上海大学
SHANGHAI UNIVERSITY

对偶理论
与灵敏度分析

本章内容

- 线性规划问题的对偶问题
- 对偶问题的基本性质
- 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

线性规划的对偶模型

- **对偶问题的现实来源**
- **设某工厂生产两种产品甲和乙，生产中需4种设备按A，B，C，D顺序加工，每件产品加工所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于下表：**

设备 / 产品	*A*	*B*	*C*	*D*	产品利润（元／件）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数（时）	12	8	16	12	

- **问：充分利用设备机时，工厂应生产甲和乙型产品各多少件才能获得最大利润?**

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

线性规划的对偶模型

- **解：设甲、乙型产品各生产x_1及x_2件，则数学模型为：**

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 反过来问：若厂长决定不生产甲和乙型产品，决定出租机器用于接受外加工，只收加工费，那么 4 种机器的每小时如何定价才是最佳决策?

线性规划的对偶模型

- **在市场竞争的时代，厂长的最佳决策显然应符合两条：**

① **不吃亏原则。**即机时定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。由此原则，便构成了新规划的不等式约束条件。

② **竞争性原则。**即在上述不吃亏原则下，尽量降低机时总收费，以便争取更多用户。

设备 产品	A	B	C	D	产品利润（元／件）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数（时）	12	8	16	12	

线性规划的对偶模型

- 设A、B、C、D设备的机时价分别为y_1、y_2、y_3、y_4，则新的线性规划数学模型为：

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

设备 / 产品	*A*	*B*	*C*	*D*	产品利润（元／件）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数（时）	12	8	16	12	

线性规划的对偶模型

- **原问题与对偶问题的对应关系**

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原问题

（对偶问题）

$$\min\ \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题

（原问题）

线性规划的对偶模型

- **（1）对称形式**

特点：目标函数求极大值时，所有约束条件为≤号，变量非负;目标函数求极小值时，所有约束条件为≥号，变量非负。

$$P: \max\ z = c^T x \qquad D: \min w = y^T b$$

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} A^T y \ge c \\ y \ge 0 \end{cases}$$

已知P，写出D

线性规划的对偶模型

- **例1 写出线性规划问题的对偶问题**

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **解：首先将原问题变形为对称形式**

$$\max z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq -2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 - 4x_2 - 6x_3 \leq -5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

对偶 →

$$\min w = -2y_1 + 3y_2 - 5y_3$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2 \\ -3y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -3 \\ 5y_1 + 7y_2 - 6y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

- **非对称型对偶问题**

若给出的线性规划不是对称形式，可以先化成对称形式再写对偶问题。

- **写出对称形式的对偶规划的要点**

① max变成 min

② 价值系数与右端向量互换

③ 系数矩阵转置

④ ≤ 变 ≥

- **原问题中约束条件的个数=对偶问题中变量的个数**
- **原问题中变量的个数=对偶问题中约束条件的个数**

线性规划的对偶模型

$$(P)\quad \begin{aligned} \max\ & c^T x \\ s.t.\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{对称形式}} \begin{aligned} \max\ & c^T x \\ s.t.\ & Ax \leq b \\ & -Ax \leq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{对偶}} \begin{aligned} \min\ & b^T u - b^T v \\ s.t.\ & A^T u - A^T v \geq c \\ & u, v \geq 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{令} w = u - v} (D)\ \boxed{\begin{aligned} \min\ & b^T w \\ s.t.\ & A^T w \geq c \\ & w\text{无约束} \end{aligned}}$$

线性规划的对偶模型

例2 $\max\ 5x_1+4x_2+3x_3$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3=4 \\
& 3x_1+2x_2+x_3=5 \\
& x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0
\end{aligned}
$$

对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 4w_1+5w_2 \\
\text{s.t.}\quad & w_1+3w_2\geq 5 \\
& w_1+2w_2\geq 4 \\
& w_1+w_2\geq 3
\end{aligned}
$$

w_1和w_2无约束

一般情形LP问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^T x \\
s.t.\quad & A_1 x \geq b_1 \\
& A_2 x = b_2 \\
& A_3 x \leq b_3 \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
\qquad \xrightarrow{\text{对 偶}}
$$

$$\text{where}\quad c \in R^n, b_i \in R^{m_i},$$

$$A_i \in R^{m_i \times n}, i = 1, 2, 3.$$

一般情形LP问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^T x \\
s.t.\quad & A_1 x \ge b_1 \\
& A_2 x = b_2 \\
& A_3 x \le b_3 \\
& x \ge 0,
\end{aligned}
$$

where $c \in R^n, b_i \in R^{m_i}$,

$A_i \in R^{m_i \times n}, i = 1, 2, 3.$

$$\xrightarrow{\quad\text{对 偶}\quad}$$

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^T x \\
s.t.\quad & -A_1 x \le -b_1 \\
& A_2 x \le b_2 \\
& -A_2 x \le -b_2 \\
& A_3 x \le b_3 \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

where $x_s \in R^{m_1}, x_t \in R^{m_3}$

are slack variables.

一般情形LP问题的对偶问题

$$\max\ c^T x$$
$$s.t.\quad -A_1 x \le -b_1$$
$$A_2 x \le b_2$$
$$-A_2 x \le -b_2$$
$$A_3 x \le b_3$$
$$x \ge 0$$

where $x_s \in R^{m_1}, x_t \in R^{m_3}$

are slack variables.

