术语表

1. 矩阵统一用大写字母表示，如A, X标量用小写字母表示，如x, y;
   - 对于返回值是矩阵的函数，同理应该为$F(X)$,标量函数就记作$f(x)$
   - 另外，对于不混淆意思的$x * 1$维度矩阵，也就是**向量，允许用小写字母表示**，如x, y, x_i
2. 对于矩阵的行列数，统一用$\{m, n\}$下标表示，如$A_{\{m,n\}}$

内参数矩阵 – Camera Intrinsics 11

外参数矩阵 – Camera Extrinsics: 一个$3 * 4$的矩阵T,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T'$$

11

λ – **特征值**: 对于矩阵 A,如果满足

$$Ax = \lambda x$$

λ就是 A 的特征值，x 是特征向量

14

linear space **– 线性空间** 2

Tr – **迹**: Tr 表示矩阵的迹，是用于求矩阵对角元素之和的算子

$$\mathrm{Tr}[X] = \sum_i X_{ii}$$

14

数学知识杂烩

1 矩阵论

1.1 线性空间与线性变换

1.1.1 线性空间

在矩阵论中，将在线性代数的基础上，推广向量空间R^n,一般地定义线性空间的概念。这里参考杨明教授的《矩阵论》[1] 和 Strang, Gilbert 的 《Linear Algebra and Its Applications》[2]。

定义 1.1.1.1 (线性空间 (linear space))：V是一个非空集合，F是一个数域，在其中定义两种运算, 加法($\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta \in V$)和数乘($\forall k \in F, \alpha \in V, k\alpha \in V$), 如果满足若干运算法则，就称$V$是数域$F$上的线性空间。

比如$F_{\{n,1\}} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n)^T\right\} \mid x_i \in F$ 是 F 上的$\{m, 1\}$维线性空间。

$F_{\{n,m\}} = \left\{A = (a_{ij})_{\{m\times n\}} | a_{ij} \in F\right\}$是 F 上的$\{m, n\}$维矩阵空间 记作$R_{\{2,2\}}$[1]

$P_n(x) = \left\{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i | a_i \in R\right\}$称为多项式空间$P_{n[x]}$

定义 1.1.1.2：如果对于线性空间V 存在一组**线性无关**的向量$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$，使得空间中任意一个向量可以由它表示，$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$张成了向量空间,此时有$V$的维度

$$\dim(V) = n$$

定义 1.1.1.3 (矩阵的逆)：如果对于向量A，如果存在 B 使得$AB = I$,则称 B 是 A 的逆矩阵，记作A^{-1}，并且说 A 是可逆的，有时候也叫做非奇异矩阵[2]。并且

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. A 的各列线性无关，$\dim(A) = n$

[1]这里与教课书上$R^{2\times2}$的写法不同，读者注意。

[2]在数值运算中，我们很少求解矩阵的逆，计算他的计算量是行变换解方程的三倍[2]

1.1.2 内积空间

1.1.2.1 欧氏空间和酉空间

定义 1.1.2.1.1：对数域F上的线性空间$V_n(F)$,定义一个从$V_n(F)$到F的二元运算(α,β),记作$(\alpha,\beta):V_n(F)\to F$，满足以下条件

1. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
2. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$
3. $(\alpha,\alpha)\geq 0,\quad(\alpha,\alpha)=0$仅当 $\alpha=0$

我们就称这个二元运算是线性空间的一个内积，并且定义了内积的线性空间称作内积空间$\left[V_{n(F)};(\alpha,\beta)\right]$。如果$F=R$（实数域）就称作欧氏空间；如果$F=C$（复数域）就称作酉空间。

下面举几个欧氏空间的例子

1. $[\mathbb{R}^n;(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta]$,习惯上，我们直接将$\mathbb{R}^n$记作欧氏空间。
2. $\left[R_{\{n,n\}};(A,B)=\mathrm{Tr}[AB^T]\right]$
3. $\left[P_n[x];(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right).]$

定义 1.1.2.1.2 ($\|\alpha\|$)：在内积空间，称

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$$

为向量α的长度。在欧式空间中，也称作**欧几里得范数**。下面给出几条它的性质

1. **(Cauchy 不等式)** $|(\alpha,\beta)|^2\leq\|\alpha\|\|\beta\|$
2. $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$
3. 定义α,β夹角$\theta=\arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

1.1.2.2 标准正交基

定义 1.1.2.2.1：在V_n中一组基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\}$满足

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=0,\left(\varepsilon_i,\varepsilon_j\right)\neq 0\quad 0\leq i,j\leq n,i\neq j$$

就称作其为标准正交基。

从一组基$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$转换到标准正交基$\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$有

$$\beta_i=\alpha_i-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(a_k,\beta_i)}{(\beta_i.\beta_i)}\beta_i$$

证明方法参考[1] [p. 18],这里略去。用矩阵的方式表示为

$$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\begin{bmatrix}(\beta_1,\beta_1) & (\alpha_2,\beta_1) & ... & (\alpha_n,\beta_1)\\ & (\beta_2,\beta_2) & ... & (\alpha_n,\beta_2)\\ & & ... & ...\\ & & & (\beta_n,\beta_n)\end{bmatrix}$$

1.1.2.3 线性变换

定义 1.1.2.3.1 (线性变换): 如果存在一个单射$T:V_n(F)\to V_n(F)$,满足

1. $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$
2. $T(k\alpha)=kT(\alpha)$

