线性规划及单纯形法

- 线性规划问题及数学模型
  - 数学模型“3要素”
    - $$\max(\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
    - $$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (=,\ge) b_i, & i=1,2,\dots,m \\ x_j \ge 0, & j=1,2,\dots,n\end{cases}$$
    - 决策变量
    - 目标函数
    - 约束条件
  - 线性规划问题的标准形式“4要求”
    - $$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
    - $$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i=1,2,\dots,m \\ x_j \ge 0, & j=1,2,\dots,n\end{cases}$$
    - 目标函数求max
    - 约束条件两端用“=”连结
    - 所有决策变量非负
    - 约束条件右端常数非负
  - 非标准形式转化为标准形式“6准则”

		一般形式	化为标准形式
目标函数		$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	令 $z' = -z$ 即 $\max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
约束条件	形式	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$	$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i \\ x_{n+1} \ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i \\ x_{n+1} \ge 0\end{cases}$
	右端项	$b_i < 0$	约束条件两端同乘（-1）
变量		$x \le 0$ x取值无约束	$x' = -x,\ x' \ge 0$ $x = x' - x'',\ x', x'' \ge 0$

    - 目标函数求极小值
    - 约束条件为不等式
    - 约束条件右端常数为负数
    - 决策变量不满足非负约束
- 图解法
  - 图解法步骤
    - 建立平面直角坐标系
    - 图示约束条件，求可行域
    - 图示目标函数
    - 寻找最优解
  - 解的结局
    - 有唯一的最优解
    - 无穷多最优解
    - 无界解
    - 无解或无可行解
  - 图解法启示
    - 求解线性规划问题时，解的情况有：唯一最优解、无穷多最优解、无界解、无可行解
    - 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集
    - 若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一一定是可行域的凸集的某个顶点
    - 解题思路是，先找出凸集的任一顶点，计算在顶点处的目标函数值
- 单纯形法原理
  - 解的概念
    - 可行解
    - 最优解
    - 基
    - 基解
    - 基可行解
    - 可行基
    - 退化解
  - 凸集及其顶点
    - 凸集概念
    - 顶点条件
  - 基本定理的证明
    - 定理1：若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集
    - 引理：线性规划问题的可行解X为基可行解的充要条件是X的正分量所对应的系数列向量是线性独立的
    - 定理2：线性规划问题的基可行解X对应线性规划问题可行域（凸集）的顶点
    - 定理3：若线性规划问题有最优解，一定存在一个基可行解是最优解
  - 单纯形法迭代原理
    - 先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，若为否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止
- 单纯形法计算步骤
  - 求初始基可行解并列出初始单纯形表
  - 最优性检验
  - 转换基可行解
- 单纯形法的进一步讨论
  - 添加人工变量的线性规划问题
    - 人工变量法（大M法）
    - 两阶段法
  - 解的说明
    - 无界解：换入变量对应列系数 ≤0
    - 退化解：多个基变量可选作换出变量
    - 多重解：最优表非基变量检验数为0
    - 无可行解：单纯型表达到最优解检验条件，人工变量仍在基变量中

01 单纯形法原理

解的概念

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \qquad (1)$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,\cdots,m) \qquad (2)\\ x_j\geq 0 & (j=1,\cdots,n) \qquad (3)\end{cases}$$

可行解

满足线性规划问题约束条件(2)和(3)的解$\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，称为线性规划问题的可行解。

最优解

可行解中使目标函数(1)达到最大值的可行解称为最优解

设$\boldsymbol{A}$是约束方程组(2)的$m\times n$维系数矩阵（设$n>m$），其秩为m，$\boldsymbol{B}$是矩阵$\boldsymbol{A}$中的一个$m\times m$阶的满秩子矩阵，不失一般性，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=(x_1 \quad \cdots \quad x_m \quad x_{m+1} \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}$$