$$\min\ -b_1^T y_1 + b_2^T y_2 - b_2^T y_3 + b_3^T y_4$$
$$s.t.\quad -A_1^T y_1 + A_2^T y_2 - A_2^T y_3 + A_3^T y_4 \ge c$$
where $y_1, y_2, y_3, y_4 \ \ge 0$

$$\min\ b_1^T w_1 + b_2^T w_2 + b_3^T w_3$$
$$s.t.\quad A_1^T w_1 + A_2^T w_2 + A_3^T w_3 \ge c$$
where $w_1 \le 0, w_2$无约束$, w_3 \ \ge 0$

$$w_1 = -y_1, w_2 = y_2 - y_3, w_3 = y_4$$

一般情形LP问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^T x \\
s.t.\quad & A_1 x \geq b_1 \\
& A_2 x = b_2 \\
& A_3 x \leq b_3 \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{\text{对偶}} \quad
\boxed{
\begin{aligned}
& \min b_1^T w_1 + b_2^T w_2 + b_3^T w_3 \\
& s.t.\quad A_1^T w_1 + A_2^T w_2 + A_3^T w_3 \geq c \\
& \text{where } w_1 \leq 0, w_2 \text{无约束}, w_3 \ \geq 0
\end{aligned}
}
$$

where $c \in R^n, b_i \in R^{m_i},$

$A_i \in R^{m_i \times n}, i = 1, 2, 3.$

<table>
<tr><th colspan="2">原问题（或对偶问题）</th><th colspan="2">对偶问题（或原问题）</th></tr>
<tr><td colspan="2">约束条件右端项</td><td colspan="2">目标函数变量的系数</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数变量的系数</td><td colspan="2">约束条件右端项</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数 max</td><td colspan="2">目标函数 min</td></tr>
<tr><td rowspan="4">约束条件</td><td>m个</td><td>m个</td><td rowspan="4">变量</td></tr>
<tr><td>$\leq$</td><td>≥ 0</td></tr>
<tr><td>$\geq$</td><td>≤ 0</td></tr>
<tr><td>=</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td rowspan="4">变量</td><td>n个</td><td>n个</td><td rowspan="4">约束条件</td></tr>
<tr><td>≥ 0</td><td>$\geq$</td></tr>
<tr><td>≤ 0</td><td>$\leq$</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>=</td></tr>
</table>

$$\max \quad x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t.: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min \quad 2w_1 + w_2 + 2w_3$$

$$s.t. \begin{cases} w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1 \\ w_1 - w_2 + w_3 \leq 2 \\ -w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ w_1 \geq 0 \; w_2\text{无约束} \; w_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\min \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2\text{无约束}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\max \quad w_1 + 2w_2 + w_3$$

$$s.t. \begin{cases} w_1 + w_2 - w_3 \leq 2 \\ w_1 - w_2 + w_3 = 1 \\ 2w_1 + w_2 + w_3 \geq 2 \\ w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3\text{无约束} \end{cases}$$

单纯形法-回顾

- **一般线性规划求解过程**

$$(L)\quad\begin{cases}\max & f(x)=c^Tx\\ s.t. & Ax=b\\ & x\geq 0\end{cases}\qquad A_{m\times n},\ r(A)=m,\ b\geq 0$$

$$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

- **初始基本可行解**

设(L)有一个初始基 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m),\ A=(B,N)$

初始基本可行解为: $x^{(0)}=(B^{-1}b\ \ 0)^T\quad f(x^{(0)})=(c_B)^TB^{-1}b$

单纯形法-回顾

- **初始基本可行解**

设(L)有一个初始基 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m),\ A=(B,N)$

初始基本可行解为: $x^{(0)}=\begin{pmatrix}B^{-1}b & 0\end{pmatrix}^T$ $\quad f(x^{(0)})=(c_B)^T B^{-1}b$

设$x=\begin{pmatrix}x_B\\ x_N\end{pmatrix}$为任一可行解，由$Ax=b$得

$$z_j=(c_B)^T B^{-1}P_j$$

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$

$$\therefore f(x)=(c_B)^T x_B+(c_N)^T x_N=(c_B)^T\left(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N\right)+(c_N)^T x_N$$

$$=(c_B)^T B^{-1}b+\left((c_N)^T-(c_B)^T B^{-1}N\right)x_N$$

$$=f\left(x^{(0)}\right)+\sum_{j\in R}\left(c_j-z_j\right)^T x_j$$

R非基变量下标集

单纯形法-回顾

$$\max f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + \sum_{j\in R}\left(c_j - z_j\right)x_j$$ R非基变量下标集

$c_j - z_j$ ———————称为检验数或判别数。

（注：基变量的检验数 $=0$）

(1) 对任意的 $j \in R$，有 $c_j - z_j \le 0$，则 $x^{(0)}$ 为最优解。

(2) 存在 $j \in R$ 使得 $c_j - z_j > 0$. 令 $c_k - z_k = \max_{j\in R}\left\{c_j - z_j\right\}$

取 $x_N = (0,\cdots,0,x_k,0,\cdots,0)^T$

则 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{b} - y_k x_k$，其中 $\bar{b} = B^{-1}b$, $y_j = B^{-1}P_j$

而 $f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + (c_k - z_k)x_k$ 考虑 x_k 的取值

单纯形法-回顾

$$y_k = B^{-1}P_k$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$\max f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + (c_k - z_k)x_k$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{b} - y_k x_k = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} x_k \ (\geq 0)$$

(a) 若$y_k \leq 0$, 可取$x_k \to +\infty$，则 $f(x) \to +\infty$，原问题无界。

(b) 若$\exists i, y_{ik} > 0$, 取 $\quad x_k = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$

则得新解 $\quad x = \left(x_1, \cdots, x_{r-1}, 0, x_{r+1}, \cdots, x_m, 0, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0\right)^T$

且 $\quad f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + (c_k - z_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}\left(> f\left(x^{(0)}\right)\right).$

对偶问题的单纯形法

$$(L)\quad\begin{cases}\min & f(x)=c^T x\\ s.t. & Ax=b\\ & x\ge 0\end{cases}\qquad A_{m\times n}\ \ r(A)=m\quad b\ge 0$$

$$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

- **初始基本可行解**

设(L)有一个初始基 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m),\ A=(B,N)$

初始基本可行解为: $x^{(0)}=\begin{pmatrix}B^{-1}b & 0\end{pmatrix}^T\quad f(x^{(0)})=(c_B)^T B^{-1}b$

对偶问题的单纯形法

$$z_j = (c_B)^T B^{-1} P_j$$

- **初始基本可行解**

设(L)有一个初始基 $B=\left(P_1,P_2,\cdots,P_m\right),\ A=\left(B,N\right)$

初始基本可行解为: $x^{(0)}=\left(B^{-1}b\ \ 0\right)^T\ \ f\left(x^{(0)}\right)=(c_B)^T B^{-1}b$

