到 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 有过渡矩阵 C

$$\text{其中 } [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n] = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n] C$$

, 同时在两组基下的矩阵分别为 A, B , 则有

$$B = C^{-1} A C$$

Definition 1.1.2.3.3 (不变子空间): 如果 T 是 $V_n(F)$ 上的线性变换, W 是 $V_n(F)$ 的一个子空间, 如果 $T(W) \subseteq W$, 就称 W 是 T 的不变子空间。

Definition 1.1.2.3.4 (正交变换): 如果 T 是 $V_n(F)$ 上的线性变换, 且满足 $\forall \alpha, \beta \in V_n(F), (T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$, 就称 T 是正交变换。当空间是欧式空间就叫做正交变换, 其对应矩阵我们叫做正交矩阵 C , 酉空间就叫做酉变换, 其矩阵叫做。

1.2 计算机视觉中的应用

我们会用到的向量 $\in \mathbb{R}^2 \mathbb{R}^3$ 。

1.2.1 \mathbb{R}^3 中的变换 (相机相关)

Definition 1.2.1.1 (齐次坐标): 对于 n 维度向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其在 $n+1$ 维向量空间中的齐次向量 (坐标) 为 $(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)^T$, 称为 n 维齐次坐标, 记作 \tilde{x} 。他对于 $\mathbb{R}^2 \mathbb{R}^3$ 中的变换非常有用, 它统一了旋转、平移和缩放。(但是注意齐次坐标并不能相加或者相乘, 只能乘以 $T_{\{n+1, n+1\}}$ 来做变换)。

比如对于一个向量 p , 一个混合变换 $p' = Ap + t$, 使用分块矩阵的知识, 也可以看作是

$$p' = \begin{bmatrix} A_{\{n, n\}} & t_{\{1, 1\}} \\ B_{\{1, n\}} & s_{\{1, 1\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T \text{ Hm}(p) \quad \& (t = 0, B = 0_{\{1, n\}})$$

这里的 T , 我们称作透视矩阵 (Transform Matrix)。 T 的第一行代表的是以 $(x, y, z)^T$ 为基的坐标系下的变化, T_{21} 一般直接以 0, T_{22} 也可以表示缩放性质。

³ \mathbb{R}^n 表示 n 维向量空间

变换	条件	自由度
欧几里得变换	$A = R \ \& \ s = 1 \ \& \ B = 0_{\{1,3\}}$	6
缩放变换	$A = cR \ \& \ s = 1 \ \& \ B = 0_{\{1,3\}}$	7
纯缩放变换	$A = cE \ \& \ s = 1 \ \& \ B = 0_{\{1,3\}}, t = 0_{\{3,1\}}$	1
仿射变换	$s = 1 \ \& \ B = 0_{\{1,3\}}$	15
射影变换	None	12

1.2.1.1 欧几里得变换、缩放变换

欧几里得变换包括绕原点旋转，平移，轴对称，中心对称（正交变换），在欧几里得变换中的 T_A 是正交矩阵，只有三个自由度（之后三维空间刚体变换会讲到）。

Definition (正交矩阵):³ 正交矩阵(Orthogonal Matrix)是指矩阵的转置等于逆矩阵的矩阵，也就是说 $A^{-1} = A^T$ ，并且可以推证 $|A| = 1$ 。其中， $\det(A) = 1$ 的时候叫做**旋转矩阵**， $\det(A) = -1$ 的时候叫做**瑕旋转矩阵**（瑕旋转是旋转加上镜射。镜射也是一种瑕旋转）。所有 $A_{\{n,n\}}$ 构成一个正交群。

