

Chapitre 3

Propagation des maladies parmi les proies chassées et se vengeant avec l'effet d'Allee

3.1 Introduction

Dans ce troisième chapitre, nous introduisons l'effet d'Allee dans notre modèle de dynamique des populations proies-prédateurs. L'effet d'Allee, défini comme une croissance des populations inhibée à faibles densités et stimulée à des densités plus élevées, est un phénomène crucial pour comprendre les interactions au sein des écosystèmes. Nous examinons deux formes de croissance des proies : une croissance linéaire et une croissance logistique. Pour chaque forme de croissance, nous analysons les points d'équilibre, leur stabilité. L'ajout de l'effet d'Allee à notre modèle nous permet de mieux comprendre son impact sur la dynamique des populations proies-prédateurs et sur la stabilité des écosystèmes.

3.2 Modèle avec effet d'Allee et croissance linéaire des proies

Dans cette section, Nous enrichissons le modèle précédent en intégrant l'effet d'Allee à la croissance des proies, L'équation d'effet d'Allee modélise un terme dépendant de la différence entre la densité actuelle de la population, et un seuil critique A . Ainsi le système devient

$$\begin{cases} \frac{d\hat{S}(t)}{dt} = r\hat{S}(t)(\hat{S}(t) - A) - m\hat{S}(t) - C_{ss}\hat{S}(t)^2 - C_{si}\hat{S}(t)\hat{I}(t) - \frac{a\sqrt{\hat{S}(t)}\hat{P}(t)}{1 + b\hat{S}(t)} - \beta\hat{S}(t)\hat{I}(t) \\ \frac{d\hat{I}(t)}{dt} = \beta\hat{S}(t)\hat{I}(t) - \mu\hat{I}(t) - \frac{a\hat{I}(t)\hat{P}(t)}{1 + b\hat{I}(t)} \\ \frac{d\hat{P}(t)}{dt} = R\hat{P}(t)\left(1 - \frac{\hat{P}(t)}{H}\right) + \frac{ea\sqrt{\hat{S}(t)}\hat{P}(t)}{1 + b\hat{S}(t)} + \frac{ea\hat{I}(t)\hat{P}(t)}{1 + b\hat{I}(t)} \end{cases} \quad (3.1)$$

Lorsque la population S est inférieure à A , cela signifie que la population est très faible, voire inexistante (car les populations sont généralement des nombres entiers pour représenter des individus). Dans ce cas, $(\hat{S} - A)$ est négatif, ce qui implique que la croissance de la population est négative, c'est-à-dire que la population diminue. Cela reflète l'idée que de très petites populations peuvent avoir du mal à survivre ou à se reproduire efficacement en raison de divers facteurs tels que la difficulté à trouver des partenaires reproducteurs, la compétition pour les ressources limitées, ou l'incapacité à se défendre contre les prédateurs.

Lorsque la population S est supérieure à A , $(\hat{S} - A)$ devient positif, ce qui signifie que la population augmente linéairement avec un taux de croissance r en l'absence d'autres limitations. Cela correspond à la croissance normale d'une population qui n'est pas confrontée à des contraintes dues à une taille trop faible.

Ainsi, l'expression $(\hat{S} - A)$ est utilisée dans ce modèle pour capturer l'idée que de très petites populations peuvent rencontrer des difficultés à croître en raison de l'effet d'Allee, tandis que des populations plus importantes peuvent croître linéairement.

3.2.1 Analyse du modèle

Supposons que les conditions initiales du système (3.1) sont non négatives :

$$\hat{S}(0) = \hat{S}_0 \geq 0, \quad \hat{I}(0) = \hat{I}_0 \geq 0, \quad \hat{P}(0) = \hat{P}_0 \geq 0.$$

Points d'équilibre

Théorème 12 *Le système (3.1) admet six points d'équilibres :*

1. *L'origine : $\hat{E}_0 = (0, 0, 0)$.*
2. *L'équilibre des prédateurs uniquement : $\hat{E}_1 = (0, 0, H)$.*
3. *l'équilibre des proies susceptibles uniquement : $\hat{E}_2 = \left(\frac{rA+m}{r-C_{ss}}, 0, 0 \right)$, si : $r > C_{ss}$.*
4. *l'équilibre sans prédateurs : $\hat{E}_3 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{r\mu - \beta(rA+m) - \mu C_{ss}}{\beta(\beta + C_{si})}, 0 \right)$.*
si : $r\mu \geq \beta(rA+m) + \mu C_{ss}$
5. *L'équilibre sans maladies : $\hat{E}_4 = \left(\hat{S}_4, 0, H + \frac{eaH\sqrt{\hat{S}_4}}{R(1+b\hat{S}_4)} \right)$*
6. *L'équilibre de coexistence avec une maladie endémique : $\hat{E}_* = (\hat{S}_*, \hat{I}_*, \hat{P}_*)$.*

Démonstration. Les points d'équilibre $\hat{E}_i = (\hat{S}_i, \hat{I}_i, \hat{P}_i)$ sont déterminés par les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{S}}{dt} = 0 \\ \frac{d\hat{I}}{dt} = 0 \\ \frac{d\hat{P}}{dt} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \hat{S} = 0 & \text{où} \quad r(\hat{S}-A) - m - C_{ss}\hat{S} - C_{si}\hat{I} - \frac{a\hat{P}}{\sqrt{\hat{S}}(1+b\hat{S})} - \beta\hat{I} = 0 \\ \hat{I} = 0 & \text{où} \quad \beta\hat{S} - \mu - \frac{a\hat{P}}{1+b\hat{I}} = 0 \\ \hat{P} = 0 & \text{où} \quad R\left(1 - \frac{\hat{P}}{H}\right) + \frac{ea\sqrt{\hat{S}}}{1+b\hat{S}} + \frac{ea\hat{I}}{1+b\hat{I}} = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