设 $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ 为任一可行解，由 $Ax=b$ 得

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$\therefore f\left(x\right)=(c_B)^T x_B + (c_N)^T x_N = (c_B)^T\left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right)+(c_N)^T x_N$$

$$=(c_B)^T B^{-1}b+\left((c_N)^T-(c_B)^T B^{-1}N\right)x_N$$

$$=f\left(x^{(0)}\right)+\sum_{j\in R}\left(c_j - z_j\right)^T x_j$$

R非基变量下标集

对偶问题的单纯形法

$$\min f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + \sum_{j\in R}\left(c_j - z_j\right)x_j$$ R非基变量下标集

$c_j - z_j$ ———————称为检验数或判别数。

(注：基变量的检验数 $=0$)

(1) 对任意的$j\in R$, 有$c_j - z_j \geq 0$，则$x^{(0)}$为最优解。

(2) 存在$j\in R$使得$c_j - z_j < 0$. 令 $c_k - z_k = \min_{j\in R}\{c_j - z_j\}$

取 $x_N = (0,\cdots,0,x_k,0,\cdots,0)^T$

则 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{b} - y_k x_k$, 其中 $\bar{b} = B^{-1}b$, $y_j = B^{-1}P_j$

而 $f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + (c_k - z_k)x_k$

考虑x_k的取值

对偶问题的单纯形法

$$y_k = B^{-1}P_k$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$\min f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + (c_k - z_k)x_k$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{b} - y_k x_k = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} x_k \ (\geq 0)$$

$$\boxed{(a)\ 若 y_k \leq 0, 可取 x_k \to +\infty，则\ f(x) \to -\infty，原问题无界。}$$

(b) 若 $\exists i, y_{ik} > 0$, 取 $\quad x_k = \min\left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$

则得新解 $\quad x = \left(x_1, \cdots, x_{r-1}, 0, x_{r+1}, \cdots, x_m, 0, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0\right)^T$

且 $\quad f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + (c_k - z_k)\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}}\left(< f\left(x^{(0)}\right)\right).$

对偶问题的单纯形法

$$(L)\quad\begin{cases}\max & f(x)=c^T x\\ s.t. & Ax=b\\ & x\geq 0\end{cases}$$

$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$,

$A_{m\times n}$， $r(A)=m$, $b\geq 0$

(1)对任意的$j\in R$,

有$c_j-z_j\leq 0$,

则$x^{(0)}$为最优解。

$$(L)\quad\begin{cases}\min & f(x)=c^T x\\ s.t. & Ax=b\\ & x\geq 0\end{cases}$$

$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

$A_{m\times n}$ $r(A)=m$ $b\geq 0$

(1)对任意的$j\in R$,

有$c_j-z_j\geq 0$,

则$x^{(0)}$为最优解。

对偶问题的基本性质

- 例：分别求解下列2个互为对偶关系的线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$s.t\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\min w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$s.t\begin{cases} 6y_2 + y_3 - y_4 = 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

- 分别用单纯形法求解上述2个规划问题，得到最终单纯形表如下表：

对偶问题的基本性质

原问题最优表

X_B	b	原问题的变量		原问题的松弛变量		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
σ_j		0	0	0	– 1/4	– 1/2

对偶问题最优表

X_B	b	对偶问题的变量			对偶问题的剩余变量	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_2	1/4	-5/4	1	0	-1/4	1/4
y_3	1/2	15/2	0	1	1/2	-3/2
σ_j		15/2	0	0	7/2	3/2

对偶问题的基本性质

原问题最优表

X_B	b	原问题的变量		原问题的松弛变量		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
σ_j		0	0	0	– 1/4	– 1/2

对偶问题最优表

X_B	b	对偶问题的变量			对偶问题的剩余变量	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_2	1/4	-5/4	1	0	-1/4	1/4
y_3	1/2	15/2	0	1	1/2	-3/2
σ_j		15/2	0	0	7/2	3/2

对偶问题的基本性质

原问题与其对偶问题的变量与解的对应关系：

在单纯形表中，原问题的松弛变量的检验数对应对偶问题约束右端变量的相反数，对偶问题剩余变量的检验数对应原问题的约束右端变量。

线性规划的对偶模型-回顾

- （1）对称形式

特点：目标函数求极大值时，所有约束条件为≤号，变量非负;目标函数求极小值时，所有约束条件为≥号，变量非负。

$$P: \max\ z = c^T x \qquad D: \min w = y^T b$$

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A^T y \ge c \\ y \ge 0 \end{cases}$$

已知P，写出D

对偶问题的基本性质

性质1 对称性定理：对偶问题的对偶是原问题

$$\begin{aligned} &\max Z = C^T X \\ &\text{s.t.}\ \ AX \le b \\ &\qquad\ \ X \ge 0 \end{aligned} \quad \rightleftarrows \quad \begin{aligned} &\min W = b^T Y \\ &\text{s.t.}\ A^T Y \ge C \\ &\qquad\ \ Y \ge 0 \end{aligned}$$

对偶问题的基本性质

原问题(P)

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ s.t.\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

对偶问题(D)

$$\begin{aligned} \min\ & b^T y \\ s.t.\ & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

定理1(弱对偶定理)

若$x^{(0)}, y^{(0)}$分别为$(P),(D)$的可行解，则$c^T x^{(0)} \le b^T y^{(0)}$.

证明：因$x^{(0)}$是(P)的可行解，故$Ax^{(0)} \le b, x^{(0)} \ge 0$.

因$y^{(0)}$是(D)的可行解，故$A^T y^{(0)} \ge c, y^{(0)} \ge 0$,

从而$c^T x^{(0)} = (x^{(0)})^T c \le (x^{(0)})^T A^T y^{(0)} = (Ax^{(0)})^T y^{(0)} \le b^T y^{(0)}$.

对偶问题的基本性质

- **推论1：**极大化问题的任何一个可行解所对应的目标函数值都是其对偶问题的目标函数值的下界。
- **推论2：**极小化问题的任何一个可行解所对应的目标函数值都是其对偶问题的目标函数值的上界。

对偶问题的基本性质

- **定理2(最优性)**

若$x^{(0)}, y^{(0)}$分别为$(P),(D)$的可行解且$c^T x^{(0)} = (y^{(0)})^T b$,

则$x^{(0)}$，$y^{(0)}$分别为(P),(D)问题的最优解.

