**考研数学核心手册**

# 初等数学

## 初等代数



等差数列求和： 等比数列求和：







## 三角函数公式

**和差角公式 和差化积公式**



**积化和差公式 倍角公式**



**半角公式**



## 初等几何

圆弧长rθ 扇形面积 球的表面积：4πR2 椭圆面积：πab

球的体积： 椭球的体积： 圆锥的体积：

# 高等数学

## 第1章 极限与连续

### 1.1集合、映射、函数

空集，子集，有限集，无限集，可列集，积集，区间，邻域

映射，象，原象，定义域，值域，满映射，单映射，双射，函数，自变量，因变量

基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数

### 1.2数列的极限

性质：

1. 唯一性：收敛数列的极限必唯一。

2. 有界性：收敛数列必为有界数列。

3. 子列不变性：若数列收敛于a，则其任何子列也收敛于a。

1. 一个数列有若干子列收敛且收敛于一个数，仍不能保证原数列收敛。
2. 若数列{xn}有两个子列{xp},{xq}均收敛于a，且这两个子列合起来就是原数列，则原数列也收敛于a。
3. 性质3提供了证明了某数列发散的方法，即用其逆否命题：若能从该数列中选出两个具有不同极限的子列，则该数列必发散。

4. 保号性：如果，且a>0（或<0），那么存在正整数N，当n>N时，都有xn>0（或<0）。

5. 保序性：设，若a>b，则存在正整数N，当n>N时，有xn≥yn；若n>N时有xn≥yn，则a≥b。

判别法则：

1. 夹逼法则：若∃N,当n>N时，xn≤yn≤zn，且xn=zn=a, 则yn=a。

2. 单调收敛原理：单调有界数列必收敛。

注：任何有界的数列必存在收敛的子数列。

### 1.3函数的极限

性质：极限唯一性，局部有界性，局部保号性，局部保序性。

判别法则：

1. 夹逼法则：若，且存在x0的某一去心邻域，均有f(x)≤g(x)≤h(x)，则。

2. 单调收敛原理：单调有界函数必收敛。

3. 海涅(Heine)归结原则：的充要条件是：对于任何满足的数列{xn}，都有。

归结原则对于验证函数在某点没有极限是较方便的，例如可以挑选一个收敛于该点的自变量x的数列{xn}，而相应的函数值数列{f(xn)}却不收敛；或者选出两个收敛于该点的数列{xn},{x’n}，而相应的函数值数列{f(xn)},{f(x’n)}却具有不同的极限。

几个重要极限



### 1.4无穷小与无穷大

如果，则称函数f(x)是x→x0时的**无穷小**。

设α(x)，β(x)是无穷小，若，当时，则称x→x0时称α(x)是β(x)的

对于任意的给定正数M，存在正数δ，当0<|x-x0|<δ时，**恒有**|f(x)|>M，则称函数f(x)是x→x0时的**无穷大**。

无界不一定是无穷大。例如f(x)=xsinx在(-∞,+∞)内无界，但它不是无穷大。

常用等价无穷小



若f(x)连续，f(0)=0,f’(0)≠0，则（x→0时）。

确定等价无穷小的方法：(1) 洛必达法则；(2) 泰勒公式

### 1.5连续函数

极限存在 ⇔ 左右极限存在且相等。

连续 ⇔ 左右极限存在且相等，且等于该点函数值。

间断点：(1) 第一类间断点，左右极限不相等（跳跃间断点），或相等但不等于该点函数值（可去间断点）；(1) 第二类间断点，左右极限至少有一个不存在。

基本初等函数在它们的定义域内都是都是连续的。

一切初等函数在其定义区间内都是连续的。所谓定义区间，就是包含在

定义域内的区间。例如是一个初等函数，其定义域是一些

离散的点，±0，±2，±4，...，没有一个区间，故它是不连续的。

闭区间上连续函数的性质：有界性，最值性，介值性，零点定理。

### 1.6常考题型

1. 求极限的方法

(1) 四则运算；

(2) 换元与两个重要极限；

(3) 等价无穷小替换；

f(x)g(x)-1一般要想到用ln(1+x)

(4) 洛必达法则；

(5) 泰勒公式；

分子或分母中含有加减运算时。

(6) 利用函数极限求数列极限；

若

(7) 放缩法；

求极限,就要将数列xn放大与缩小成：zn≤xn≤yn。放缩法常用的方法有：

n个数之和不超过最大数乘n，不小于最小数乘n；分子与分母同为正数，分母放大此数缩小；若干正数乘积中，小于1的因子略去则放大，大于1的因子略去则缩小。

(8) 求递归数列的极限

① 先证递归数列{an}收敛（常用单调收敛原理），然后设, 再对

递归方程an+1=f(an)取极限得A=f(A), 最后解出A即可。

设an+1=f(an)，an∈区间I，若f(x)在区间I上单调上升，a2>a1(a2<a1)，则an单调上升（单调下降）；若f(x)在区间I上单调下降，则an不单调。

若f(x)单调下降，则{a2n}，{a2n-1}分别单调，若可证它们有界，则它们分

别收敛，记，，若A=B，则整个数列也收敛于A。

② 先设，对递归方程取极限后解得A，再用某种方法证明。

对任意数列{an}，若满足| an+1-A|≤λ| an -A|，λ∈(0, 1)，则必有

## 第2章 导数与微分

### 2.1求导法则和求导公式

1. 求导法则

(1) 四则运算法则



(2) 复合函数求导



关键在于区分哪些是中间变量，哪些是自变量

(3) 反函数求导 

(4) 隐函数求导

(5) 参数式求导



(6) 对数求导法

(7) 分段函数求导

① 按求导法则求连接点处的左右导数

设

② 按定义求连接点处的左右导数

设

以及

③ 求导数在连接点处的极限值

设f(x)在x0的空心邻域U0(x0, δ)内可导且f(x)在点x0处连续。若极限

存在，则（⇔ f’(x)在点x0处连续）。

对于函数，可按方法②求，也可按方法③求。

若不存在，只能说明f’(x)在点x0处不连续，并不代表f’(x0)不存在，这时应转去用定义法。例如

若g(x), h(x)或f(x)很复杂，用定义求，否则按求导法则求。

(8) 变限积分求导



2. 求导公式



### 2.2高阶导数和高阶微分

求高阶导数的方法：

1. 逐一求导，总结出规律，写出y(n)表达式，然后用归纳法证明。

2. 莱布尼茨（Leibniz）公式：

3. 常用公式



4. 分解法

分解为上述初等函数之和

## 第3章 中值定理和泰勒公式

### 3.1中值定理

**费马定理**：若是x0是f(x)的一个极值点，且f’(x0)存在，则必有f’(x0)=0(可微函数的极值点必为驻点)，

**罗尔(Rolle)定理**：若函数f(x)满足以下条件；(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导；(iii)f(a)=f(b)，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得f’(ξ)=0.

**拉格朗日(Lagrange)中值定理**：若函数f(x)满足以下条件；(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

.

**柯西(Cauchy) 中值定理**：若函数f(x)和g(x)满足以下条件；(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导；(iii) ∀x∈(a,b),g’(x)≠0，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得



费马定理⇒罗尔定理⇒

### 3.2泰勒公式

求泰勒(Taylor)公式的方法：

1. 泰勒公式（拉格朗日余项）：

2. 常用麦克劳林(Maclaurin)公式（带拉格朗日余项）



3. 逐项求导或逐项积分

若，φ(x)的泰勒公式可以比较方便的

求出来，则可以对其(1)求导，将导数展开成泰勒级数，逐项积分；(2)积分，将原函数展开成泰勒级数，逐项求导。

### 3.3函数的极值、最值

驻点，导数不存在的点为极值可疑点。

驻点，导数不存在的点，端点为最值可疑点。

若函数在某点x=x0无定义，但极限存在，不能算作是极值。

极值判别法则：

1. 设f(x)在点x0的邻域内连续，去心邻域内可微，如果在(x0-δ,x0)内f’(x)≥0，在 (x0,x0+δ)内f’(x)≤0，则x0必为f(x)的极大值点。反之必为极小值点。

2. 若f’(x0)=0且f’’(x0)存在，则当f’’(x0)>0(<0)时，x0必为f(x)的极小(大)值点。

3. 设函数f(x)在点x0处有n阶导数，且f’(x0)=f’’(x0)=...=f(n-1)(x0)=0，但f(n)(x0) ≠0，则(i)当n为偶数时，f(x)在点x0处取极值，当f(n)(x0)>0时取极小值，当f(n)(x0)<0时取极大值；(ii)当n为奇数时f(x0)不是极值。

由2，3可以推导出一个求极值的方法：



### 3.4函数的凹凸性与渐近线

定理：设函数f(x)在闭区间[a,b]上连续，在开区间(a,b)内可导，则f(x)在[a,b]上是凸（凹）函数的充要条件是：

(1) f’(x) 在开区间(a,b)内单调递减（增）。

(2) f(λx1)+ (1-λ)x2)<(>) λf(x1)+(1-λ) f(x2), λ∈(0,1).