至于缩放变换呢,略去介绍。

1.2.1.2 小孔成像模型

我们直接推导一下基于小孔成像的相机模型，也就是三维物体在二维计算机屏幕上的表示。

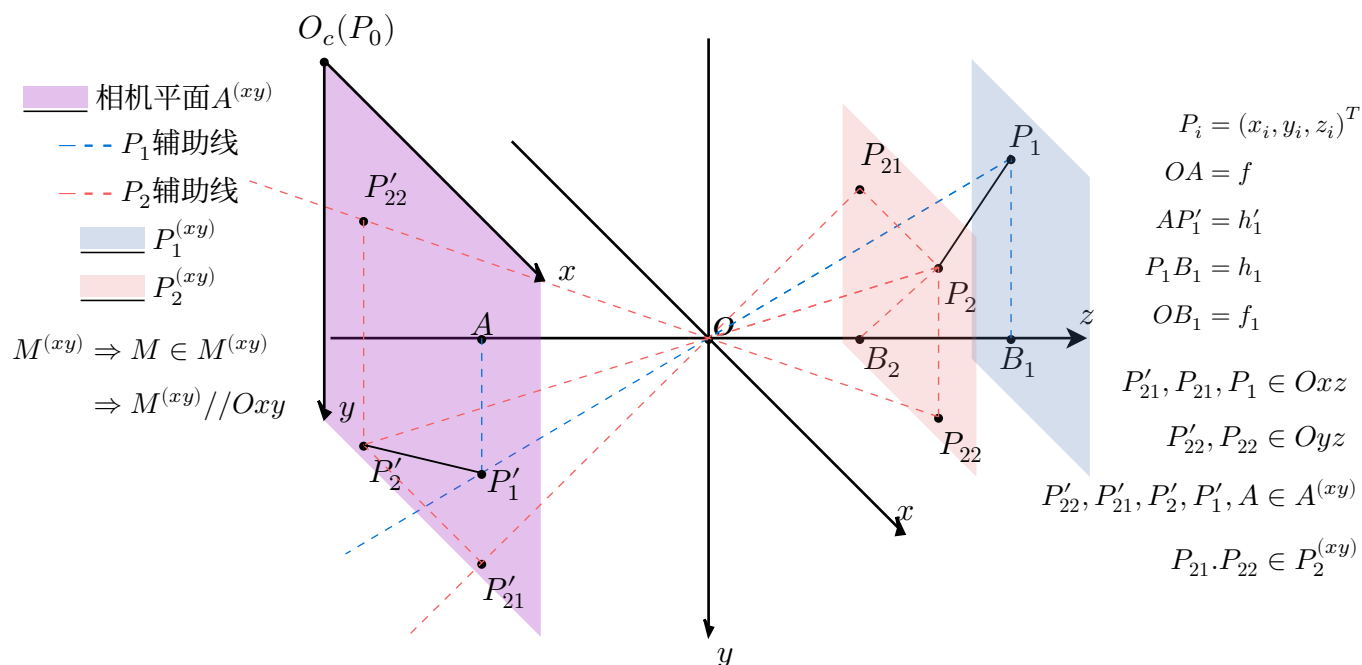


图 1.1: 相机模型示意图

如图 1 中所示，对于任意一点，相当于关于原点的一个对称。对于大部分教程，都教大家用相似三角形求解，你可以在上图中寻找对应的三角形。诚然，这就是一个**纯缩放变换**，只需要求出缩放系数 c 可。

$$c = -\frac{f}{z_i}$$

在现代相机中，我们对像做了预处理，使得原本成倒像的小孔成像可以正确成像，成像平面于 $A'(xy)$ 平面（**实际像平面**），所以实际上 $c_a = -c = \frac{f}{z_i}$ 。

同时我们定义像素坐标系如图中所示，以 $O_c = (x_0, y_0, z_0 = f)^T$ 为原点， x, y 轴如图所示的坐标系（实际上它应该定义在实际像平面上）。假设 $\alpha = c_a k_x, \beta = c_a k_y, \gamma = c_a k_z$ ，(k_x, k_y 为两个尺度因子，表示从米变换为像素)从 P_i 到 P'_i 有变换

$$\tilde{P}'_{i_a} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & \beta & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{P}_i$$

