

# **Kurvendiskussion**

**für Klassen der FOS**

Martin Schunkert

Stand: 27. November 2018



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Funktionen . . . . .	1
1.2 Polynome . . . . .	2
<b>2 Aspekte der Kurvendiskussion</b>	<b>3</b>
2.1 Der Definitionsbereich . . . . .	3
2.2 Symmetrieeigenschaften . . . . .	4
2.3 Verhalten im Unendlichen . . . . .	7
2.4 Der y-Achsenabschnitt . . . . .	8
2.5 Nullstellen . . . . .	9
2.5.1 Grundsätzliches . . . . .	9
2.5.2 Termumformung . . . . .	9
2.5.3 p-q-Formel . . . . .	10
2.5.4 Ausklammern . . . . .	12
2.5.5 Substitution . . . . .	12
2.5.6 Linearfaktorzerlegung und Polynomdivision . . . . .	13
2.6 Ableitungsregeln . . . . .	17
2.7 Extrempunkte . . . . .	20
2.8 Wendepunkte und Sattelpunkte . . . . .	27
2.9 Schaubild . . . . .	32
<b>3 Gebrochen-rationale Funktionen</b>	<b>35</b>
3.1 Ein Bruch als Funktion? . . . . .	35
3.2 Definitionsbereich und Nullstellen . . . . .	36
3.3 Symmetrieeigenschaften . . . . .	38
3.4 Verhalten im Unendlichen . . . . .	39

3.5	Der y-Achsenabschnitt . . . . .	43
3.6	Verhalten an den Polstellen . . . . .	44
3.7	Ableitungen . . . . .	45
3.8	Extrempunkte, Wendepunkte und Sattelpunkte . . . . .	46
3.9	Beispiel einer vollständigen Kurvendiskussion . . . . .	47
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>51</b>

# 1 Einleitung

Eines der wichtigsten mathematischen Themen der Schule ist die Kurvendiskussion. Ihr Sinn und Zweck ist es, aus in Form von Gleichungen gegebenen Funktionen Informationen über diese Funktion zu ermitteln. Ein zusätzlicher Aspekt kommt hinzu, wenn die Funktion in einen Kontext eingebettet ist. Dann nämlich sind die gewonnenen Informationen bezüglich dieses Kontextes zu interpretieren. Beispielsweise lässt sich mit Hilfe der Extrempunktbestimmung, einer der zentralen Aspekte der Kurvendiskussion, aus einer Funktion, die den Verlauf einer Grippewelle beschreibt, derjenige Zeitpunkt ermitteln, an dem die meisten Leute krank sind.

Diesen und andere Aspekte der Kurvendiskussion werden wir in Kapitel 2 kennenlernen. In Kapitel 3 befassen wir uns dann mit der Kurvendiskussion von gebrochen-rationalen beziehungsweise Quotientenfunktionen.

Zunächst müssen wir einige Vorüberlegungen zu den im Folgenden zu behandelnden Funktionen anstellen:

## 1.1 Funktionen

**Definition 1.1.1** (Funktion).

*Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element einer Grundmenge genau ein Element aus einer Zielmenge zuordnet.*

**Beispiel 1.1.2.**

*Jedem Schüler einer Schulkasse wird genau ein Alter (sogar auf Tag, Stunde, Minute, ... genau zugeordnet). Es ist nicht ausgeschlossen, dass zwei Schüler gleich alt sind, aber kein Schüler kann zwei Alter haben.*

## 1.2 Polynome

**Definition 1.2.1** (Das allgemeine Polynom).

*Eine Funktion der Form*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

*mit Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{Q}$  bezeichnen wir als ganz-rationale Funktion vom Grad n beziehungsweise Polynom vom Grad n. Der Grad ist hierbei die höchste auftretende Potenz.*

**Definition 1.2.2** (Leitterm, Leitkoeffizient, Absolutterm).

*Denjenigen Term mit dem höchsten Exponenten  $a_n x^n$  bezeichnen wir als Leitterm, den Koeffizienten des Leitterms  $a_n$  als Leitkoeffizient. Den konstanten Term  $a_0$  bezeichnen wir als Absolutterm*

## 2 Aspekte der Kurvendiskussion

### 2.1 Der Definitionsbereich

Der Definitionsbereich einer Funktion gibt grob gesagt an, welche Werte in die Funktionsgleichung eingesetzt werden dürfen. Hier sind drei fundamentale Einschränkungen von großer Bedeutung:

- Es darf nicht durch 0 dividiert werden!
- Innerhalb der reellen Zahlen darf aus negativen Zahlen keine gerade Wurzel gezogen werden!
- Innerhalb der reellen Zahlen kann der Logarithmus nur von echt-positiven Zahlen (also größer als 0) berechnet werden!

Eine Funktion, in der keine dieser Einschränkungen auftreten kann, hat als Definitionsbereich die gesamten reellen Zahlen:  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ .

**Beispiel 2.1.1** (ohne Einschränkung).

*Die Funktion  $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x + 5$  besitzt keine Divisionen, keine Wurzeln und keine Logarithmen. Die oben genannten Einschränkungen können also nicht auftreten. Den Definitionsbereiche von  $f$  bilden die gesamten reellen Zahlen:*

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

**Beispiel 2.1.2** (mit Einschränkung, Division durch 0).

*Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x-5}$  besitzt einen Bruch mit veränderlichem Nenner. In diese Funktion darf nicht die Zahl 5 eingesetzt werden, da ansonsten im Nenner 0 stünde. Ansonsten gibt es*

keine Einschränkungen. Der Definitionsbereich ist also die reellen Zahlen ohne die 5:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

Der Definitionsbereich einer Funktion kann aber auch ohne mathematische Notwendigkeit eingeschränkt sein. Beispielsweise kann eine Funktion auf das Intervall  $[3; 7]$  beschränkt sein. Das heißt dann, dass Werte wie etwa 2, die außerhalb des Intervalls liegen zwar eventuell aus mathematischer Sicht in die Funktionsgleichung eingesetzt werden könnten, es aber in diesem konkreten Fall nicht dürfen. Dies kann häufig mit dem Kontext zusammenhängen, in dem die Funktion eingebettet ist. Bei Flächenangaben oder Personenangaben ist es beispielsweise in der Regel nicht sinnvoll mit negativen Werten zu rechnen, sodass hier der Definitionsbereich auf die positiven reellen Zahlen mit 0 eingeschränkt werden könnte.  $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ .

## 2.2 Symmetrieeigenschaften

Grundsätzlich können zweidimensionale geometrische Objekte, und dazu zählen auch Funktionsgraphen, zwei verschiedene Symmetrieeigenschaften besitzen: Sie können achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch sein. Diese Achse beziehungsweise der Punkt sind im Falle einer Kurvendiskussion allerdings nicht willkürlich, sondern eindeutig festgelegt:

**Definition 2.2.1** (Symmetriarten).

*Der Graph einer Funktion kann entweder achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems oder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sein. Ist er beides nicht, so liegt keine Symmetrie vor.*

Für das allgemeine Kriterium für Symmetrie müssen wir uns überlegen, was es eigentlich bedeutet, dass ein Graph symmetrisch zur y-Achse oder dem Koordinatenursprung ist. Für die Achsensymmetrie betrachten wir die beiden Punkte A und A' in Abbildung 2.1. Wir sehen, dass die beiden Punkte gleich weit von der y-Achse entfernt sind; ihre x-Koordinaten sind bis auf das Vorzeichen gleich. Außerdem sehen wir, dass die beiden Punkte die selbe y-Koordinate besitzen. Wir leiten hieraus folgendes Kriterium ab:

**Definition 2.2.2** (Achsensymmetrie).

*Der Graph einer Funktion  $f$  ist genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn es zu jedem*

*Punkt A auf dem Graphen einen Gegenpunkt A' gibt, dessen x-Koordinate das gegenteilige Vorzeichen besitzt und dessen y-Koordinate identisch ist.*

$$f(-x) = f(x)$$

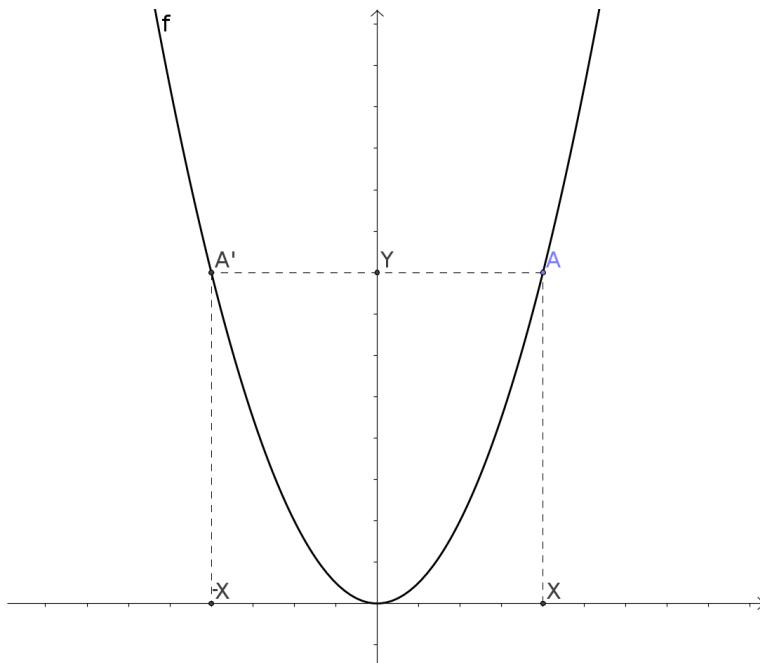


Abbildung 2.1: Achsensymmetrischer Funktionsgraph

Beim punktsymmetrischen Graphen (Abbildung 2.2) verhält es sich ähnlich, allerdings sind hier auch die y-Koordinaten der Punkte A und A' um das Vorzeichen verschieden:

