



Principe Fondamental de la Dynamique

Cours 1

Séquence 8 - Modéliser le comportement dynamique des systèmes

- v1.1

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Un peu d'histoire...	2
1.2	Intérêt du Principe Fondamental de la Dynamique et lien avec le Théorème de l'Energie Cinétique	2
2	Principe Fondamental de la Dynamique	3
2.1	Référentiel d'étude	3
2.2	Cas du point matériel (rappel de physique)	4
2.3	Cas du solide	4
2.4	Cas d'un ensemble de solides	7
3	Calcul pratique du torseur dynamique	8
3.1	Cas particuliers classiques	8
3.2	Méthodologie du calcul du moment dynamique	9
3.3	Exemple : Eolienne bipale	10
4	Annexes	16
4.1	Preuve que les moments dynamiques forment un champ de torseur	16
4.2	Moment dynamique pour un solide en translation	16
4.3	Moment dynamique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe (O, \vec{z})	17
4.4	Preuve du lien entre torseur cinétique et torseur dynamique	17



1 Introduction

1.1 Un peu d'histoire...

La dynamique est l'étude des relations entre les mouvements d'un solide et leurs causes, autrement dit, un carrefour entre la cinématique et la statique.

De nombreux scientifiques ont contribué à son étude et au développement des méthodes encore utilisées aujourd'hui. On peut citer (de manière non exhaustive) :

- **Copernic** (Pologne, 1473-1543) publie le « Traité sur les révolutions des mondes célestes »
- **Kepler** (Allemagne, 1571-1630) formule les lois de mouvements des planètes :
 - ◇ Loi des orbites (1^{re} loi de Kepler) : les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers,
 - ◇ Loi des aires (2^e loi de Kepler) : la vitesse aérolaire est constante,
 - ◇ Loi des périodes (3^e loi de Kepler) : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse.
- **Galilée** (Italie, 1564-1662) établit les lois du pendule, du plan incliné, de la chute des corps et confirme les affirmations de Copernic grâce à sa lunette astronomique.
- **Huygens** (Hollande, 1629-1695) : notion de moment d'inertie (développe les premières horloges de précision pour la marine royale française) et pendule composé.
- **Newton** (Angleterre, 1642-1727) développe la théorie de l'attraction universelle, et retrouve par le calcul les lois de Kepler.
- **Lagrange** (France, 1736-1813) invente la mécanique analytique basée sur le calcul des variations (recherche des conditions d'extremum des fonctions de plusieurs variables).
- **Hamilton** (Irlande, 1805-1865) invente le concept de vecteur et de la géométrie vectorielle, rédige un mémoire sur la dynamique.
- **Poinsot** (France, 1777-1859) : résolution analytique de l'étude du mouvement autour d'un point fixe d'un solide soumis à une force passant par ce point.
- **Painlevé** (France, 1863-1933) rédige un cours de mécanique générale en utilisant les notations et formulations encore en usage.

1.2 Intérêt du Principe Fondamental de la Dynamique et lien avec le Théorème de l'Energie Cinétique

On a vu que le TEC permet d'obtenir **une équation scalaire** reliant les mouvements et les efforts au sein d'un mécanisme. Si le mécanisme étudié n'a qu'**un seul degré de liberté**, cette équation est suffisante pour décrire complètement la dynamique du système, c'est directement la **loi de comportement dynamique du système**, ou loi de mouvement.

Cependant, deux types de situations peuvent se présenter, pour lesquelles le TEC ne sera pas utile seul :

- si l'on souhaite déterminer la loi de mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté ;
- si l'on souhaite déterminer des actions mécaniques au sein du mécanisme en vue de dimensionner des pièces en particulier.

En effet, dans le deuxième cas, on a vu que les efforts intérieurs à un mécanisme n'interviennent pas dans le TEC si la puissance développée par ces efforts est nulle (c'est le cas en particulier pour les efforts transmis dans les liaisons supposées parfaites).

Ainsi, la dynamique permet la résolution de deux types de problèmes :

- les efforts sont connus... et on détermine les mouvements (comme le TEC) ;



- on connaît les mouvements désirés... et on détermine les actions mécaniques engendrées.