1. Si $\hat{S} = 0$, pour $\hat{I} = 0$, alors on a d'après (3.2) :

★ $\hat{P} = 0$. Donc $\hat{E}_0 = (0, 0, 0)$

★ où $\hat{P} \neq 0$, on obtient : $1 - \frac{\hat{P}}{H} = 0 \Rightarrow \hat{P} = H$. Donc $\hat{E}_1 = (0, 0, H)$

2. Si $\hat{I} = 0$, et $\hat{S} \neq 0$, alors on a d'après (3.2) :

★ $\hat{P} = 0$, $r\hat{S} - rA - m - C_{ss}\hat{S} = 0 \Rightarrow \hat{S} = \frac{rA+m}{r-C_{ss}}$. Donc $\hat{E}_2 = \left(\frac{rA+m}{r-C_{ss}}, 0, 0 \right)$.

\hat{E}_2 existe si $r - C_{ss} > 0 \Rightarrow r > C_{ss}$.

★ Où $\hat{P} \neq 0$ on obtient :

$$\hat{P} = \sqrt{\hat{S}} \frac{(1 + b\hat{S})(r(\hat{S} - A) - m - C_{ss}\hat{S})}{a} = \psi(\hat{S})$$

$$\hat{P} = H + \frac{eaH\sqrt{\hat{S}}}{R(1 + b\hat{S})} = \phi(\hat{S})$$

La fonction ϕ : "Cette fonction a été étudiée dans le chapitre précédent "

La fonction ψ : On a :

$$\psi(0) = 0$$

$$\lim_{\hat{S} \rightarrow \infty} \psi(\hat{S}) = +\infty$$

Pour sa dérivée, on a :

$$\psi' = \frac{\Pi(\hat{S})}{2a\sqrt{\hat{S}}} = \frac{5(br - bC_{ss})\hat{S}^2 + 3(r - C_{ss} - m - rAb)\hat{S} - rA - m}{2a\sqrt{\hat{S}}}$$

le dénominateur est toujours positif et n'influence donc pas le signe du dérivée et aussi le pent de la fonction.

Pour $r > C_{ss}$, nous remarquons qu'il y a un changement de signe de l'équation $\Pi(\hat{S}) = 0$, donc d'après la règle des signes de Descartes, cette équation admet une seule solution positive et l'autre solution est négative. Ainsi, la solution est donnée par :

$$\hat{S}_{\pm} = \frac{3[-r + m + rAb + C_{ss}] \pm \sqrt{9[-r - m - rRA + C_{ss}]^2 + 20(rA + m)(br - bC_{ss})}}{10(br - C_{ss}b)}$$

Il est important de noter que le discriminant est toujours positif. Par conséquent, les zéros ci-dessus sont toujours réels, comme on peut s'y attendre. Ainsi, dans le domaine d'intérêt, la fonction ψ décroît lorsque $0 < \hat{S} < \hat{S}_+$ et augmente lorsque $\hat{S} > \hat{S}_+$. Pour atteindre l'équilibre \hat{E}_4 , il est nécessaire que les deux fonctions se croissent, comme illustré dans la figure ref fe Ce croisement est toujours garanti.

La figure est dessinée avec l'ensemble des paramètres :

$$r = 4.0, \quad m = 3.0, \quad C_{ss} = 0.1, \quad b = 0.3, \quad a = 0.8, \quad e = 0.4, \quad H = 10, \quad A = 0.5 \quad (3.3)$$

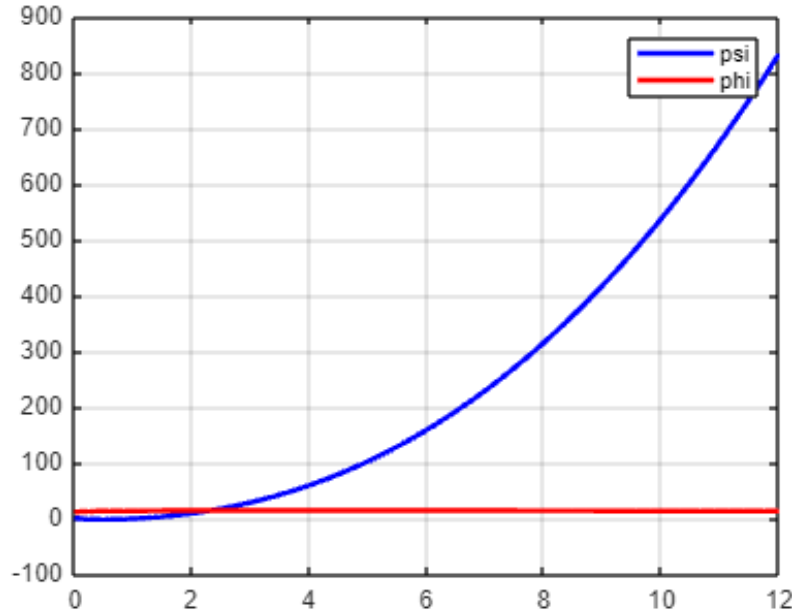


FIGURE 3.1 – Points d'intersection des courbes ϕ (rouge) et ψ (bleu) pour l'équilibre \hat{E}_4 .