基

$\boldsymbol{B}$是线性规划问题的一个基。$\boldsymbol{B}$中的每一个列向量称为基向量$\boldsymbol{P}_j\ (j=1,\cdots,m)$
与基向量$\boldsymbol{P}_j$对应的变量$x_j\ (j=1,\cdots,m)$称为基变量。
线性规划中除基变量以外的变量$x_j\ (j=m+1,\cdots,n)$称为非基变量。

基解

在约束方程组(2)中，令所有非基变量$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$。又因为有$|\boldsymbol{B}|\neq 0$
根据克莱姆规则，由m个约束方程可解出m个基变量的唯一解$\boldsymbol{X}_B=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$
将这个解加上非基变量取0的值有$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，称$\boldsymbol{X}$为线性规划问题的基解。

基可行解

满足变量非负约束条件(3)的基解称为基可行解。

可行基

对应于基可行解的基称为可行基。

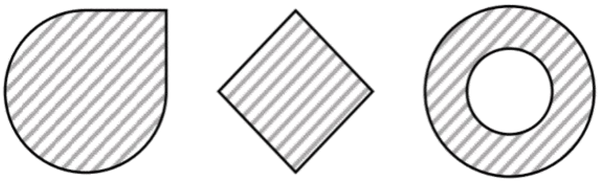
退化解

非零基变量的个数小于m的基本解，即某个基变量取值为0

凸集、顶点及基本定理

凸集

如果集合C中任意两个点X_1 X_2，其连线上的所有点也都是集合C中的点，称C为凸集。用**数学解析式**可表示为，对任何 $X_1 \in C$ $X_2 \in C$ 有 $aX_1+(1-a)X_2 \in C$ $(0<a<1)$ 则称C为凸集。如下图所示，(a)(b)为凸集，而(3)不是凸集。



(a) (b) (c)

顶点

如果C中不存在任何两个不同的点X_1 X_2，使X成为这两个点连线上的一个点。用**数学解析式**表示为，对任何 $X_1 \in C$ $X_2 \in C$ ，不存在 $X=aX_1+(1-a)X_2$ $(0<a<1)$，则称X是凸集C的顶点。

而 3 个定理和 1 个引理建立起了线性规划问题的解与凸集的关系。

- **定理 1**：若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集。
- **引理**：线性规划问题的可行解为基可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
- **定理 2**：线性规划问题的基可行解 X 对应线性规划问题可行域（凸集）的顶点。
- **定理 3**：若线性规划问题有最优解，一定存在一个基可行解是最优解。

单纯形法基本原理

单纯形法迭代的基本思路是：先找到一个初始的基可行解，判定其是否为最优解，如为否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止。

