上海大学
SHANGHAI UNIVERSITY

整数规划

主要内容

- 整数规划的特点及应用
- 割平面法
- 分支定界法

整数规划的特点及应用

- **整数规划（简称：IP）**

要求一部分或全部决策变量取整数值的规划问题称为整数规划。 不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为**该整数规划问题的松弛问题**。若该松弛问题是一个线性规划，则称该整数规划为**整数线性规划**。

- **整数线性规划数学模型的一般形式：**

$$\max Z(\text{或}\min Z)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1.2\cdots m)\\ x_j\geq 0\,(\mathrm{j}=1.2\cdots \mathrm{n})\text{且部分或全部为整数}\end{cases}$$

整数规划的特点及应用

- **整数线性规划问题的种类：**

① **纯整数线性规划**：指全部决策变量都必须取整数值的整数线性规划。

② **混合整数线性规划**：决策变量中有一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值的整数线性规划。

③ **0-1型整数线性规划**：决策变量只能取值0或1的整数线性规划。

整数规划的特点及应用

- **整数规划的典型例子**

- **例 1** 工厂A_1和A_2生产某种物资。由于该种物资供不应求，故需要再建一家工厂。相应的建厂方案有A_3和A_4两个。这种物资的需求地有B_1,B_2,B_3,B_4四个。各工厂年生产能力、各地年需求量、各厂至各需求地的单位物资运费c_{ij}，见下表：

	B_1	B_2	B_3	B_4	年生产能力
A_1	2	9	3	4	400
A_2	8	3	5	7	600
A_3	7	6	1	2	200
A_4	4	5	2	5	200
年需求量	350	400	300	150	

整数规划的特点及应用

- 工厂A_3或A_4开工后，每年的生产费用估计分别为1200万或1500万元。现要决定应该建设工厂A_3还是A_4，才能使今后每年的总费用最少。

解：

$$\text{引入0-1变量：} y=\begin{cases}1 & \text{若建工厂} A_3 \\ 0 & \text{若不建工厂} A_3\end{cases}$$

设 x_{ij} 为由 A_i 运往 B_j 的物资数量，单位为千吨；z 表示总费用，单位万元。

则该规划问题的数学模型可以表示为：

整数规划的特点及应用

$$\min z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + [1200y + 1500(1-y)]$$

$$s.t.\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=350 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=400 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=300 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=150 \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=400 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=600 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=200y \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=200(1-y) \\ x_{ij}\ge 0 \quad (i,j=1,2,3,4) \\ y=0\text{或}1 \end{cases}$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	年生产能力
A_1	2	9	3	4	400
A_2	8	3	5	7	600
A_3	7	6	1	2	200
A_4	4	5	2	5	200
年需求量	350	400	300	150	

混合整数规划问题

整数规划的特点及应用

- **例 2** 现有资金总额为B。可供选择的投资项目有n个，项目 j 所需投资额和预期收益分别为a_j和c_j（j = 1,2,..,n），这里 n=7，此外由于种种原因，有三个附加条件：
  - 若选择项目1，就必须同时选择项目2。反之不一定
  - 项目3和4中至少选择一个；
  - 项目5,6,7中恰好选择2个。
- 应该怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大。

整数规划的特点及应用

- **解**：令 x_j 表示第 j 个项目的决策选择，记为：

$$x_j = \begin{cases} 1 & 对项目 j 投资 \\ 0 & 对项目 j 不投资 \end{cases} \quad (j = 1,2,...,n)$$

- 投资问题可以表示为：

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le B \\ x_2 \ge x_1 \\ x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_j = 0或者1 \quad (j = 1,2,\cdots n) \end{cases}$$

整数规划的特点及应用

- **例 3 指派问题或分配问题。**

人事部门欲安排四人到四个不同岗位工作，每个岗位一个人。经考核四人在不同岗位的成绩（百分制）如表所示，如何安排他们的工作使总成绩最好。

工作 / 人员	A	B	C	D
甲	85	92	73	90
乙	95	87	78	95
丙	82	83	79	90
丁	86	90	80	88

整数规划的特点及应用

- **设**

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{分配第 } i \text{ 人做 } j \text{ 工作时}\\ 0 & \text{不分配第 } i \text{ 人做 } j \text{ 工作时}\end{cases}$$