(3) f’’(x)≤(≥)0.

(4) f(x)<f(x0)+f’(x0)(x-x0)(x≠x0).

若函数f(x)在点x0处凹凸性相反，则点x0称为f(x)的**拐点**。

拐点的必要条件：f’’(x0)=0或f’’(x0)不存在。

拐点的充要条件：f’’(x)经过时变号。

拐点  f’’(x0)=0。例如y=x4。

渐近线：(1) 垂直渐近线：x=a是垂直渐近线⇔或.

(2) 斜渐近线：f(x)=ax+b,或

（水平渐近线为其特例）。

### 3.5常考题型

1. 证明函数恒等式

函数为常数的充要条件 f’(x)=0

两个函数的差为常数的充要条件 f’(x)=g’(x)

两个函数恒等的充要条件 f’(x)=g’(x)，f(x0)=g(x0)

2. 证明函数存在零点

(1) 至少存在一个零点

① 广义零点定理

推广1 若，则f(x)在

(-∞,+ ∞)上至少存在一个零点。

推广2 若，则f(x)在(-∞,+ ∞)

上至少存在一个零点。

若把(-∞,+ ∞)区间改为(a,+∞), (-∞,+b), (a,b)等，结论依然成立。

② 罗尔定理

(2) 存在唯一零点

① 用广义零点定理或罗尔定理证明至少存在一个零点

② 用单调性或反证法证明至多存在一个零点

(3) 存在多个零点

① 求出f(x)的单调区间，在每段区间上应用广义零点定理

② 求出f(x)的原函数F(x)，对F(x)使用罗尔定理

求原函数时常常用到以下公式：



*例题1* 设f(x)在[0, 1]二阶可导，f(0)=f(1)=0，试证：∃ξ ∈ (0, 1)，

使得。

*例题2* 设f(x)在[0, 1]上连续，在(0, 1)内可导，且



证明：至少存在一点ξ ∈(0, 1)，使(1+ξ2)arctanξ●f’(ξ) = -1。

③ 广义罗尔定理

若f(x)在x=a处取[a, b]上的最大(小)值，则f+’(a)≤0(≥0)；若f(x) x=b处取[a, b]上的最大(小)值，则f+’(b) ≥0(≤0)。

*例题3*设f(x)在[a, b]可导，f+’(a)>0，f-’(b)>0，f(a) ≥f(b)，求证：f’(x)在(a, b)至少有两个零点。

3. 证明不等式

(1) 拉格朗日或柯西中值定理

将不等式变形，使其一端变为或的形式，再使用拉格朗日或柯西中值定理。

(2) 函数的单调性

如果f’(x)的符号不好判断，可以继续求f’’(x)，f’’’(x)，以便作进一步判断。

(3) 函数的最大值最小值

求出函数的最大值M，最小值m，则f(x)≤M，f(x)≥m。

(4) 函数的凹凸性

若f’’(x)>0，则f(λa+(1-λ)b)<λf(a)+(1-λ)f(b)

若f’’(x)<0，则f(λa+(1-λ)b)>λf(a)+(1-λ)f(b)

(5) 泰勒公式

已知条件或待证结论中出现高阶导数，要想到泰勒公式

4. 设f(x)=g(x)φ(x)，φ(x)在x=a处连续但不可导，g’(a)存在，则g(a)=0是f(x)在x=a处可导的充要条件。注意要把φ(x)中的平方项提取出来，放入g(x)中。

设f(x)在x=a处可导，则函数|f(x)|在x=a处不可导的充要条件是f(a)=0, f’(a) ≠0。

## 第4章 积分

### 4.1不定积分

#### 4.1.1.基本积分表



不可积的几个初等函数：

#### 4.1.2.换元积分法和分部积分法

换元积分法： 1. 第一类换元积分法，即凑微分法，合并。

2. 第二类换元积分法，拆分。

分部积分法：∫ u(x)v’(x)dx=u(x)v(x) - ∫ u’(x)v(x)dx

使用分部积分法的常见题型：

|  |  |
| --- | --- |
| 被积函数的形式 | 所用方法 |
| Pn(x)ex, Pn(x)sinx, Pn(x)cosx | 进行n次分部积分，每次均取ex, sinx, cosx为v’ (x) |
| Pn(x)lnx,Pn(x)arcsinx,Pn(x)arctanx | 取Pn(x)为v’(x) |
| exsinx, excosx | 取ex为v’(x), 进行两次分部积分 |

，n为正整数m任意



，n为正整数m任意

#### 4.1.3.有理函数和可化为有理函数的积分

**1. 有理函数**R(x)=P(x)/Q(x)的积分可以归结为下列四种简单分式的积分：



上述方法是有理函数积分的一般方法，但未必是最简单的方法，因此应当具体函数具体分析，选择恰当的方法。

特别是当有理真分式的分母次数大于等于4时，用特殊的方法求解比较简单，常用的方法有凑微分法和倒代换。当分母含有因子xn（n≥2为正整数）时，用倒代换。

**2. 三角有理式**

(1) 一般方法，万能代换

(2) 对于积分 ∫ R(sin2x, cos2x)dx，可令tanx=t；

对于积分 ∫ R(sinx)cosxdx，可令sinx=t；

对于积分 ∫ R(cosx) sinxdx，可令cosx=t。

(3) ，万能代换

(4)

(5) ∫ sinmxcosnxdx，m，n均为正数

① 若m，n至少有一个是奇数，m为奇数，令cosx=t，n为奇数，令sinx=t

② 若m，n都是正偶数，利用公式sinxcosx=sin2x/2，sin2x=(1-cos2x)/2，cos2x=(1+cos2x)/2先将被积函数降幂，再积分。

③ 若m，n都是负偶数，令tanx=t

④ 若m，n分别为正偶数和负偶数，sin2x=1-cos2x

**3. 简单无理函数**

(1) 型积分，其中n>1，其中ad ≠bc。

这里的关键问题是消去根号，可令。

(2)型积分,其中，a ≠0。由于，故此类型积分可以化为以下三种类型：

，可用三角替换u=ksint；

，可用三角替换u=ksect；

，可用三角替换u=ktant。

### 4.2定积分

#### 4.2.1.可积条件

可积的必要条件：若函数f(x)在闭区间[a,b]上可积，则f(x)在[a,b]上有界。

可积的充分条件：闭区间上的连续函数，单调函数，有界且只有有限个间断点的函数。

函数f(x)在闭区间[a,b]上， ，其他推理均不成立

积分中值定理 （g(x)连续且不变号）

#### 4.2.2.定积分的计算

1. 牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式



2. 换元积分法

从右到左，相当于不定积分的第一类换元积分法，从左到右，相当于第二类换元积分法。

3. 分部积分法

4. 被积函数的分解与组合。分解即分部积分法；另一方面，有时对积分

施行变量替换，将它转换为另一种形式，将它们组合在一起却容易算出结果。例如。

5. 利用对称性与奇偶性

#### 4.2.3 几个常见的定积分公式

常见的积分和式







#### 4.2.4 定积分的应用

(1) 平面图形的面积



(2) 旋转体的体积



(3) 旋转体的侧面积



(4) 弧长、曲率

弧微分公式：



曲率：

曲率圆心：

(5) 平面图形的质心

平面曲线的质心：dMx=y(t)ρds dMy=x(t)ρds

平面曲面（x型，密度均匀）的质心：



(6) 引力F=Gm1m2/r2

①均匀细杆质量为M，长度为l，在杆的延长线上离右端为a处有一质量为m的质点，则质点与细杆之间的引力为F=kMm/a(a+l).