- **证明:**

对原问题(P)的任意可行解x,由定理1可知,

$c^T x \le b^T y^{(0)} = c^T x^{(0)}$,则$x^{(0)}$为$(P)$的最优解.

同理,$b^T y \ge c^T x^{(0)} = b^T y^{(0)}$，$y^{(0)}$为$(D)$的最优解

对偶问题的基本性质

例

$$(P)\quad \max\ Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min\ W = 20y_1 + 20y_2$$

$$(D)\quad s.t.\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由于$x^{(0)} = (0,0,4,4)^T,\ y^{(0)} = \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{1}{5}\right)^T$

分别是$(P),(D)$的可行解

且$c^T x^{(0)} = b^T y^{(0)} = 28$

所以，$x^{(0)}, y^{(0)}$分别是$(P),(D)$的最优解

对偶问题的基本性质

- **定理3(强对偶定理)**

若原问题（对偶问题）有最优解，则其对偶问题（原问题）也有最优解，且最优目标函数值相等.

证明：因为(P),(D)均有可行解,由推论1,推论2知, (P)的目标函数值在其可行域内有上界, (D)的目标函数值在其可行域内有下界, 故则(P),(D)均有最优解.

引入松弛变量，把(P)化为标准形:

$$
\begin{cases}
\max\ (c^{\mathrm{T}}, 0)\begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} \\
s.t.\quad (A, I)\begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} = b \\
\qquad x \geq 0,\ x_s \geq 0
\end{cases}
$$

对偶问题的基本性质

设(P)的最优解为$x^{(0)}$，所对应的最优基为B.

$x^{(0)}$可以表示为$x^{(0)}=\begin{pmatrix} x_B^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

(P)
$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ s.t.\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

则 $(c^T,0)-c_B{}^T B^{-1}(A,I)\le 0$,

继而有$(c^T,0)-(c_B{}^T B^{-1}A, c_B{}^T B^{-1}I)\le 0$

(D)
$$\begin{aligned} \min\ & b^T y \\ s.t.\ & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

令 $(y^{(0)})^T=c_B{}^T B^{-1}$,由上式得

$(y^{(0)})^T A\ge c^T$， $A^T y^{(0)}\ge c, y^{(0)}\ge 0$, 故$y^{(0)}$是(D)的可行解.

又因为$b^{\mathrm{T}} y^{(0)}=(y^{(0)})^{\mathrm{T}} b=c_B{}^{\mathrm{T}} B^{-1} b=c_B{}^{\mathrm{T}} x_B^{(0)}=c^T x^{(0)}$

故$y^{(0)}$是(D)的最优解，且

$\max c^T x=c^T x^{(0)}=b^T y^{(0)}=\min b^T y.$

对偶问题的基本性质

- **定理4（互补松弛定理）：**

若$x^{(0)}, y^{(0)}$分别为$(P),(D)$的可行解，x_s和y_s分别是其松弛变量。那么

且$\left(y^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} x_s = 0$和$\left(x^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} y_s = 0$当且仅当$x^{(0)}, y^{(0)}$为各自问题的最优解时成立。

- **证明：**

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^T x \\
s.t.\ & Ax + x_s = b \\
& x \ge 0, x_s \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\min\ & b^T y \\
s.t.\ & A^T y - y_s = c \\
& y \ge 0, y_s \ge 0
\end{aligned}
}
$$

对偶问题的基本性质

$$\max \ c^T x \qquad s.t. \quad Ax + x_s = b, \quad x \geq 0, x_s \geq 0$$

$$\boxed{\min \ b^T y \qquad s.t. \quad A^T y - y_s = c, \quad y \geq 0, y_s \geq 0}$$

$$\begin{aligned} z_{\max} &= c^T x^{(0)} = (A^T y^{(0)} - y_s)^T x^{(0)} \\ &= (y^{(0)})^T A x^{(0)} - {y_s}^T x^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\min} &= b^T y^{(0)} = (y^{(0)})^T b = (y^{(0)})^T (A x^{(0)} + x_s) \\ &= (y^{(0)})^T A x^{(0)} + (y^{(0)})^T x_s \end{aligned}$$

对偶问题的基本性质

若$x^{(0)}$，$y^{(0)}$为各自问题的最优解，则有$z_{\max} = z_{\min}$，

所以$z_{\min} - z_{\max} = y_s{}^T x^{(0)} + (y^{(0)})^T x_s = 0$,

因为y_s，$x^{(0)}$，$y^{(0)}$，x_s均≥ 0,

所以有$y_s{}^T x^{(0)} = (y^{(0)})^T x_s = 0$。

反之，若$y_s{}^T x^{(0)} = (y^{(0)})^T x_s = 0$，带入$z_{\max}$和$z_{\min}$，

则有$z_{\max} = z_{\min}$，则$x^{(0)}$，$y^{(0)}$为各自问题的最优解。

对偶问题的基本性质

- **定理1(弱对偶定理)**

  若$x^{(0)}, y^{(0)}$分别为$(P),(D)$的可行解，则$c^T x^{(0)} \le b^T y^{(0)}$.

- **定理2（最优性）**

  若$x^{(0)}, y^{(0)}$分别为$(P),(D)$的可行解且$c^T x^{(0)} = (y^{(0)})^T b$,

  则$x^{(0)}$，$\mathrm{y}^{(0)}$分别为(P),(D)问题的最优解.

- **定理3(强对偶定理)**

  若原问题（对偶问题）有最优解，则其对偶问题（原问题）也有最优解，且最优目标函数值相等.