就称T是一个$V_n(F)$上的线性变换。

定义 1.1.2.3.2 (线性变换的矩阵): $\forall\alpha\in V_n(F)$,取一组基$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_n\alpha_n$$

$$[T(\alpha_1)\ \ T(\alpha_2)\ \ ...\ \ T(\alpha_n)]^T=A^T[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ ...\ \ \alpha_n]^T$$

称A为基$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$下的**矩阵**。

定理 1.1.2.3.1: 如果 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$到$\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$有过渡矩阵$C$

$$\text{其中}\quad [\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ ...\ \ \alpha_n]=[\beta_1\ \ \beta_2\ \ ...\ \ \beta_n]C$$

,同时在两组基下的矩阵分为为A,B，则有

$$B=C^{-1}AC$$

定义 1.1.2.3.3 (不变子空间): 如果T是$V_n(F)$上的线性变换，W是$V_n(F)$的一个子空间，如果$T(W)\in W$，就称W是T的不变子空间。

定义 1.1.2.3.4 (正交变换): 如果T是$V_n(F)$上的线性变换，且满足$\forall\alpha,\beta\in V_n(F),(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta)$，就称$T$是正交变换。当空间是欧式空间就叫做正交变换，其对应矩阵我们叫做正交矩阵C,酉空间就叫做酉变换,其矩阵叫做酉矩阵U。

1.2 Jordan 标准形

1.2.1 Jordan 标准形及其求解

形如$J(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{bmatrix}$的矩阵叫做$r$阶 Jordan 块，若干个 Jordan 块组成的矩阵叫做 Jordan 矩阵，如下

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

在复数域上，每个方阵矩阵都可以相似于 Jordan 矩阵，并且唯一（若不计较 Jordan 的排列次序），即$A = S^{-1}JS$，其中S是可逆矩阵，J是 Jordan 矩阵。

定义 1.2.1.1 (特征值和特征向量)：对于定义在E 上的变换 T, 如果 $\exists \lambda$

$$T(\mu) = \lambda\mu$$

这里的λ就是T的特征值，μ是特征向量。

定义 1.2.1.2 (直和 $\oplus$):

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(A, B)$$

定义 1.2.1.3 (矩阵的核 $\mathrm{Null}(A)$):

$$\mathrm{Null}(A) = \{v \in V : Av = 0\}.$$

定理 1.2.1.1 (秩-零化度定理)：$\mathrm{rank}\, A + \mathrm{nullity}\ A$(A 的特征值空间维度) $= n$

$$[A|E]^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对其做行初等变换，将 A 的下几行消元成 0，对应的右边行即为一个解。可以理解为其核空间每一个维度可以消解 A 空间一个冗余维度。

首先我们可以求解出其所有特征值。

代数重数gm

$$|\lambda I - A| = \sum_{i=0}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{(a_i)}$$

然后对于每一个特征值,$\dim(\mathrm{Null}(\lambda_i I - A))$是多少就有多少 jordan 块，同时我们也要求解出其核空间的向量,记作x,然后使用 jordan 链进行递归求解直到无解,求解每一个 jordan 块的大小。

$$A\underbrace{\boxed{[p_1\ \ p_2\ \ p_3\ \ p_4]}}_{P}=[p_1\ \ p_2\ \ p_3\ \ p_4]\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=[\lambda p_1\ \ \lambda p_2+p_1\ \ \lambda p_3+p_2\ \ \lambda p_4+p_3]$$

$$(A-\lambda E)p_1=0 \quad (1)$$

$$(A-\lambda E)p_2=P_1 \quad (2)$$

$$\cdots$$

$$(A-\lambda E)p_n=P_{n-1} \quad (n)$$

上式叫做jordan链，直到$(k+1)$无法解出。则这个特征向量对应的jordan块的大小确定。

例 1.2.1.1: 求可逆矩阵 P 和 jordan 矩阵 J 使得$A=P^{-1}JP$

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 3 & -2\\ -7 & 6 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$|\lambda I-A|=0\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda-2)^2$,确定其有两个 jordan 矩阵$J_1,J_2$组成，对于$J_1$，向量$\alpha_1=[1\ \ 2\ \ 1]^T$。

求解$(2I-A)x=0$,只有一个特征向量$\alpha_2=[-1\ \ -1\ \ 1]^T$，所以$J_2$只由一个jordan 块构成。根据 jordan 链求出$\beta_1=(-1,-2,0)^T$。所以得

$$P=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \beta_1]$$

1.2.2 最小多项式

定义 1.2.2.1 (矩阵多项式): 首先定义$g(\lambda)=\sum_{i=0}^m a_i\lambda^i$,那么就可以定义矩阵 $g(A)=\sum_{i=0}^m a_iA^i$ 为 A 的矩阵多项式。给出如下性质

1. $Ax=\lambda x\Rightarrow g(A)x=g(\lambda)x$
2. $P^{-1}AP=B\Rightarrow P^{-1}g(A)P=g(B)$
3. $A=\operatorname{diag}(A_1,A_2,...,A_n)\Rightarrow g(A)=\operatorname{diag}(g(A_1),g(A_2),...,g(A_n))$
4. A的特征多项式$(f(\lambda)=|\lambda I-A|=\sum_{i=0}^m a_i\lambda^i)$就是$A$的化零多项式$(g(A)=0)$。