②均匀圆环质量为M，半径为r，在圆心的正上方距离为b处有一质量为m的质点，则质点与均匀圆环之间的引力为F=KMmb/(r2+b2)3/2.

③均匀圆盘可以看作是无数个均匀圆环。

### 4.3反常积分

1. 反常积分的概念

定积分有两个基本约定：积分区间有限和被积函数有界。反常积分就是从这两个方面进行推广。

反常积分的每一段都收敛，它才收敛；只要有一段发散，它就发散。

奇偶函数的对称性只适用于收敛的反常积分。

发散。



2. 反常积分审敛法

(1) 比较法 f(x)≤kg(x),k≥0

(2) 比较法的极限形式

3. 几个常见的反常积分



4. Γ函数

定义：

性质：

（1）Γ(s+1)=sΓ(s)

一般地，对任何正整数n，有Γ(n+1)=n!，即 

（2）当s→0+时，Γ(s)=+∞

（3）Γ(s) Γ(1-s)=，这个公式称为**余元公式**。

当s=时，由余元公式可得

（4）

上式左端是应用上常见的积分。

令t=0，得

进一步推导，可得

若随机变量X~N(0, 1)，则E(X2n)=(2n-1)!!

### 4.4 常考题型

1. 设f(x)在(a, b)\{c}上连续，(1) 若f(x)在点c处连续，则f(x)存在原函数；(2) 若点c是第一类间断点，则f(x)不存在原函数；(3) 若点c是第二类间断点，则不确定。

2. 周期函数的积分

设f(x)是以T为周期的周期函数，则

(1) ；

(2) 以T为周期的充要条件是；

(3) 若f(x)同时是奇函数，则也是以T为周期的周期函数；

(4) 也是以T为周期的周期函数。

3. 积分值符号的判断

(1) ，当f(x)在[a, c]，[c, b]上异号，要判断积分的符号时，往往对作变量替换，使之变成在[a, c]上的积分，然后考

察被积函数的符号。

## 第5章 无穷级数

**1. 常数项级数敛散性的判定**

(1) 若，级数发散，等于零，需进一步判定。

(2) 若为正项级数，根据一般项的特点选择相应判别法：

① 一般项中含有n!或n的乘积形式，采用比值判别法；

② 一般项中含有以n为指数幂的因子，采用根值判别法；

③ 一般项中含有形如nα（α不一定是整数）的因子，采用比较判别法（常常要先使用等价无穷小替换，放缩法等）；

④ 定义法，求出Sn表达式，看Sn是否有极限。由于Sn单调递增，所以实际上就是要判断Sn是否有上界。

(3) 若为任意级数，①按正项级数敛散性的判别法，判定是否收敛，若收敛，则级数绝对收敛；②若发散，则看其是否为交错级

数，若为交错级数，采用莱布尼茨判别法；③若不是交错级数，或是交错级数但不满足莱布尼茨判别法的条件，采用比值判别法，根值判别法或讨论{S2n-1}, {S2n}的敛散性。

**2. 绝对收敛与条件收敛**

(1) 绝对收敛的级数一定收敛，即若收敛，则 收敛。

(2) 条件收敛级数的正项（或负项）构成的级数一定发散，即级数

与均发散。绝对收敛级数的正项（或负项）构成的级数一定收敛。

(3) 级数的线性性质：

假设 结论

  

收敛 收敛 ⇒ 收敛

绝对收敛 绝对收敛 ⇒ 绝对收敛

绝对收敛 条件收敛 ⇒ 条件收敛

条件收敛 条件收敛 ⇒ 收敛（是条件收敛还是绝对收敛不确定）

收敛 发散 ⇒ 发散

发散 发散 ⇒ 不确定

**3. 求函数项级数的收敛域**

(1) 比值法；(2) 根值法。

**4. 求幂级数的收敛域**

阿贝尔(Abel)定理：如果级数当x=x0(x0≠0)时收敛，则适合不等式

|x|<x0的一切x使这幂级数绝对收敛。反之，如果当x=x0(x0≠0)时发散，则适合不等式|x|>x0的一切x使这幂级数发散。

(1) 比值法；

(2) 根值法。

收敛域要特别注意两端点，收敛区间不需要。

缺项幂级数只能当作函数项级数来处理。

**5. 幂级数的运算与和函数的性质**

设两个幂级数和，收敛半径分别为R1, R2，则可以进行下

列四则运算：



当R1≠R2时，上面两式的收敛半径R=min{ R1, R2}。

幂级数的和函数有下列重要性质：

(1) 和函数S(x)在其收敛域上连续，即



(2) 和函数S(x)在其收敛区间(-R, R)内可导，并有逐项求导公式



逐项求导后所得到的幂级数的收敛半径仍然是R。

推论：和函数S(x)在其收敛区间内任意阶可导。

(3) 和函数S(x)在其收敛域上可积，并有逐项积分公式



逐项积分后所得到的幂级数的收敛半径仍然是R。

注意：若S(x)在x=R(-R)处发散，则S’(x)在在x=R(-R)处一定发散，但

在x=R(-R)处可能收敛。

**6. 常数项级数的求和**

1.直接计算部分和Sn，然后求极限；2.利用相应的幂级数。

**7. 幂级数的求和**

利用四则运算，逐项求导，逐项积分等手段，将其化为可求和形式（即前面的麦克劳林公式）。

(1) 若an是有理整式，逐项积分；(2) 若an是有理分式，逐项求导。

**8. 求函数的幂级数展开式**

本质上就是求泰勒公式（前面3.2节有求泰勒公式的三个方法）。

(1) 有理分式，分解成1/(1+x)和1/(1-x)；(2) 对数函数，分解成ln(1+x)；

**9. 傅立叶(Fourier)级数**

，

非周期函数的傅里叶级数：奇延拓，偶延拓，零延拓。

**10. 狄利克雷(Dirichlet)充分条件**

设f(x)是以2l为周期的函数，在区间上[-l, l]上满足：(1) 只有有限个第一类间断点；(2) 只有有限个极值点，则f(x)的傅里叶级数S(x)收敛于f(x)，且



**11. 几个重要的级数**

(1) 几何级数 (2) p-级数

(3) 

(4)  (5)  (6) 

## 第6章 微分方程

1. 可分离变量方程

2. 可化为可分离变量方程的方程



3.一阶线性方程

特别的，

4.伯努利方程

5.全微分方程 特殊路径法，不定积分法，凑微分法

6.

7.

8.常系数线性微分方程

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 二阶齐次  y’’+py’+qy=0 | 特征方程的根 | 微分方程的通解 |
| 互异实根 λ1, λ2 |  |
| 二重实根 λ1=λ2=λ | (c1+c2x)eλx |
| 共轭复根 λ1,2=α±iβ | eαx(c1cosβx+c2sinβx) |
| n阶齐次  y(n)+p1y(n-1)+  ...+pny=0 | n个互异实根 λ1, λ2,..., λn |  |
| k重实根λ1=λ2=...=λk=λ | 含有(c1+c2x+...+ckxk-1)eλx |
| 若α±iβ为特征方程的k重共轭复根 | 含有eαx[(c1+c2x+...+ckxk-1)cosβx+  (d1+d2x+...+dkxk-1)sinβx] |
| 二阶非齐次  y’’+py’+qy  =f(x) | f(x)=eλxPm(x)型  (1) 求对应齐次方程的y1,y2  (2) 令y\*=Q(x)eλx=xkQm(x)eλx=xk(A0+A1x+...+Amxm)eλx  Q''(x)+(2λ+p)Q'(x)+(λ2+pλ+q)Q(x)=Pm(x)，求出Q(x)  (3) y=c1y1+c2y2+y\* | |
| f(x)= eλx [Pm(x)cosωx+ Pn(x)sinωx]型  y\*= xkeλx[Rl(1)(x)cosωx+Rl(2)(x)sinωx]  其中，Rl(1), Rl(2)是l次多项式，l=max{m,n}，而k按λ+iω（或λ-iω）不是特征方程的根，或是特征方程的单根取0或1。 | |

n阶非齐次常系数线性微分方程（大纲无要求，实在闲得蛋疼的同学可以看看）



微分算子法只能在选择题，填空题中使用，大题中勿用！

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| f(x)形式 | y\*表达式 | 注意 |
| eλx | 其中F(λ) ≠0，F(λ)为F(D)中的D用λ代替所得值 | 若F(λ) =0，不妨设λ为F(x)的k重根，则 |
| sinωx或cosωx | 其中F(ωi) ≠0。将F(D)中的D2k项（即偶数项）代入ωi，再化简，直到F(D)中无D2k项为止。 | 若F(ωi) =0，不妨设ωi为F(x)的k重根，则 |
| a0xm+  a1xm-1+...+am | (1) 若pn≠0，则    其中Q(D)为1除以按升幂排列的F(D)的商式，其最高次数取到f(x)的次数m。  (2) 若pn=0，则    其中Q1(D)为1除以按升幂排列的1/F1(D)的商式，次数为m。 | (1)    当商式中出现Dm时除法停止。  (2)    当商式中出现Dm时除法停止。 |
| eλx v(x) |  |  |