- **定理4（互补松弛定理）：**

  $\left(y^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} x_s = 0$和$\left(x^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} y_s = 0$当且仅当

  $x^{(0)}, y^{(0)}$为各自问题的最优解时成立。

对偶问题的基本性质

- **例：已知线性规划**

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

的最优解是X * =(6,2,0)^{T},求其对偶问题的最优解Y * 。

解：写出原问题的对偶问题，即

$$\min z_{\min} = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

互补松弛定理：

$$\left(y^{(0)}\right)^{T} x_s = 0$$

$$\left(x^{(0)}\right)^{T} y_s = 0$$

对偶问题的基本性质

- 设对偶问题最优解为y＊＝(y$_1$，y$_2$),由互补松弛性定理可知，

因为$x_1 \neq 0$，$x_2 \neq 0$，所以对偶问题的第一、二个约束的松弛变量等于零，即 $y_3 = 0$，$y_4 = 0$，带入方程中：

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 4 \end{cases}$$

解此线性方程组得 $y_1=1, y_2=1$, 从而对偶问题的最优解为：y＊=(1,1)，最优值z_{min}=26。

对偶问题的经济解释 - 影子价格

- **定义**：在一对 P 和 D 中，若 P 的某个约束条件的右端项常数b_i（第 i 种资源的拥有量）增加一个单位时，所引起目标函数最优值z^* 的改变量称为第 i 种资源的**影子价格**，其值等于D问题中对偶变量y_i^*。
- **1. 影子价格的数学分析：**

$$P：\max\ z = c^T x \qquad \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$D：\min w = y^T b \qquad \begin{cases} A^T y \ge c \\ y \ge 0 \end{cases}$$

- **由对偶问题的基本性质可得：** $z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

对偶问题的经济解释 - 影子价格

- **2. 影子价格的经济意义**
- **1）影子价格是一种边际价格**

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- 在其它条件不变的情况下，单位资源数量的变化所引起的目标函数最优值的变化。即对偶变量y_i就是第 i 种资源的影子价格。即：

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = y_i^* \, (i = 1, 2 \cdots m)$$

对偶问题的经济解释 - 影子价格

- **2）影子价格是一种机会成本**
- 影子价格是在资源最优利用条件下对单位资源的估价，**这种估价不是资源实际的市场价格**。因此，从另一个角度说，它是一种机会成本。
- 若第 i 种资源的单位市场价格为m_i，则有当$y_i^* > m_i$时，企业愿意**购进这种资源**，单位纯利为$y_i^* - m_i$，则有利可图；如果$y_i^* < m_i$，则企业**有偿转让这种资源**，可获单位纯利$m_i - y_i^*$，否则，企业无利可图，甚至亏损。

对偶问题的经济解释 - 影子价格

- **3）影子价格在资源利用中的应用**
- 根据对偶理论的互补松弛性定理:

$$\left(y^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} x_s = 0, \quad \left(x^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} y_s = 0$$

- 表明生产过程中如果某种资源 b_i 未得到充分利用时，该种资源的影子价格为0；若当资源的影子价格不为 0 时，表明该种资源在生产中已耗费完。

(P) $\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.t.\quad Ax \le b \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned}$ **(D)** $\begin{aligned} &\min\ b^T y \\ &s.t.\quad A^T y \ge c \\ &\qquad\quad y \ge 0 \end{aligned}$

对偶问题的单纯形法-回顾

$$(L)\quad \begin{cases} \max & f(x)=c^T x \\ s.t. & Ax=b \\ & x\geq 0 \end{cases}$$

$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$,

$A_{m\times n}$， $r(A)=m$, $b\geq 0$

(1) 对任意的$j\in R$,

有$c_j-z_j\leq 0$,

则$x^{(0)}$为最优解。

$$(L)\quad \begin{cases} \min & f(x)=c^T x \\ s.t. & Ax=b \\ & x\geq 0 \end{cases}$$

$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

$A_{m\times n}$ $r(A)=m$ $b\geq 0$

(1) 对任意的$j\in R$,

有$c_j-z_j\geq 0$,

则$x^{(0)}$为最优解。

对偶单纯形法

- **例 用对偶单纯形法求解：**

$$\min Z = 9x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 14 \\ x_j \geq 0(j = 1.2.3) \end{cases}$$

- 解:（1）将模型转化为求最大化问题，约束方程化为等式求出一组基本解

对偶单纯形法

$$\max Z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 \le -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 \le -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 \le -14 \\ x_{1-3} \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = -14 \\ x_{1-6} \ge 0 \end{cases}$$

c_j			-9	-12	-15	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	-10	-2	-2	-1	1	0	0	
0	x_5	-12	-2	-3	-1	0	1	0	
0	x_6	-14	-1	-1	-5	0	0	1	
σ_j			-9	-12	-15	0	0	0	

对偶单纯形法

$$\max Z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = -14 \\ x_{1-6} \geq 0 \end{cases}$$

因为对偶问题可行，即全部检验数≤0（求min问题）。

c_j			-9	-12	-15	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	-10	-2	-2	-1	1	0	0	
0	x_5	-12	-2	-3	-1	0	1	0	
0	x_6	-14	-1	-1	-5	0	0	1	
σ_j			-9	-12	-15	0	0	0	