证 *of 4*: 左式λ换A。 ■

例 1.2.2.1 (求 A^m): 假设$g(A)=A^m\Rightarrow g(\lambda)=\lambda^m=\mathrm{Hl}(\lambda)+\sum b_i\lambda_i\Rightarrow g(A)=\sum b_iA_i$

定义 1.2.2.2 (最小多项式): A的所有化零多项式中次数最低,$a_0=0$（首项系数为零）的最小多项式，记作$m_r(\lambda)$。和特征多项式有相同的根，重数可以不同。

定理 1.2.2.1: 一个矩阵可以对角化的充分必要条件是$m_r(\lambda)$的所有重数为 1.

$$m_{r(\lambda)}=\Pi(\lambda-a_i)\quad a_i\text{互不相等}$$

1.3 矩阵分解

1.3.1 常见

1.3.1.1 矩阵的三角分解

设$A\in F_{\{n,n\}}$

1. $L,U\in F_{\{n,n\}}$分别为下三角和上三角矩阵，$A=LU$称作LU分解
2. $L,V\in F_{\{n,n\}}$分别为对角元素为 1 的下三角和上三角矩阵，D是对角矩阵，称作LDV分解

例 1.3.1.1.1 (求解$P=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&7&7\\-2&4&5\end{bmatrix}$的 LU 和 PDV 分解): 这里简单给出一个定理,

$$\underset{\text{行初等变换}}{\underset{\uparrow}{H}}[P|E]=[HP|P]\qquad\begin{bmatrix}P\\--\\E\end{bmatrix}L=\begin{bmatrix}PL\\--\\\underset{\text{列初等变换}}{\underset{\uparrow}{L}}\end{bmatrix}$$

将其写成增广矩阵$[P\mid E]\Rightarrow[U\mid L']$,做行初等变换将 P 消成上三角矩阵。$L'A=U\Rightarrow A=(L')^{-1}U=LU$

对U建立$\begin{bmatrix}P\\--\\E\end{bmatrix}$，做列初等变换，$\begin{bmatrix}P\\--\\E\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}D\\--\\V'\end{bmatrix}$,有$UV'=D\Rightarrow U=D(V')^{-}1=DV$

接下来我们将分析一个矩阵有 LU,LDV 分解的条件，并且注意，矩阵的LDV分解并不唯一。

对于A,设 k 阶顺序余子式$\Delta_i=\left|A_{[0:i;0:i]}\right|$，如果$\mathrm{Rank}(A)=k$,其$1-k$阶顺序余子式不为 0，则可 LU 分解，1到$(n-1)$阶顺序余子式不为 0，则可 LDV 分解。

1.3.1.2 满秩分解

定理 1.3.1.2.1 ($R_{行}(A) = R_{列}(A) = R(A)$): 行的秩表示为行向量张成向量空间的维度，列的秩表示为行向量张成向量空间的维度。

证: 根据高斯变换，得到行的秩等于主元个数等于列空间维度。 ■

定理 1.3.1.2.2: 任意不为零的矩阵$A_{\{m,n\}}$都有满秩分解

$$A_{\{m,n\}} = B_{\{m,r\}}C_{\{r,n\}}$$

求解方法①$B'[A \mid E] \Rightarrow [\underbrace{C'}_{行阶梯型} \mid B'] \Rightarrow A = [B_{\{m,r\}} \;\; 0_{\{m,n-r\}}]\begin{bmatrix} C_{\{r,n\}} \\ 0_{\{n-r,n\}} \end{bmatrix} = B_{\{m,r\}}C_{\{r,n\}}$

② 先化为 Hermite 标准形H(带主元行阶梯型),找到 A 中主元列取出构成$B = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$,$H$中非零行构成$C$

1.3.1.3 可对角化矩阵的谱分解

$$A = P^{-1}\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1 \ ,..., \ \lambda_1}_{r_1个}, \lambda_2, ..., \underbrace{\lambda_n}_{r_n个})P$$

其中λ_i表述矩阵的特征值，r_i表示特征值的重数。

1.3.2 Schur 分解与正规矩阵

定义 1.3.2.1 (实对称矩阵和 Hermit 矩阵):

$$（实对称阵）A^T = A$$

$$（\text{Hermit 矩阵}）A^H = \underbrace{(\bar{A})^T}_{复共轭转置} = A$$

在欧式空间中，一个实对称矩阵A一定正交相似于一个对角阵。

$$A = C^T\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)C = C^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)C$$

在酉空间,一个 Herm ite 矩阵 A (A H =A)一定可酉相似于对角形:即存在酉矩阵 U 。

$$A = U^H\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)U$$

1.3.3 矩阵的奇异值分解

矩阵的奇异值分解是在线性动态系统的辨识,最佳逼近问题,实验数据处理,数字 图像存储中应用广泛的一种分解。

1.4 矩阵的广义逆

1.5 矩阵分析

1.6 计算机视觉中的应用

我们会用到的向量$\in \mathbb{R}^2\mathbb{R}^3$ [3]。

1.6.1 $\mathbb{R}^3$中的变换（相机相关）

定义 1.6.1.1 (齐次坐标): 对于n维度向量$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$，其在$n+1$维向量空间中的齐次向量（坐标）为$(x_1, x_2, ..., x_n, 1)^T$,称为$n$维齐次坐标，记作$\tilde{x}$。他对于$\mathbb{R}^2\mathbb{R}^3$中的变换非常有用, 它统一了旋转、平移和缩放。(但是注意齐次坐标并不能相加或者相乘, 只能乘以$T_{\{n+1,n+1\}}$来做变换)。