实际像平面

定义 $u = \tilde{P}'_{i_a}(0), v = \tilde{P}'_{i_a}(1)$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{z_i} & 0 & x_0 \\ 0 & \frac{\beta}{z_i} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{z_i} & 0 & \frac{x_0}{z_i} \\ 0 & \frac{\beta}{z_i} & \frac{y_0}{z_i} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \frac{1}{z_i} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & x_0 \\ 0 & \beta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \frac{1}{z_i} K p_i$$

Camera Intrinsics (内参数矩阵)

同时我们的相机平面并不一定这么理想，它可能是各种姿态，我们需要先将初始的 p_i^s 转换到可以求解

$$p_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{p}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T' \tilde{p}_i^s = T_{\{3,4\}} \tilde{p}_i^s$$

我们将这里的 $T_{\{3,4\}}$ 称作相机的 Camera Extrinsics (外参数矩阵)。综上所述有

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_i} K T \tilde{p}_i^s = K T \begin{bmatrix} \frac{x_i}{z_i} \\ \frac{y_i}{z_i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

位于归一化平面

1.2.1.3 畸变模型

我们先来简单介绍一下几何光学中的成像模型以及像差理论。⁴

⁴ 【缩放因子 c 】代表图像轴 u, v 的非垂直性,表示 u, v 的夹角偏离 90° 的情况。理想情况下，图像平面上的 x 轴和 y 轴是垂直的 $c = 0$ ，但在某些特殊情况下，可能由于镜头设计或制造偏差，它们并非严格垂直。一般来说它等于 0，Opencv 中也是将其设置为 0 进行的标定。

实际的光学系统总是与理想的光学系统存在很大差异(如不同的孔径和视场),一个物点发出的光线经过实际光线汇聚后,其实不再汇聚于一点,而是一个**弥散斑**。对于单色光而言,从几何光学的角度分析,常见的像差有球差,惠差,场曲,畸变,像散。

其中,只有畸变影响几何形状,其他像差影响成像的清晰度(这个我们无能为力,选择好的镜头,合适的焦距,孔径,使用距离)。

畸变分为径向畸变(由透镜形状引起的畸变)和切向畸变(透镜和 CCD 不共面导致的畸变)

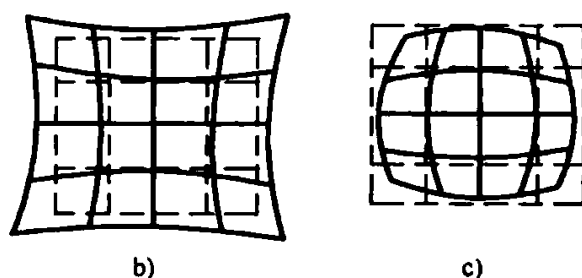


图 1.2: 径向畸变的几种类型(b)枕形畸变 (c)桶形畸变

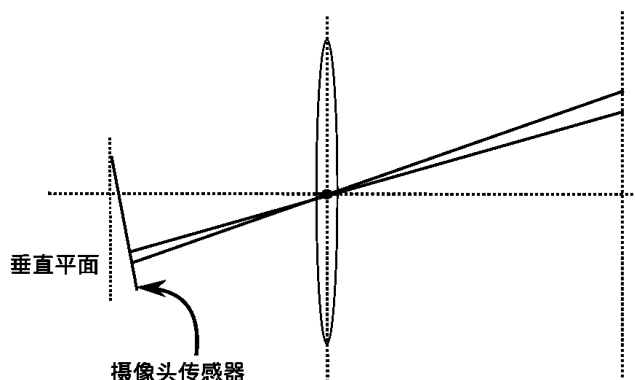


图 1.3: 切向畸变产生原因

我们将 $(u, v)^T$ 表示成极坐标形式, 即 $(r, \theta)^T$ 。

对于径向畸变而言, 主要是随着 r 的增大, 畸变程度增大, 其矫正公式如下(使用 k_1 就足够)