**Definition 2.2.3 (Punktsymmetrie).**

*Der Graph einer Funktion f ist genau dann punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn es zu jedem Punkt A auf dem Graphen einen Gegenpunkt A' gibt, dessen Koordinaten jeweils das gegenteilige Vorzeichen besitzen.*

$$f(-x) = -f(x)$$

Da es sich bei Polynomen um Funktionen der Form  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  handelt, können wir ein Kriterium finden, welches auf den Exponenten der Funktion basiert. Wir machen uns hierbei zunutze, dass beim Potenzieren mit geraden Zahlen ein Vorzeichen stets wegfällt und beim Potenzieren mit ungeraden Zahlen stets erhalten bleibt:

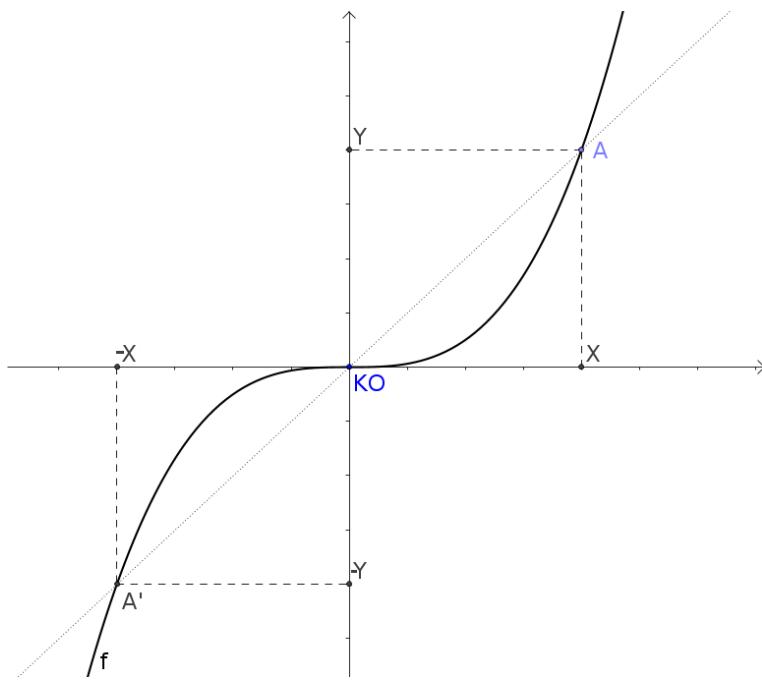


Abbildung 2.2: Punktsymmetrischer Funktionsgraph

**Kriterium 2.2.4** (Exponentenkriterium für Symmetrie).

Der Graph eines Polynoms ist genau dann achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, wenn alle Exponenten der Funktionsgleichung gerade sind (0 gerade) und genau dann punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn alle Exponenten ungerade sind. Sind die Exponenten gemischt, liegt keine Symmetrie vor.

**Satz 2.2.5.** Der Graph der Funktion  $f(x)=0$  ist als einziger sowohl punkt- als auch achsensymmetrisch.

*Beweis.* Es gilt  $f(-x) = 0 = f(x)$ . Die Funktion ist also nach Definition 2.2.2 achsensymmetrisch. Da aber gilt  $0 = -0$  ist ebenso  $f(-x) = 0 = -0 = -f(x)$  wahr, die Funktion ist also ebenfalls punktsymmetrisch. Da außer 0 keine reelle Zahl  $a$  die Gleichheit  $a = -a$  erfüllt, kann es keine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft geben.  $\square$

**Bemerkung 2.2.6.**

Es mag auf den ersten Blick nicht gleich einleuchten, wozu eine Symmetriebetrachtung bei Funktionsgraphen sinnvoll ist, allerdings sei dazu gesagt, dass sich sowohl bei achsen- als auch bei punktsymmetrischen Funktionen häufig bei den weiteren Rechenschritten Vereinfachungen einstellen, sodass sich der Aufwand später bezahlt machen kann.

## 2.3 Verhalten im Unendlichen

Als nächstes wollen wir untersuchen, wie sich Polynome an den „Rändern“ des Koordinatensystems, also für unendlich große positive und negative x-Werte, verhalten. Da Potenzfunktionen höheren Grades immer signifikant schneller wachsen als solche niedrigeren Grades, reicht es, für das Verhalten im Unendlichen den Leitterm heranzuziehen. Es gilt:

**Kriterium 2.3.1** (Verhalten im Unendlichen).

- Ist der Grad eines Polynoms gerade und der Leitkoeffizient positiv, so zeigen beide Äste des Graphen nach oben. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (2.3.1)$$

- Ist der Grad eines Polynoms gerade und der Leitkoeffizient negativ, so zeigen beide Äste des Graphen nach unten. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (2.3.2)$$

- Ist der Grad eines Polynoms ungerade und der Leitkoeffizient positiv, so zeigt der rechte Ast des Graphen nach oben, der linke Ast nach unten. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (2.3.3)$$

- Ist der Grad eines Polynoms ungerade und der Leitkoeffizient negativ, so zeigt der rechte Ast des Graphen nach unten, der linke Ast nach oben. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (2.3.4)$$

**Bemerkung 2.3.2.**

Das Zeichen  $\lim$  ist die Abkürzung für Limes, das lateinische Wort für Grenze. Es wird in der Mathematik immer dann benutzt, wenn eine konkrete Stelle aus verschiedenen Gründen nicht selbst betrachtet werden kann. Hier ist es der Funktionswert der Stelle „Unendlich“. Da wir  $f(\infty)$  nicht berechnen können, machen wir eine sogenannte Grenzwertbetrachtung.

## 2.4 Der y-Achsenabschnitt

Der y-Achsenabschnitt ist, wie Abbildung 2.3 zeigt, der Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der y-Achse. Da diese den x-Wert 0 besitzt, können wir den y-Achsenabschnitt leicht berechnen, indem wir 0 in die Funktionsgleichung einsetzen.

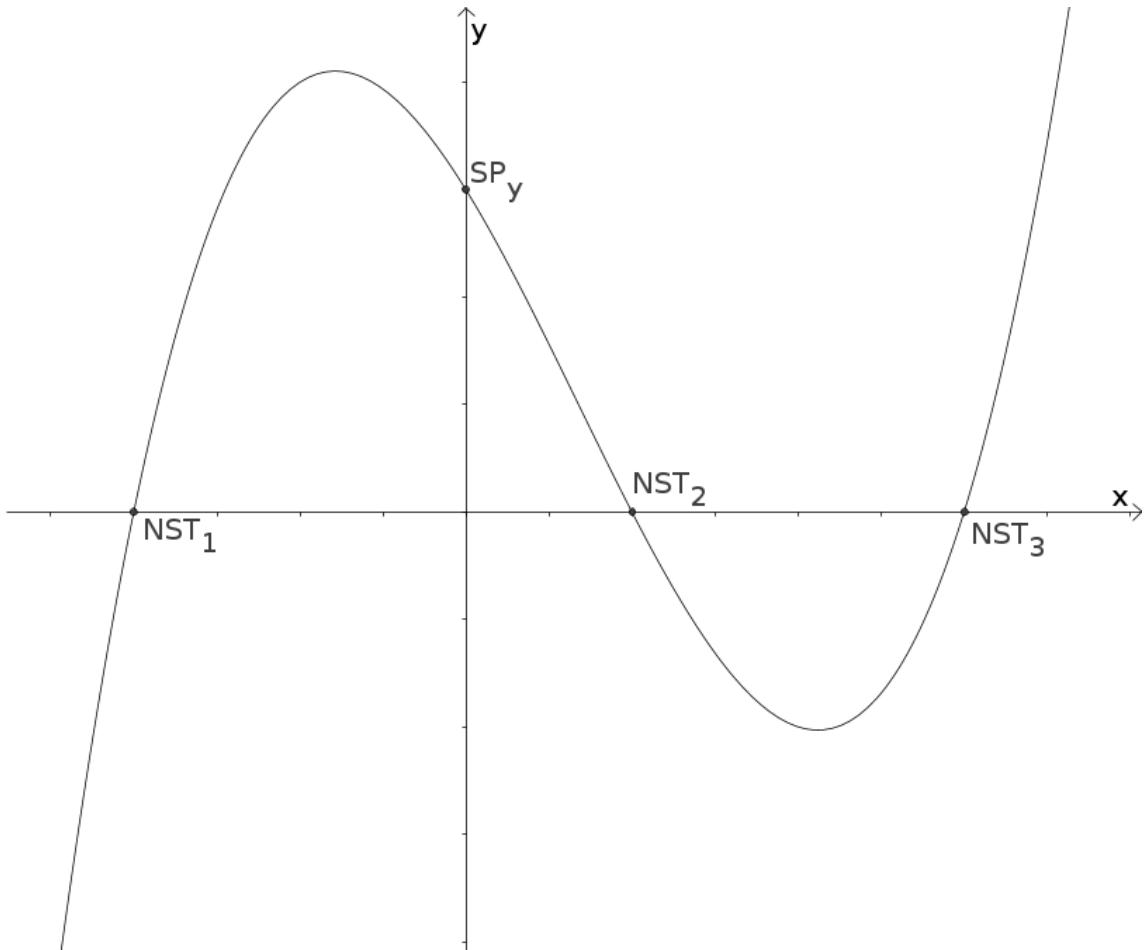


Abbildung 2.3: Achsenschnittpunkte eines Funktionsgraphen

**Beispiel 2.4.1** ( $f(x) = 5x^2 + 3x + 7$ ).

$$f(0) = 5 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 7 = 7$$

Der y-Achsenabschnitt beträgt also 7, der Schnittpunkt mit der y-Achse ist  $(0/7)$ .