9.欧拉(Euler)方程



## 第7章 向量代数与空间解析几何

### 7.1 向量的数量积，向量积，混合积



### 7.2 空间平面与直线



平面束方程



两平面平行：，垂直：A1A2+B1B2+C1C2=0

两直线平行：，垂直：m1m2+n1n2+p1p2=0

异面：

平行平面间的距离： 点到直线的距离 

点到平面的距离异面直线间的距离

### 7.3 空间曲面与曲线



空间曲线在坐标平面上的投影方程

空间曲线Γ：，在XOY坐标平面上的投影曲线，从方程组中消去z，得H(x, y)=0，于是投影曲线方程为



## 第8章 多元函数微分学

### 8.1 多元函数的偏导数与全微分

偏导数连续 ⇒ 可微 ⇒ ，其他推理均不成立。

如果只求f(x,y)在某点(x0, y0)的偏导数，可不必先求出该函数在任一点(x, y)的偏导数，然后代入x=x0与y=y0。而是先代入x=x0或y=y0，然后求一元函数的导数会更简单些。如



判断二元函数极限 是否存在的方法：

令y=kx，代入f(x,y)，若分子中x全部被消，则极限值取决于k，极限不存在；若分子中x还有剩余，则极限存在且的等于0（此方法理论上不成立，但应付考研选择题足够了）。

判断函数f(x, y) 在点(x0, y0)处是否可微的步骤：

(1) 先求fx’ (x0, y0), fy’ (x0, y0)，只要有一个不存在，则函数在该点不可微；如果都存在，下一步；

(2) 求，若

极限为0，则函数在该点可微，否则不可微。

函数，判断z在点(0, 0)处是否

(1) 连续

即  是否等于0

(2) 偏导数存在

即  是否存在。

(3) 沿任意方向的方向导数存在

即  是否存在

(4) 可微，见上一段

(5) 偏导数连续

即判断  是否等于 ，

 是否等于 

### 8.2 多元函数微分法则

复合函数微分法，关键在于确定哪些是中间变量，哪些是自变量



### 8.3 二元函数的二阶泰勒公式



### 8.4 多元函数的极值

多元函数取极值的必要条件（可微情况下）：偏导数为0或不存在



条件极值，用拉格朗日数乘法



### 8.5 方向导数与梯度

方向导数：偏导数是函数在平行于坐标轴方向上的变化率，有时需要考虑函数沿某一指定方向的变化率，这种变化率就是方向导数。

方向导数

方向导数相当于把两个偏导数合成到直线l上，当l旋转到对角线上即梯度方向时，两个投影之和最大。（或相当于把梯度投影到直线l上）

可微  沿任意方向的方向导数都存在  偏导数存在 ⇒ 沿x、y轴的方向导数存在

梯度

### 8.6 多元函数微分学的几何应用



## 第9章 多元函数积分学

### 9.1二重积分



### 9.2三重积分



### 9.3重积分的应用



### 9.4曲线积分



### 9.5曲面积分



### 9.6格林(Green)公式



平面曲线积分与路径无关的充分条件：

1、若D是单连通区域，则 ⇔ 路径无关。

2、设D=D0\{P0}，D0是单连通区域，若且存在一条分段光滑曲线C0，它包围P0，，则与路径无关。



### 9.7高斯(Gauss)公式



### 9.8斯托克(Stokes)公式



### 9.9曲线积分和曲面积分的应用

1. 变力沿空间曲线做功 

2. 空间曲面的质心 

### 9.10如何简化计算

1. 选择积分顺序（二重积分，三重积分）
2. 选择投影方向（第II类曲面积分）
3. 利用对称性与奇偶性

(1) 第二类曲线、曲面积分的奇偶对称性与第一类正好相反。

(2) 第二类曲线、曲面积分的奇偶对称性只能一项一项的使用，即dydz项用关于YOZ平面对称，关于x奇偶，dzdx项用关于ZOX平面对称，关于y奇偶，dxdy项用关于XOY平面对称，关于z奇偶，不能同时对三项一起用。而且dydz项只能用关于YOZ平面对称，不能用关于ZOX或XOY平面对称，dzdx项和dxdy项类似。

(3) 平面上的第二类曲线积分，dx项用关于x对称，关于y奇偶，dy项用关于y对称，关于x奇偶，奇偶对称性与第一类相反。

1. 利用轮换性
2. 换元



1. 曲线和曲面积分，利用已有方程
2. 利用几何或物理意义
3. 利用三个公式
4. 封闭且无奇点，直接用；
5. 封闭但有奇点，挖点法；
6. 不封闭，添加辅助线/面。

# 线性代数

## 第1章 行列式

概念：不同行不同列元素乘积的代数和（共n!项）

性质：行列不变；行行变反；倍加行不变

计算：

1. 三角化法，化为上（下）三角行列式，如爪形行列式；

2. 递推法，对于零元素较多且规律性强的行列式，可以考虑按行（列）展开建立递推关系式，如三对角行列式，



3. 公式法







范德蒙行列式



重要公式： |kA|=kn|A|, |AB|=|A||B|, |A\*|=|A|n-1, |A-1|=|A|-1, |Ak|=|A|k

Cramer法则：xj=Dj/D

证|A|=0：(1)|A| = -|A|；(2)反证法，设|A| ≠ 0；(3)等价关系图（见4.3节）。

## 第2章 矩阵

### 2.1基本概念

奇异矩阵，非奇异矩阵，零矩阵，同型矩阵，单位矩阵，数量矩阵，对角矩阵，对角块矩阵，对称矩阵，反对称矩阵，逆矩阵，伴随矩阵，正交矩阵

Ann为反对称矩阵，则①主对角线元素全为0；②当n为奇数时|A|=0；③ 若A2=A，则A=0；④ 若A≠0，则r(A) ≥2。

与任意矩阵可交换的矩阵必是数量矩阵。

### 2.2矩阵的运算

加法，数量乘法，乘法，转置，逆，伴随







2阶矩阵的伴随矩阵：主对角线互换，副对角线变号（逆矩阵要注意除|A|）

### 2.3初等变换

单位矩阵做了一次初等行（列）变换的矩阵称为**初等矩阵**。

Ei(c) Eij(c) Eij 左乘是行变换，右乘是列变换



### 2.4矩阵的秩

1、矩阵的秩=矩阵的行秩=矩阵的列秩=矩阵的非零主子式的最高阶数

2、初等变换不改变矩阵的秩

r(A+B)≤r(A)+r(B), r(AB)≤min(r(A),r(B))

A是m×n阶矩阵，B是n×p阶矩阵，若AB=0，则 r(A)+r(B)≤n。

Amn，Bnm，若AB=Cmm，且|C|≠0, 则m≤n。

Amn，Pmm，Qnn，(1) 若|P|≠0，|Q|≠0，则r(PA)=r(A)，r(AQ)=r(A)；(2) 若|P|=0，|Q|=0，则r(PA)≤r(A)，r(AQ)≤r(A)。