On peut ainsi **dimensionner les actionneurs** (moteurs, vérins,...) ainsi que les **pièces** ou **systèmes de pièces** soumises à des accélérations ou décélérations (bielles, suspensions, structures, ...).

2 Principe Fondamental de la Dynamique

2.1 Référentiel d'étude

Afin d'étudier les mouvements, et plus particulièrement les accélérations et décélérations, il nous faut un référentiel d'espace et de temps qui soit invariant.

On pourrait prendre un référentiel absolu, fixe par rapport à l'ensemble de l'univers, mais cette notion reste très théorique, alors on définit des référentiels qui s'en approchent.

a) Le référentiel de Copernic

Son origine est le centre d'inertie du système solaire (proche du soleil) dont les axes passent par des étoiles fixes entre elles. En mécanique classique, on admet donc que le référentiel de Copernic est absolu.

b) Le référentiel Galiléen

Il s'agit d'un référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic. Ce repère est aussi considéré en mécanique Newtonnienne comme absolu.

En négligeant la vitesse de rotation de la terre (1 tr/24 h) et en considérant le rayon de courbure de la trajectoire elliptique de la terre très grand, on peut considérer que le référentiel terrestre (géocentrique) est un référentiel galiléen.

Pour la suite du cours, nous prendrons comme hypothèses (sauf exceptions) :

- référentiel galiléen;
- principe de conservation de la masse;
- solide S indéformable ($\forall (A, B) \in (S)^2$ alors $AB = \text{cste}$);
- liaison parfaite (pas d'adhérence, ni de frottement).

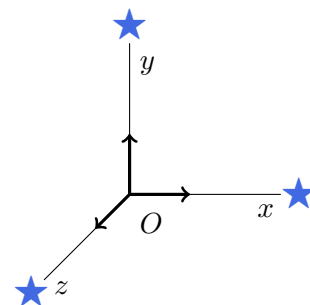


Figure 1 – Un référentiel galiléen



2.2 Cas du point matériel (rappel de physique)

Soit P , un point matériel de masse m , le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) s'écrit alors :

$$\exists R_g \text{ tq : } \boxed{\sum \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow P}} = m \overrightarrow{\Gamma_{P/R_g}}} \quad \text{et} \quad \sum \overrightarrow{M_{P, \text{ext} \rightarrow P}} = \overrightarrow{0}$$

En pratique, on assimilera souvent les billes, ou les pièces de petites dimensions, à des points matériels (embrayage centrifuge, masselotte d'équilibrage,...).

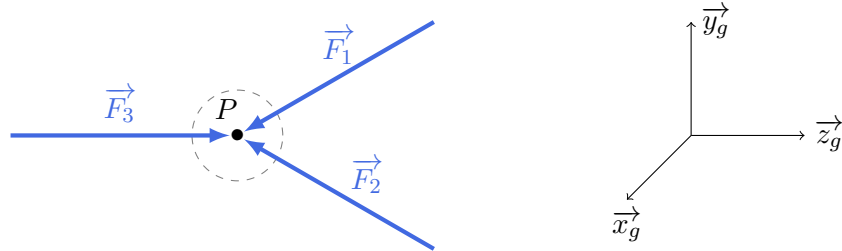


Figure 2 – Assimilation d'une bille à un point matériel P

2.3 Cas du solide

On peut en première approche considérer qu'un solide n'est qu'un ensemble de points matériels M affectés de la masse dm .



Figure 3 – Première approche : S est un ensemble de points matériels

On peut alors écrire :

$$\exists R_g \text{ tq } \forall M \in S : \quad \sum d\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow M}} = dm \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} \quad \text{et} \quad \sum d\overrightarrow{M_{M, \text{ext} \rightarrow M}} = \overrightarrow{0}$$

Il reste alors à **généraliser** pour obtenir la résultante et le moment dynamique en intégrant sur l'ensemble du solide.

a) Théorème de la résultante dynamique

Il suffit d'intégrer sur tout le solide S , à savoir :

$$\int_S \sum d\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow M}} = \int_S dm \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}}$$



En examinant séparément ces deux termes, on a :

$$\int_S \sum d\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow M}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}} \quad \text{et} \quad \int_S dm \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} = m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$$