**Satz 2.4.2.** Der y-Achsenabschnitt eines Polynoms ist stets identisch mit dessen Absolutterm.

*Beweis.* Als freiwillig Hausaufgabe. □

## 2.5 Nullstellen

Kommen wir nun zu einem der wichtigsten Aspekte der Kurvendiskussion: der Nullstellenberechnung. Es geht hierbei darum, die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse zu bestimmen (siehe Abbildung 2.3). Diese Punkte haben stets den Funktionswert (y-Koordinate) 0, daher der Name Nullstelle.

### 2.5.1 Grundsätzliches

Der Anfang jeder Nullstellenberechnung ist immer der selbe: Wir setzen in der Funktionsgleichung den Funktionswert 0. (Wir sprechen auch davon, die Funktion 0 zu setzen), da der Funktionswert identisch ist mit der y-Koordinate.

**Beispiel 2.5.1** (Nullsetzen).

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.5.1)$$

An dieser Stelle seien zwei Dinge angemerkt: Erstens kann in der auf diese Zeile folgende Rechnung der vordere Gleichungsteil „ $f(x) =$ “ weggelassen werden, die 0 hat ihn ersetzt. Zweitens bedeutet das  $\stackrel{!}{=}$  über dem Gleichheitszeichen, dass die folgende Rechnung zum Ziel hat, eine oder mehrere Lösungen zu finden, die diese Eigenschaft ( $f(x) = 0$ ) besitzt. Es ist also noch etwas zu tun, um das Problem aufzulösen.  $\stackrel{!}{=}$  wird mit „soll sein“ übersetzt. Wir wollen im Folgenden die fünf gängigsten Methoden besprechen und uns auch überlegen, wann sich welche Methode anbietet. Es kann nämlich durchaus häufig sein, dass mehrere Methoden zum Ziel führen, allerdings nicht immer gleich schnell und mit unterschiedlichem Rechenaufwand.

### 2.5.2 Termumformung

Die einfachste Methode ein Nullstellenproblem zu lösen ist mit Hilfe der Termumformung. Dies geht immer dann, wenn das Polynom nur aus dem Leitterm und dem Absolutterm besteht. Dann können wir mit den gleichen drei Schritten stets zum Ziel kommen, wobei nicht immer alle drei Schritte notwendig sein müssen):

1. den Absolutterm subtrahieren
2. durch den Leitkoeffizienten dividieren

3. die n-te Wurzel ziehen, wobei n der Grad des Polynoms ist

**Beispiel 2.5.2** ( $f_1(x) = 5x + 10$ ).

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 5x + 10 \stackrel{!}{=} 0 & | - 10 \\
 \Leftrightarrow 5x &= -10 & | : 5 \\
 \Leftrightarrow x &= -2 & \text{Wurzelziehen nicht nötig}
 \end{aligned}$$

**Beispiel 2.5.3** ( $f_2(x) = x^2 - 9$ ).

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= x^2 - 9 \stackrel{!}{=} 0 & | - (-9) \\
 (\Leftrightarrow x^2 &= 9 & | : 1) \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 9 & | \sqrt[2]{\phantom{x}} \\
 \Rightarrow x_{1/2} &= \pm 3
 \end{aligned}$$

### 2.5.3 p-q-Formel

Die p-q-Formel basiert auf der quadratischen Ergänzung und ist bereits aus der Mittelstufe bekannt. Wichtig ist hier, dass die p-q-Formel nur bei normierten Polynomen vom Grad 2 funktioniert. Das heißt der Grad muss genau 2 und der Leitkoeffizient muss 1 sein. Während die erste Einschränkung keinen Handlungsspielraum bietet, können wir das Normierungsproblem recht einfach lösen, indem wir zu Beginn der Rechnung nach dem Nullsetzen durch einen gegebenenfalls von 1 verschiedenen Leitkoeffizienten dividieren.

Ansonsten gilt die bekannte Formel für ein quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0,$$

also:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (2.5.2)$$

**Beispiel 2.5.4** (ohne Normierung,  $f_1(x) = x^2 + 3x - 10$ ).

$$f_1(x) = x^2 + 3x - 10 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10} \\ &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} \\ &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\ &= -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 &= -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \end{aligned}$$

**Beispiel 2.5.5** (mit Normierung,  $f_2(x) = 5x^2 - 20x + 15$ ).

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 5x^2 - 20x + 15 \stackrel{!}{=} 0 & | : 5 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 & | p-q\text{-Formel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\ x_{1/2} &= 2 \quad \pm \sqrt{1} \\ x_{1/2} &= 2 \quad \pm 1 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2 + 1 = 3$$

$$x_2 = 2 - 1 = 1$$

### 2.5.4 Ausklammern

Beim Ausklammern machen wir uns den *Satz vom Nullprodukt* zunutze, der besagt, dass ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist. Das heißt, wenn es uns gelingt, ein Polynom in zwei oder mehr Faktoren zu zerlegen, so können wir diese für die Nullstellenuntersuchung einzeln betrachten.

Ausklammern funktioniert immer dann, wenn eine Funktionsgleichung keinen Absolutterm besitzt, da dann in jedem Funktionsterm eine Potenz von  $x$  auftritt. Wir klammern dann die höchstmögliche Potenz von  $x$  aus der gesamten Funktionsgleichung aus. Dies führt direkt zu der Information, dass eine der Nullstellen (oder mehrere, wenn die größtmögliche ausklammbare Potenz größer als 1 ist) 0 sein muss. Die weiteren Nullstellen finden wir dann mit einem der anderen Verfahren.

**Beispiel 2.5.6** ( $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 32x$ ).

$$\begin{aligned} f_1(x) = & x^3 + 4x^2 - 32x \stackrel{!}{=} 0 & | \text{ ausklammern} \\ & x \cdot (x^2 + 4x - 32) = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

$x_2$  und  $x_3$  finden wir, indem wir auf den Klammerterm die p-q-Formel anwenden:

$$x_2 = -8, \quad x_3 = 4$$

**Beispiel 2.5.7** ( $f_2(x) = x^3 + 5x^2$ ).

$$\begin{aligned} f_2(x) = & x^3 + 5x^2 \stackrel{!}{=} 0 & | \text{ } x^2 \text{ ausklammern} \\ & x^2 \cdot (x + 5) = 0 & \Rightarrow x_{1/2} = 0 \end{aligned}$$

Termumformung:  $x_3 = -5$

### 2.5.5 Substitution

Beim Substitutionsverfahren ersetzen (Substituieren<sup>1</sup>) wir in einer Funktionsgleichung Potenzterme, um die Funktionsgleichung dadurch so zu vereinfachen, dass wir ein bekanntes Verfahren, etwa die p-q-Formel anwenden können. Wichtig ist, dass die Lösungen, die wir da-

<sup>1</sup>von spätlateinisch substituere ‚ersetzen‘

bei zunächst erhalten, noch nicht die Nullstellen des Polynoms sind. Diese finden wir, indem wir die Ersetzung wieder umkehren (Resubstitution).

Im folgenden Beispiel (und in so ziemlich allen in der Schule denkbaren Fällen) ersetzen wir in einer achsensymmetrischen Funktion vierten Grades  $x^2$  durch  $z$  und damit den Leitterm  $a_4x^4$  durch  $a_4z^2$  und den Term  $a_2x^2$  durch  $a_2z$ . Nun können wir die quadratische Gleichung in  $z$  mit Hilfe der p-q-Formel lösen. Anschließend finden wir die gesuchten Nullstellen durch Wurzelziehen aus den Lösungen der p-q-Formel (Positive und negative Lösungen beachten!).

**Beispiel 2.5.8** ( $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ ).

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^4 - 8x^2 + 7 & \stackrel{!}{=} 0 & \left| \text{substitution durch } z = x^2 \right. \\
 f(z) &= z^2 - 8z + 7 & \stackrel{!}{=} 0 & \left| \text{wende die p-q-Formel an} \right. \\
 z_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 7} \\
 &= 4 \pm \sqrt{9} \\
 &= 4 \pm 3 \\
 z_1 &= 7 & \left| \text{resubstituieren durch } x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} \right. \\
 z_2 &= 1 & \left| \text{resubstituieren durch } x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2} \right. \\
 x_1 &= \sqrt{7} \approx 2,65 \\
 x_2 &= -\sqrt{7} \approx -2,65 \\
 x_3 &= \sqrt{1} = 1 \\
 x_4 &= -\sqrt{1} = -1
 \end{aligned}$$

### 2.5.6 Linearfaktorzerlegung und Polynomdivision

Funktionsgleichungen und Nullstellen hängen eng zusammen. Enger als beispielsweise die Gleichung und das Verhalten im Unendlichen. Sind die Nullstellen einer Funktion bekannt, so ist ihre Gleichung annähernd eindeutig festgelegt. Lediglich der als Streckfaktor fungierende Leitkoeffizient kann hier noch für Variation sorgen, indem er die Funktion spiegelt, streckt oder staucht. Um den Zusammenhang von Gleichung und Nullstellen zu verdeutlichen benötigen

wir den Begriff der Linearfaktorzerlegung. Diese besagt, dass wir, wenn wir alle Nullstellen einer Funktion kennen, die Funktionsgleichung in ein Produkt von Faktoren zerlegen können, welche die Nullstellen repräsentieren.