设Amn，Bnp，若r(B)=n，则r(AB)=r(A)，若r(A)=n，则r(AB)=r(B)。

矩阵A经有限次初等变换变成矩阵B，则称A与B等价，记作A≌B。

A≌B ⇔ A, B是同型矩阵且秩相等 ⇔ 存在可逆矩阵P和Q，使PAQ=B

### 2.5分块矩阵

同型对角块矩阵









### 2.6常考题型

1. 求方阵的幂

(1) 若r(A)=1，则A能分解为一列与一行两个矩阵的乘积；

(2) 若A=B+C，且BC=CB，则An=(B+C)n可用二项式定理展开，当然B,C之中有一个方幂要尽快为0；

(3) 相似对角化，An = PΛnP-1；

(4) 分块矩阵法

2. 计算Anβ

(1)先计算出An，再计算Anβ；(2)先计算出A的特征值和特征向量，用特征向量线性表出β，再计算Anβ。

3. 求逆矩阵

(1)公式法A-1=A\*/|A|；(2)初等变换法，只用行变换或只用列变换；(3)分块矩阵法；(4)抽象矩阵，用定义法，利用已知条件去找一个B，使得AB=E或AB=kE。

4. 求解矩阵方程

AX=B有解 ⇔ B的每列可由A的列向量线性表出 ⇔ r(A)=r(A|B)

(1) 若A可逆，则X=A-1B，可以先求出A-1，再作乘法A-1B求出X，也可以用行变换直接求出X，即(A|B) →只用行变换→(E|X)。

(2) 若A不可逆，则对矩阵(A|B)用高斯消元法化为阶梯形方程组。

## 第3章 n维向量与向量空间

### 3.1 n维向量

线性组合，线性表出，线性相关，线性无关，向量组的秩，极大线性无关组，向量组等价

### 3.2 向量空间

自然基，标准基，标准正交基，基，维数，坐标，过度矩阵，向量的内积

设V是n维向量的集合，且V中的向量对加法和数乘这两种运算都封闭，则称V为**向量空间**。

设W是V的一个非空子集合，且W中的向量对加法和数乘这两种运算也封闭，则称W为**向量子空间**，简称子空间。

### 3.3 坐标变换

基变换：B1A=B2 坐标变换：x=Ay （A可逆）

称A为过渡矩阵

### 3.4施密特(Schmidt)正交化



### 3.5 正交矩阵

正交矩阵ATA = E ⇔ 列向量组是标准正交基

设A,B是正交矩阵，则AT, A\*,A-1,AB也是正交矩阵

Ax,Ay的长度,夹角和内积保持不变

### 3.6常考题型

1. 求向量组的秩与极大线性无关组

(1) 若只求向量组的秩，一般可以用列向量组或行向量组的形式构造矩阵A，再对A作初等行变换（或列变换，或行列变换同时作），化为阶梯形矩阵B，r(A)=r(B)，从而求得向量组的秩；

(2) 若同时要求出极大线性无关组，建议用列向量组的形式构造矩阵A，且只对A作初等行变换化为阶梯形矩阵B，则B中每一个非零行的第一个非零元素所在的列向量就是该向量组的一个极大线性无关组。

2. 线性无关的证明，常用思路是是设k1α1+ k2α2+...+ knαn，两边同乘作恒等变形。

3. 设空间中有三个平面，

a1x+b1y+c1z+d1=0 ,

a2x+b2y+c2z+d2=0 ,

a3x+b3y+c3z+d3=0 ,

如记αi=(ai, bi, ci)(i=1, 2, 3)是平面的法向量，A=是方程组的系数矩阵，是增广矩阵。

(1) 平面两两不平行，有且仅有一个公共点的充要条件是r(A)=r()=3。

(2) 平面两两相交，围成一个三棱柱的充要条件是α1, α2, α3共面，但任意两个线性无关，且r()=3。

(3) 三个平面有一条公共直线的充要条件是α1, α2, α3共面，但任意两个线性无关，且r()=2。

(4) 有两个平面平行（不重合），第三个平面与它们相交的充要条件是α1, α2平行，但α3不能α1, α2用线性表出，且r()=3。

(5) 有两个平面重合，第三个平面与它们相交的充要条件是α1, α2平行，但α3不能α1, α2用线性表出，且r()=2。

## 第4章 线性方程组

### 4.1齐次方程组Ax=0

判定：有非零解 ⇔ r(A)<n

基础解系的求法：高斯消元法。对A作初等行变换化为阶梯形矩阵，每个非零行中第一个非零系数所在列代表的未知数是基本未知量（有r个），剩余的是自由未知量（有n-r个），对自由未知量按阶梯形赋值后，再代入求解就可以得到基础解系。

通解：= k1η+k2η+...+kn-rη

### 4.2非齐次方程组Ax=b

判定：设A是m×n矩阵，方程组Ax=b，则

(1) 有唯一解 ⇔ r(A)=r(A,b)=n；

(2) 有无穷解 ⇔ r(A)=r(A,b)<n；

(3) 无解 ⇔ r(A)+1=r(A,b)。

特解的求法：对自由未知量全部赋0值后，再带入求解即得特解。

通解：x0+（x0是Ax=b的特解，是Ax=0的通解）

### 4.3等价关系图

A是方阵





A不是方阵



### 4.4常考题型

1. 基础解系的证明：证明α1, α2, α3是Ax=0的一个基础解系，要证三个方面，(1) α1, α2, α3是解；(2) 它们线性无关；(3) 向量个数等于n-r(A)。

2. 公共解问题

## 第5章 特征值和特征向量

### 5.1特征值和特征向量

概念：特征值，特征向量，特征矩阵，特征多项式，特征方程

定义：Ax=λx，x是非零向量

性质：

(1) 不同特征值的特征向量是线性无关的，同一特征值的不同特征向量也是线性无关的；

(2) 

(3)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | kA | A+kE | Ak | A-1 | A\* | P-1AP |
| λ | kλ | λ+k | λk | λ-1 | |A|/λ | λ |
| α | α | α | α | α | α | P-1α |

(4) A和AT，AB和BA的特征值相同，但未必相似。

若A=，则|λE-A|=λ2-(a11+a22)λ+|A|

若A=，则

|λE-A|=λ3-(a11+a22+a33)λ2+(++)λ-|A|

### 5.2相似矩阵

定义：若存在可逆矩阵P，使得P-1AP=B，就称A相似于B，记作A~B。

性质：(1) 若A~B，则kA~kB, A+kE~B+kE, An~Bn, AT~BT, A-1~B-1, A\*~B\*；

(2) 相似矩阵的秩、迹、行列式、特征多项式、特征值都相同。

### 5.3可对角化的条件

充要条件：(1) 有n个线性无关的特征向量；或(2) 每个特征值的重数等于对应特征向量的个数（n-r(λE-A)）。

充分条件：(1) 有n个不同的特征值；(2) A是实对称矩阵。

### 5.4实对称矩阵

性质：

(1) 实对称矩阵一定是可对角化的；

(2) 实对称矩阵的特征值全是实数，特征向量全是实向量，不同特征值的特征向量是正交的；

(3) 存在正交矩阵Ｔ，使得T-1AT=diag(λ1,λ2,…,λn)

求T：先求得特征向量，再正交化，单位化。

### 5.5常考题型

1. 求矩阵的特征值和特征向量

(1) 由|λE-A|=0求特征值λi，再由(λiE-A)x=0求基础解系的特征向量；(2) 抽象矩阵，用定义法。

2. 已知特征值和特征向量反求矩阵A

(1) A=PΛP-1；(2) 用分块矩阵，A(α1, α2, α3)= (λ1α1, λ2α2, λ3α3)

## 第6章 二次型

### 6.1二次型的定义和矩阵表示

二次型：二次型就是二次齐次多项式（即每项都是二次的）

矩阵表示：xTAx

合同矩阵：若存在可逆矩阵C，使得CTAC=B，就称A合同于B，记作

AB。

### 6.2化二次型为标准型

(1) 正交变换法

(2) 配方法，一次一个字母

(3) 初等变换法

### 6.3惯性定理和二次型的规范性

**惯性定理**：对于一个n元二次型，不论做怎样的坐标变换使之化为标准型，其中正平方项的项数和负平方项的项数都是唯一的。

规范型：设A为n阶实对称矩阵，若A的正、负惯性指数分别为p和q，则

Adiag(1,…,1,-1,…,-1,0,…,0)

其中1有p个，-1有q个。

或者说对于二次型xTAx，存在坐标变换x=Cy，使得



把右端的二次型称为xTAx的**规范型**，把上面的对角矩阵称为A的**合同规范型**。

合同的充要条件： A、B有相同的正惯性指数和负惯性指数。

合同的充分条件：A~B。（二者的前提是，A, B是n阶实对称矩阵）

合同的必要条件：r(A)=r(B)

### 6.4正定二次型和正定矩阵

定义：如果对于任意的非零向量x=(x1,x2,…,xn)都有xTAx>0，就称xTAx为**正定二次型**，称A为**正定矩阵**。

xTAx是正定二次型的充要条件：

(1) A的正惯性指数为n，即AE；

(2) 存在可逆矩阵P，使得A=PTP；

(3) A的特征值全大于0；

(4) A的顺序主子式全大于0.