3. Si $\hat{P} = 0$, pour $\hat{S} \neq 0$, et $\hat{I} \neq 0$ on a d'après (3.2) :

$$\beta \hat{S} - \mu = 0 \implies \hat{S} = \frac{\mu}{\beta}$$

et

$$r\hat{S} - rA - m - C_{ss}\hat{S} - C_{si}\hat{I} - \beta\hat{I} = 0 \implies \hat{I} = \frac{r\mu - \beta(rA + m) - \mu C_{ss}}{\beta(\beta + C_{si})}$$

. Donc $\hat{E}_3 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{r\mu - \beta(rA + m) - \mu C_{ss}}{\beta(\beta + C_{si})}, 0 \right)$.

$$\hat{E}_3 \text{ existe si : } r\mu - \beta(rA + m) - \mu C_{ss} \geq 0 \implies r\mu \geq \beta(rA + m) + \mu C_{ss}$$

4. L'équilibre de la coexistence d'une population avec une maladie endémique \hat{E}_* est analysé

numériquement.

□

Stabilité locale des points d'équilibres

La matrice Jacobienne du système (3.1) est donnée par :

$$J(\hat{S}, \hat{I}, \hat{P}) = \begin{pmatrix} \hat{J}_{11} & -C_{si}\hat{S} - \beta\hat{S} & -\frac{a\sqrt{\hat{S}}}{1+b\hat{S}} \\ \beta\hat{I} & \beta\hat{S} - \mu - \frac{a\hat{P}}{(1+b\hat{I})^2} & -\frac{a\hat{I}}{1+b\hat{I}} \\ \frac{ea\hat{P}(1-b\hat{S})}{2\sqrt{\hat{S}}(1+b\hat{S})^2} & \frac{ea\hat{P}}{(1+b\hat{I})^2} & \hat{J}_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{J}_{11} &= 2r\hat{S} - rA - m\hat{S} - 2C_{ss}\hat{S} - C_{si}\hat{I} - \beta\hat{I} - \frac{a\hat{P}(1-b\hat{S})}{2\sqrt{\hat{S}}(1+b\hat{S})^2}, \\ \hat{J}_{33} &= R \left(1 - 2\frac{\hat{P}}{H} \right) + \frac{ea\sqrt{\hat{S}}}{1+b\hat{S}} + \frac{ea\hat{I}}{1+b\hat{I}}. \end{aligned}$$

Les équilibres avec $\hat{S} = 0$ impliquent des singularités dans certains des termes ci-dessus, pour lesquelles ils doivent être analysés avec soin.

Stabilité d'équilibre \hat{E}_0

Théorème 13 *L'origine $\hat{E}_0 = (0, 0, 0)$ est instable.*

Démonstration. A partir de la première équation de (3.1), nous regardons la dominante pour $\hat{S}, \hat{I}, \hat{P} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{S}}(t) &= \sqrt{\hat{S}} \left[\sqrt{\hat{S}}(r(\hat{S}-A) - m - C_{ss}\hat{S} - C_{si}\hat{I} - \beta\hat{I}) - \frac{a\hat{P}}{1+b\hat{S}} \right] \\
 &\approx \sqrt{\hat{S}} \left[\sqrt{\hat{S}}(r(\hat{S}-A) - m - (C_{si}\hat{I} + \beta)\hat{I}) - a\hat{P} \right], \\
 \dot{\hat{I}}(t) &= \hat{I} \left[\beta\hat{S} - \mu - \frac{a\hat{P}}{1+b\hat{I}} \right] \\
 &\approx -\mu\hat{I} < 0, \\
 \dot{\hat{P}}(t) &= \hat{P} \left[R \left(1 - \frac{\hat{P}}{H} \right) + \frac{ea\sqrt{\hat{S}}}{1+b\hat{S}} + \frac{ea\hat{I}}{1+b\hat{I}} \right] \\
 &\approx R\hat{P} > 0.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Donc \hat{E}_0 est instable. □

Stabilité d'équilibre \hat{E}_1

Théorème 14 *L'équilibre des prédateurs uniquement $\hat{E}_1 = (0, 0, H)$ est instable.*

Démonstration. Pour l'équilibre \hat{E}_1 avec P non disparaissant, nous trouvons des estimations similaires aux deux premières en (3.4)

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{S}}(t) &= \sqrt{\hat{S}} \left[\sqrt{\hat{S}}(r(\hat{S}-A) - m - C_{ss} - C_{si} - \beta\hat{I}) - \frac{a\hat{P}}{1+b\hat{S}} \right] \\
 &\approx \sqrt{\hat{S}} \left[\sqrt{\hat{S}}(r(\hat{S}-A) - m - (C_{si} + \beta)\hat{I}) - aH \right] \approx -aH\sqrt{\hat{S}} < 0, \\
 \dot{\hat{I}}(t) &= \hat{I} \left[\beta\hat{S} - \mu - \frac{a\hat{P}}{1+b\hat{I}} \right] \\
 &\approx -(\mu + aH)\hat{I} < 0, \\
 \dot{\hat{P}}(t) &= \hat{P} \left[R \left(1 - \frac{\hat{P}}{H} \right) + \frac{ea\sqrt{\hat{S}}}{1+b\hat{S}} + \frac{ea\hat{I}}{1+b\hat{I}} \right] \\
 &\approx H \left[ea\sqrt{\hat{S}} + ea\hat{I} \right] > 0.
 \end{aligned}$$

Donc \hat{E}_1 est instable. □

Stabilité d'équilibre \hat{E}_2 :

Théorème 15 *L'équilibre des proies susceptible uniquement : $\hat{E}_2 = (\frac{rA-m}{r-C_{ss}}, 0, 0)$ est instable.*