比如对于一个向量p,一个混合变换$p' = Ap + t$,使用分块矩阵的知识，也可以看作是

$$p' = \begin{bmatrix} A_{\{n,n\}} & t_{\{1,1\}} \\ B_{\{1,n\}} & s_{\{1,1\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T\ \mathrm{Hm}(p) \quad \&\Big(t = 0, B = 0_{\{1,n\}}\Big)$$

这里的T,我们称作透视矩阵(Transform Matrix)。T的第一行代表的是以$(x, y, z)^T$为基的坐标系下的变化，T_{21}一般直接以0,T_{22}也可以表示缩放性质。

变换	条件	自由度
欧几里得变换	$A = R\ \ \&\ \ s = 1\ \ \&\ \ B = 0_{\{1,3\}}$	6
缩放变换	$A = cR\ \ \&\ \ s = 1\ \ \&\ \ B = 0_{\{1,3\}}$	7
纯缩放变换	$A = cE\ \ \&\ \ s = 1\ \ \&\ \ B = 0_{\{1,3\}}, t = 0_{\{3,1\}}$	1
仿射变换	$s = 1\ \ \&\ \ B = 0_{\{1,3\}}$	15
射影变换	None	12

1.6.1.1 欧几里得变换、缩放变换

欧几里得变换包括绕原点旋转，平移，轴对称，中心对称（正交变换），在欧几里得变换中的T_A是正交矩阵，只有三个自由度（之后三维空间刚体变换会讲到）。

定义 (正交矩阵): [3] 正交矩阵(Orthogonal Matrix)是指矩阵的转置等于逆矩阵的矩阵，也就是说$A^{-1} = A^T$，并且可以推证$|A| = 1$。 其中，$\det(A) = 1$的时候叫做**旋转矩阵**, $\det(A) = -1$的时候叫做**瑕旋转矩阵**(瑕旋转是旋转加上镜射。镜射也是一种瑕旋转)。所有$A_{\{n,n\}}$构成一个**正交群**。

至于缩放变换呢,略去介绍。

[3] $\mathbb{R}^n$表示 n 维向量空间

1.6.1.2 小孔成像模型

我们直接俄导一下基于小孔成像的相机模型，也就是三维物体在二维计算机屏幕上的表示。

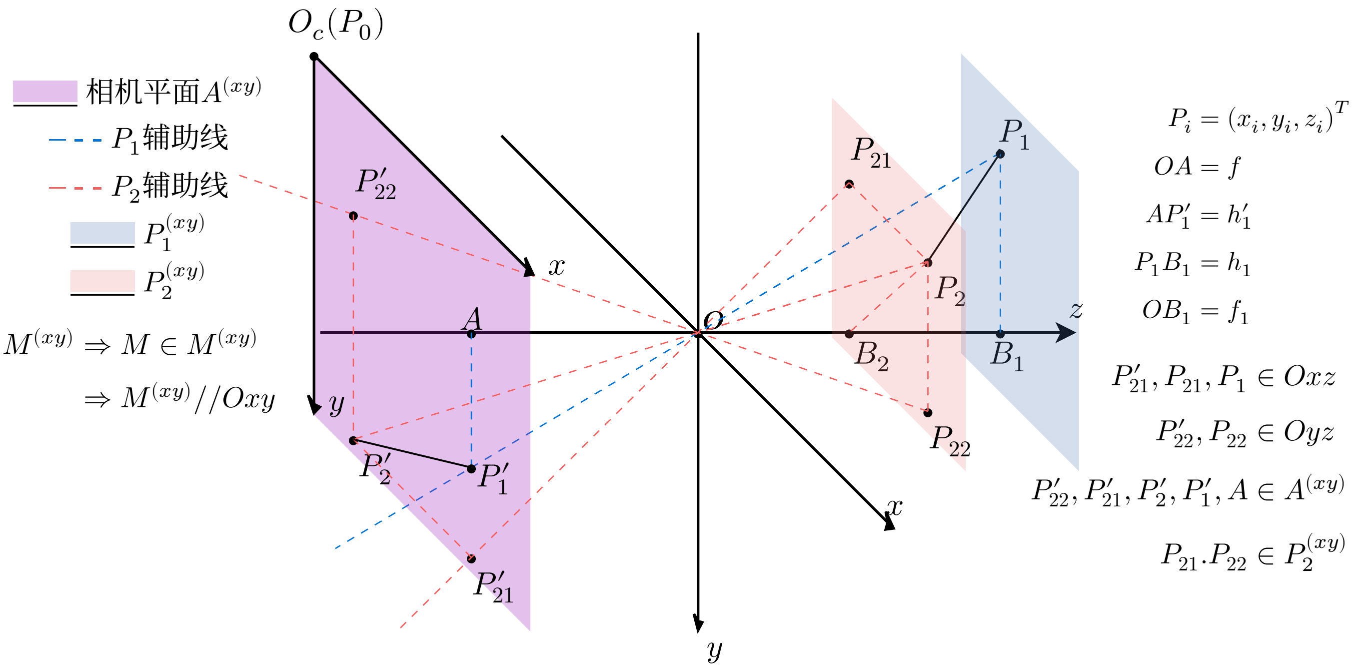


图 1.1: 相机模型示意图

如图 1 中所示， 对于任意一点，相当于关于原点的一个对称。对于大部分教程，都教大家用相似三角形求解,你可以在上图中寻找对应的三角形。诚然，这就是一个**纯缩放变换**，只需要求出缩放系数c可。

$$c = -\frac{f}{z_i}$$

在现代相机中，我们对像做了预处理，使得原本成倒像的小孔成像可以正确成像，成像平面于$A'^{(xy)}$平面（**实际像平面**），所以实际上$c_a = -c = \frac{f}{z_i}$。