$$x_{corrected} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

$$y_{corrected} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

对于切向畸变, 引入 p_1, p_2

$$x_{corrected} = x + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)$$

$$y_{corrected} = y + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy$$

然后通过相机标定标定相机内参和畸变系数即可。

1.2.1.4 双目相机

单个相机是无法确定 z 的, 通常我们采用双目相机或者 RGBD 相机来解决这个问题。双目相机的原理是显然的, 对于单个相机, 我们能确定图像上一点在相机坐标系下一条直线上, 只要两个直线有交点, 物点可知。

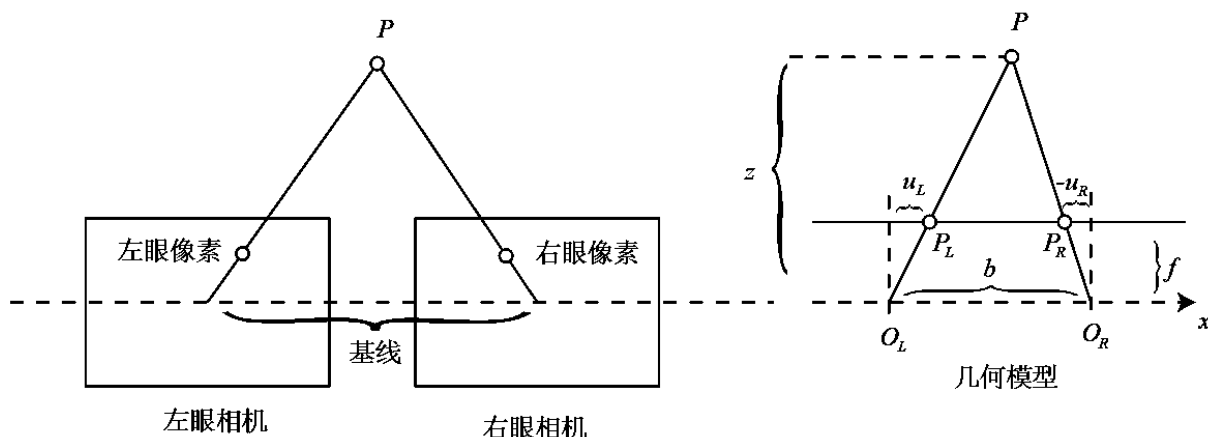


图 1.4: 双目相机原理

双目相机一般由左眼和右眼两个水平放置的相机组成, 如上图所示。根据相似三角形原理,

$$\frac{z - f}{z} = \frac{b - U_L + U_R}{b} \Rightarrow z = \frac{fb}{d}, \quad d = u_L - u_R.$$

这里 d 为左右图的横坐标之差, 称为视差(Disparity), 求解它需要知道左边相机像素在右边相机上对应哪一个位置。

1.2.2 李群和李代数

Definition 1.2.2.1 (群): 一个集合 G 和一个二元运算 $*$, 如果满足以下条件, 就称 G 是一个群。

1. 封闭性: 对于任意 $a, b \in G$, 有 $a * b \in G$
2. 结合律: 对于任意 $a, b, c \in G$, 有 $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. 单位元: 存在一个元素 $e \in G$, 使得对于任意 $a \in G$, 有 $e * a = a * e = a$
4. 逆元: 对于任意 $a \in G$, 存在一个元素 $b \in G$, 使得 $a * b = b * a = e$

1.2.3 三维空间刚体变换

1.2.3.1 旋转矩阵

上一章节有详细的讲解, 掠过。

1.2.3.2 旋转向量

旋转矩阵有九个量，但实际上作为正交矩阵，它只有三个自由度，并且还被约束为正交矩阵，有时会使得求解变得困难。我们可以用旋转向量来表示旋转矩阵。

1.2.3.3 欧拉角

1.2.3.4 四元数

2 矩阵导数

2.1 基本介绍

从一个最基本的函数 $f(x) = ax$ 开始，显然

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = a$$

拓展 $f(x) = \sum_i a_i x_i = a^T x$ & $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\text{n维向量}}{x}} \overset{\text{标量}}{\sum_i^n a_i x_i} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = a \quad (2.1)$$