Démonstration

$$\int_S dm \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} = \int_S \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right]_{R_g} dm \quad \text{Acc. d'un pt. mat. : } \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} = \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right]_{R_g}$$

Or la masse ne dépend pas du temps :

$$\int_S dm \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} = \left[\frac{d^2}{dt^2} \int_S \overrightarrow{OM} dm \right]_{R_g}$$

$$\text{Et : } \int_S \overrightarrow{OM} dm = m \overrightarrow{OG} \quad (\text{Définition du centre de gravité})$$

$$\int_S dm \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} = \left[\frac{d^2}{dt^2} m \overrightarrow{OG} \right]_{R_g} = m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \quad (\text{Conservation de la masse})$$

On a ainsi le théorème de la résultante dynamique :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}} = m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$$

b) Théorème du moment dynamique

Il suffit d'intégrer sur tout le solide, en un point particulier, par exemple en A , point lié à S :

$$\int_S \sum d\overrightarrow{M_{M, \text{ext} \rightarrow M}} = \overrightarrow{0}$$

On peut alors écrire cette égalité sous la forme :

$$\sum \overrightarrow{M_{A, \text{ext} \rightarrow S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge dm \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$$



**Démonstration**

$$\begin{aligned}
 \int_S \sum d\overrightarrow{M_{M,\text{ext} \rightarrow M}} &= \vec{0} \\
 \int_S \sum d\overrightarrow{M_{A,\text{ext} \rightarrow M}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge \sum d\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow M}} &= \vec{0} \quad (\text{Changement de point du moment}) \\
 \sum \overrightarrow{M_{A,\text{ext} \rightarrow S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge \sum d\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow M}} &= \vec{0} \\
 \sum \overrightarrow{M_{A,\text{ext} \rightarrow S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge dm \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

On a ainsi le théorème du moment dynamique (peu utilisé sous cette forme) :

$$\sum \overrightarrow{M_{A,\text{ext} \rightarrow S}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm$$

c) Torseur dynamique

$\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}}$ et $\overrightarrow{M_{A,\text{ext} \rightarrow S}}$ forment le torseur des actions mécaniques extérieures sur S au point A :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{A,\text{ext} \rightarrow S}} \end{array} \right\}_A$$

Les deux autres termes $m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$ et $\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm$ forment aussi un torseur, le **torseur dynamique** du solide S par rapport à R_g au point A lié à S :

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm = m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm = \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} \end{array} \right\}_A$$

Par convention, on adopte la notation suivante :

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} \end{array} \right\}_A$$

La résultante du torseur dynamique $m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$ est appelée **quantité d'accélération**.

Comme pour tous les torseurs, la loi de changement de point des moments dynamiques est vérifiée :

$$\overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} = \overrightarrow{\delta_{B \in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$$



d) Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Le PFD appliqué au solide S dans son mouvement par rapport à R_g au point A s'écrit alors :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\}_A = \{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A$$

On peut décomposer cette égalité torsorielle en deux égalités vectorielles :

- théorème de la résultante dynamique (TRD) : $\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}} = m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$
- théorème du moment dynamique (TMD) en A : $\overrightarrow{M_{A, \text{ext} \rightarrow S}} = \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}}$



Attention

Il faut déterminer les **deux** torseurs séparément :

- $\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\}_A$ issu du bilan des actions mécaniques extérieures sur S
- $\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A$ issu de l'étude du mouvement de S par rapport à R_g

...et ensuite faire l'égalité dans le même repère d'écriture et au même point pour obtenir **au maximum** 6 équations scalaires.

2.4 Cas d'un ensemble de solides

Soit un ensemble de n solides $\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$.

On peut faire la somme des torseurs, à condition d'être **au même point**, par exemple A , on a alors comme expression du PFD :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\}_A = \{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\}_A + \{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\}_A + \{\mathcal{D}_{S_3/R_g}\}_A + \dots + \{\mathcal{D}_{S_n/R_g}\}_A$$



Remarque

- Une égalité de torseur correspond à :
 - ◇ un système de deux équations vectorielles;
 - ◇ un système de 6 équations scalaires;
- Le PFD est équivalent au PFS dans les cas suivants :
 - ◇ système à l'équilibre;
 - ◇ mouvement de translation rectiligne uniforme;
 - ◇ masses et inerties négligeables.