因此，单纯形法迭代原理涉及到三个问题，

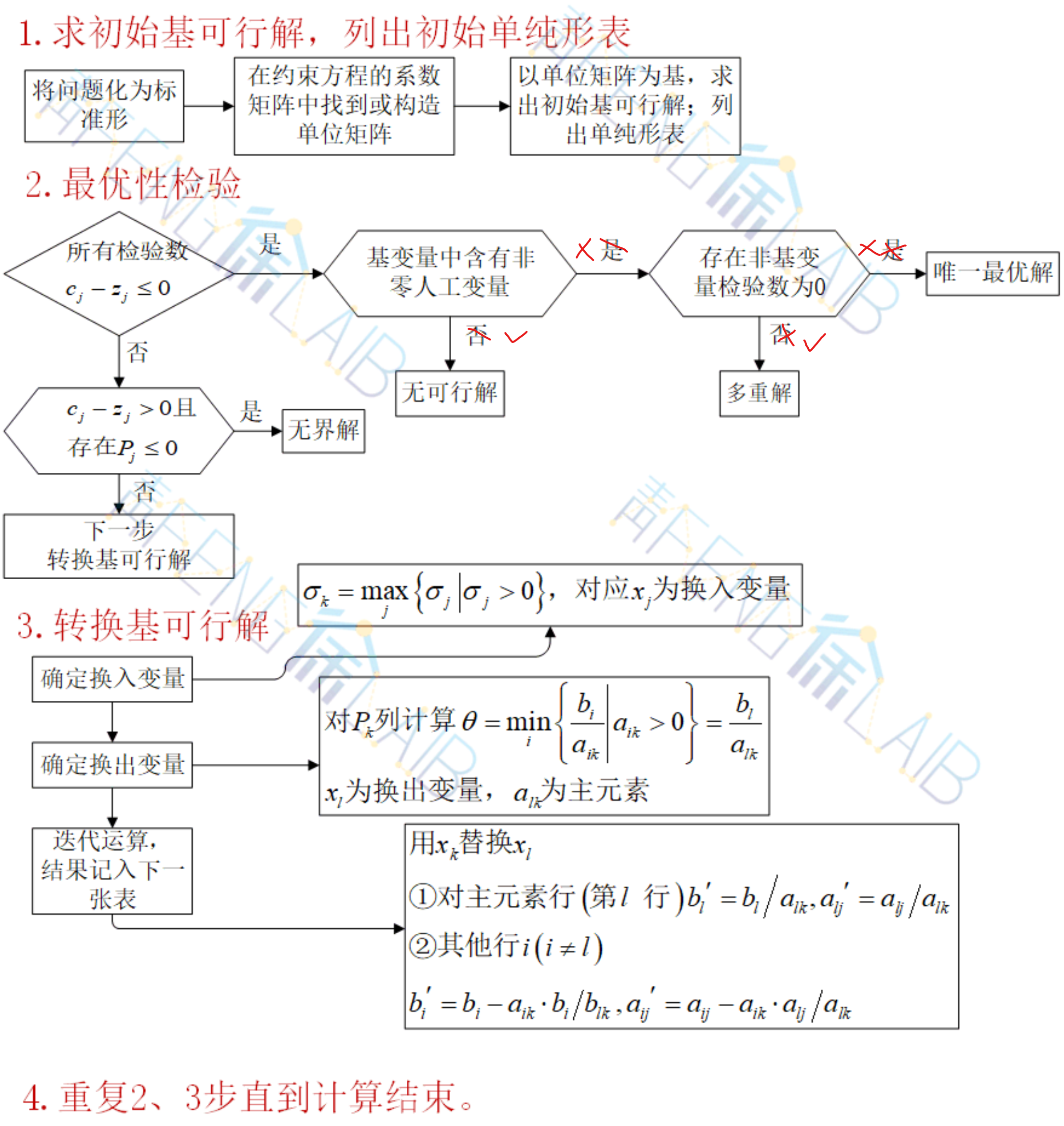
①初始解：如何找到初始基可行解；

②最优解：如何找到一个准则，进行最优性检验与解的判别。

③基变换：如果一个基可行解不是最优解，如何从一个基可行解转换为相邻的基可行解；

02 单纯形法计算步骤

单纯形法计算步骤



解的说明

用单纯形法求解问题时，通常根据单纯形表中的检验数进行最优性判别，不同解在单纯形表中的表现形式也不同。

	判别
唯一最优解	所有$c_j-z_j\le 0$，且不存在非基变量的检验数 $c_j-z_j=0$
多重最优解	所有$c_j-z_j\le 0$，且存在非基变量的检验数 $c_j-z_j=0$
无界解	存在某个$c_j-z_j\ge 0$,且其对应系数列向量$P_j\le 0$
无可行解	所有$c_j-z_j\le 0$，基变量中含有非零人工变 量 用两阶段法时第一阶段目标函数 值不为零
退化解	按最小比值确定换出变量时，存在两个以上相同的最小比值，即多个基变量可选作换出变量。在下一个单纯形表中体现为一个或多个基变量等于零。

单纯形法例题

用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_2 \le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

①将问题化为标准形式，找出初始基可行解，列出单纯性表

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

标准形式下的约束条件系数矩阵的增广矩阵可以表示为

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

存在单位矩阵，构成一个基

x_3, x_4, x_5是基变量，令$x_1, x_2 = 0$

找到初始基可行解$X = (0, 0, 15, 24, 5)^T$

列出单纯形表

②进行最优性检验

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	[6] 主元素	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