注意到这里 $\frac{\partial}{\partial x} f(x)$ 的维度等于 x 的维度。那如果我们继续拓展呢？ x 是任意维度矩阵的时候，结果又会怎么样呢？

Theorem 2.1.1: $\frac{\partial}{\partial X} f(x)$ 应和 X 的行列数相同 ($f(x)$ 是标量的时候)，并且

$$\left[\frac{\partial}{\partial X} f(x) \right]_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_{ij}} f(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial X^T} = \frac{\partial f}{\partial X}^T \quad (2.2)$$

并且我们继续分析式(2.1) 它表明，至少对于我们给出的例子有 $\frac{\partial a^T x}{\partial x} = a$ ，那对于所有呢？显然它也成立

Theorem 2.1.2: 如果存在一个多元标量函数 $f(x) = \text{迹}(\text{Tr})[A_T X]$ ，那么

$$\left[\frac{\partial f}{\partial X} \right] = A$$

Theorem 2.1.3 (Tr 性质): 我们给出一些关于迹的性质, 其中矩阵 A 和 B 的大小适当, 且 c 是一个标量值。

1. $\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B]$
2. $\text{Tr}[cA] = c \text{Tr}[A]$
3. $\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA] = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki}$
4. $\text{Tr}[A^T] = \text{Tr}[A]$
5. $\text{Tr}[A_1 A_2 \dots A_n] = \text{Tr}[A_n A_{n-1} \dots A_1]$
6. $\text{Tr}[A^T B] = \sum A_{ij} B_{ij}$
7. $\text{Tr}[A] = \sum \text{特征值 } (\lambda)$
8. $f(x) = \text{Tr}[f(x)] = \text{Tr}[f(x)^T]$ & When $f(x)_{\{1,1\}}$

Proof of Theorem 2.1.3(3) $\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$:

$$\begin{aligned} AB_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \Rightarrow AB_{ii} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_{ik} A_{ki} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ik ki 的情况都会出现, 所以显然式(2.3) 成立, 证毕。 ■

2.2 标量矩阵导数 $f(x)$

2.2.1 矩阵微分

Definition 2.2.1.1:

$$dX = \begin{bmatrix} dX_{11} & dX_{12} & \dots & dX_{1n} \\ dX_{21} & dX_{22} & \dots & dX_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dX_{n1} & dX_{n2} & \dots & dX_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

矩阵里面的每一个如 dX_{11} , 其实

Theorem 2.2.1.1:

Proof:
$$d \operatorname{Tr}[A] = \operatorname{Tr}[dA]$$

$$\operatorname{Tr}[dA] = \sum_i dA_{ii} = \sum_i dA_{ii} = d \sum_i A_{ii} = d \operatorname{Tr}[A]$$

■

标量形式的微分和导数可以用下式表示

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

对于矩阵，有如下定理

Theorem 2.2.1.2:

$$df(X) = \operatorname{Tr} \left[\frac{\partial f}{\partial X}^T dX \right]^5 \quad (2.5)$$

Proof: For 式(2.5)
$$f(x) = \operatorname{Tr}[f(x)] = \operatorname{Tr}[f(x)^T] \quad (2.6)$$

$$df(X) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial X_{ij}} dX_{ij}$$

使用式(2.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \left[\frac{\partial f}{\partial X}^T dX \right] &= \sum_i \sum_k \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)_{ik} (dX)_{ki} \right] \\ &= \sum_i \sum_k \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)_{ki} (dX)_{ki} \right] \end{aligned}$$