对偶单纯形法

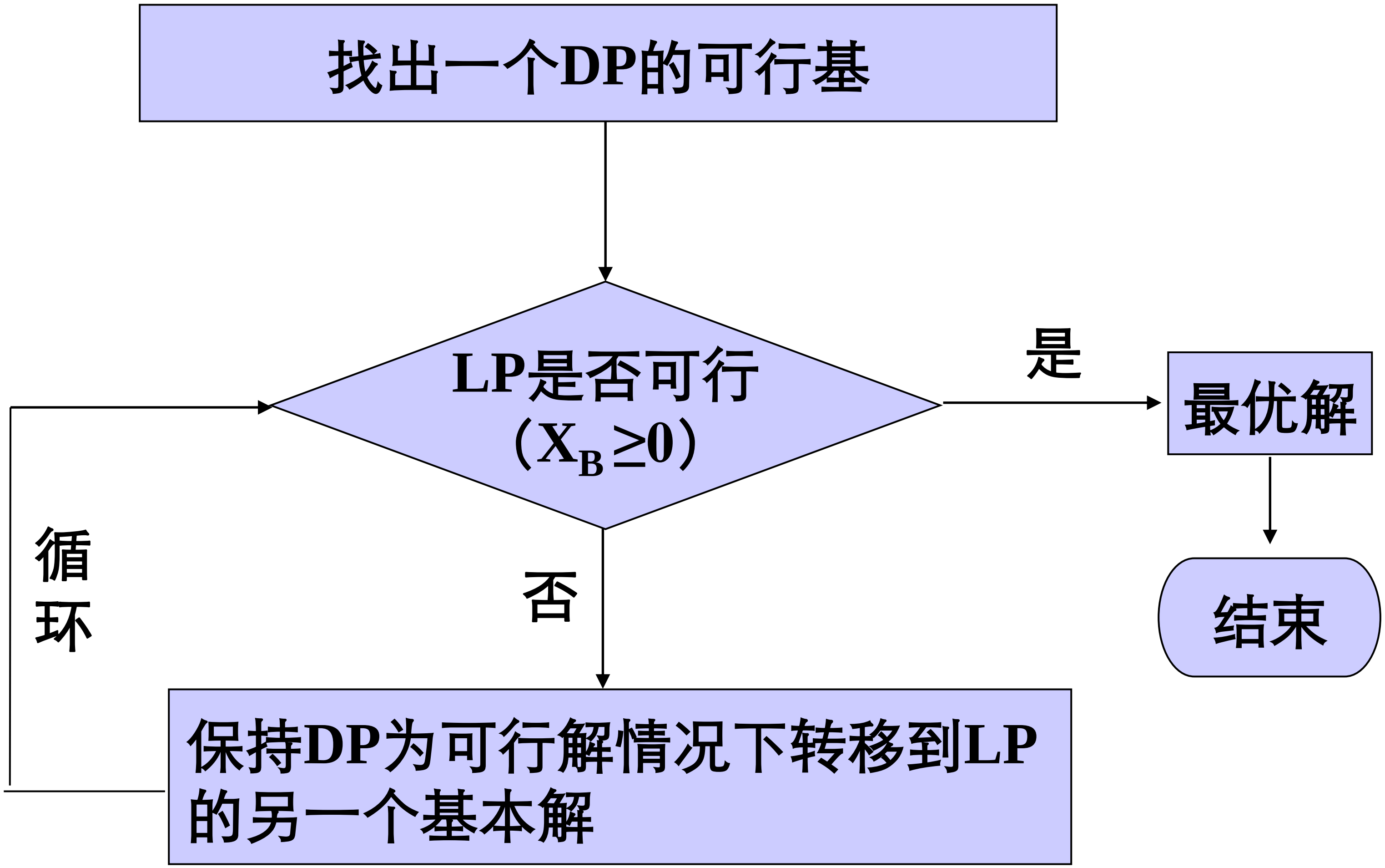
- **对偶单纯形法原理**

对偶单纯形法是求解线性规划的另一个基本方法。它是根据对偶原理和单纯形法原理而设计出来的，因此称为对偶单纯形法。**不要简单理解为是求解对偶问题的单纯形法。**

- **对偶单纯形法基本思路：**

找出一个对偶问题的可行基，**保持对偶问题为可行解的条件**下，判断X_B是否可行（X_B为非负），若否，通过变换基解，直到找到原问题基可行解（即X_B为非负），**这时原问题与对偶问题同时达到可行解**，由定理 2 可得最优解。

对偶单纯形法


找出一个DP的可行基
LP是否可行
（$X_B \geq 0$）
是
最优解
结束
否
保持DP为可行解情况下转移到LP的另一个基本解
循环

对偶单纯形法

与原单纯形法的区别：

- 原单纯形法保持原问题的可行性，对偶单纯形法保持对偶问题的可行性。
- **特点：先选择换出基变量，再选择换入基变量。**
- **换出基变量选择 b_i 最小的，其中b_i 为负值**
- **换入基变量？根据保持对偶问题的可行性**

对偶问题：$x_k = \min\left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_r}{y_{rk}} > 0$

原问题：$x_k = \min\left\{ \frac{-\sigma_k}{-y_{ik}} \mid y_{ik} < 0 \right\} = \min\left\{ \frac{\sigma_k}{y_{ik}} \mid y_{ik} < 0 \right\}$

对偶问题的基本性质

X_B	B	原问题的变量		原问题的松弛变量		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
σ_j		0	0	0	– 1/4	– 1/2

换出基变量选择 b_i 最小的，其中b_i为负值

原问题换入基变量：

$$\min\left\{\frac{\sigma_k}{y_{ik}} \mid y_{ik} < 0\right\}$$

X_B	b	对偶问题的变量			对偶问题的剩余变量	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_2	1/4	-5/4	1	0	-1/4	1/4
y_3	1/2	15/2	0	1	1/2	-3/2
σ_j		15/2	0	0	7/2	3/2

对偶单纯形法

$$\max Z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 \le -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 \le -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 \le -14 \\ x_{1-3} \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = -14 \\ x_{1-6} \ge 0 \end{cases}$$

c_j			-9	-12	-15	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	-10	-2	-2	-1	1	0	0	
0	x_5	-12	-2	-3	-1	0	1	0	
0	x_6	-14	-1	-1	$\boxed{-5}$	0	0	1	(-9/-1.-12/-1. -15/-5)
σ_j			-9	-12	-15	0	0	0	

对偶单纯形法

c_j			-9	-12	-15	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	-36/5	-9/5	-9/5	0	1	0	-1/5	
0	x_5	-46/5	-9/5	**-14/5**	0	0	1	-1/5	
-15	x_3	14/5	1/5	1/5	1	0	0	-1/5	(-30/-9,-45/-14,
σ_j			-6	-9	0	0	0	-3	-15/-1)

c_j			-9	-12	-15	0	0	0	θ_i
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	-9/7	**-9/14**	0	0	1	-9/14	-1/14	
-12	x_2	23/7	9/14	1	0	0	-5/14	1/14	
-15	x_3	15/7	1/14	0	1	0	1/14	-3/14	(-3/-9,-45/-9,
σ_j			-3/14	0	0	0	-45/14	-33/14	-33/-1)

对偶单纯形法

c_j			-9	-12	-15	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-9	x_1	2	1	0	0	-14/9	1	1/9
-12	x_2	2	0	1	0	1	-1	0
-15	x_3	2	0	0	1	1/9	0	-2/9
σ_j			0	0	0	-1/3	-3	-7/3

原问题的最优解为：$X^*=$（2 , 2 , 2 , 0 , 0 , 0），$Z^*=72$

其对偶问题的最优解为：$Y^*=$（1/3 , 3 , 7/3），$W^*=72$

灵敏度分析

c_j									
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_3	b	4	a_1	1	0	a_2	0
	x_4	2	-1	-5	0	1	-1	0
	x_6	3	a_3	-3	0	0	-4	1
σ_j			σ_1	σ_2	0	0	-3	0

上表中6个常数 a_1，a_2，a_3，b，σ_1，σ_2 取值在什么范围可使

1、现可行解最优，且唯一？何时不唯一？

2、现基本解不可行；

3、问题无可行解；

4、无界解；

5、现基本解可行，由 x_1 取代 x_6 目标函数可改善。

上海大学 SHANGHAI UNIVERSITY

灵敏度分析

线性规划标准形式

$$Max \quad z = C^T x$$

$$s.t \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- 参数A，b，C在什么范围内变动，对当前方案无影响?
- 参数A，b，C中的一个(几个)变动，对当前方案影响?
- 如果最优方案改变，如何用简便方法求新方案?