**Definition 2.5.9** (Linearfaktordarstellung).

Sei  $f$  ein Polynom vom Grad  $n$ ,  $a_n$  sei der Leitkoeffizient und  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seien die Nullstellen von  $f$ . Dann können wir die Funktionsgleichung von  $f$  schreiben als

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

und nennen dies die Linearfaktordarstellung von  $f$ . Die einzelnen Terme  $(x - x_i)$  nennen wir Linearfaktoren.

Für quadratische Gleichungen kennen wir mit der p-q-Formel ein geschlossenes Lösungsverfahren zum Auflösen. Ein solches Lösungsverfahren existiert zwar auch für kubische Gleichungen, allerdings ist es so aufwändig, dass wir in der Regel einen einfacheren Weg bevorzugen: Die sogenannte Polynomdivision. Diese basiert wie schon das Ausklammern auf dem *Satz vom Nullprodukt*. Allerdings zerlegen wir hier das Ausgangspolynom nicht, indem wir eine Potenz von  $x$  ausklammern, sondern, indem wir den Linearfaktor einer bereits bekannten Nullstelle herausdividieren.

**Beispiel 2.5.10** ( $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ).

Angenommen, wir würden zu einem Polynom bereits alle Nullstellen kennen. In diesem Beispiel sind es  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  und  $x_3 = 3$ . Dann können wir das Polynom in seiner Linearfaktordarstellung schreiben:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Dividieren wir nun diese Gleichung durch einen der Linearfaktoren, etwa  $(x - 1)$ , so erhalten wir eine interessante Erkenntnis: Das Ergebnis der Division ist nämlich eine quadratische

Gleichung:

$$\begin{array}{lcl}
 x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & = (x-1)(x-2)(x-3) & | : (x-1) \\
 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = (x-2)(x-3) & & | ausmultiplizieren \\
 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 & & 
 \end{array}$$

Ähnlich wie beim Ausklammern finden wir also eine Zerlegung von  $f$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1) \cdot \tilde{f}$$

wobei nun beim Berechnen der Nullstellen wieder die beiden Faktoren einzeln betrachtet werden können. Mit anderen Worten: Gelingt es uns, den Linearfaktor einer bereits bekannten Nullstelle aus einem Polynom herauszudividieren, so können die übrigen Nullstellen berechnet werden, indem der verbleibende Quotient  $\tilde{f}$  (gegebenenfalls mit erneuter Polynomdivision, oder einem anderen der fünf Verfahren) aufgelöst wird.

Dies führt natürlich dazu, dass wir erst einmal eine Nullstelle finden oder *raten* müssen. Hierbei hilft uns das Lemma von Gauß, welches besagt, dass für jede rationale Nullstelle eines ganzzahligen Polynoms gilt, dass ihr Zähler das Absolutglied und ihr Nenner den Leitkoeffizienten des Polynoms teilen müssen.

**Kriterium 2.5.11** (Lemma von Gauss).

Sei  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit ganzzahligen Koeffizienten  $a_i$  und  $x_0 = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$  teilerfremd) eine rationale Nullstelle von  $f$ , dann ist  $a_0$  durch  $p$  teilbar und  $a_n$  durch  $q$  teilbar.

Wir können uns beim Suchen der Nullstellen also auf solche Brüche (liebe Schülerinnen und Schüler, natürliche und ganze Zahlen sind auch Brüche, solche mit Nenner 1!) beschränken, deren Nenner den Leitkoeffizienten und deren Zähler den Absolutterm teilen.

**Beispiel 2.5.12** (Nullstellen raten,  $f(x) = 25x^3 - 75x^2 + 54x - 8$ ).

Die Teiler von  $a_0 = -8$  sind  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$  und  $\pm 8$ ; die Teiler von  $a_n = 25$  sind  $\pm 1, \pm 5$  und  $\pm 25$ . Die möglichen rationalen Nullstellen von  $f$  sind also

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{8}{5}, \pm \frac{1}{25}, \pm \frac{2}{25}, \pm \frac{4}{25} \text{ und } \pm \frac{8}{25}.$$

was die ansonsten unendlich große Auswahl schon erheblich einschränkt. Tatsächlich sind die Nullstellen von  $f$  wie man nun leicht<sup>2</sup> nachrechnet  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \frac{1}{5}$  und  $x_3 = \frac{4}{5}$ .

Nachdem wir sie nun ausreichend umkreist haben, kommen wir zur tatsächlichen Ausführung der Polynomdivision. Hierbei wird im Prinzip wie bei der schriftlichen Division von zwei Zahlen vorgeganen. Wir beginnen beim Leitterm und dividieren diesen durch das erste Element des Linearfaktors, in der Regel  $x$ . Das Ergebnis notieren wir als ersten Ergebnisteil hinter dem  $=$ . Anschließend multiplizieren wir dieses Zwischenergebnis mit dem gesamten Linearfaktor und schreiben das Produkt unter das Polynom. Wie beim schriftlichen Dividieren ziehen wir nun dieses Produkt vom Polynom ab. Das weitere Vorgehen zeigt Beispiel 2.5.13:

**Beispiel 2.5.13** (Polynomdivision,  $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ ,  $x_1 = 1$ ).

$$\begin{array}{r}
 \left( \begin{array}{r} x^3 + 4x^2 + x - 6 \end{array} \right) : \left( \begin{array}{r} x - 1 \end{array} \right) = x^2 + 5x + 6 \\
 \begin{array}{r} - x^3 + x^2 \\ \hline 5x^2 + x \end{array} \\
 \begin{array}{r} - 5x^2 + 5x \\ \hline 6x - 6 \end{array} \\
 \begin{array}{r} - 6x + 6 \\ \hline 0 \end{array} \\
 \Rightarrow \tilde{f} = x^2 + 5x + 6
 \end{array}$$

Nach der Polynomdivision ist in der Regel noch eines der anderen Verfahren zum Auffinden der übrigen Nullstellen aus dem Quotienten der Division nötig. In obigem Beispiel etwa finden wir mit Hilfe der p-q-Formel aus dem Quotienten  $\tilde{f} = x^2 + 5x + 6$  die Nullstellen  $x_2 = -2$  und  $x_3 = -3$ .

---

<sup>2</sup>leicht heißt in diesem Fall nicht notwendigerweise schnell

## 2.6 Ableitungsregeln

Das Ableiten von Polynomen basiert auf drei grundlegenden Regeln:

- der **Summenregel**, die besagt, dass die Ableitung einer Summe gleich der Summe der Einzelableitungen ist.

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) \quad (2.6.1)$$

- der **Potenzregel**, die besagt, dass eine Potenz abgeleitet wird, indem man den Term mit dem Exponenten multipliziert und diesen dann um 1 verringert.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (2.6.2)$$

- der **Faktorregel**, die besagt, dass konstante Faktoren beim Ableiten erhalten bleiben.

$$f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x) \quad (2.6.3)$$

Darüber hinaus gibt es noch zwei Sonderfälle, die wir besprechen müssen, nämlich  $x^1$  und  $x^0$ . Bei linearen Funktionstermen, also solchen der Form  $a_1x^1$  gilt aufgrund der Potenz- und der Faktorregel, dass der variable Teil beim Ableiten wegfällt, der Koeffizient aber erhalten bleibt. Konstante Funktionsterme der Form  $a_0x^0$  fallen beim Ableiten weg.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1x = a_1x^1 \\ \Rightarrow f'(x) &= 1 \cdot a_1x^{1-1} = 1 \cdot a_1x^0 = a_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 = a_0 x^0 \\ \Rightarrow f'(x) &= 0 \cdot a_0 x^{0-1} = 0 \cdot a_1 x^{-1} = 0 \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.6.1** ( $f(x) = 5x^3 + 7x^2 + 3x - 4$ ).

Beim Ableiten eines Polynoms gehen wir also Termweise vor und leiten jeden Funktionsterm ab, indem wir den Koeffizienten mit dem Exponenten multiplizieren und diesen anschließend um 1 verringern:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 + 7x^2 + 3x - 4 \\ \Rightarrow f'(x) &= 3 \cdot 5x^2 + 2 \cdot 7x^1 + 1 \cdot 3x^0 - 0 \cdot 4 \\ &= 15x^2 + 14x + 3 \end{aligned}$$

Zusätzlich zu den drei Grundregeln gibt es noch drei weitere Ableitungsregeln, welche die Verknüpfung von Funktionen sowie Multiplikationen und Divisionen betreffen:

- Die **Kettenregel**

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) \quad (2.6.4)$$

- Die **Produktregel**

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \quad (2.6.5)$$

- Die **Quotientenregel**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2} \quad (2.6.6)$$

**Beispiel 2.6.2** (Kettenregel,  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x}$ ).

Die innere Funktion ist ein Polynom vom Grad 2, das nach den Regeln (2.6.1) - (2.6.3) abgeleitet wird. Die äußere Funktion ist eine Wurzel, die wir umschreiben können:  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ .

Nach Regel (2.6.4) gilt dann für  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 5x)' \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 5x)^{\frac{1}{2}-1} \\ &= (4x + 5) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 5x)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**Beispiel 2.6.3** (Produktregel,  $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^3 + 1)$ ).