必要条件：(1) aii>0；(2) |A|>0。

### 6.5 常考题型

1. 求可逆矩阵C

已知A是实对称矩阵，B是对角矩阵，且A与B合同，求可逆矩阵C，使得CTAC=B。

(1) 当B是对角矩阵时，

① 正交变换+配方法。此方法计算量大，但它一定可以算出来。①用正交变换法，求出正交矩阵T，使得T-1AT=对角矩阵Λ，②用配方法，求出对角矩阵D，使得DTΛD=B，③从而DTT-1ATD=B，即C=TD。

② 配方法。此方法计算量小，但需要一眼能看出来，有点靠运气。

(2) 当B是实对称矩阵时，

情况就复杂一些了，这时用配方法完全不可行，只能用正交变换+配方法。①用正交变换法，求出正交矩阵T1，T2，使得T1-1AT1=Λ1，T2-1BT2=Λ2，②用配方法，求出对角矩阵D，使得DTΛ1D=Λ2，③从而DTT1-1ATD= T2-1BT2，即C=T1DT2-1。

(3) 当A是正定矩阵，B是单位矩阵时，用初等变换法最快。对A进行行变换，再进行一次对称的列变换，同时，每次进行列变换时，对E进行同样的列变换，即记录下列变换操作，如此反复，知道A变成E，I变成了C，

C即求出来了。例如，已知A=，求可逆矩阵C，使得CTAC=E。

# 概率论与数理统计

## 第1章 概率论的基本概念

### 1.1样本空间与随机事件

随机试验：1.可以重复；2.总体明确；3.单个未知。

样本空间，样本点，随机事件，基本事件，必然事件，不可能事件，不相容事件，对立事件（又称逆事件）

事件的关系：包含，相等

事件的运算：和（A∪B或A+B），积（A∩B或AB），逆（），差（A-B或A）

### 1.2频率和概率

在相同条件下，进行了n次试验，在这n次试验中，事件A发生的次数nA称为A发生的频数，比值nA/n称为A发生的**频率**，并记成fn(A)。

对随机试验E的每一事件A都赋予一个实数，记为P(A)，称为时间A的**概率**。集合函数P(.)满足下列条件：①非负性：P(A) ≥0；②规范性：P(Ω) =1；③可列可加性：P(A1∪A2∪…)=P(A1)+ P(A2)+…。

当n→∞时频率fn(A)在一定意义下接近于概率P(A)。





### 1.3古典概型与几何概型

(1) 样本空间包含有限个元素。

(2) 每个基本事件发生的可能性相同。

具有以上两个特点的模型称为等可能概型，也叫**古典概型**，它的概率称为**古典概率**。

设Ω是Rn中的一个区域，Ω中的任何一点都有同样的机会被选到，则P(A)= μ(A)/ μ(Ω)，其中μ(A)，μ(Ω)为该区域的额度，如长度，面积，体积等。符合上述假定的模型称为**几何概型**，它的概率称为**几何概率**。

### 1.4条件概率

设A、B是两个事件，且P(A)>0，称



为在事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**。

乘法公式 P(ABC)=P(A|BC)P(B|C)P(C)

全概率公式 P(A)= P(AB1) + P(AB2) +…+ P(ABn)

=P(A|B1)P(B1)+ P(A|B2)P(B2)+…+ P(A|Bn)P(Bn)

贝叶斯(Bayes)公式 

全概率公式和贝叶斯公式的关键是要找到一个完备事件组Bi。

### 1.5独立性

设A、B是两个事件，如果满足等式P(AB)=P(A)P(B)，则称事件A、B**相互独立**，简称A、B独立。

A与B相互独立 ⇔ A与相互独立 ⇔ 与B相互独立 ⇔ 与相互独立 ⇔ P(A)=P(A|B)=P(A|) ⇔ P(B)=P(B|A)=P(B|)

两两独立与相互独立是不同的。

## 第2章 随机变量及其分布

### 2.1随机变量

设随机试验E的样本空间为S={e}，X=X(e)是定义在样本空间S上的实值单值函数，称X=X(e)为**随机变量**。

随机变量的取值随随机试验的结果而定，在试验之前不能预知它取什么值，且它的取值有一定的概率。这些性质显示了随机变量与普通函数有着本质的差异。

### 2.2离散型随机变量及其分布律

如果随机变量X全部可能的取值是有限个或可列无限个，则称X为**离散型随机变量**。

P(X=xk)=pk为X的**分布律**。

几个常见分布：

(1) 0-1分布 P(X=k) = pk(1-p)1-k, k=0, 1

(2) 二项分布 P(X=k) = pk(1-p)n-k, k=0, 1, 2, ..., n，记为X~B(n, p)

(3) 几何分布 P(X=k) = p(1-p)1-k, k= 1, 2, ...

(4) 巴斯卡分布 P(X=k) = pn (1-p)k-n, 1≤n≤k，前k次独立重复试验中事

件发生了n-1次，最后一次试验事件确定发生了

(5) 超几何分布 

(6) 泊松(Poisson)分布 ，记为X~P(λ)

泊松定理（二项分布以泊松分布为极限）：

当n充分大而p充分小时（一般要求n≥100，p≤0.1），则成功次数X可以认为近似服从参数λ=np的泊松分布。

泊松定理和拉普拉斯定理（见5.2节）都是关于二项分布极限分布的定理，但是如果仅仅是n较大，而p不够小，则二项分布只能用正态分布近似，只有当n充分大而p充分小时，二项分布才能用泊松分布近似。

### 2.3随机变量的分布函数

设X是一个随机变量，x是任意实数，函数F(x)=P(X≤x)称为X的**分布函数**。

分布函数F(x)具有以下性质：

(1) 单调不减

(2) 0≤F(x)≤1，且F(-∞)=0, F(+∞)=1

(3) P{x1<X≤x2}=F(x2)-F(x1), P{X=x0} = F(x0)-F(x0-0)

(4) F(x+0)= F(x)，即F(x)是右连续的

### 2.4连续型随机变量及其概率密度

如果对于随机变量X的分布函数F(x)，存在非负函数f(x)，使得对于任意实数x，均有



则称X为**连续型随机变量**，其中函数f(x)称为X的概率密度函数，简称**概率密度**。

概率密度f(x)具有以下性质：

(1) f(x) ≥0；

(2) ；

(3) ；

(4) 若f(x)在点x处连续，则有。

几个常见分布：

(1) 均匀分布 

记为X~U(a,b)

(2) 指数分布 

记为X~E(λ)，指数分布和几何分布具有“无记忆性”

(3) 正态分布 ，记为X~N(μ,σ2)。特别地，当

μ=0, σ=1时，称X服从**标准正态分布**。正态分布具有以下性质



(3) Φ(-x)= 1-Φ(x)

(4) 若X~N(μ, σ2)，则aX+b~ N(aμ+b, a2σ2)