- **数学模型如下：**

$$\begin{aligned}\max Z = {} & 85x_{11}+92x_{12}+73x_{13}+90x_{14}+95x_{21}+87x_{22}+\\ & +78x_{23}+95x_{24}+82x_{31}+83x_{32}+79x_{33}+90x_{34}+\\ & +86x_{41}+90x_{42}+80x_{43}+88x_{44}\end{aligned}$$

- **要求每人做一项工作，约束条件为：**

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1\end{cases}$$

变量约束：

$x_{ij}=0$或1，i、$j=1,2,3,4$

整数规划的特点及应用

- **整数规划问题解的特征：**

① 整数规划问题的可行解集合**是它松弛问题可行解集合的一个子集**，任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件，因而不一定仍为可行解。

② 整数规划问题的可行解**一定是它的松弛问题的可行解**（反之不一定），但其最优解的目标函数值不会优于后者最优解的目标函数值。

整数规划的特点及应用

- 例 4 设整数规划问题如下

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

- 首先不考虑整数约束，得到线性规划问题（一般称为松弛问题）。

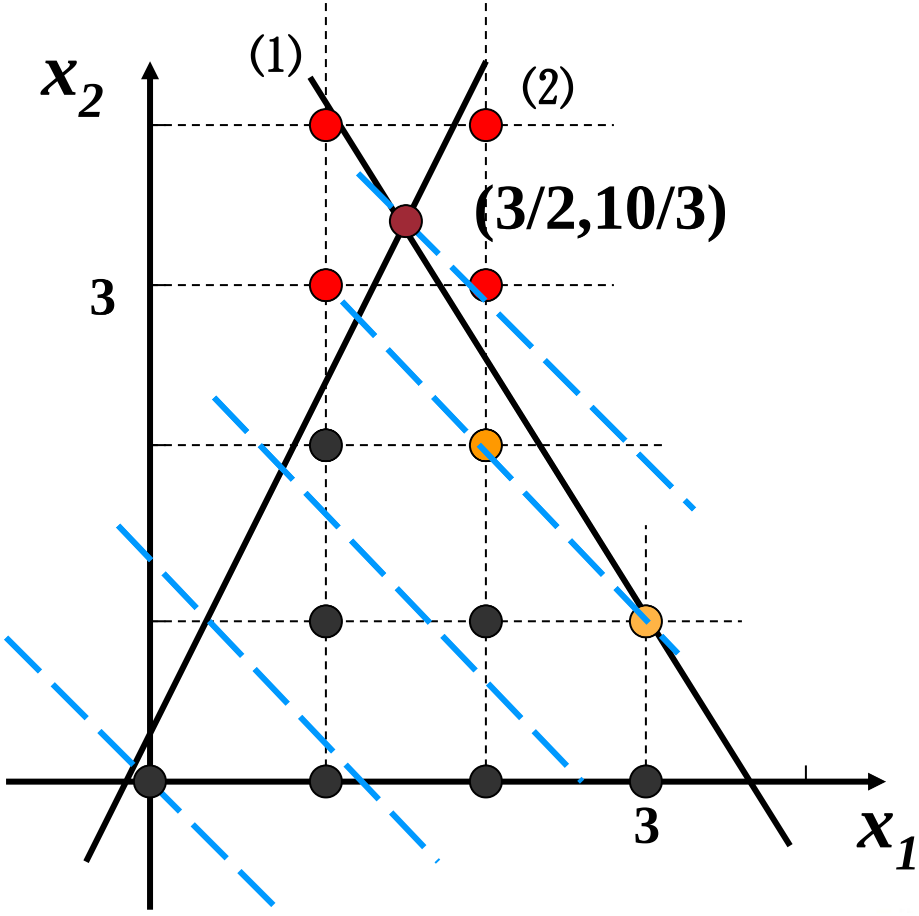
$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

整数规划的特点及应用

- 用图解法求出最优解为：x1 = 3/2，x2 = 10/3，且有Z = 29/6
- 舍入取整法求整数解(最优解): (1，3),(2，3),(1，4),(2，4)。