Démonstration. La matrice Jacobienne à l'équilibre \hat{E}_2 est :

$$\hat{J}_{\hat{E}_2} = \begin{pmatrix} 2r\hat{S}_2 - rA - m\hat{S}_2 - 2C_{ss}\hat{S}_2 & -C_{si}\hat{S}_2 - \beta\hat{S}_2 & -\frac{a\sqrt{\hat{S}_2}}{1+\hat{S}_2} \\ 0 & \beta\hat{S}_2 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & R + \frac{ea\sqrt{\hat{S}_2}}{1+b\hat{S}_2} \end{pmatrix}$$

En \hat{E}_2 , la Jacobienne devient une matrice triangulaire supérieure, à partir de laquelle les valeurs propres sont immédiates :

$$\lambda_1 = 2r\hat{S}_2 - rA - m\hat{S}_2 - 2C_{ss}\hat{S}_2, \quad \lambda_2 = \beta\hat{S}_2 - \mu, \quad \lambda_3 = R + \frac{ea\sqrt{\hat{S}_2}}{1+b\hat{S}_2} > 0$$

De sorte que ce point est également inconditionnellement instable. □

Stabilité d'équilibre \hat{E}_3 :

Théorème 16 *L'équilibre sans prédateurs : $\hat{E}_3 = (\frac{\mu}{\beta}, \frac{r\mu - \beta(rA+m) - \mu C_{ss}}{\beta(\beta + C_{si})}, 0)$ est instable.*

Démonstration. La matrice Jacobienne à l'équilibre \hat{E}_3 est donnée par :

$$\hat{J}_{\hat{E}_3} = \begin{pmatrix} \hat{J}_{11}(\hat{E}_3) & -C_{si}\hat{S}_3 - \mu & -\frac{a\sqrt{\hat{S}_3}}{1+b\hat{S}_3} \\ \beta\hat{I}_3 & 0 & -\frac{a\hat{I}_3}{1+b\hat{I}_3} \\ 0 & 0 & R + \frac{ea\sqrt{\hat{S}_3}}{1+b\hat{S}_3} + \frac{ea\hat{I}_3}{1+b\hat{S}_3} \end{pmatrix}$$

On remarque que $R + \frac{ea\sqrt{\hat{S}_3}}{1+b\hat{S}_3} + \frac{ea\hat{I}_3}{1+b\hat{S}_3} > 0$ est une valeur propre de \hat{J} . Donc \hat{E}_3 est instable. □

Stabilité d'équilibre \hat{E}_4

Théorème 17 *L'équilibre sans maladies : $\hat{E}_4 = \left(\hat{S}_4, 0, H + \frac{eaH\sqrt{\hat{S}_4}}{R(1+b\hat{S}_4)} \right)$ est localement asymptotiquement stable si : $\beta\hat{S}_4 - \mu - a\hat{P}_4$, et :*

$$\hat{J}_{11}(\hat{E}_4) + \hat{J}_{33}(\hat{E}_4) < 0 \quad \text{et} \quad \hat{J}_{11}(\hat{E}_4)\hat{J}_{33}(\hat{E}_4) - \hat{J}_{13}(\hat{E}_4)\hat{J}_{31}(\hat{E}_4) > 0$$

Démonstration. La Jacobienne à l'équilibre \hat{E}_4 est donnée par :

$$\hat{J}_{\hat{E}_4} = \begin{pmatrix} \hat{J}_{11}(\hat{E}_4) & -C_{si}\hat{S}_4 - \beta\hat{S}_4 & -\frac{a\sqrt{\hat{S}_4}}{1+b\hat{S}_4} \\ 0 & \beta\hat{S}_4 - \mu - a\hat{P}_4 & 0 \\ \frac{ea\hat{P}_4(1-b\hat{S}_4)}{2\sqrt{\hat{S}_4}(1+b\hat{S}_4)^2} & ea\hat{P}_4 & \hat{J}_{33}(\hat{E}_4) \end{pmatrix}$$

Les conditions de stabilité découlent de la négativité de la valeur propre immédiate $\beta\hat{S}_4 - \mu - a\hat{P}_4$, et les conditions de "Routh-Hurwitz" sur le reste du mineur :

$$\hat{J}_{11}(\hat{E}_4) + \hat{J}_{33}(\hat{E}_4) < 0 \quad \text{et} \quad \hat{J}_{11}(\hat{E}_4)\hat{J}_{33}(\hat{E}_4) - \hat{J}_{13}(\hat{E}_4)\hat{J}_{31}(\hat{E}_4) > 0$$

où

$$\hat{J}_{13}(\hat{E}_4) = -\frac{a\sqrt{\hat{S}_4}}{1+b\hat{S}_4}, \quad \hat{J}_{31}(\hat{E}_4) = \frac{ea\hat{P}_4(1-b\hat{S}_4)}{2\sqrt{\hat{S}_4}(1+b\hat{S}_4)^2}$$

□

L'équilibre \hat{E}_4 est représenté sur la figure (3.2); les paramètres pour lesquels \hat{E}_4 est obtenu sont : (2.9), et les conditions initiales : (2.10).

Avec : $A = 0.5$.