灵敏度分析

- **目标函数系数的变化**
- 考虑检验数： $\sigma = C - C_B B^{-1} A$

$$\sigma_j = C_j - C_B B^{-1} P_j$$

- (1) 若 c_k 是非基变量的系数：

设 $c_k' = c_k + \Delta c_k$，则

$$\sigma_k' = c_k + \Delta c_k - C_B B^{-1} P_k = \sigma_k + \Delta c_k$$

当 $\sigma_k' = \sigma_k + \Delta c_k \le 0$ 即 $\sigma_k \le \Delta c_k$ 时

原最优解不变；

否则，用σ_k'代替σ_k，用单纯形法求解最优解。

目标函数系数的变化

例

$$\mathrm{Max} \quad z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$s.t \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

试求 c_3 在多大范围内变动时，原最优解保持不变。

解：最优单纯形表

c_j			-2	-3	-4	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
σ_j			0	0	-9/5	-8/5	-1/5

目标函数系数的变化

c_j			-2	-3	$-4+\Delta c_3$	0	0
c_B	x_B	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	$2/5$	0	1	$-1/5$	$-2/5$	$1/5$
-2	x_1	$11/5$	1	0	$7/5$	$-1/5$	$-2/5$
σ_j			0	0	$-9/5+\Delta c_3$	$-8/5$	$-1/5$

从表中看到 $\sigma_3 = c_3+\Delta c_3 - (c_2\times a_{13}+c_1\times a_{23})$

可得到 $\Delta c_3 \le 9/5$ **时，原最优解不变。**

目标函数系数的变化

(2) 若 c_k 是基变量的系数

设 $c_k' = c_k + \Delta c_k$，为基变量的价值系数，则

$$C_B' = (c_1 \ \cdots \ c_k + \Delta c_k \ \cdots) = C_B + (0 \ \cdots \ \Delta c_k \ \cdots)$$

$$\sigma_j' = c_j - C_B' B^{-1} P_j = c_j - C_B' P_j'$$

$$= c_j - [C_B + (0 \ \cdots \ \Delta c_k \ \cdots)] P_j'$$

$$= \sigma_j - (0 \ \cdots \ \Delta c_k \ \cdots) P_j'$$

$$= \sigma_j - \Delta c_k a_{kj}$$

当所有的 $\sigma_j' = \sigma_j - \Delta c_k a_{kj} \le 0$

即所有j $\Delta c_k \ge \dfrac{\sigma_j}{a_{kj}} \ (a_{kj} \ne 0)$ 时， 原最优解不变；

否则，用 σ_j' 代替 σ_j，用单纯形法求解最优解。

目标函数系数的变化

例

$$\text{Max}\quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

求 c_2 在什么范围内变动时，原最优解保持不变。

下表为最优单纯形表,考虑基变量系数 c_2 发生变化

C_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	-3/2	-1/8	0

目标函数系数的变化

C_i			2	$3+\Delta c_2$	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	$-3/2-\Delta c_2/2$	$-1/8+\Delta c_2/8$	0

从表中看到

$$-\frac{3}{2}-\frac{\Delta c_2}{2}\le 0 \quad 即 \quad \Delta c_2 \ge -3$$

$$-\frac{1}{8}+\frac{\Delta c_2}{8}\le 0 \quad 即 \quad \Delta c_2 \le 1$$

可得到 $-3 \le \Delta c_2 \le 1$ 时，原最优解不变。

右端项系数的变化

设分量 b_r 变化为 $b_r + \Delta b_r$，根据前面的讨论：

最优解的基变量 $x_B = B^{-1}b$，那么只要保持

$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0 ,$$

则最优基不变，即基变量保持，只有值的变化；

否则，需要利用对偶单纯形法继续计算。

右端项系数的变化

例 $$Max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

求当b_1由 8 变动为 12 时，原最优解是否保持不变，若变动求出新的最优解。

解：下表为最优单纯形表

C_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	-3/2	-1/8	0

右端项系数的变化

由最优单纯形表可知：$B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$ 则

$$X'=B^{-1}b'=B^{-1}(b+\Delta b)=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b=X+B^{-1}\Delta b$$

$$=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0\\4-8\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}$$

右端项系数的变化

将b'代入原最优单纯形表中，运用对偶单纯形法计算最优解。

C_i		2	3	0	0	0	$B^{-1}b$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	1/4	0	4
0	x_5	0	0	-2	1/2	1	-4
3	x_2	0	1	1/2	-1/8	0	4
σ_j		0	0	-3/2	-1/8	0	14
θ				3/4			
2	x_1	1	0	0	1/4	0	4
0	x_3	0	0	1	-1/4	-1/2	2
3	x_2	0	1	0	0	1/4	3
σ_j		0	0	0	-1/2	-3/4	17

经一次迭代后，求得新的最优解: $(4\ \ 3\ \ 2\ \ 0\ \ 0)^T$

增加变量

增加一个变量，相当于系数矩阵增加一列。

增加变量 x_{n+1} 则有相应的p_{n+1} ,c_{n+1}。

那么计算出$B^{-1}p_{n+1}$, $\sigma_{n+1}=c_{n+1}-c_B p_{n+1}$

填入最优单纯形表,

若 $\sigma_{n+1} \le 0$ 则 最优解不变;

否则，进一步用单纯形法求解。

增加变量

例 $\text{Max} \quad z = 2x_1 + 3x_2$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