For 式(2.6),只需要意识到 $f(x)_{\{1,1\}}$ 即可。证毕。

■

Theorem 2.2.1.3: 对于矩阵微分，有如下几个性质及延伸性质

⁵这里的 $f(X)$, f 小写，应该为标量函数

1. $d(A + B) = d(A) + d(B)$
2. $d(cA) = cd(A)$
3. $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$
4. $d(X^T) = d(X)^T$
5. $\frac{\partial x^T Ax}{\partial x} = Ax + A^T x$
6. $d(X^{-1}) = -X^{-1}dXX^{-1}$ (if X^{-1} exists)

Proof of 3 $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$:

$$\begin{aligned} \text{LEFT} &= df(AB) = d \sum_k A_{ik} B_{ki} \\ &= \sum_k d(A_{ik}) B_{ki} + A_{ik} d(B_{ki}) \end{aligned}$$

$$\text{RIGHT} = [d(A)B + Ad(B)]_{ij} = \sum_k d(A)_{ik} B_{ki} + \sum_k d(B)_{ik} A_{ki} = \text{LEFT}$$

■

Proof of 4: $d(X^T) = d(X)^T$: 使用式(2.4)

■

Proof of 5: $\frac{\partial x^T Ax}{\partial x} = Ax + A^T x$:

$$\begin{aligned} d(x^T Ax) &= d \text{Tr}[x^T Ax] \\ &= \text{Tr}[d(x^T)Ax + x^T d(Ax)] \\ &= \text{Tr}[d(x)^T Ax + x^T \underset{0}{d(A)} x + x^T Ad(x)] \end{aligned}$$

$$(\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B]) = \text{Tr}[d(x)^T Ax] + \text{Tr}[x^T Ad(x)]$$

$$(\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}[A]) = \text{Tr}[x^T A^T d(x)] + \text{Tr}[x^T Ad(x)]$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \Rightarrow \frac{\partial x^T Ax}{\partial x} &= (x^T A^T + x^T A)^T \\ &= Ax + Ax^T \end{aligned}$$

■

Proof of 6 $dX^{-1} = -X^{-1}dXX^{-1}$:

$$d(I) = 0 = d(XX^{-1}) = d(X)X^{-1} + Xd(X^{-1})$$

$$d(X^{-1}) = -X^{-1}d(X)X^{-1}$$

■

2.2.2 标量对矩阵求导的求解过程

从上面的例子中，我们可以得到对于一个 $f(x)$ 求解 $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ 的固定步骤

- 1 $df(x) = d \operatorname{Tr}[f(x)] = \operatorname{Tr}[df(x)]$ or $df(x) = d \operatorname{Tr}[f(x)^T] = \operatorname{Tr}[df(x)^T]$
| 见式(2.6)
- 2 使用 Theorem 2.1.3 中关于 trace 的各种性质，化简成 $\sum_i \operatorname{Tr}[U_i d(x)]$ 的形式
- 3 如式(2.5)，所以 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \sum_i (U_i)^T$

2.3 行列式

Definition 2.3.1 (行列式): 我们把行列式定义为一个关于矩阵 A 的标量函数，记作 $\det(A)$ 或 $|A|$

Definition 2.3.2 (矩阵范数): 我们把行列式定义为一个关于矩阵 A 的标量函数，记作 $\det(A)$ 或 $|A|$

3 矩阵求导和多元微分

Numerator

$$\frac{1}{x+1} + 2$$

Denominator

Quotient

A todo on the left.