3 Calcul pratique du torseur dynamique

3.1 Cas particuliers classiques

a) Solide en translation

En calculant le moment dynamique au centre de gravité G de S on obtient $\overrightarrow{\delta_{G \in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$. Donc le PFD pour un solide en translation écrit au centre de gravité G **uniquement** :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

En un point quelconque A lié à S (changement de point entre G et A) :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \\ m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \end{array} \right\}$$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe (O, \vec{z})

On peut écrire le PFD en un point de l'axe de rotation, par exemple O :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \\ J\ddot{\theta} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$

avec :

- θ : angle définissant la rotation du solide S autour de l'axe (O, \vec{z})
- J : **moment d'inertie** du solide S par rapport à l'axe (O, \vec{z})

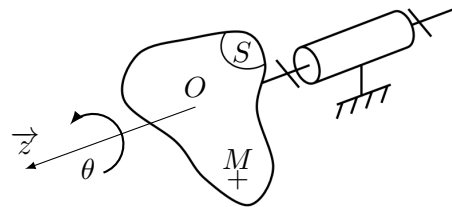


Figure 4 – S en rotation autour de (O, \vec{z})

Si le centre de gravité G est porté par l'axe de rotation alors :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ J\ddot{\theta} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$



3.2 Méthodologie du calcul du moment dynamique

Lorsqu'on ne se trouve pas dans un de ces deux cas particuliers, le calcul se complique. Il est alors préférable de passer par la cinétique. Les calculs pouvant être très longs, il est important de les optimiser en identifiant la formule la plus adéquate à la situation considérée.

a) Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique

On montre que les résultantes dynamique et cinétique sont liées par :

$$\overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \left[\frac{dR\{\overrightarrow{c_{S/R_g}}\}}{dt} \right]_{R_g} = \left[\frac{d(m \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}})}{dt} \right]_{R_g}$$

et que les moments dynamiques et cinétiques sont liés par (pour un point A quelconque) :

$$\overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}$$



Méthode : Calculer le moment dynamique

Cette formule permet de calculer judicieusement le moment dynamique en un point A lorsque le deuxième terme s'annule :

- si $A = G$ ou $\overrightarrow{V_{A/R_g}} // \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} : \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} = \vec{0}$
- si A est fixe dans $R_g : \overrightarrow{V_{A/R_g}} = \vec{0}$
- si G est fixe dans $R_g : \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} = \vec{0}$

On a alors :
$$\overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g}$$

Autrement, il est plus intéressant d'utiliser la loi de changement de point des moments dynamiques (« BABAR ») en passant par le point G .

b) Moment dynamique au centre de gravité G

$$\overrightarrow{\delta_{G \in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} = \left[\frac{d(\bar{\bar{I}}_{(G,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{R/R_g}})}{dt} \right]_{R_g}$$



Méthode : Calculer le moment dynamique

Si l'on n'est pas dans un des cas particuliers précédents, on utilise plutôt :

$$\overrightarrow{\delta_{A \in S / R_g}} = \overrightarrow{\delta_{G \in S / R_g}} + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S / R_g}}$$

$$\overrightarrow{\delta_{A \in S / R_g}} = \left[\frac{d \left(\overline{\bar{I}_{(G,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{R/R_g}}} \right)}{dt} \right]_{R_g} + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S / R_g}}$$

c) Moment dynamique en projection sur un axe porté par \vec{z}

Il est généralement inutile d'exprimer le moment dynamique dans la base globale. En effet, on applique souvent le TMD sur un axe bien choisi.