同时我们定义像素坐标系如图中所示，以$O_c = (x_0, y_0, z_0 = f)^T$为原点，$x, y$轴如图所示的坐标系（实际上它应该定义在实际像平面上）。假设$\alpha = c_a k_x, \beta = c_a k_y, \gamma = c_a k_z$,($k_x, k_y$为两个尺度因子，表示从米变换为像素)从$P_i$到$P'_i$有变换

$$\widetilde{P'_i}_{\underset{\text{实际像平面}}{a}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & \beta & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{P_i}$$

定义$u = \widetilde{P'_i}_a(0), v = \widetilde{P'_i}_a(1)$

$$\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\alpha}{z_i}&0&x_0\\0&\frac{\beta}{z_i}&y_0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\alpha}{z_i}&0&\frac{x_0}{z_i}\\0&\frac{\beta}{z_i}&\frac{y_0}{z_i}\\0&0&\frac{1}{z_i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix} = \frac{1}{z_i}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha&\overset{c\text{ 缩放因子}^{4}}{\boxed{0}}&x_0\\0&\beta&y_0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\text{Camera Intrinsics (内参数矩阵)}}\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix} = \frac{1}{z_i}Kp_i$$

同时我们的相机平面并不一定这么理想，它可能是各种姿态，我们需要先将初始的p_i^s 转换到可以求解

$$p_i = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\tilde{p_i} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}T'\tilde{p_i^s} = T_{\{3,4\}}\tilde{p_i^s}$$

我们将这里的$T_{\{3,4\}}$称作相机的 Camera Extrinsics (外参数矩阵)。综上所述有

$$\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{z_i}KT\tilde{p_i^s} = KT\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{x_i}{z_i}\\\frac{y_i}{z_i}\\1\end{bmatrix}}_{\text{位于归一化平面}}$$

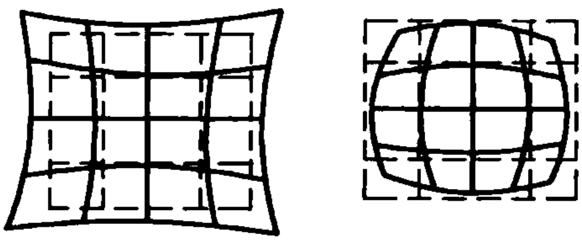
1.6.1.3 畸变模型

我们先来简单介绍一下几何光学中的成像模型以及像差理论。[4]

实际的光学系统总是与理想的光学系统存在很大差异(如不同的孔径和视场)，一个物点发出的光线经过实际光线汇聚后，其实不再汇聚于一点，而是一个**弥散斑**。对于单色光而言，从几何光学的角度分析，常见的像差有球差，惠差，场曲，畸变，像散。

其中，只有畸变影响几何形状，其他像差影响成像的清晰度(这个我们无能为力，选择好的镜头，合适的焦距，孔径，使用距离)。

畸变分为径向畸变（由透镜形状引起的畸变）和切向畸变（透镜和 CCD 不共面导致的畸变）



b)　　c)

图 1.2: 径向畸变的几种类型(b)枕形畸变 (c)桶形畸变

[4]【**缩放因子c**】代表图像轴u, v的的非垂直性,表示u, v的夹角偏离 90° 的情况。理想情况下，图像平面上的 x 轴和 y 轴是垂直的$c = 0$，但在某些特殊情况下，可能由于镜头设计或制造偏差，它们并非严格垂直。一般来说它等于 0，Opencv 中也是将其设置为 0 进行的标定。

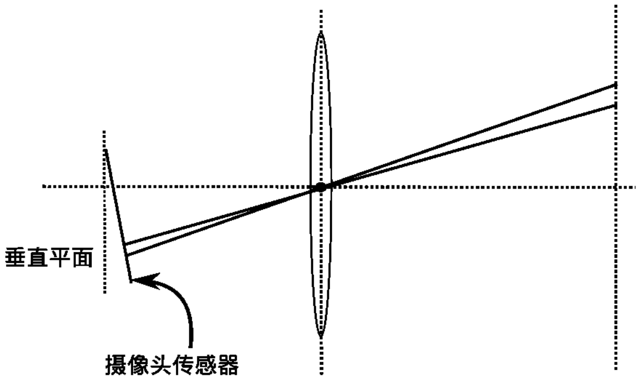


图 1.3: 切向畸变产生原因

我们将$(u,v)^T$表示成极坐标形式，即$(r,\theta)^T$。

对于径向畸变而言, 主要是随着r的增大, 畸变程度增大, 其矫正公式如下(使用k_1就足够)

$$x_{corrected} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$
$$y_{corrected} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

对于切向畸变,引入p_1, p_2

$$x_{corrected} = x + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)$$
$$y_{corrected} = y + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy$$