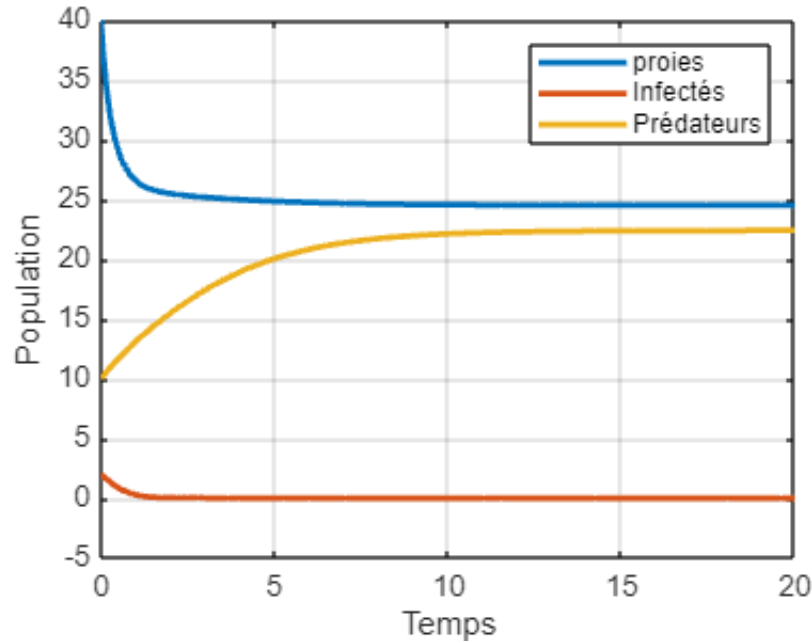


FIGURE 3.2 – La coexistence \hat{E}_4 pour être atteinte avec les paramètres (2.9) est les conditions initiales (2.10).

La Figure (3.2) montre que l'équilibre \hat{E}_4 peut effectivement être atteint à un niveau stable.

Stabilité d'équilibre \hat{E}_*

Théorème 18 *L'équilibre coexistence d'une population avec une maladie endémique \hat{E}_* est étudiée numériquement et est réalisable de manière stable.*

Démonstration. L'équilibre de la coexistence d'une population avec une maladie endémique apparaît sur la figure (3.3); les paramètres pour lesquels \hat{E}_* est atteint sont : (2.11), et les conditions initiales : (2.10). Avec $A = 0.5$.

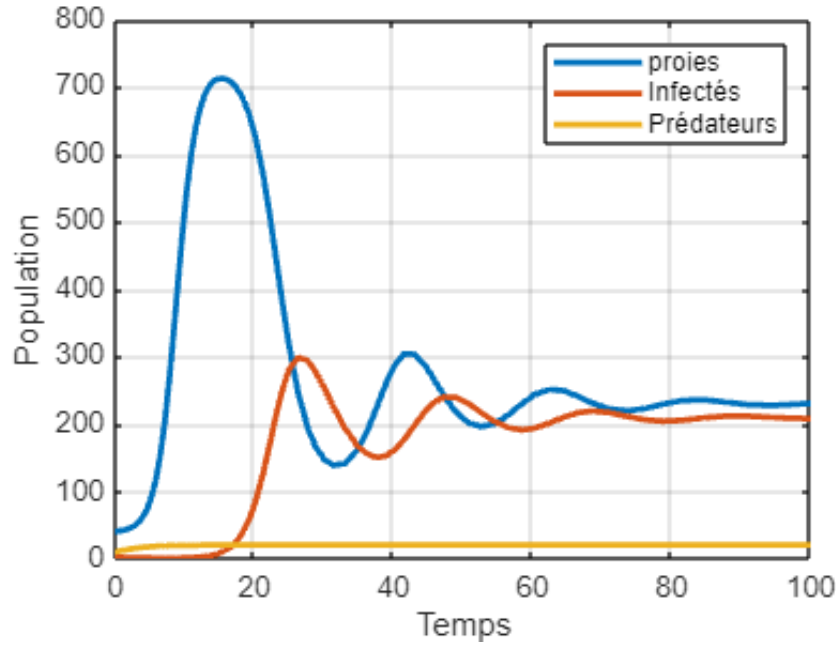


FIGURE 3.3 – La coexistence \hat{E}_* pour être atteinte avec les paramètres et les conditions initiales(2.11).

□

3.3 Modèle avec effet d'Allee et croissance logistique des proies

Pour une analyse plus approfondie des dynamiques des populations, nous avons intégré la croissance logistique à notre modèle. Cette décision renforce la pertinence de notre étude en tenant compte des contraintes environnementales sur la croissance des populations.

La croissance logistique est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{d\tilde{S}(t)}{dt} = R_s \tilde{S}(t) \left(1 - \frac{\tilde{S}(t)}{H} \right)$$

Dans cette équation, R_s représente le taux de croissance nette des proies, qui prend en compte à la fois la reproduction, la compétition intra-spécifique (représentée par $\tilde{S}(t)$) et la mortalité intraspécifique. Le terme $\left(1 - \frac{\tilde{S}(t)}{H} \right)$ agit comme un facteur de régulation qui limite la croissance des proies à mesure qu'elles approchent de la capacité de charge de l'environnement.

En intégrant la croissance logistique à notre modèle, nous simplifions l'analyse en négligeant les termes de compétition et de mortalité intraspécifique. Cette simplification est justifiée par le fait que la croissance logistique intègre déjà ces aspects de manière implicite. Ainsi, notre modèle avec croissance logistique nous permet de mieux comprendre l'impact de la croissance sur la dynamique des populations dans notre écosystème étudié. Ainsi le système devient :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{S}(t)}{dt} = R_s \tilde{S}(t) \left(1 - \frac{\tilde{S}(t)}{H}\right) (\tilde{S}(t) - A) - \frac{a\sqrt{\tilde{S}(t)}\tilde{P}(t)}{1 + b\tilde{S}(t)} - \beta \tilde{S}(t)\tilde{I}(t) \\ \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = \beta \tilde{S}(t)\tilde{I}(t) - \mu \tilde{I}(t) - \frac{a\tilde{I}(t)\tilde{P}(t)}{1 + b\tilde{I}(t)} \\ \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} = R\tilde{P}(t) \left(1 - \frac{\tilde{P}(t)}{H}\right) + \frac{ea\sqrt{\tilde{S}(t)}\tilde{P}(t)}{1 + b\tilde{S}(t)} + \frac{ea\tilde{I}(t)\tilde{P}(t)}{1 + b\tilde{I}(t)} \end{cases} \quad (3.5)$$