表中存在检验数大于0，不是最优解

③转换基可行解（见上表）

$\sigma_1 > \sigma_2$,由此确定x_1为换入变量

将b列除以P_1 的同行数字得 $\theta = \min\left(\infty, \frac{24}{6}, \frac{5}{1}\right) = 4$

由此6为主元素，所在行基变量 x_4为换出变量

④重复2、3步，直到求出结果。
下图为最终单纯形表。

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	−15/2
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	−1/2
1	x_2	3/2	0	1	0	−1/4	3/2
$c_j - z_j$			0	0	0	−1/4	−1/2

最终单纯形表中 $\sigma_j \le 0$ ，且基变量中不含人工变量

表中基可行解即为最优解， $X^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{15}{2}, 0, 0\right)^T$

代入目标函数得$z^* = \frac{17}{2}$

03

单纯形法的进一步讨论

人工变量法（大M法）

一些线性规划问题在化为标准形后约束条件系数矩阵不存在单位矩阵，就需要在约束条件中添加人工变量构造一个新的线性规划问题。

将人工变量在目标函数中的系数取任意大的负数，在求解过程中可以防止人工变量出现在最优解中。若在最终单纯形表中所有检验数都小于等于零，但基变量中仍存在不为零的人工变量，则问题无解。下面，给出人工变量法的计算步骤。

用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

①先将模型化为标准形

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

不存在单位矩阵

需要添加人工变量

②添加人工变量

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

人工变量系数为任意大的负数，用“-M”代表，称为“罚因子”

由于约束条件在添加人工变量前已经是等式，为了使等式成立，在最优解中人工变量的取值必须为零。只要人工变量取值大于零，目标函数就不可能实现最优。

	$c_j \rightarrow$		2	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	[1]	1	1	0	0
-M	x_5	6	2	2	0	-1	1
	$c_j - z_j$		2+2M	1+2M	0	-M	0
2	x_1	2	1	1	1	0	0
-M	x_5	2	0	0	-2	-1	1
	$c_j - z_j$		0	-1	-2-2M	-M	0

当表中所有 $c_j - z_j \le 0$

基变量中仍然含有非零的人工变量 x_5

所以该问题无解

在单纯形法迭代运算中，M可当做一个数学符号参加运算。

两阶段法

用大 M 法处理人工变量，在用电子计算机求解时，对 M 只能在计算机内输入一个机器最大字长的数字。如果线性规划问题中的参数值与这个代表 M 的数比较接近，或远远小于这个数字，由于计算机计算时取值上的误差，有可能使计算结果发生错误。

为了克服这个困难，可以对添加人工变量后的线性规划问题分两个阶段来计算，称两阶段法。

用单纯形法解决线性规划问题

$$\max z = -3x_1 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

第一阶段：先求解目标函数中只含有人工变量的线性规划问题

令目标函数中其他变量系数为0，
人工变量系数取1或-1；
约束条件不变

第一阶段的线性规划问题可写为

$$\max z = -x_6 - x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \ge 0 (j = 1, \cdots, 7) \end{cases}$$

第一阶段的最终单纯形表如下，由表得第一阶段最优解为0，说明该问题有解。（若第一阶段的目标函数值不为0，说明该问题无解）

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	-1	-1
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	-1/2	1/6
$c_j - z_j$			0	0	0	0	0	-1	-1

基变量中不含人工变量，且
最优目标函数值为0，说明问题有解。

第二阶段：若第一阶段表明有可行解，则去除人工变量，目标函数回归标准形式。从第一阶段的最终单纯形表出发继续迭代。

目标函数变回

$$\max z = -3x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

重复基础单纯形法的步骤2、3

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0
-3	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2
$c_j - z_j$			0	0	3	0	3/2
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4
$c_j - z_j$			-9/2	0	0	0	-3/4

则该问题最优解为$X = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0\right)$，Z=3/2