Méthode : Calculer le moment dynamique

Si seule la composante suivant \vec{z} est utile au calcul alors :

$$\left[\frac{d \overrightarrow{\sigma_{A \in S / R_g}}}{dt} \right]_{R_g} \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{A \in S / R_g}} \cdot \vec{z}) - \overrightarrow{\sigma_{A \in S / R_g}} \cdot \left[\frac{d \vec{z}}{dt} \right]_{R_g}$$

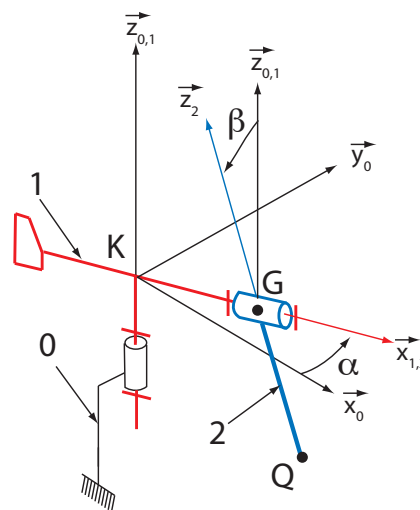
Dans le calcul du moment dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_{A \in S / R_g}} \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{A \in S / R_g}} \cdot \vec{z}) - \overrightarrow{\sigma_{A \in S / R_g}} \cdot \left[\frac{d \vec{z}}{dt} \right]_{R_g} + (\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m \overrightarrow{V_{G \in S / R_g}}) \cdot \vec{z}$$

Ainsi, on projette le moment cinétique avant d'en dériver toutes les composantes, et bien souvent, \vec{z} est un vecteur fixe de R_g donc sa dérivée est nulle.

3.3 Exemple : Eolienne bipale

On s'intéresse à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de quatre solides regroupés en trois classes d'équivalences cinématiques :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) ;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K, \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = a \vec{x}_1$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

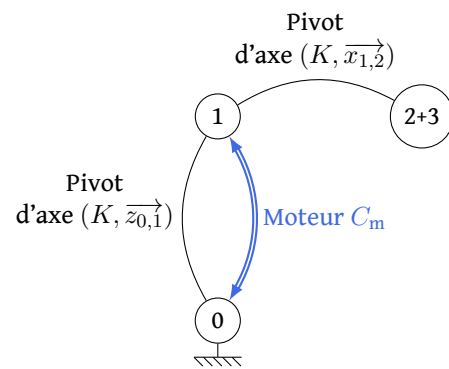
$$\bar{I}_{(G,2)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une masse ponctuelle m au point Q . On pose $\vec{GQ} = -b \vec{z}_2$.

On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose que l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 crée un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

Pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème, on peut appliquer le théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne $E = \{1 + 2 + 3\}$ en projection sur l'axe (K, \vec{z}_0) :

$$C_m = (\delta_{K \in 1/0} + \delta_{K \in 2/0} + \delta_{K \in 3/0}) \cdot \vec{z}_0$$



Exemple : Calcul de $\delta_{K \in 1/0} \cdot \vec{z}_0$

1 est en rotation autour de l'axe fixe (K, \vec{z}_0) , donc $\delta_{K \in 1/0} \cdot \vec{z}_0 = J\ddot{\alpha}$.





Exemple : Analyse de la stratégie de calcul de $\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{z_0}$

2 est en rotation autour de l'axe $(K, \overrightarrow{x_{1,2}})$, qui n'est pas fixe.

Solution 1 : K est un point fixe de R_0 donc on peut utiliser la formule :

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}}}{dt} \right]_0 + \underbrace{\overrightarrow{V_{K/0}}}_{\vec{0}} \wedge M \overrightarrow{V_{G \in 2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}}}{dt} \right]_0$$

Comme on cherche uniquement la projection du moment dynamique sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}}}{dt} \right]_0 \cdot \overrightarrow{z_0} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{z_0}) - \underbrace{\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_0}_{\vec{0}} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{z_0})$$

Cependant, l'opérateur d'inertie de **2** est donné en G et non en K , le calcul de $\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}}$ n'est pas direct. On peut :

- soit utiliser le théorème de Huygens pour obtenir l'opérateur d'inertie en K puis utiliser $\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} = \bar{I}_{(K,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + M \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{V_{K \in 2/0}} = \bar{I}_{(K,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$ car $\overrightarrow{V_{K \in 2/0}} = \vec{0}$;
- soit utiliser la formule de changement de point du moment cinétique :
 $\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G \in 2/0}} + \overrightarrow{KG} \wedge M \overrightarrow{V_{G \in 2/0}} = \bar{I}_{(G,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + \overrightarrow{KG} \wedge m \overrightarrow{V_{G \in 2/0}}$.