3.3.1 Analyse du modèle

Le système d'équations différentielles (3.5) que admet au moins une solution positive. De plus, nous supposons que les conditions initiales du système (3.5) sont non négatives :

$$\tilde{S}(0) = \tilde{S}_0 \geq 0, \quad \tilde{I}(0) = \tilde{I}_0 \geq 0, \quad \tilde{P}(0) = \tilde{P}_0 \geq 0.$$

Points d'équilibre

Théorème 19 *Le système (3.5) admet six points d'équilibres :*

1. *L'origine : $\tilde{E}_0 = (0, 0, 0)$.*
2. *L'équilibre des prédateurs uniquement : $\tilde{E}_1 = (0, 0, H)$.*
3. *Les équilibres des proies susceptibles uniquement :*
 - $\tilde{E}_2 = (A, 0, 0)$.
 - $\tilde{E}_3 = (H, 0, 0)$
4. *L'équilibre sans maladies : $\tilde{E}_4 = \left(\tilde{S}_4, 0, H + \frac{eaH\sqrt{\tilde{S}_4}}{R(1 + b\tilde{S}_4)}\right)$, si $\Psi(\tilde{S}_{+1}) > \Phi(\tilde{S}_{+1})$*
5. *L'équilibre sans prédateurs $\tilde{E}_5 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{R_s}{\beta}(\tilde{S}_5 - A) \left(1 - \frac{\tilde{S}_5}{H}\right), 0\right)$, si $A < \tilde{S}_5 < H$*

6. L'équilibre de coexistence avec une maladie endémique : $\tilde{E}_* = (\tilde{S}_*, \tilde{I}_*, \tilde{P}_*)$.

Démonstration. Les points d'équilibre $\tilde{E}_i = (\tilde{S}_i, \tilde{I}_i, \tilde{P}_i)$ sont déterminés par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{S}}{dt} = 0 \\ \frac{d\tilde{I}}{dt} = 0 \\ \frac{d\tilde{P}}{dt} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{S} = 0 & \text{où} & R_s(\tilde{S} - A) \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H}\right) - \frac{a\tilde{P}}{\sqrt{\tilde{S}}(1+b\tilde{S})} - \beta\tilde{I} = 0 \\ \tilde{I} = 0 & \text{où} & \beta\tilde{S} - \mu - \frac{a\tilde{P}}{1+b\tilde{I}} = 0 \\ \tilde{P} = 0 & \text{où} & R \left(1 - \frac{\tilde{P}}{H}\right) + \frac{ea\sqrt{\tilde{S}}}{1+b\tilde{S}} + \frac{ea\tilde{I}}{1+b\tilde{I}} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

1. Si $\tilde{S} = 0$, pour $\tilde{I} = 0$, alors on a d'après (3.6) :

★ $\tilde{P} = 0$. Donc $\tilde{E}_0 = (0, 0, 0)$.

★ où $\tilde{P} \neq 0$, on obtient : $1 - \frac{\tilde{P}}{H} = 0 \implies \tilde{P} = H$. Donc $\tilde{E}_1 = (0, 0, H)$.

2. Si $\tilde{I} = 0$, et $\tilde{S} \neq 0$, alors on a d'après (3.6) :

★ $\tilde{P} = 0$. Alors, $R_s(\tilde{S} - A) \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H}\right) = 0$, ce qui implique que :

$\tilde{S} - A = 0 \implies \tilde{S} = A$. Donc, $\tilde{E}_2 = (A, 0, 0)$.

$1 - \frac{\tilde{S}}{H} = 0 \implies \tilde{S} = H$. Donc, $\tilde{E}_3 = (H, 0, 0)$.

★ Où $\tilde{P} \neq 0$ on obtient :

$$\tilde{P} = \frac{R_s}{a} \sqrt{\tilde{S}}(1+b\tilde{S})(\tilde{S} - A) \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H}\right) = \psi(\tilde{S})$$

$$\tilde{P} = H + \frac{eaH\sqrt{\tilde{S}}}{R(1+b\tilde{S})} = \phi(\tilde{S})$$

La fonction ϕ : "Cette fonction a été étudiée dans le chapitre précédent "

La fonction ψ : On a :

$$\psi(0) = 0$$

$$\lim_{\tilde{S} \rightarrow \infty} \psi(\tilde{S}) = -\infty$$

Pour sa dérivée, on a :

$$\psi' = \frac{R_s \Pi(\tilde{S})}{a\sqrt{\tilde{S}}} = \frac{R_s}{2a\sqrt{\tilde{S}}} \left[-7\frac{b}{H}\tilde{S}^3 + 5\left(\frac{Ab}{H} + b - \frac{1}{H}\right)\tilde{S}^2 + 3\left(1 + \frac{A}{H} - Ab\right)\tilde{S} - A \right]$$

Le terme $\frac{R_s}{a\sqrt{\tilde{S}}}$ est toujours positif et n'influence donc pas le signe du dérivée et.

la dérivée s'annihile aux zéros du $\Pi(\tilde{S})$.

1^{er} cas :

Si $\Pi(\tilde{S}) < 0$, pour tout $\tilde{S} > 0$, alors $\psi(\tilde{S}) < 0$. Cela signifie que la fonction est complètement décroissante et part de l'origine en décroissant progressivement pour prendre toutes les valeurs négatives. Il n'y a donc pas d'intersection entre ψ et ϕ . Pour cette raison, ce cas n'est pas considéré.