Da beide Funktionen im Produkt Polynome sind, können wir diese nach den Regeln (2.6.1) - (2.6.3) ableiten und nach Regel (2.6.5) verknüpfen:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4) \cdot (x^3 + 1) \\ \Rightarrow f'(x) &= (x^2 - 4)' \cdot (x^3 + 1) + (x^2 - 4) \cdot (x^3 + 1)' \\ &= 2x \cdot (x^3 + 1) + (x^2 - 4) \cdot 3x \\ &= 2x^4 + 2x + 3x^3 - 12x \\ &= 2x^4 + 3x^3 - 10x \end{aligned}$$

**Beispiel 2.6.4** (Quotientenregel,  $f(x) = \frac{x^2}{1+3x}$ ).

Da beide Funktionen im Produkt Polynome sind, können wir diese nach den Regeln (2.6.1) - (2.6.3) ableiten und nach Regel (2.6.6) verknüpfen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^2}{1+3x} \\
 \Rightarrow f'(x) &= \frac{(x^2)' \cdot (1+3x) - (x^2) \cdot (1+3x)'}{(1+3x)^2} \\
 &= \frac{2x \cdot (1+3x) - x^2 \cdot 3}{(1+3x)^2} \\
 &= \frac{x^3 + 2x}{(1+3x)^2}
 \end{aligned}$$

**Definition 2.6.5** (Höhere Ableitungen).

Leiten wir die Ableitung von  $f$  erneut ab, so erhalten wir die zweite (dritte, vierte, ...) Ableitung von  $f$  und nennen diese  $f''$  ( $f'''$   $f^{(4)}$ , ...).

**Satz 2.6.6.**

Sei  $f$  ein Polynom vom Grad  $n$ . Dann ist der Grad der Ableitung von  $f$  stets  $n-1$ .

*Beweis.* Als freiwillige Hausaufgabe. □

## 2.7 Extrempunkte

**Definition 2.7.1** (Lokale Extrema).

Einen Punkt auf einem Funktionsgraphen, um den in einer gewissen Umgebung herum die Funktion keine höheren Funktionswerte annimmt, nennen wir *lokalen Hochpunkt* und schreiben *HP*. (siehe Abbildung 2.4) Einen Punkt auf einem Funktionsgraphen, um den in einer gewissen Umgebung herum die Funktion keine niedrigeren Funktionswerte annimmt, nennen wir *lokalen Tiefpunkt* und schreiben *TP*. *Lokale Hoch-* beziehungsweise *Tiefpunkte* nennen wir *allgemein lokale Extrema*. Die  $x$ -Koordinate eines lokalen Extremums nennen wir *Extremstelle*  $x_E$ .

Wir wollen nun herleiten, wie wir diese interessanten Punkte eines Funktionsgraphen finden können und was es generell mit dem Steigungsverhalten einer Funktion auf sich hat. Hierzu benötigen wir zunächst einige etwas allgemeinere Sätze und Definitionen.

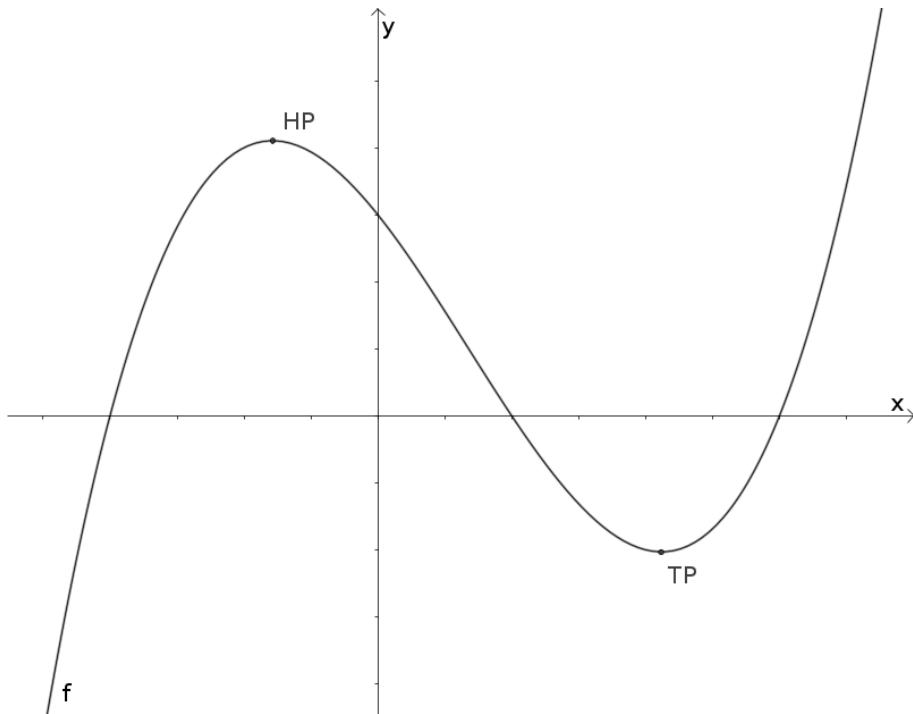


Abbildung 2.4: Hoch- und Tiefpunkt eines Funktionsgraphen

**Definition 2.7.2.**

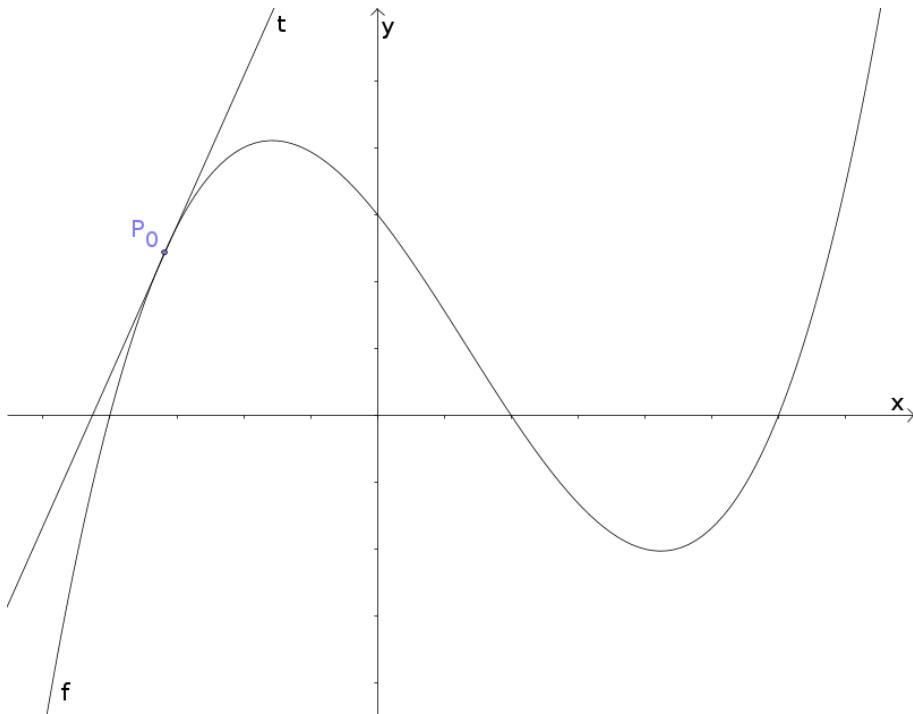
*Eine Gerade, die ein geometrisches Objekt  $G$  (z.B. einen Funktionsgraphen) in einem Punkt  $P$  berührt, nennen wir Tangente von  $G$  in  $P$ . Eine Gerade, die ein geometrisches Objekt schneidet, nennen wir Sekante.*

Anders als bei linearen Funktionen, die an jeder Stelle die gleiche Steigung haben, ist die Steigung bei allgemeinen Polynomen an jeder Stelle anders. Wir können es mit dem folgenden Satz greifbar machen:

**Satz 2.7.3.**

*Sei wie in Abbildung 2.5  $P_0$  ein Punkt auf dem Graphen von  $f$  und  $t$  eine Tangente an den Graphen mit der Steigung  $m_t$ . Dann besitzt der Graph von  $f$  in  $P_0$  ebenfalls die Steigung  $m_t$ .*

Wie wir in Abbildung 2.6 sehen können, gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Steigungsverhalten von  $f$  und den Funktionswerten des Ableitungsgraphen.

Abbildung 2.5: Tangente an  $f$  in  $P_0$ 

**Kriterium 2.7.4** (Steigungsverhalten einer Funktion).

*Der Graph einer Funktion  $f$  steigt in den Bereichen, in denen die Ableitung positive Funktionswerte besitzt und er fällt in den Bereichen, in denen die Ableitung negative Funktionswerte besitzt.*

$$\text{Der Graph von } f \begin{cases} \text{steigt,} & \text{wenn } f' > 0 \\ \text{fällt,} & \text{wenn } f' < 0 \end{cases}$$

Da der Funktionsgraph in einem Extremum weder steigt noch fällt folgt mit Kriterium 2.7.4:

**Satz 2.7.5.**

*Lokale Extrema bestizen die Steigung 0.*

**Definition 2.7.6.**

*Die Ableitung  $f'$  von  $f$  gibt zu jeder Stelle  $x$  die Steigung von  $f$  in  $x$  an. Wir sprechen daher von der Ableitung auch als Steigungsfunktion von  $f$ .*

Wir können die vorangegangenen Informationen zu folgender Aussage zusammenfassen:

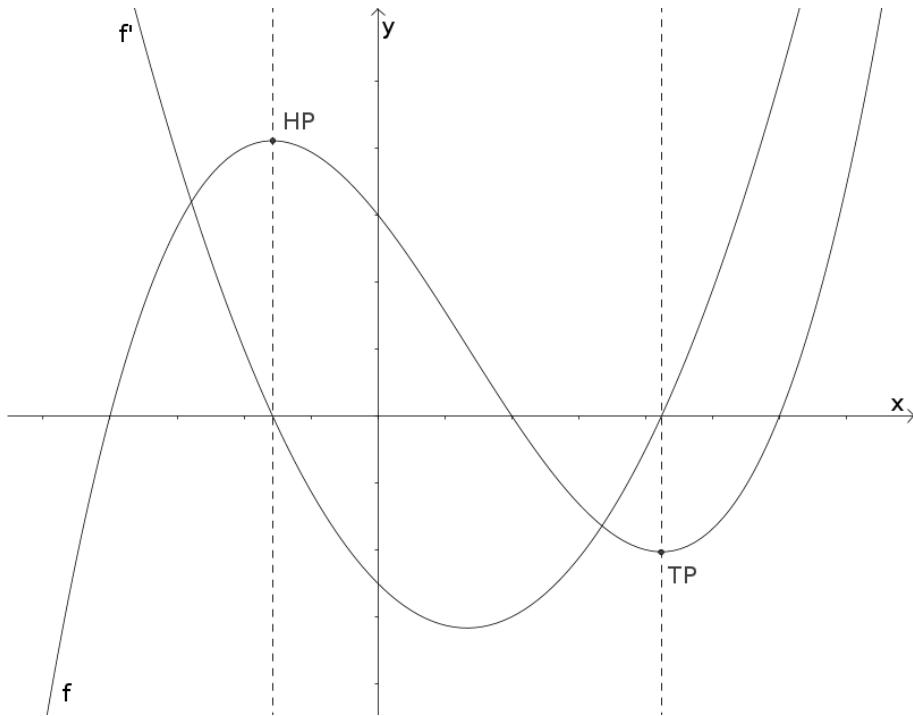


Abbildung 2.6: Funktionsgraph und Ableitungsgraph

**Satz 2.7.7** (Auffinden von lokalen Extrema).

Die Extremstellen von  $f$  sind, wie Abbildung 2.6 zeigt, stets Nullstellen von  $f'$ .

**Bemerkung 2.7.8.**

Diese Aussage gilt, wie wir sehen werden, nicht notwendigerweise umgekehrt. Nullstellen von  $f'$  sind also nicht immer Extremstellen von  $f$ .

**Beispiel 2.7.9** ( $f(x) = x^3$ ).

Die Ableitung der Funktion  $f(x) = x^3$  besitzt zwar bei  $x_0 = 0$  eine Nullstelle, allerdings ist diese Stelle, wie man leicht nachrechnet, kein Extremum, da es in der näheren Umgebung sowohl höhere als auch niedrigere Funktionswerte gibt.

Wir müssen unser Kriterium also erweitern, um Eindeutigkeit zu erhalten.

**Kriterium 2.7.10** (Notwendige Bedingung für lokale Extrema).

Sei  $f$  eine Funktion und  $f'$  ihre erste Ableitung. Die notwendige Bedingung dafür, dass  $f$  bei  $x_E$  ein lokales Extremum besitzt, lautet

$$f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.7.1)$$

(vergleiche Abbildung 2.6)

**Kriterium 2.7.11** (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema).

Sei  $f$  eine Funktion,  $f'$  und  $f''$  ihre ersten beiden Ableitungen und  $x_E$  eine Nullstelle von  $f'$ .

Genau dann besitzt  $f$  bei  $x_E$  ein Extremum, wenn entweder gilt, dass

$$f''(x_E) \neq 0 \quad (\text{Ableitungskriterium}) \quad (2.7.2)$$

oder

$$f' \text{ ändert in } x_E \text{ das Vorzeichen} \quad (\text{Vorzeichenwechselkriterium}) \quad (2.7.3)$$

Siehe hierzu Abbildung 2.7.

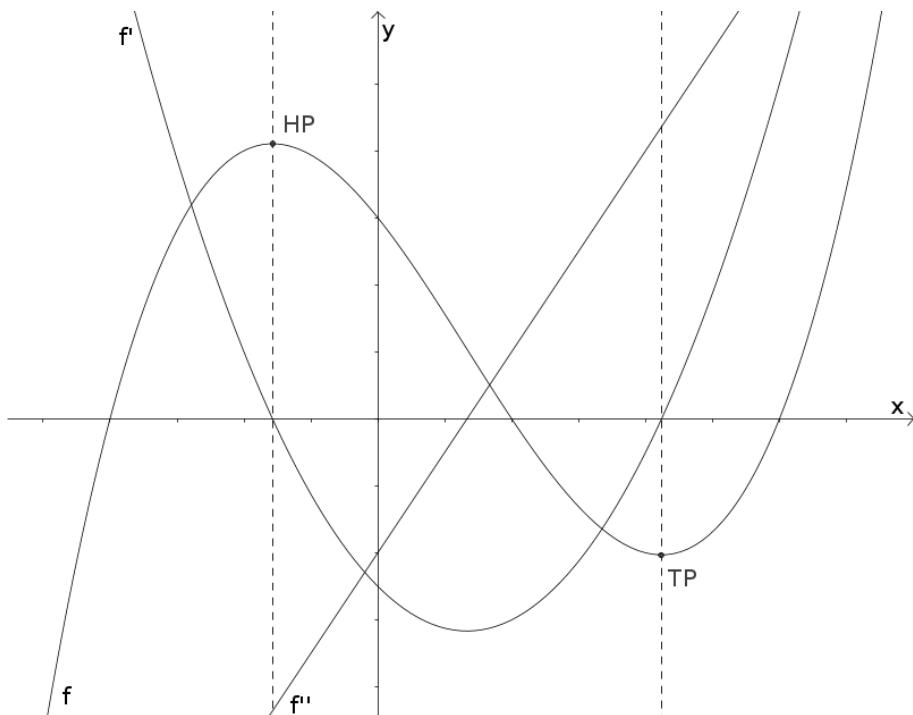


Abbildung 2.7: Funktionsgraph, erster und zweiter Ableitungsgraph

Aus diesen beiden Kriterien geht allerdings bisher noch nicht hervor, um welche Art von Extremum (also Hoch- oder Tiefpunkt) es sich handelt. Darum erweitern wir Kriterium 2.7.11 noch um eine weitere Komponente. In Abbildung 2.7 sehen wir, dass an der Stelle  $x_{HP}$  des lokalen Höchpunktes die zweite Ableitung einen negativen Wert besitzt und der Graph der ersten Ableitung die x-Achse von oben schneidet. An der Stelle  $x_{TP}$  des lokalen Tiefpunktes ist es genau umgekehrt, die zweite Ableitung besitzt einen positiven Wert und der Graph der ersten Ableitung schneidet die x-Achse von unten. Zusammengefasst:

**Kriterium 2.7.12** (Art der Extrema).

Sei  $f$  eine Funktion,  $f'$  und  $f''$  ihre ersten beiden Ableitungen und  $x_E$  eine Extremstelle von  $f$ . Dann gilt

$$f \text{ besitzt in } x_E \text{ einen } \begin{cases} \text{lokalen Hochpunkt,} \\ \text{lokalen Tiefpunkt,} \end{cases} \quad \text{wenn } \begin{cases} f''(x_E) < 0 \\ f''(x_E) > 0 \end{cases} . \quad (2.7.4)$$

(Alternativ gilt, dass  $f$  in  $x_E$  einen lokalen Hochpunkt besitzt, wenn das Vorzeichen von  $f'$  in  $x_E$  von „Plus“ nach „Minus“ wechselt beziehungsweise umgekehrt für lokale Tiefpunkte.)

Den Umgang mit den oben genannten Kriterien wollen wir anhand von Beispielen verdeutlichen:

**Beispiel 2.7.13** (mit Ableitungskriterium,  $f(x) = x^3 - 3x^2$ ).

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

NB: Durch Ausklammern finden wir die Nullstellen von  $f'$ , diese sind  $x_{E_1} = 0$  und  $x_{E_2} = 2$ .

HB: Wir setzen diese möglichen Extremstellen nun in die zweite Ableitung ein und erhalten nach Gleichung (2.7.2) und (2.7.4)

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow TP \text{ bei } x = 0$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow HP \text{ bei } x = 2$$

Um die  $y$ -Koordinate der Extrempunkte zu bestimmen setzen wir die bestätigten Extremwerte nun noch in die Ausgangsfunktion  $f$  ein:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow TP(0|0)$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4 \Rightarrow HP(2|-4)$$

**Beispiel 2.7.14** (mit Vorzeichenwechselkriterium,  $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ).

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

*NB: Durch Ausklammern oder Anwendung der p-q-Formel finden wir die Nullstellen von  $f'$ , diese sind  $x_{E_1} = 0$  und  $x_{E_2} = 1$ .*

*HB: In  $x = 0$  verläuft die Ableitung  $f'$  vom positiven in den negativen Bereich. in  $x = 1$  ist es umgekehrt. Es liegt also bei beiden möglichen Extremstellen ein Vorzeichenwechsel der Ableitung vor, woraus mit Gleichung (2.7.3) folgt, dass es sich in beiden Fällen tatsächlich um Extremstellen handelt. Nach Kriterium 2.7.12 gilt, dass bei  $x = 0$  ein Hochpunkt und bei  $x = 1$  ein Tiefpunkt vorliegt.*

*Um die y-Koordinate der Extrempunkte zu bestimmen setzen wir die bestätigten Extremwerte nun noch in die Ausgangsfunktion  $f$  ein:*

$$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow HP(0|0)$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -4 \quad \Rightarrow TP(1|-1)$$

**Bemerkung 2.7.15** (Nutzung der Kriterien).

*In der Regel benutzen wir das Ableitungskriterium um Extremstellen zu finden und ihre Art zu bestimmen. Es besitzt gegenüber dem Vorzeichenwechselkriterium den Vorteil, dass wir bei Kurvendiskussionen die zweite Ableitung sowieso bestimmen müssen und uns dann etwas weniger Rechenaufwand zum Ziel führt. Allerdings gibt es Funktionen, bei denen das Ableitungskriterium versagt. Etwa die Funktion  $f(x) = x^4$ , die zwar bei  $x = 0$  einen lokalen Tiefpunkt hat, deren zweite Ableitung aber  $f''(x) = 12x^2$  ist und somit die hinreichende Bedingung  $f''(x_E) \neq 0$  nicht erfüllt. In diesen Fällen ist es nützlich, das Vorzeichenwechselkriterium zu kennen, das hier richtigerweise einen Tiefpunkt feststellt, um sich nicht in die Irre führen zu lassen.*

## 2.8 Wendepunkte und Sattelpunkte

Die Graphen von Funktionen zweiten oder höheren Grades weisen in der Regel ein erkennbares Krümmungsverhalten auf. Wir sprechen hierbei entweder von Linkskrümmung oder von Rechtskrümmung, wobei wir uns den Funktionsgraphen wie die Draufsicht einer Straße vorstellen können, deren Verlauf wir entlang der x-Achse von  $-\infty$  bis  $+\infty$  verfolgen.