然后通过相机标定标定相机内参和畸变系数即可。

1.6.1.4 双目相机

单个相机是无法确定z的, 通常我们采用双目相机或者 RGBD 相机来解决这个问题。双目相机的原理是显然的，对于单个相机，我们能确定图像上一点在相机坐标系下一条直线上，只要两个直线有交点，物点可知。

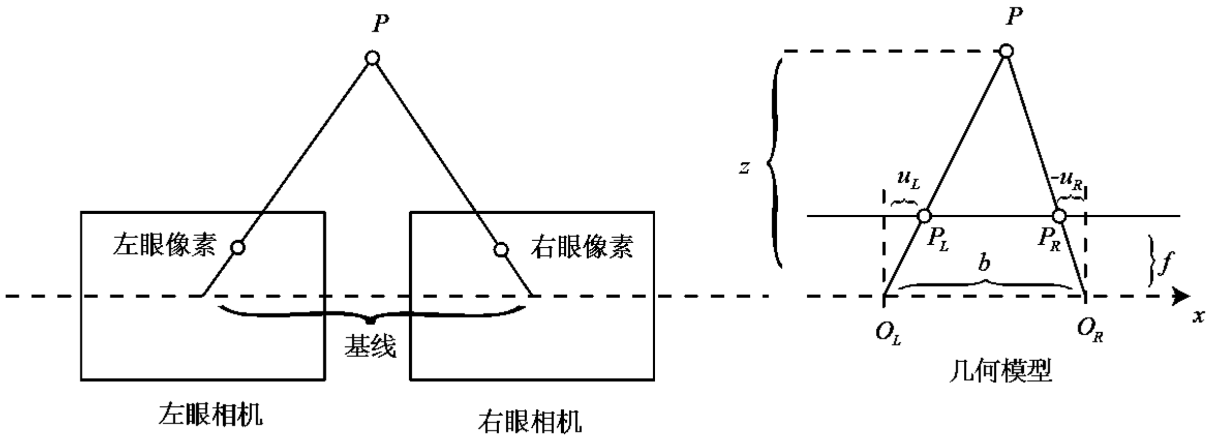


图 1.4: 双目相机原理

双目相机一般由左眼和右眼两个水平放置的相机组成，如上图所示。根据相似三角形原理，

$$\frac{z-f}{z} = \frac{b-U_L+U_R}{b} \Rightarrow z = \frac{fb}{d}, \quad d = u_L - u_R.$$

这里 d 为左右图的横坐标之差,称为视差(Disparity)，求解它需要知道左边相机像素在右边相机上对应哪一个位置。

1.6.2 李群和李代数

定义 1.6.2.1 (群)：一个集合G和一个二元运算$*$，如果满足以下条件，就称G是一个群。

1. 封闭性：对于任意$a, b \in G$，有$a * b \in G$
2. 结合律：对于任意$a, b, c \in G$，有$(a * b) * c = a * (b * c)$
3. 单位元：存在一个元素$e \in G$，使得对于任意$a \in G$，有$e * a = a * e = a$
4. 逆元：对于任意$a \in G$，存在一个元素$b \in G$，使得$a * b = b * a = e$

1.6.3 三维空间刚体变换

1.6.3.1 旋转矩阵

上一章节有详细的讲解，掠过。

1.6.3.2 旋转向量

旋转矩阵有九个量，但实际上作为正交矩阵，它只有三个自由度，并且还被约束为正交矩阵，有时会使求解变得困难。我们可以用旋转向量来表示旋转矩阵。

1.6.3.3 欧拉角

1.6.3.4 四元数

2 矩阵导数

2.1 基本介绍

从一个最基本的函数$f(x) = ax$ 开始，显然

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = a$$

拓展 $f(x) = \sum_i a_i x_i = a^T x \quad \& \quad A = [a_1, a_2, ..., a_n]^T \quad X = [x_1, x_2, ..., x_n]$

$$\frac{\partial}{\partial \underset{n\text{维向量}}{x}} \overset{\text{标量}\sum_i^n a_i x_i}{f(x)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \tag{2.1}$$

注意到这里$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x)$的维度等于$x$的维度。那如果我们继续拓展呢? x是任意维度矩阵的时候，结果又会怎么样呢?

定理 2.1.1: $\frac{\partial}{\partial X}f(x)$应和$X$的行列数相同（$f(x)$是标量的时候），并且

$$\left[\frac{\partial}{\partial X}f(x)\right]_{ij}=\frac{\partial}{\partial X_{ij}}f(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial X^T}=\frac{\partial f}{\partial X}^T \tag{2.2}$$

并且我们继续分析式(2.1) 它表明，至少对于我们给出的例子 有$\dfrac{\partial a^T x}{\partial x}=a$，那对于所有呢? 显然它也成立