### 2.5随机变量函数的分布

求随机变量函数的分布：

1. 离散型随机变量函数的分布

列举法：逐点求出Y的值，概率不变，相同值合并

2. 连续型随机变量函数的分布

(1) 分布函数法



(2) 公式法

如果y=g(x)处处可导且恒有g’(x)>0(g’(x)<0)，则Y=g(X)也是连续型随机变量，其概率密度为



其中x=h(y)是y=g(x)的反函数。

如果y=g(x)非单调，则



其中xk=g-1(y)为y=g(x)的反函数，这里有n个反函数

公式法中的公式总是应用分布函数法推导出来的，因此用公式法进行计算其计算量少且不容易出错。

## 第3章 多维随机变量及其分布

### 3.1二维随机变量

设随机试验E的样本空间为S={e}，X=X(e)和Y=Y(e)是定义在样本空间S上的两个随机变量，由它们构成的一个向量(X,Y)，叫做二维随机向量或**二维随机变量**。

设(X,Y)是一个二维随机变量，x,y是任意实数，函数



称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或称为随机变量X和Y的**联合分布函数**。

分布函数F(x,y)具有以下性质：

(1) 单调不减；

(2) 0≤F(x,y) ≤1，且F(-∞,y)= F(x,-∞)= F(-∞, -∞)=0，F(+∞, +∞)=1；

(3) 对于任意的(x1, y1), (x2, y2), x1<x2,y1<y2，有F(x2,y2)-F(x2,y1)-F(x1,y2)+ F(x1,y1) ≥0；

(4) F(x,y)关于x右连续，关于y也右连续。

如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的值是有限个或可列无限个，则称(X,Y)为离散型二维随机变量。P{X=xi,Y=yj}=pij是(X,Y)的**分布律**

如果对于二维随机变量(X,Y)的分布函数F(x,y)，存在非负函数f(x,y)，使得对于任意实数x，y，均有



则称(X,Y)为连续型二维随机变量，其中函数f(x,y)称为(X,Y)的**概率密度**，或称为随机变量X和Y的联合概率密度。

概率密度f(x,y)具有以下性质：

1. f(x,y) ≥0.
2. .
3. .
4. 若f(x,y)在点(x,y)处连续，则有.

### 3.2边缘分布

边缘分布函数： FX(x) = F(x, +∞), FY(y) = F(+∞, y)

边缘分布律：

边缘概率密度：

### 3.3条件分布

条件分布律：

条件概率密度：

### 3.4相互独立的随机变量

X和Y相互独立 ⇔ F(x, y)=FX(x)FY(y) ⇔ f(x, y)=fX(x)fY(y)（连续型）⇔ P{Xi=xi, Y=yj}=P{X=xi}P{Y=yj}（离散型）

相互独立条件下的可加不变性：

(1) 设X~B(m, p), Y~B(n, p)，且相互独立，则X+Y~B(m+n, p)

(2) 设X~P(λ1), Y~ P(λ2)，且相互独立，则X+Y~ P(λ1+λ2)

(3) 设X~N(μ1, σ12), Y~N(μ2, σ22)，且相互独立，则X+Y~N(μ1+μ2, σ12+σ22)

(4) 设X~χ2(m), Y~χ2(n)，且相互独立，则X+Y~χ2(m+n)

### 3.5两个常见的二维分布

1、二维均匀分布



记为X~U(D)

性质：若D是平行于坐标轴的矩形区域，则X，Y相互独立，且都服从一维均匀分布。

2、二维正态分布



记为X~N(μ1, μ1; σ12, σ22; ρ2)

性质：

(1) 边缘分布X，Y是一维正态分布，X~N(μ1, σ12), Y~N(μ2, σ22)；

(2) 条件分布也是一维正态分布，且在Y=y的条件下，X的条件分布为



在X=x的条件下，Y的条件分布为 

(3) X与Y的非零线性组合仍服从正态分布，且

当X与Y相互独立时，aX+bY~N(aμ1+bμ2,a2σ12+b2σ22)

当X与Y不独立时，aX+bY~N(aμ1+bμ2,a2σ12+b2σ22+2abρσ1σ2)

(4) X与Y相互独立的充要条件是它们的相关系数ρ=0（两个0-1分布也类似）。

### 3.6二维随机变量函数的分布

1. 离散型二维随机变量

列举法

2. 连续型二维随机变量

(1) 分布函数法



(2) 公式法

① 线性变换Z=aX+bY+c



特别的, Z=X+Y的密度函数为



当X与Y相互独立时，有卷积公式



线性变换公式在应用中要特别注意积分区间.

② 最值变换Z=max(X,Y)和Z= min(X,Y)，X与Y相互独立

Fmax(z)=FX(z)FY(z) Fmin(z)=1-(1-FX(z))(1-FY(z))

③ 拼凑型分布Z=XY，X与Y相互独立

设X是连续型随机变量，其概率密度为fX(x)，Y是离散型

随机变量，其分布律为，称Z=XY为拼凑型分布。Z的分布律可写成，则Z的分布函数FZ(z)=p1FX1(z)+p2FX2(z)+...+pnFXn(z)，密度函数fZ(z)=p1fX1(z)+ p2fX2(z)+...+ pnfXn(z)

## 第4章 随机变量的数字特征

### 4.1数学期望

定义：离散型连续型





性质：

(1) E(C)=C

(2) E(CX)=CEX

(3) E(X+Y)=EX+EY

(4) 当X，Y相互独立时，E(XY)=EXEY

### 4.2方差

定义：DX=E{[X-EX]2}=E(X2)- (EX)2

性质：

(1) D(C) = 0

(2) D(CX) = C2DX

(3) D(X±Y) = DX ± 2Cov(X,Y) + DY

(4) DX = 0 ⇔ P{X=C}=1

常见分布的数字特征：

离散型：

(1) 0-1分布 EX = p, DX = pq

(2) 二项分布 EX = np, DX = npq

(3) 几何分布 EX = 1/p, DX = q/p2

(4) 巴斯卡分布 EX = n/p, DX = nq/p2

(5) 超几何分布 

(6) 泊松分布 EX = DX = λ

连续型：

(1) 均匀分布 EX = (b+a)/2, DX = (b-a)2/12

(2) 指数分布 EX = 1/λ, DX = 1/λ2

(3) 正态分布 EX = μ, DX = σ2

### 4.3协方差及相关系数

协方差 Cov(X,Y)= E{[X-EX][Y-EY]}= E(XY)-EXEY

性质：(1)Cov(aX,bY) = ab Cov(X,Y);

(2)Cov(X1+X2,Y) = Cov(X1,Y)+ Cov(X2,Y);

(3)Cov(X+a, Y+b) = Cov(X,Y)(即加减常数无影响).

相关系数 

柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式 |E(XY)|2 ≤ E(X2)E(Y2)

性质：

(1) |ρXY|≤1；

(2) |ρXY|=1 ⇔ P{Y=aX+b}=1，且当a>0时ρXY =1，当a<0时ρXY =-1。

ρXY是一个可以用来表征X，Y之间线性关系紧密程度的量，当ρXY =0时称X和Y不相关。

非退化随机变量X，Y相互独立的充要条件是X，Y之间无任何函数关系；不相关的充要条件是X，Y之间无任何线性关系。故独立一定不相关，不相关不一定独立。

### 4.4矩

E(Xk), k阶原点矩

E{[X-EX]k}，k阶中心矩

E(XkYl)，k+l阶混合矩

E{[X-EX]k [Y-EY]l}，k+l阶混合中心矩

数学期望EX是一阶原点矩，方差DX是二阶中心矩，协方差Cov(X, Y)是二阶混合中心矩。

## 第5章 大数定律和中心极限定理

### 5.1大数定律

1. 切比雪夫(Chebyshev)大数定律

设随机变量X1,X2,…,Xn①相互独立，②期望和方差都存在，且③它们的方差有公共上界，则对于任意实数ε>0，有

.