2^{ème} cas :

Si non, nous remarquons qu'il y a deux changements de signe de l'équation $\Pi(\tilde{S}) = 0$, donc d'après la règle des signes de Descartes, cette équation admet deux solutions positive : \tilde{S}_{+1} , et \tilde{S}_{+2} . Pour obtenir l'équilibre E_4 , les deux fonctions doivent se croiser comme le montre la figure (3.4), ce qui n'est pas toujours garanti. La figure est dessinée avec l'ensemble des paramètres :

La figure montre également que les intersections possibles se produisent par paires.

3. $\tilde{P} = 0$, pour $\tilde{S} \neq 0$, et $\tilde{I} \neq 0$ on a d'après (3.6) :

$$\beta\tilde{S} - \mu = 0 \implies \tilde{S} = \frac{\mu}{\beta}$$

et

$$R_s(\tilde{S} - A) \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H}\right) - \beta\tilde{I} = 0 \implies \tilde{I} = \frac{R_s}{\beta}(\tilde{S} - A) \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H}\right)$$

$$\text{Donc } \tilde{E}_5 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{R_s}{\beta}(\tilde{S}_4 - A) \left(1 - \frac{\tilde{S}_5}{H}\right), 0 \right).$$

$$\tilde{E}_5 \text{ exist si : } A < \tilde{S}_5 < H$$

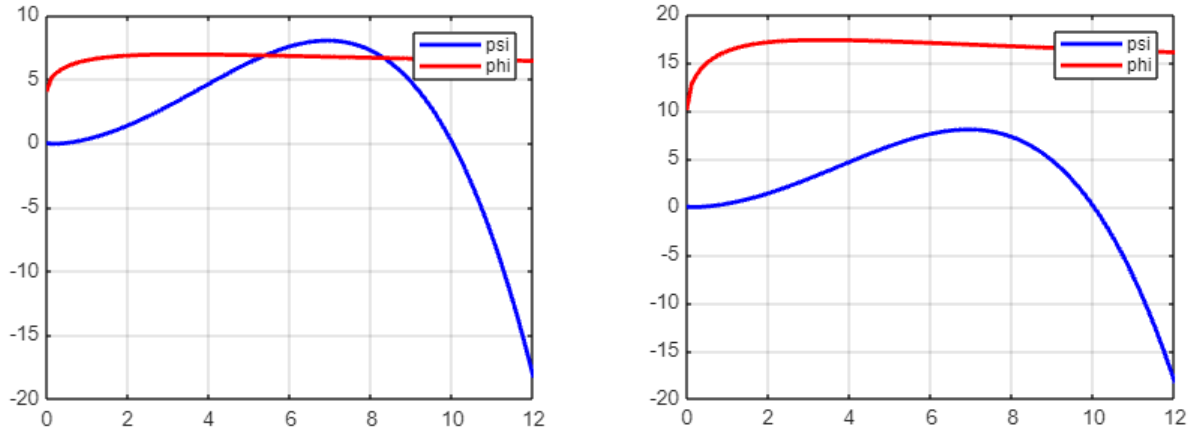


FIGURE 3.4 – Les fonctions ϕ (rouge) et ψ (bleu) dans deux configurations possibles différentes, cadre gauche $H=4.0$, cadre droit $H=10.0$

4. L'équilibre de la coexistence d'une population avec une maladie endémique \tilde{E}_* est analysé numériquement.

□

Analyse de la stabilité locale des points d'équilibres

La matrice Jacobienne du système (3.5) est donnée par :

$$J(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{P}) = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{11} & -\beta\tilde{S} & -\frac{a\sqrt{\tilde{S}}}{1+b\tilde{S}} \\ \beta\tilde{I} & \beta\tilde{S} - \mu - \frac{a\tilde{P}}{(1+b\tilde{I})^2} & -\frac{a\tilde{I}}{1+b\tilde{I}} \\ \frac{ea\tilde{P}(1-b\tilde{S})}{2\sqrt{\tilde{S}}(1+b\tilde{S})^2} & \frac{ea\tilde{P}}{(1+b\tilde{I})^2} & \tilde{J}_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{11} &= R_s(\tilde{S} - A) \left(1 - 2\frac{\tilde{S}}{H} \right) + R_s \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H} \right) - \beta\tilde{I} - \frac{a\tilde{P}(1-b\tilde{S})}{2\sqrt{\tilde{S}}(1+b\tilde{S})^2}, \\ \tilde{J}_{33} &= R \left(1 - 2\frac{\tilde{P}}{H} \right) + \frac{ea\sqrt{\tilde{S}}}{1+b\tilde{S}} + \frac{ea\tilde{I}}{1+b\tilde{I}}. \end{aligned}$$

Les équilibres avec $\tilde{S} = 0$ impliquent des singularités dans certains des termes ci-dessus, pour lesquelles ils doivent être analysés avec soin.