定理 2.1.2: 如果存在一个多元标量函数$f(x)=$ 迹$(\mathrm{Tr})[A_T X]$，那么

$$\left[\frac{\partial f}{\partial X}\right]=A$$

定理 2.1.3 (Tr 性质): 我们给出一些关于迹的性质，其中矩阵 A 和 B 的大小适当，且 c 是一个标量值。

1. $\mathrm{Tr}[A+B]=\mathrm{Tr}[A]+\mathrm{Tr}[B]$
2. $\mathrm{Tr}[cA]=c\,\mathrm{Tr}[A]$
3. $\mathrm{Tr}[AB]=\mathrm{Tr}[BA]=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{ki}$
4. $\mathrm{Tr}[A^T]=\mathrm{Tr}[A]$
5. $\mathrm{Tr}[A_1A_2...A_n]=\mathrm{Tr}[A_nA_{n-1}...A_1]$
6. $\mathrm{Tr}[A^TB]=\sum A_{ij}B_{ij}$
7. $\mathrm{Tr}[A]=\sum \text{特征值 } (\lambda)$
8. $f(x)=\mathrm{Tr}[f(x)]=\mathrm{Tr}[f(x)^T] \quad \& \text{ When } \ f(x)_{\{1,1\}}$

证 *of* 定理 *2.1.3(3)* $\mathrm{Tr}[AB]=\mathrm{Tr}[BA]$:

$$AB_{ij}=\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}\Rightarrow AB_{ii}=\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}B_{ik}A_{ki} \tag{2.3}$$

ik ki的情况都会出现，所以显然式(2.3) 成立，证毕。 ■

2.2 标量矩阵导数$f(x)$

2.2.1 矩阵微分

定义 2.2.1.1:

$$dX=\begin{bmatrix} dX_{11} & dX_{12} & ... & dX_{1n} \\ dX_{21} & dX_{22} & ... & dX_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ dX_{11} & dX_{12} & ... & dX_{1n} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

矩阵里面的每一个如dX_{11},其实

定理 2.2.1.1:

$$d\,\mathrm{Tr}[A]=\mathrm{Tr}[dA]$$

证:

$$\mathrm{Tr}[dA]=\sum_i dA_{ii}=\sum_i dA_{ii}=d\sum_i A_{ii}=d\,\mathrm{Tr}[A]$$

■

标量形式的微分和导数可以用下式表示

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx$$

对于矩阵，有如下定理

定理 2.2.1.2:

$$df(X)=\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial f}{\partial X}^T dX\right] \tag{2.5}$$
[5]

[5]这里的$f(X)$, f小写，应该为标量函数

证：For 式(2.5)

$$f(x) = \mathrm{Tr}[f(x)] = \mathrm{Tr}[f(x)^T] \tag{2.6}$$

$$df(X) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial X_{ij}} dX_{ij}$$

使用式(2.3)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial f}{\partial X}^T dX\right] &= \sum_i \sum_k \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X}^T\right)_{ik} (dX)_{ki}\right] \\ &= \sum_i \sum_k \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{ki} (dX)_{ki}\right]\end{aligned}$$

For 式(2.6),只需要意识到$f(x)_{\{1,1\}}$即可。证毕。 ■

定理 2.2.1.3：对于矩阵微分，有如下几个性质及延伸性质

1. $d(A+B) = d(A) + d(B)$
2. $d(cA) = cd(A)$
3. $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$
4. $d(X^T) = d(X)^T$
5. $\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = Ax + A^T x$
6. $\mathrm{d}(X^{-1}) = -X^{-1}\mathrm{d}XX^{-1}$ (if X^{-1}exists)

证 *of 3* $\boldsymbol{d(AB) = d(A)B + Ad(B)}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{LEFT} = df(AB) &= d\sum_k A_{ik}B_{ki} \\ &= \sum_k d(A_{ik})B_{ki} + A_{ik}d(B_{ki})\end{aligned}$$

$$\text{RIGHT=}[d(A)B + Ad(B)]_{ij} = \sum_k d(A)_{ik}B_{ki} + \sum_k d(B)_{ik}A_{ki} = \mathrm{LEFT}$$

■

证 *of 4:* $\boldsymbol{d(X^T) = d(X)^T}$：使用式(2.4) ■

证 *of 5:* $\boldsymbol{\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = Ax + A^T x}$ ：

$$
\begin{aligned}
d(x^T A x) &= d\,\mathrm{Tr}[x^T A x] \\
&= \mathrm{Tr}[d(x^T) A x + x^T d(Ax)] \\
&= \mathrm{Tr}\Big[d(x)^T A x + x^T \underbrace{d(A)}_{0} x + x^T A d(x)\Big] \\
(\mathrm{Tr}[A+B] = \mathrm{Tr}[A] + \mathrm{Tr}[B]) &= \mathrm{Tr}[d(x)^T A x] + \mathrm{Tr}[x^T A d(x)] \\
(\mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}[A]) &= \mathrm{Tr}[x^T A^T d(x)] + \mathrm{Tr}[x^T A d(x)] \\
\text{Then} \Rightarrow \frac{\partial x^T A x}{\partial x} &= (x^T A^T + x^T A)^T \\
&= Ax + Ax^T
\end{aligned}
$$

■

证 *of 6* $dX^{-1} = -X^{-1}dXX^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
d(I) = 0 = d(XX^{-1}) &= d(X)X^{-1} + Xd(X^{-1}) \\
d(X^{-1}) &= -X^{-1}d(X)X^{-1}
\end{aligned}
$$

■

2.2.2 标量对矩阵求导的求解过程

从上面的例子中，我们可以得到对于一个$f(x)$求解$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$的固定步骤

1 $df(x) = d\,\mathrm{Tr}[f(x)] = \mathrm{Tr}[df(x)]$ or $df(x) = d\,\mathrm{Tr}[f(x)^T] = \mathrm{Tr}[df(x)^T]$

> 见式(2.6)

2 使用定理 2.1.3 中关于 trace 的各种性质，化简成$\sum_i \mathrm{Tr}[U_i d(x)]$的形式

3 如式(2.5)，所以$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \sum\limits_i (U_i)^T$

2.3 行列式

定义 2.3.1 (行列式): 我们把行列式定义为一个关于矩阵 A 的标量函数，记作 $\det(A)$或$|A|$

定义 2.3.2 (矩阵范数): 我们把行列式定义为一个关于矩阵 A 的标量函数，记作 $\det(A)$或$|A|$

3 矩阵求导和多元微分

$$\frac{\overset{\text{Numerator}}{1}}{\underset{\text{Denominator}}{x+1}} + \underset{\text{Quotient}}{2}$$

On the left A todo on the left .