Ces deux options présentent la même difficulté de calcul.

Solution 2 : on utilise la formule de changement de point du moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} = \overrightarrow{\delta_{G \in 2/0}} + \overrightarrow{KG} \wedge M \overrightarrow{\Gamma_{G \in 2/0}} = \left[\frac{d(\bar{I}_{(G,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}})}{dt} \right]_0 + \overrightarrow{KG} \wedge M \overrightarrow{\Gamma_{G \in 2/0}}$$

puis on projette le résultat sur $\overrightarrow{z_0}$, ce qui reviendra au même que d'utiliser la formule de changement de point du moment cinétique, et sera légèrement plus long.

On choisit la solution 1 avec changement de point du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{z_0}) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} = \bar{I}_{(G,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + \overrightarrow{KG} \wedge M \overrightarrow{V_{G \in 2/0}}$$

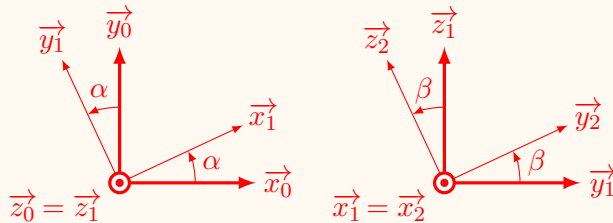




Exemple : Calcul de $\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} \cdot \vec{z}_0$

- Calcul de $(\bar{I}_{(G,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}}) \cdot \vec{z}_0$

$\bar{I}_{(G,2)}$ est donné dans la base 2 et $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \vec{z}_1$.



Pour pouvoir faire le produit, on exprime $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$ dans la base 2 :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} (\sin \beta \vec{y}_2 + \cos \beta \vec{z}_2)$$

$$\text{D'où : } \bar{I}_{(G,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_2} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{b_2} = \begin{pmatrix} A \dot{\beta} \\ B \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{b_2}$$

$$\text{et } (\bar{I}_{(G,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}}) \cdot \vec{z}_{0,1} = \begin{pmatrix} A \dot{\beta} \\ B \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{b_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{b_2} = \dot{\alpha} (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta)$$

- Calcul de $(\overrightarrow{KG} \wedge M \overrightarrow{V_{G \in 2/0}}) \cdot \vec{z}_0$

$$\overrightarrow{V_{G \in 2/0}} = \left[\frac{d \overrightarrow{KG}}{dt} \right]_0 = a \left[\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_0 = a \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{KG} \wedge M \overrightarrow{V_{G \in 2/0}} = a \vec{x}_1 \wedge M a \dot{\alpha} \vec{y}_1 = M a^2 \dot{\alpha} \vec{z}_0$$

$$\text{d'où } (\overrightarrow{KG} \wedge M \overrightarrow{V_{G \in 2/0}}) \cdot \vec{z}_0 = M a^2 \dot{\alpha}$$

- Calcul de $\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} \cdot \vec{z}_0 = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} \cdot \vec{z}_0)$

$$\frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 2/0}} \cdot \vec{z}_0) = \frac{d}{dt} (\dot{\alpha} (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta) + M a^2 \dot{\alpha})$$

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} \cdot \vec{z}_0 = \ddot{\alpha} (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + M a^2) + \dot{\alpha} (2B \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta - 2C \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} \cdot \vec{z}_0 = \ddot{\alpha} (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + M a^2) + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(2\beta) (B - C)}$$





Exemple : Analyse de la stratégie de calcul de $\overrightarrow{\delta_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0}$

3 est en rotation autour de l'axe $(K, \overrightarrow{x_{1,2}})$, qui n'est pas fixe.