On the left

4 最小二乘的几种解法

$$\min F(x) = \|f(x)\|_2^2 = \|b - Ax\|$$

4.1 牛顿法

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)(x - x_0)^0 + f'(x_0)(x - x_0) + \left(\frac{f''(x_0)}{2!}\right)(x - x_0)^2 + \dots \\ &\approx f(x_0)(x - x_0)^0 + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) = g(x)$$

$g(x) = 0, x = x_1$ 的时候是极值,

$$x_1 - x_0 = \frac{f'(x)}{f''(x)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

矩阵的梯度为一阶导的转置，函数的梯度为一阶导，雅可比矩阵 J 二阶导数矩阵 H 。

$$\Delta x = -\frac{J}{H} \quad (4.8)$$

这便是我们熟知的牛顿法。

4.2 梯度下降法

$$\theta_{i+1}(j) = \theta_i(j) - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \quad (4.9)$$

4.3 牛顿法

高斯-牛顿法 (Gauss-Newton method) 是一种非线性最小二乘问题的优化方法, 通常用于拟合非线性模型。它通过将非线性问题线性化来简化求解, 常用于机器学习、计算机视觉等领域中的优化问题。

下面是高斯-牛顿法的详细推导过程。

假设我们有一个非线性最小二乘问题, 其目标是找到 x 使得以下目标函数 $F(x)$ 最小化:

$$F(x) = \frac{1}{2} \| f(x) \|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(x))^2$$

其中,

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)]^T$$

是一个由 m 个实值函数组成的向量函数, 代表误差项或残差 (residual), 而 x 是我们希望优化的 n 维变量。

目标是最小化 $\| f(x) \|^2$ 的平方和, 找到一个 x 使得 $f(x) \approx 0$ 。

假设我们已经有一个当前解 x_k , 我们希望找到一个小的增量 Δx , 使得更新后的 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ 更接近最优解。

在 x_k 附近, 我们对 $f(x)$ 进行一阶泰勒展开:

$$f(x_k + \Delta x) \approx f(x_k) + J(x_k) \Delta x$$

其中 $J(x_k)$ 是 $f(x)$ 在 x_k 处的雅可比矩阵, 其第 i 行、第 j 列的元素为

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

因此, 我们的目标函数可以近似为:

$$F(x_k + \Delta x) \approx \frac{1}{2} \| f(x_k) + J(x_k)^T \Delta x \|^2$$

现在，我们将近似的目标函数展开：

/init1

$$\begin{aligned}
 M(\Delta X) &= \frac{1}{2} f(x + \Delta X)^2 = \frac{1}{2} (f(x) + J^T \Delta X)^T (f(x) + J^T \Delta X) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{f(x)^T + \Delta X^T J}_{\text{E}} \right] \left[\underbrace{f(x) + J^T \Delta X}_{\text{F}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\|f(x)\|^2}_{\text{A}} + \underbrace{f(x)^T J^T \Delta X}_{\text{B}} + \underbrace{\Delta X^T J f(x)}_{\text{C}} + \underbrace{\Delta X^T J J^T \Delta X}_{\text{D}} \right]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$dC = d \operatorname{Tr}[F(X)^T J^T \Delta X] = \operatorname{Tr}[d(F(X)^T J^T \Delta X)]$$

$$= \operatorname{Tr}[F(X)^T J^T d\Delta X] \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \Delta X} = F(x)^T J^T$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M(\Delta X)}{\partial \Delta X} &= \frac{1}{2} \left(0 + F(X)^T J^T + F(X)^T J^T + \overset{\text{Theorem 2.1.3(8)}}{2(J J^T \Delta X)} \right) \\
 &= F(X)^T J^T + J J^T \Delta X
 \end{aligned}$$

但是 如果式(4.10) 中的第二步不做展开，我们直接求解也是可以的

$$dM(\Delta X) = \frac{1}{2} d \operatorname{Tr}[]$$

5 卡尔曼滤波

TODOs

TODO 1: On the left

13

6 一些其他概率论知识

参考文献

1. 杨明 & 刘先忠. 矩阵论. (华中科技大学出版社, 2003).
2. Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications 4th ed.* (2012).
3. 维基百科. 正交矩阵. <https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%AD%A3%E4%BA%A4%E7%9F%A9%E9%98%B5&oldid=84256160> (2024)
4. 李湘宁, 贾宏志, 张荣福 & others. 工程光学. 108–110 (科学出版社, 2022).