4 最小二乘的几种解法

$$\min F(x) = \|f(x)\|_2^2 = \|b - A\hat{x}\|$$

4.1 牛顿法

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)(x-x_0)^0 + f'(x_0)(x-x_0) + \left(\frac{f''(x_0)}{2!}\right)(x-x_0)^2 + \dots \\ &\approx f(x_0)(x-x_0)^0 + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) = g(x)$$

$g(x) = 0, x = x_1$的时候是极值,

$$x_1 - x_0 = \frac{f'(x)}{f''(x)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

矩阵的梯度为一阶导的转置，函数的梯度为一阶导,雅可比矩阵J 二阶导数矩阵H。

$$\Delta x = -\frac{J}{H} \tag{4.8}$$

这便是我们熟知的牛顿法。

4.2 梯度下降法

$$\theta_{i+1}(j) = \theta_i(j) - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \tag{4.9}$$

4.3 牛顿法

高斯-牛顿法（Gauss-Newton method）是一种非线性最小二乘问题的优化方法，通常用于拟合非线性模型。它通过将非线性问题线性化来简化求解，常用于机器学习、计算机视觉等领域中的优化问题。

下面是高斯-牛顿法的详细推导过程。

假设我们有一个非线性最小二乘问题，其目标是找到 x 使得以下目标函数$F(x)$ 最小化：

$$F(x)=\frac{1}{2}\parallel f(x)\parallel^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(f_i(x))^2$$

其中，

$$f(x)=[f_1(x),f_2(x),...,f_m(x)]^T$$

是一个由 m 个实值函数组成的向量函数，代表误差项或残差（residual），而 x 是我们希望优化的 n 维变量。

目标是最小化 $\parallel f(x)\parallel^2$ 的平方和，找到一个 x 使得 $f(x)\approx 0$。

假设我们已经有一个当前解 x_k，我们希望找到一个小的增量 Δx，使得更新后的 $x_{k+1}=x_k+\Delta x$ 更接近最优解。

在 x_k 附近，我们对 $f(x)$ 进行一阶泰勒展开：

$$f(x_k+\Delta x)\approx f(x_k)+J(x_k)\Delta x$$

其中 $J(x_k)$ 是 $f(x)$ 在 x_k 处的雅可比矩阵，其第 i 行、第 j 列的元素为

$$J_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

因此，我们的目标函数可以近似为：

$$F(x_k+\Delta x)\approx\frac{1}{2}\parallel f(x_k)+J(x_k)^T\Delta x\parallel^2$$

现在，我们将近似的目标函数展开：

/init1

$$\begin{aligned}M(\Delta X)=\frac{1}{2}f(x+\Delta X)^2&=\frac{1}{2}(f(x)+J^T\Delta X)^T(f(x)+J^T\Delta X)\\&=\frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(x)^T+\Delta X^TJ}_{\text{E}}\Big]\Big[\underbrace{f(x)+J^T\Delta X}_{\text{F}}\Big]\\&=\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\|f(x)\|^2}_{\text{A}}+\underbrace{f(x)^TJ^T\Delta X}_{\text{B}}+\underbrace{\Delta X^TJf(x)}_{\text{C}}+\underbrace{\Delta X^TJJ^T\Delta X}_{\text{D}}\Big]\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}dC=d\,\mathrm{Tr}[F(X)^TJ^T\Delta X]&=\mathrm{Tr}[d(F(X)^TJ^T\Delta X)]\\=\mathrm{Tr}[F(X)^TJ^Td\Delta X]&\Rightarrow\frac{\partial C}{\partial\Delta X}=F(x)^TJ^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(\Delta X)}{\partial\Delta X}&=\frac{1}{2}\Big(0+F(X)^TJ^T+F(X)^TJ^T+\overbrace{2(JJ^T\Delta X)}^{\text{定理 2.1.3(8)}}\Big)\\&=F(X)^TJ^T+JJ^T\Delta X\end{aligned}$$

但是 如果式(4.10) 中的第二步不做展开，我们直接求解也是可以的

$$dM(\Delta X) = \frac{1}{2} d \,\mathrm{Tr}[]$$

5 卡尔曼滤波

TODOs

6 一些其他概率论知识

参考文献

1. 杨明 & 刘先忠. 矩阵论. (华中科技大学出版社, 2003).
2. Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications 4th ed.* (2012).
3. 维基百科. 正交矩阵. https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%AD%A3%E4%BA%A4%E7%9F%A9%E9%98%B5&oldid=84256160 (2024)
4. 李湘宁, 贾宏志, 张荣福 & others. 工程光学. 108–110 (科学出版社, 2022).