Stabilité d'équilibre \tilde{E}_0

Théorème 20 *L'origine $\tilde{E}_0 = (0, 0, 0)$ est instable.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{S}}(t) &= \sqrt{\tilde{S}} \left[\sqrt{\tilde{S}} \left(r \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H} \right) (\tilde{S} - A) - \beta \tilde{I} \right) - \frac{a\tilde{P}}{1+b\tilde{S}} \right] \\
 &\approx \sqrt{\tilde{S}} \left[\sqrt{\tilde{S}} \left(r \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H} \right) (\tilde{S} - A) - \beta \tilde{I} \right) - a\tilde{P} \right], \\
 \dot{\tilde{I}}(t) &= \tilde{I} \left[\beta \tilde{S} - \mu - \frac{a\tilde{P}}{1+b\tilde{I}} \right] \\
 &\approx -\mu \tilde{I} < 0, \\
 \dot{\tilde{P}}(t) &= \tilde{P} \left[R \left(1 - \frac{\tilde{P}}{H} \right) + \frac{ea\sqrt{\tilde{S}}}{1+b\tilde{S}} + \frac{ea\tilde{I}}{1+b\tilde{I}} \right] \\
 &\approx R\tilde{P} > 0.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

□

Stabilité d'équilibre \tilde{E}_1

Théorème 21 *L'équilibre des prédateurs uniquement $\tilde{E}_1 = (0, 0, H)$ est.*

Démonstration. Pour l'équilibre \tilde{E}_1 avec P non disparaissant, nous trouvons des estimations similaires aux deux premières en (3.7)

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{S}}(t) &= \sqrt{\tilde{S}} \left[\sqrt{\tilde{S}} \left(r \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H} \right) (\tilde{S} - A) - \beta \tilde{I} \right) - \frac{a\tilde{P}}{1+b\tilde{S}} \right] \\
 &\approx \sqrt{\tilde{S}} \left[\sqrt{\tilde{S}} \left(r \left(1 - \frac{\tilde{S}}{H} \right) (\tilde{S} - A) - \beta \tilde{I} \right) - aH \right] \approx -aH\sqrt{\tilde{S}} < 0, \\
 \dot{\tilde{I}}(t) &= \tilde{I} \left[\beta \tilde{S} - \mu - \frac{a\tilde{P}}{1+b\tilde{I}} \right] \\
 &\approx -(\mu + aH)\tilde{I} < 0, \\
 \dot{\tilde{P}}(t) &= \tilde{P} \left[R \left(1 - \frac{\tilde{P}}{H} \right) + \frac{ea\sqrt{\tilde{S}}}{1+b\tilde{S}} + \frac{ea\tilde{I}}{1+b\tilde{I}} \right] \\
 &\approx H \left[ea\sqrt{\tilde{S}} + ea\tilde{I} \right] > 0.
 \end{aligned}$$

Donc \tilde{E}_1 est instable. □

Stabilité d'équilibre \tilde{E}_2 :

Théorème 22 *L'équilibre des proies susceptible uniquement : $\tilde{E}_2 = (A, 0, 0)$ est instable.*

Démonstration. La matrice Jacobienne à l'équilibre \tilde{E}_2 est :

$$\tilde{J}_{\tilde{E}_2} = \begin{pmatrix} R_s A \left(1 - \frac{A}{H} \right) & -\beta A & -\frac{a\sqrt{A}}{1+bA} \\ 0 & \beta A - \mu & 0 \\ 0 & 0 & R + \frac{ea\sqrt{A}}{1+bA} \end{pmatrix}$$

En \tilde{E}_2 , la Jacobienne devient une matrice triangulaire supérieure, à partir de laquelle les valeurs propres sont immédiates :

$$\lambda_1 = R_s A \left(1 - \frac{A}{H} \right), \quad \lambda_2 = \beta A - \mu, \quad \lambda_3 = R + \frac{ea\sqrt{A}}{1+bA} > 0$$

De sorte que ce point est également inconditionnellement instable. □

Stabilité d'équilibre \tilde{E}_3 :

Théorème 23 *L'équilibre des proies susceptible : $\tilde{E}_3 = (H, 0, 0)$ est instable.*

Démonstration. La matrice Jacobienne à l'équilibre \tilde{E}_3 est donnée par :

$$\tilde{J}_{\tilde{E}_3} = \begin{pmatrix} -R_s(H-A) & -\beta H & -\frac{a\sqrt{H}}{1+bH} \\ 0 & \beta H - \mu & 0 \\ 0 & 0 & R + \frac{ea\sqrt{H}}{1+bH} \end{pmatrix}$$

En \tilde{E}_3 , la Jacobienne devient une matrice triangulaire supérieure, à partir de laquelle les valeurs propres sont immédiates :

$$\lambda_1 = R_s(H-A), \quad \lambda_2 = \beta H - \mu, \quad \lambda_3 = R + \frac{ea\sqrt{H}}{1+bH} > 0$$

De sorte que ce point est également inconditionnellement instable.

□

Stabilité d'équilibre \tilde{E}_4

Théorème 24 *L'équilibre sans maladies : $\tilde{E}_4 = \left(\tilde{S}_4, 0, H + \frac{eaH\sqrt{\tilde{S}_4}}{R(1+b\tilde{S}_4)} \right)$ est localement asymptotiquement stable si : $\beta\tilde{S}_4 - \mu - a\tilde{P}_4 < 0$, et*

$$\tilde{J}_{11}(\tilde{E}_4) + \tilde{J}_{33}(\tilde{E}_4) < 0 \quad \text{et} \quad \tilde{J}_{11}(\tilde{E}_4)\tilde{J}_{33}(\tilde{E}_4) - \tilde{J}_{13}(\tilde{E}_4)\tilde{J}_{31}(\tilde{E}_4) > 0$$

Démonstration. La Jacobienne à l'équilibre \tilde{E}_4 est donnée par :

$$\tilde{J}_{\tilde{E}_4} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{11}(\tilde{E}_4) & -\beta\tilde{S}_4 & -\frac{a\sqrt{\tilde{S}_4}}{1+b\tilde{S}_4} \\ 0 & \beta\tilde{S}_4 - \mu - a\tilde{P}_4 & 0 \\ \frac{ea\tilde{P}_4(1-b\tilde{S}_4)}{2\sqrt{\tilde{S}_4}(1+b\tilde{S}_4)^2} & ea\tilde{P}_4 & \tilde{J}_{33}(\tilde{E}_4) \end{pmatrix}$$