**Definition 2.8.1.** *Diejenigen Punkte eines Funktionsgraphen, in denen sich das Krümmungsverhalten ändert (siehe Abbildung 2.8), nennen wir Wendepunkte WP.*

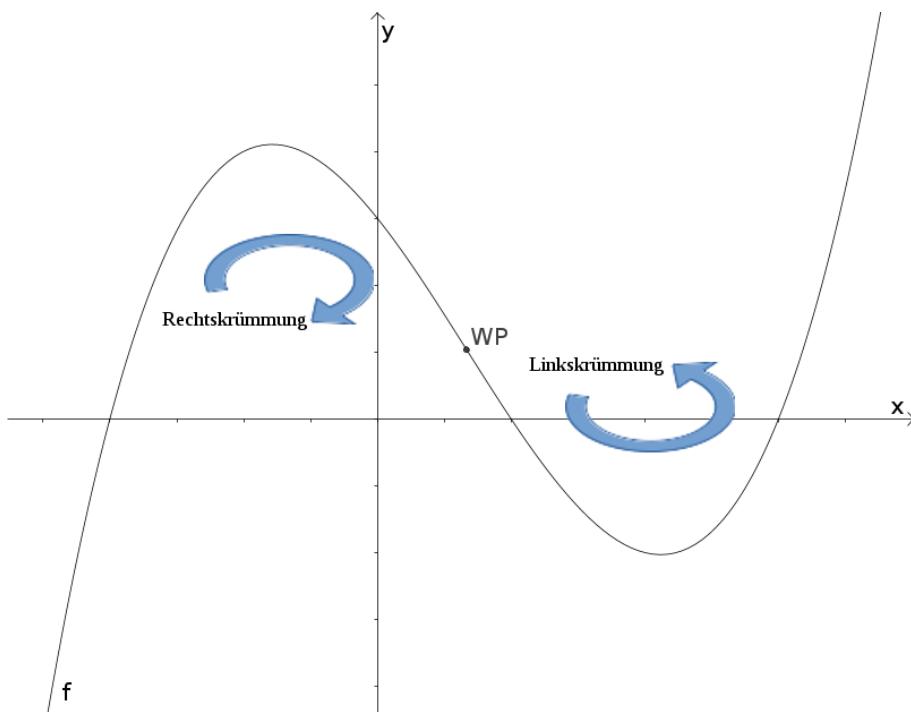


Abbildung 2.8: Wendepunkt eines Funktionsgraphen

Für das Auffinden von Wendepunkten gibt es ein Kriterium, das aus Gründen, die wir später noch erläutern werden, völlig analog zum Kriterium für Extrempunkte ist. Auch hier gibt es eine notwendige und eine hinreichende Bedingung und auch hier arbeiten wir mit den Ableitungen einer Funktion  $f$ . Allerdings findet unsere Argumentation eine Ableitungsebene höher statt, wir betrachten also die zweite und dritte Ableitung von  $f$ :

**Kriterium 2.8.2** (Notwendige Bedingung für Wendepunkte).

Sei  $f$  eine Funktion und  $f''$  ihre zweite Ableitung. Die notwendige Bedingung dafür, dass  $f$  bei  $x_W$  einen Wendepunkt besitzt, lautet

$$f''(x_W) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.8.1)$$

(vergleiche Abbildung 2.9)

**Kriterium 2.8.3** (Hinreichende Bedingung für Wendepunkte).

Sei  $f$  eine Funktion,  $f''$  und  $f'''$  ihre zweite und dritte Ableitung und  $x_W$  eine Nullstelle von  $f''$ . Genau dann besitzt  $f$  bei  $x_W$  einen Wendepunkt, wenn

$$f'''(x_W) \neq 0 \quad (2.8.2)$$

oder

$$f'' \text{ ändert in } x_W \text{ das Vorzeichen} \quad (\text{Vorzeichenwechselkriterium}) \quad (2.8.3)$$

(vergleiche Abbildung 2.9)

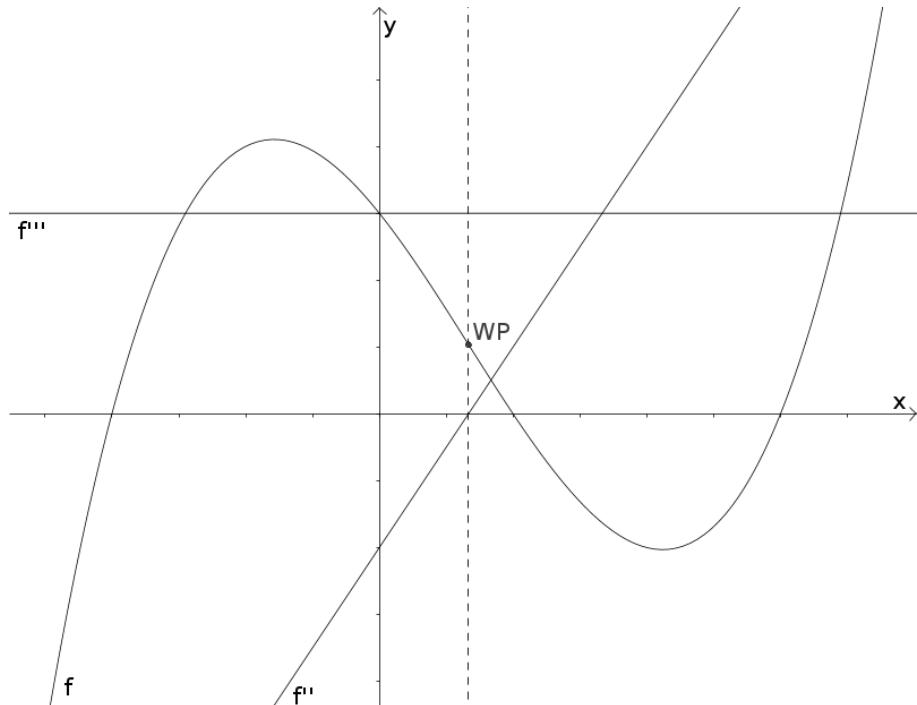


Abbildung 2.9: Wendepunkt eines Funktionsgraphen, mit  $f''$  und  $f'''$

Für einen weiteren Aspekt der Wendepunkte außer dem Wechsel des Krümmungsverhaltens und zur Erläuterung des gerade eingeführten Kriteriums betrachten wir zunächst Abbildung 2.10. Hier sehen wir nämlich, dass an der Stelle  $x_W$ , also der x-Koordinate des Wendepunktes, der Graph der ersten Ableitung eine Extremstelle besitzt. Dies ist kein Zufall! Da die zweite Ableitung der Funktion  $f$  logischerweise die erste Ableitung der Funktion  $f'$  ist, berechnen wir, wenn es um die Wendepunkte der Funktion  $f$  geht, immer auch die Extrempunkte der Funktion  $f'$  mit. **Beziehungsweise umgekehrt finden wir Wendepunkte, indem wir die Extrema der Ableitung von  $f$  bestimmen.** Dies führt zu folgender interessanter Überlegung:

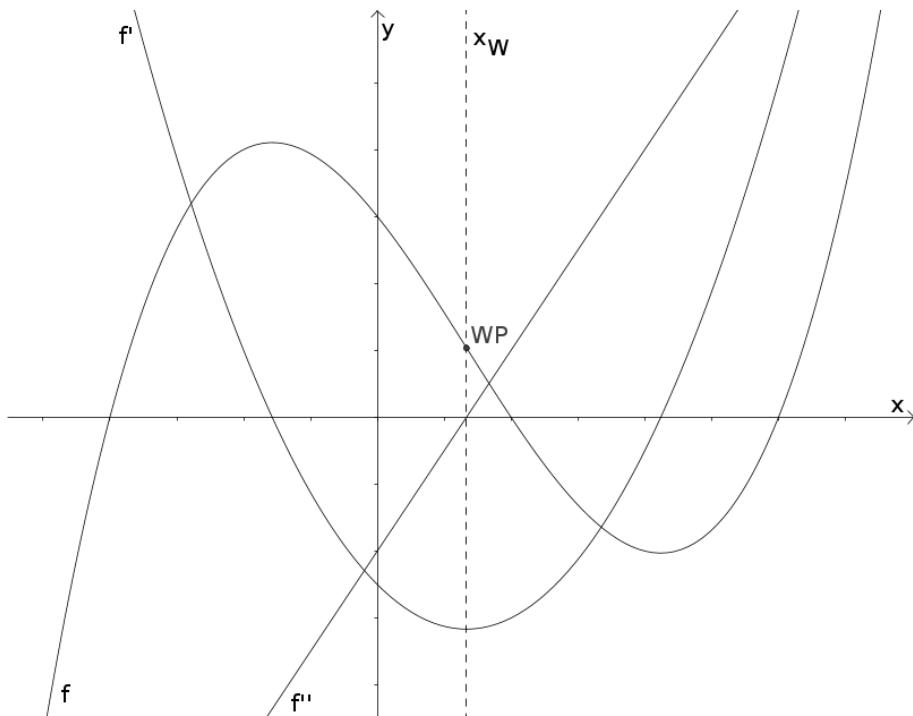


Abbildung 2.10: Wendepunkt als Extremum von  $f'$

**Bemerkung 2.8.4** (Wendepunkte als Stellen lokal stärkster Steigung).

Wir wissen aus Kapitel 2.4, dass uns die Ableitung einer Funktion  $f$  Informationen über die Steigung des Funktionsgraphen von  $f$  gibt. Wenn, wie wir gesehen haben, die Wendepunkte von  $f$  gleichzeitig die Extrempunkte von  $f'$  sind, so können wir die Wendepunkte auch als diejenigen Punkte auffassen, in denen das Steigungsverhalten von  $f$  (zumindest lokal) am stärksten steigend beziehungsweise am stärksten fallend ist. Wir bezeichnen die Wendepunkte (Wendestellen) daher auch als die Punkte (Stellen) lokal stärkster Steigung.