Solution 1 : K est un point fixe de R_0 donc on peut utiliser la formule :

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 3/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}}}{dt} \right]_0 + \underbrace{\overrightarrow{V_{K/0}}}_{\vec{0}} \wedge m \overrightarrow{V_{Q \in 3/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}}}{dt} \right]_0$$

Comme on cherche uniquement la projection du moment dynamique sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}}}{dt} \right]_0 \cdot \overrightarrow{z_0} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0}) - \underbrace{\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}} \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_0}_{\vec{0}} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0})$$

Le solide **3** est une masse ponctuelle en Q , donc $\overrightarrow{I}_{(Q,3)} = \vec{0}$, $\overrightarrow{\sigma_{Q \in 3/0}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\delta_{Q \in 3/0}} = \vec{0}$. Pour calculer $\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}}$, on peut :

- soit utiliser le théorème de Huygens pour obtenir l'opérateur d'inertie en K (non nul!) puis utiliser $\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}} = \overrightarrow{I}_{(K,3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}} + m \underbrace{\overrightarrow{KQ} \wedge \overrightarrow{V_{K \in 3/0}}}_{\vec{0}} = \overrightarrow{I}_{(K,3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$

car K est sur l'axe de rotation de $3/0$;

- soit utiliser la formule de changement de point du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}} = \underbrace{\overrightarrow{\sigma_{Q \in 3/0}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{KQ} \wedge m \overrightarrow{V_{Q \in 3/0}} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \overrightarrow{V_{Q \in 3/0}}.$$

La première option semble plus rapide.

Solution 2 : on utilise la formule de changement de point du moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 3/0}} = \underbrace{\overrightarrow{\delta_{Q \in 3/0}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{KQ} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{Q \in 3/0}} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{Q \in 3/0}}$$

puis on projette le résultat sur $\overrightarrow{z_0}$, ce qui reviendra au même que d'utiliser la formule de changement de point du moment cinétique, et sera légèrement plus long.

On choisit la solution 1 avec théorème de Huygens :

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0}) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}} = \overrightarrow{I}_{(K,3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$$





Exemple : Calcul de $\overrightarrow{\delta_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0}$

- Calcul de $\bar{I}_{(K,3)}$

D'après le théorème de Huygens, avec $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a\overrightarrow{x_2} - b\overrightarrow{z_2}$:

$$\bar{I}_{(K,3)} = \underbrace{\bar{I}_{(Q,3)}}_{\bar{I}_0} + m \begin{pmatrix} b^2 & 0 & ab \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}_{b_2}$$

- Calcul de $\left(\bar{I}_{(K,3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}}\right) \cdot \overrightarrow{z_0}$

$$\bar{I}_{(K,3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = m \begin{pmatrix} b^2 & 0 & ab \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}_{b_2} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{b_2} = m \begin{pmatrix} b^2 \dot{\beta} + ab \dot{\alpha} \cos \beta \\ (a^2 + b^2) \dot{\alpha} \sin \beta \\ ab \dot{\beta} + a^2 \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{b_2}$$

car $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$. D'où :

$$\left(\bar{I}_{(K,3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}}\right) \cdot \overrightarrow{z_0} = m \begin{pmatrix} b^2 \dot{\beta} + ab \dot{\alpha} \cos \beta \\ (a^2 + b^2) \dot{\alpha} \sin \beta \\ ab \dot{\beta} + a^2 \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{b_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{b_2}$$

$$\begin{aligned} \left(\bar{I}_{(K,3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}}\right) \cdot \overrightarrow{z_0} &= m \left[(a^2 + b^2) \dot{\alpha} \sin^2 \beta + a^2 \dot{\alpha} \cos^2 \beta + ab \dot{\beta} \cos \beta \right] \\ &= m \left[\dot{\alpha} (a^2 + b^2 \sin^2 \beta) + ab \dot{\beta} \cos \beta \right] \end{aligned}$$

- Calcul de $\overrightarrow{\delta_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0} &= m \frac{d}{dt} (\dot{\alpha} (a^2 + b^2 \sin^2 \beta) + ab \dot{\beta} \cos \beta) \\ &= m \left[\ddot{\alpha} (a^2 + b^2 \sin^2 \beta) + \dot{\alpha} 2b^2 \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + ab \ddot{\beta} \cos \beta - ab \dot{\beta}^2 \sin \beta \right] \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\delta_{K \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = m \left[\ddot{\alpha} (a^2 + b^2 \sin^2 \beta) + \dot{\alpha} \dot{\beta} b^2 \sin(2\beta) + ab \ddot{\beta} \cos \beta - ab \dot{\beta}^2 \sin \beta \right]$$



4 Annexes

4.1 Preuve que les moments dynamiques forment un champ de torseur

On vérifie que les moments forment un champ de torseur.