切比雪夫不等式

2. 伯努利(Bernoulli)大数定律

设随机变量X1,X2,…,Xn相互独立且都服从参数为p的0-1分布，则对于任意实数ε>0，有



3. 辛钦(Khinchine)大数定律

设随机变量X1,X2,…,Xn①相互独立，②服从同一分布，且③具有共同的数学期望，则对于任意实数ε>0，有



### 5.2中心极限定理

1. 列维-林德伯(Levy-Lindberg)格定理（独立同分布的中心极限定理）

设随机变量X1,X2,…,Xn相互独立，服从同一分布，且具有共同的期望和方差，则



2. 棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理（二项分布以正态分布为极限）



## 第6章 数理统计的基本概念

### 6.1随机样本

随机试验全部可能的观察值称为**总体**。

每一个可能观察值称为**个体**。

一个总体对应于一个随机变量X，一般不区分总体与相应随机变量，笼统称为总体X。

被抽取的部分个体叫做总体的一个**样本**。

来自总体X的n个相互独立且与总体同分布的随机变量称为**简单随机样本**。

### 6.2抽样分布

设X1,X2,…,Xn是来自总体X的一个样本，g(X1,X2,…,Xn)是一个连续函数，若g中不含未知参数，则称g(X1,X2,…,Xn)是一个**统计量**。统计量的分布称为**抽样分布**。

1. 常用的统计量

样本均值 （）

样本方差 

（E(S2)= σ2，当Xi～N(0, 1)时，）

样本k阶原点矩 样本k阶中心矩

2. 经验分布函数

，S(x)表示值小于x的随机变量的个数。



3. 来自正态总体的3个常用抽样分布

(1) χ2分布

设X1,X2,…,Xn是来自总体N(0,1)的样本，则称统计量



服从自由度为n的χ2分布，记为χ2~χ2(n).

E(χ2)=n, D(χ2)=2n（注意E(X4)=3，E(X2)=1，E(X2n)=(2n-1)!!）

(2) t分布

设X~N(0,1),Y~χ2 (n),且X,Y相互独立，则称随机变量服

从自由度为n的t分布，记为t~t(n).

性质：①密度函数是偶函数；②当n足够大时，t分布近似于N(0,1)分布。

(3) F分布

设U~χ2(n1),V~χ2(n2)，且U,V相互独立，则称随机变量服从

自由度为(n1, n2)的F分布，记为F~F(n1,n2).

F分布的性质：

1. 若 F~F(n1,n2),则1/F~F(n2,n1).
2. 若t~t(n),则t2~F(1,n).

4. 上侧分位数

设X是连续型随机变量，对于任意0<α<1，称满足条件P{x>a}=α的点a为X的上侧α分位数。

t分布，F分布的上侧α分位点记为tα(n)，Fα(n1, n2)，有如下性质：



5. 正态总体样本均值与样本方差的抽样分布





## 第7章 参数估计

### 7.1点估计

设总体X的分布函数的形式为已知，但它的一个或多个参数未知，借助于总体X的一个样本来估计未知参数的值称为参数的**点估计**。

1. 矩估计法

用样本原点矩来估计总体的原点矩，用样本的中心矩来估计总体的中心矩。

2. 最大似然估计法

1. 写出似然函数.
2. 求出使L(θ)达到最大值的。

L(θ)是n个乘积的形式，而且L(θ)与ln L(θ)在同一θ处取极值，因此θ

的最大似然估计量可以从（对数似然方程）求得。

1. 用作为θ的估计量。

最大似然估计不变原理：设u=u(θ)，此函数具有单值反函数θ=θ(u)，若是θ的最大似然估计，则=u()是u的最大最大似然估计

### 7.2估计量的评价标准

1. 无偏性 E()=θ

2. 有效性 D()≤D()

3. 相合性 

### 7.3区间估计

设总体X的分布函数F(x; θ)含有一个未知参数θ，对于给定值α(0<α<1)，

若由来自X的样本X1,X2,…,Xn确定的两个统计量和

，对于任意θ满足，则称随机区间是θ的置信水平为的1-α**置信区间**。

置信水平为的1-α置信区间不是唯一的。

区间越小表示估计的精度越高。

### 7.4正态总体均值与方差的区间估计

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 待估参数 | | 抽样分布 | 置信区间 |
| μ | σ2已知 |  |  |
| σ2未知 |  |  |
| σ2 | μ已知 |  |  |
| μ未知 |  |  |
| μ1  -  μ2 | ,已知 |  |  |
| ==σ2，但σ2未知 |  |  |
|  | |  |  |

## 第8章 假设检验

### 8.1假设检验

**拒绝域**：当检验统计量落入其中时，则否定原假设。

**小概率事件**原理：小概率事件在一次试验中实际上不会发生，若在一次试验中发生了，就认为不合理，小概率的值常根据实际问题的要求，规定一个可以接受的充分小的数α(0<α<1)，当一个事件的概率不大于α时，就认为它是小概率事件。α称为**显著性水平**。

统计推断有两类错误，**弃真**和**存伪**，只对犯第一类错误的概率加以控制，而不考虑第二类错误的检验称为**显著性检验**。α就是允许犯第一类错误的概率的最大允许值。

假设检验的基本步骤；

1. 根据实际问题的要求，提出原假设H0和备择假设H1；
2. 给定显著性水平α和样本容量n；
3. 确定检验统计量以及拒绝域的形式；
4. 按P{H0为真拒绝H0}≤α求出拒绝域；
5. 取样，根据样本观察值做出决策，是接受H0还是拒绝H0。

### 8.2正态总体均值与方差的假设检验

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 原假设H0 | 检验统计量 | 备择假设H1 | 拒绝域 |
| μ≤μ0  μ≥μ0  μ=μ0  (σ2已知) |  | μ>μ0  μ<μ0  μ≠μ0 | z≥zα  z≤-zα  |z|≥zα/2 |
| μ≤μ0  μ≥μ0  μ=μ0  (σ2未知) |  | μ>μ0  μ<μ0  μ≠μ0 | t≥tα(n-1)  t≤-tα(n-1)  |t|≥tα/2(n-1) |
| ≤  ≥  =  (μ已知) |  | >  <  ≠ | 或 |
| ≤  ≥  =  (μ未知) |  | >  <  ≠ | 或 |
| μ1-μ2≤δ  μ1-μ2≥δ  μ1-μ2=δ  (,已知) |  | μ1-μ2>δ  μ1-μ2<δ  μ1-μ2≠δ | z≥zα  z≤-zα  |z|≥zα/2 |
| μ1-μ2≤δ  μ1-μ2≥δ  μ1-μ2=δ  (==σ2，但σ2未知) |  | μ1-μ2>δ  μ1-μ2<δ  μ1-μ2≠δ | t≥tα(n1+n2-2)  t≤-tα(n1+n2-2)  |t|≥tα/2(n1+n2-2) |
| ≤  ≥  =  (μ1,μ2未知) |  | >  <  ≠ | F≥Fα(n1-1,n2-1)  F≤F1-α(n1-1,n2-1)  F≥Fα/2(n1-1,n2-1)或  F≤F1-α/2(n1-1,n2-1) |

# 参考资料

1. 数学考试大纲（数学一，2011年版），2010

2. 数学考试大纲解析（数学一，2011年版），高等教育出版社，2010

3. 数学复习全书（数学一，2011年版），李永乐，国家行政学院出版社，2010

4. 高等数学（第五版），同济大学应用数学系，高等教育出版社，2003

5. 线性代数（第2版），居余马，清华大学出版社，2007

6. 概率论与数理统计（第三版），浙江大学，盛骤，高等教育出版社，2003

7. 数学基础过关660题（数学一，2011年版），李永乐，新华出版社，2010

8. 考研数学必备手册，蔡子华，新华出版社，2010

本手册的宗旨是：“秒杀，可操作”。“秒杀”，本手册包含了最全（也很常用）的公式，归纳了大量常考题型，为的是让大脑充分进行预计算，优化解题流程，做题时才能不假思索的秒杀；“可操作”，本手册注重实用性，可操作性，只包含能直接用于解题的公式和定理，对那些比较泛泛，可操作性不强的定理和推论，尽量不包含。

本手册在编写过程中得到了大量同学的测试和反馈，特别感谢梁伟，孙程，卢俊等同学指出了手册中的许多错误，并提出了大量宝贵建议。

版本：6.7，最后更新日期：2010/12/03

官方地址：<http://www.gotothu.com> (未来清华人)

作者：戴方勤

个人博客：<http://www.yanjiuyanjiu.com/> (研究研究)

电子邮件：[soulmachine@gmail.com](mailto:soulmachine@gmail.com)

本手册遵循创作共享协议2.0，禁止一切商业用途。