求当增加x_6 , $p_6=(2, 6, 3)^T$, $c_6=5$时，原最优解是否保持不变，若变动求出新的最优解。

解：下表为最优单纯形表

C_j		2	3	0	0	0	$B^{-1}b$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	1/4	0	4
0	x_5	0	0	-2	1/2	1	4
3	x_2	0	1	1/2	-1/8	0	2
σ_j		0	0	-3/2	-1/8	0	14

增加变量

由最优单纯形表可知：$B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$

则 $p_6' = B^{-1}p_6 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

将 $c_6=5$ 与 p_6'代入最优单纯形表，计算σ_6

增加变量

C_i		2	3	0	0	0	5	$B^{-1}b$	θ
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
2	x_1	1	0	0	1/4	0	3/2	4	8/3
0	x_5	0	0	-2	1/2	1	2	4	2
3	x_2	0	1	1/2	-1/8	0	1/4	2	8
σ_j		0	0	-3/2	-1/8	0	5/4	14	
2	x_1	1	0	3/2	-1/8	-3/4	0	1	
5	x_6	0	0	-1	1/4	1/2	1	2	
3	x_2	0	1	3/4	-3/16	-1/4	0	3/2	
σ_j		0	0	-1/4	-7/16	-1/4	0	33/2	

用单纯形法进一步求解，可得：

$x^* = (1,1.5,0,0,0,2)^T \quad f^* = 16.5$

增加约束条件

- **增加一个约束条件相当于系数矩阵中增加一行。**

- 增加一个约束条件之后，应把最优解带入新的约束，**若满足则最优解不变**，否则填入最优单纯形表作为新的一行，引入一个新的非负变量（原约束若是小于等于形式可引入非负松弛变量，否则引入非负人工变量），并通过矩阵行变换把对应基变量的元素变为0，进一步用单纯形法或对偶单纯形法求解。

增加约束条件

例 Max $z = 2x_1 + 3x_2$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

求当增加$3x_1 + 2x_2 \le 15$时，原最优解(4,2,0,0,4)不满足约束。

解：下表为最优单纯形表

C_i			2	3	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
σ_j			0	0	-3/2	-1/8	0

增加约束条件

将$3x_1+2x_2+x_6=15$ 代入原最优单纯形表。

C_j			2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	0
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	0
0	x_6	15	3	2	0	0	0	1
σ_j								
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	0
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	0
0	x_6	-1	0	0	-1	-1/2	0	1
σ_j			0	0	-3/2	-1/8	0	0

经对偶单纯形法迭代一步，可得：最优解为$(3.5, 2.25, 0, 0, 3, 2)^T$

矩阵A的变化

例 Max $z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

$$\text{s.t}\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

最优单纯形表为

C_i		-2	-3	-4	0	0	$B^{-1}b$
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	x_2	0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
-2	x_1	1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5
σ_j		0	0	-9/5	-8/5	-1/5	-28/5

（1）P_3由$(-1,-3)^T$改为$(-1,-2)^T$

（2）P_1由$(-1,-2)^T$改为$(1,-1)^T$

矩阵A的变化

解：（1）P_3由$(-1\ -3)^T$改为$(-1\ -2)^T$

由最优单纯形表可知

$$c_3 = -4 \quad C_B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = c_3 - C_B B^{-1} P_3 = -4 - \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= -2 < 0$$

所以原最优解不变

矩阵A的变化

(2) P_1由$(-1\ -2)^T$改为$(1\ -1)^T$

由最优单纯形表可知

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$P_1'=B^{-1}P_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

代入最优单纯形表，用P_1'代替P_1

矩阵A的变化

C_i			-2	-3	-4	0	0	θ
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	x_2	2/5	-3/5	1	-1/5	-2/5	1/5	
-2	x_1	11/5	1/5	0	7/5	-1/5	-2/5	
σ_j								
-3	x_2	7	0	1	4	-1	-1	7/4
-2	x_1	11	1	0	7	-1	-2	11/7
σ_j			0	0	22	-5	-7	
-3	x_2	5/7	-4/7	1	0	-3/7	1/7	
-4	x_3	11/7	1/7	0	1	-1/7	-2/7	
σ_j			-22/7	0	0	-13/7	-5/7	

所以，新的最优解为:$(0,5/7,11/7,0,0)^T$

作 业

运筹学第二章，p.75

① 2.2

② 2.7

③ 2.11 （1）

④ 2.13

⑤ 2.14

作 业

2.2 判断下列说法是否正确，并说明为什么。

(1) 如果线性规划的原问题存在可行解，则其对偶问题也一定存在可行解；

(2) 如果线性规划的对偶问题无可行解，则原问题也一定无可行解；

(3) 在互为对偶的一对原问题与对偶问题中，不管原问题是求极大或极小，原问题可行解的目标函数值一定不超过其对偶问题可行解的目标函数值；

(4) 任何线性规划问题具有唯一的对偶问题。

2.7 给出线性规划问题

$$\max z = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 20x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 \leqslant 600 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 \leqslant 400 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 500 \\ x_j \geqslant 0 (j = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

其最优解为：$X = \left(\frac{400}{3}, 0, 0, \frac{20}{3}\right)$，$z^* = \frac{2\,800}{3}$。

(1) 写出其对偶问题；(2) 利用互补松弛性质找出对偶问题的最优解。

作 业

2.11 用对偶单纯形法求解下列线性规划问题。

(1) $\min z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 3x_3 \geqslant 3 \\ 2x_2 + 2x_3 \geqslant 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

作 业

2.13 已知线性规划问题：

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，再分析在下列条件单独变化的情况下最优解的变化。

(1) 目标函数变为 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$；

(2) 约束右端项由 $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$；

(3) 增添一个新的约束条件 $-x_1 + 2x_3 \geqslant 2$。

作 业

2.14 给出线性规划问题

$$\max z = -x_1 + 18x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 15 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \leqslant 5 + \lambda \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

要求：

(1) 以 x_1, x_2 为基变量列出单纯形表(当 $\lambda=0$ 时)；

(2) 若 x_1, x_2 为最优基，确定问题最优解不变时 c_3, c_4 的变化范围；

(3) 保持最优基不变时的 λ 的变化范围；

(4) 增加一个新变量，其系数为 $(c_k, 2, 3)^T$，试求问题最优解不变时 c_k 的取值范围。

谢　谢！