On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ avec A et B deux points fixes de S , et M décrivant le solide S .

On peut alors décomposer le terme $\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm$:

$$\begin{aligned} \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm &= \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm \quad (\text{relation de Chasles}) \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm &= \overrightarrow{AB} \wedge \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm \quad (\text{car } AB = \text{cste}) \\ \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm}_{\text{Moment en } A} &= \underbrace{\int_S \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm}_{\text{Moment en } B} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}}_{\text{Résultante}} \end{aligned}$$

4.2 Moment dynamique pour un solide en translation

a) Moment dynamique en G

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_{G \in S/R_g}} &= \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} dm \quad (\text{Translation}) \\ \overrightarrow{\delta_{G \in S/R_g}} &= \int_S \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} dm \quad (\text{relation de Chasles}) \\ \overrightarrow{\delta_{G \in S/R_g}} &= \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \int_S dm + \left(\int_S \overrightarrow{OM} dm \right) \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \quad (O \text{ et } G \text{ fixes / } S) \\ \overrightarrow{\delta_{G \in S/R_g}} &= \overrightarrow{GO} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} + m \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \quad (\text{Définition du centre de gravité}) \\ \overrightarrow{\delta_{G \in S/R_g}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

b) Moment dynamique en un point quelconque A

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} dm \quad (\text{Translation}) \\ \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} &= \int_S \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} dm \quad (\text{relation de Chasles}) \\ \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} &= \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \int_S dm + \overrightarrow{\delta_{G \in S/R_g}} \quad (O \text{ et } G \text{ fixes / } S) \\ \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} &= m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \end{aligned}$$



4.3 Moment dynamique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe (O, \vec{z})

Avec r la distance orthogonale de M à l'axe (O, \vec{z}) , pour une rotation d'angle θ , on a :

$$\overrightarrow{\delta_{O \in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm$$

$$\overrightarrow{\delta_{O \in S/R_g}} = \int_S r \cdot \vec{u} \wedge (-r\ddot{\theta} \cdot \vec{u} + r\ddot{\theta} \cdot \vec{v}) dm = \int_S r^2 \ddot{\theta} dm \cdot \vec{z} = \ddot{\theta} \int_S r^2 dm \cdot \vec{z} = J \ddot{\theta} \vec{z}$$

Avec le moment d'inertie : $J = \int_S r^2 dm$

4.4 Preuve du lien entre torseur cinétique et torseur dynamique

a) Résultantes

$$\overrightarrow{R\{c_{S/R_g}\}} = \int_S \overrightarrow{V_{M \in S/R_g}} dm = m \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} \text{ et } \overrightarrow{R\{d_{S/R_g}\}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm = m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g}, \text{ d'où } \overrightarrow{R\{d_{S/R_g}\}} = \left[\frac{d\overrightarrow{R\{c_{S/R_g}\}}}{dt} \right]_{R_g}$$

b) Moments

$$\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M \in S/R_g}} dm \text{ et } \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R_g}} dm$$

Dérivons le moment cinétique :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} &= \int_S \left[\frac{d\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} dm \\ \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} &= \int_S \left[\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \right]_{R_g} \wedge \overrightarrow{V_{M \in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{V_{M \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} dm \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \left[\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \right]_{R_g} = \left[\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} \right]_{R_g} + \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_g} = -\overrightarrow{V_{A/R_g}} + \overrightarrow{V_{M/R_g}}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} &= \int_S (-\overrightarrow{V_{A/R_g}} + \overrightarrow{V_{M/R_g}}) \wedge \overrightarrow{V_{M/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M/R_g}} dm \\ \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} &= \int_S (-\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{M/R_g}} + \overrightarrow{V_{M/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{M/R_g}}) dm + \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} \\ \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} &= -\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \int_S \overrightarrow{V_{M/R_g}} dm + \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}}}{dt} \right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}.$$