**Definition 2.8.5** (Wendetangente).

Sei  $f$  eine Funktion und  $WP$  ein Wendepunkt des Funktionsgraphen von  $f$ . Dann nennen wir die Tangente  $t_w$  an  $f$  in  $WP$  eine Wendetangente.

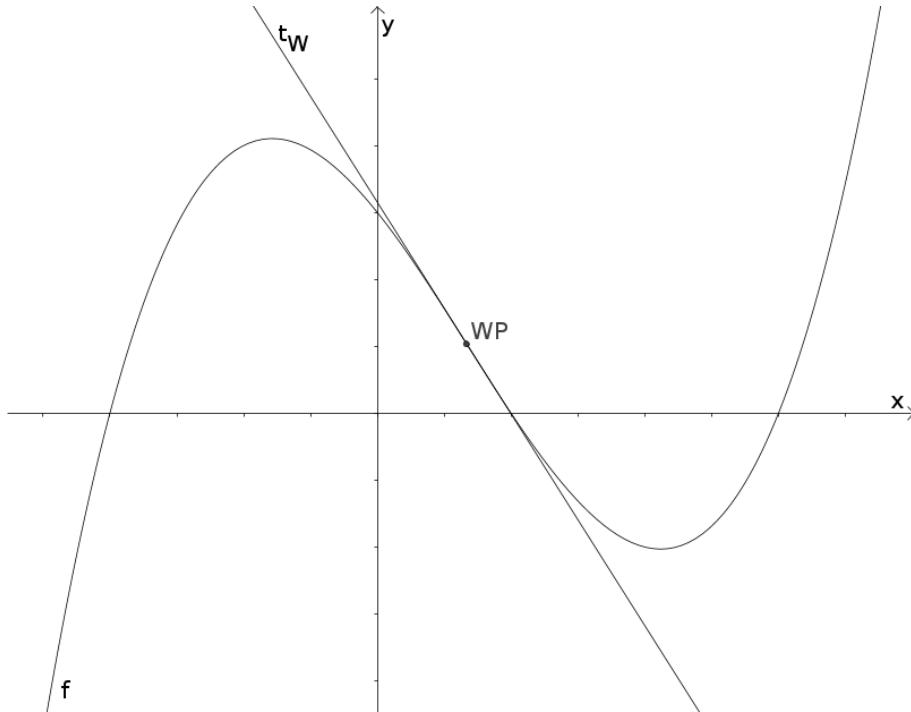


Abbildung 2.11: Wendepunkt mit Wendetangente  $t_w$

**Definition 2.8.6** (Sattelpunkte).

Wendepunkte mit waagerechter Wendetangente (siehe Abbildung 2.12) nennen wir Sattelpunkte.

Eine besondere Form der Wendepunkte sind die sogenannten Sattelpunkte. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie eine waagerechte Wendetangente besitzen, also, dass in diesen Punkten die Steigung des Funktionsgraphen 0 beträgt, obwohl sie keine Extrempunkte sind.<sup>3</sup> Sattelpunkte können also als eine Mischung aus Extremum und Wendepunkt aufgefasst werden. Sie erfüllen folgendes Kriterium:

<sup>3</sup>Es handelt sich in der Regel um Stellen, die beim Berechnen der Extremstellen bereits („unangenehm“) auffallen, da sie zwar die notwendige, nicht aber die hinreichende Bedingung für Extrema erfüllen.

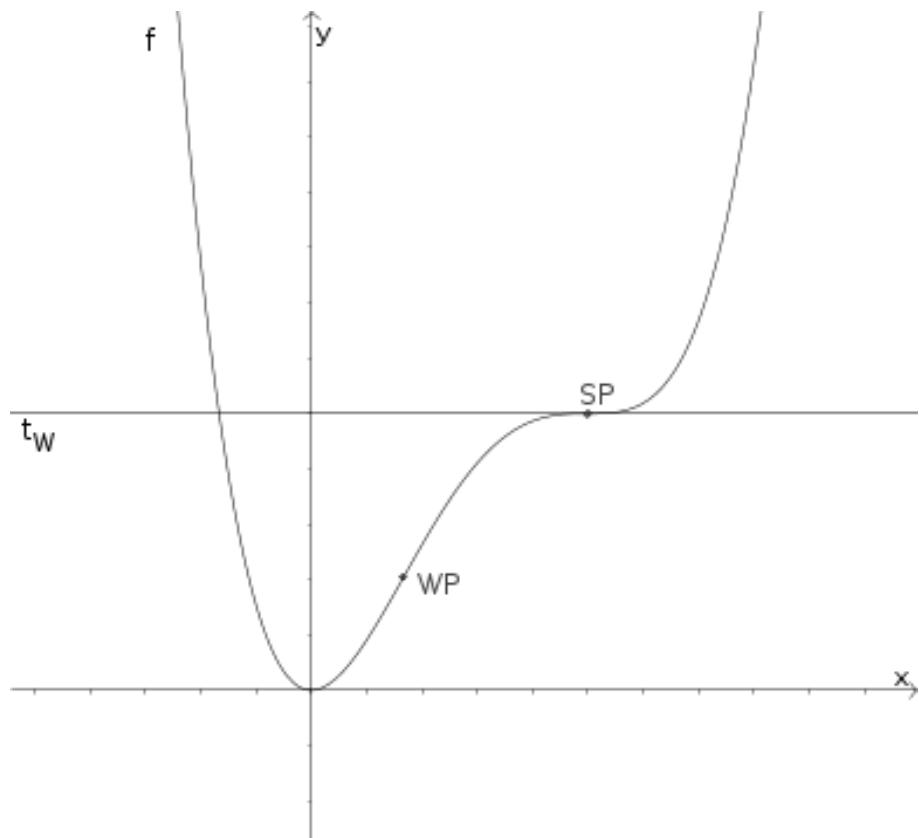


Abbildung 2.12: Funktionsgraph mit Wendepunkt und Sattelpunkt

**Kriterium 2.8.7** (Sattelpunkte).

Sei  $f$  eine Funktion und  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$  ihre ersten drei Ableitungen. Genau dann ist besitzt  $f$  bei  $x_S$  einen Sattelpunkt, wenn gilt:

$$f'(x_S) = 0, \quad f''(x_S) = 0, \quad f'''(x_S) \neq 0$$

**Beispiel 2.8.8** ( $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ ).

Zunächst berechnen wir die ersten drei Ableitungen von  $f$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 \\ f'(x) &= 12x^3 - 24x^2 + 12x \\ f''(x) &= 36x^2 - 48x + 12 \\ f'''(x) &= 72x - 48 \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für Wendepunkte (2.8.1) lautet  $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$ :

$$36x^2 - 48x + 12 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow x_{W_1} = 1, \quad x_{W_2} = \frac{1}{3}$$

Die hinreichende Bedingung für Wendepunkte (2.8.2) lautet  $f'''(x_W) \neq 0$ :

$$f'''(1) = 72 \cdot 1 - 48 = 24 \neq 0$$

$$f'''(\frac{1}{3}) = 72 \cdot \frac{1}{3} - 48 = -24 \neq 0$$

Bei einer früheren Extremstellenberechnung sollte uns bereits aufgefallen sein, dass ebenfalls  $f'(1) = 0$  ist. Es handelt sich hierbei also um eine Sattelstelle. Um die  $y$ -Koordinate der Wende-/Sattelpunkte zu bestimmen setzen wir die bestätigten Werte nun noch in die Ausgangsfunktion  $f$  ein:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 = 1 \quad \Rightarrow SP(1|1) \\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{27} \quad \Rightarrow WP\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{11}{27}\right) \end{aligned}$$

## 2.9 Schaubild

Zum Abschluss der Kurvendiskussion zeichnen wir alle gefundenen Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem ein und skizzieren der Verlauf des Graphen anhand der gefundenen charakteristischen Punkte. Sollten weitere Punkte für eine genaue Skizze nötig sein, legen wir eine Wertetabelle an. Dies ist meist aber nicht nötig.

**Beispiel 2.9.1** ( $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$ ).

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$SP_y (0|0)$$

$$N_1 (-2,5|0)$$

$$N_2 (-1|0)$$

$$N_{3/4} (0|0)$$

$$TP_1 (-2| -4)$$

$$TP_2 (0|0)$$

$$HP (-0, 625|0, 55)$$

$$WP_1(-1, 47| -2, 09)$$

$$WP_2(-0, 28|0, 25)$$