整数规划问题的可行解集是一个有限集，如右图所示。
其中(2,2),(3,1)点的目标函数值最大，即为Z=4



割平面法

- **纯整数规划问题：**

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1.2 \cdots m) \\ x_j \geq 0\ (j = 1.2 \cdots n),\ a_{ij}\text{和}b_i\text{为整数} \end{cases}$$

- 在松弛问题的最优单纯形表中，记Q为m个基变量的下标集合，K为n-m个非基变量的下标集合，则m个约束方程可表示为：

$$x_i + \sum_{j \in K} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i \quad i \in Q$$

割平面法

- 而对应的最优解 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$ ，其中

$$x_j^* = \begin{cases} \bar{b}_j & j \in Q \\ 0 & j \in K \end{cases}$$

- 若 $\bar{b}_j (j \in Q)$ 均为整数，则已经找到整数规划问题的最优解，反之不是。
- **割平面法：**从松弛问题的最优解中选取一个非整数分量，构造一个线性约束条件，将其加入原松弛问题中，形成一个新的线性规划，然后进行求解。若新的最优解满足整数要求，则它就是整数规划的最优解，否则重复上述步骤，直到获得整数最优解为止。

割平面法

- **若 $\bar{b}_{i_0}$ $(i_0 \in Q)$ 不是整数**，其所对应的约束方程为：

$$x_{i_0} + \sum_{j \in K} \bar{a}_{i_0,j} x_j = \bar{b}_{i_0}$$

- 将系数都表示成整数和小数部分

$\bar{a}_{i_0,j} = N_{i_0,j} + f_{i_0,j}$， $N_{i_0,j} \leqslant \bar{a}_{i_0,j}$ 且为整数， $0 \leqslant f_{i_0,j} < 1(j \in K)$

$\bar{b}_{i_0} = N_{i_0} + f_{i_0}$， $N_{i_0} < \bar{b}_{i_0}$ 且为整数， $0 < f_{i_0} < 1$

- 则有

$$x_{i_0} + \sum_{j \in K} N_{i_0,j} x_j - N_{i_0} = f_{i_0} - \sum_{j \in K} f_{i_0,j} x_j$$

- 按整数规划定义，左边是一个整数，右边是小于1的数，所以有 $f_{i_0} - \sum_{j \in K} f_{i_0,j} x_j \leqslant 0$，即 $\sum_{j \in K} (-f_{i_0,j}) x_j \leqslant -f_{i_0}$

割平面法

- **若** $\bar{b}_{i_0}\ (i_0 \in Q)$**不是整数**，其所对应的约束方程为：

$$x_{i_0} + \sum_{j \in K} \bar{a}_{i_0,j} x_j = \bar{b}_{i_0}$$

- **割平面约束方程：**

$$\sum_{j \in K} (-f_{i_0,j}) x_j \leqslant -f_{i_0}$$

- **在单纯形表中选择哪一行构造割平面方程？**选择具有最大小数部分的非整数分量所在的行，可以提高“切割”效果，减少“切割”次数。

割平面法

- **例 5：用割平面法求解纯整数规划：**

$$\max z = 3x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leqslant 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \geqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

割平面法 $\sum_{j\in K}(-f_{i_0,j})x_j \leqslant -f_{i_0}$

- **引入松弛变量化为标准型，并利用单纯形法求解松弛问题，有：**

C_j			3	-1	0	0	0
C_B	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	13/7	1	0	1/7	0	2/7
-1	x_2	9/7	0	1	-2/7	0	-3/7
0	x_4	31/7	0	0	-3/7	1	22/7
σ_j			0	0	-5/7	0	-3/7

- 从第一行产生一个割平面约束：$-\frac{1}{7}x_3-\frac{2}{7}x_5\leqslant -\frac{6}{7}$
- 引入松弛变量，得到割平面方程：

$$-\frac{1}{7}x_3-\frac{2}{7}x_5+x_6=-\frac{6}{7}$$

$$\sum_{j\in K}(-f_{i_0,j})x_j \leqslant -f_{i_0}$$

	C_j			3	-1	0	0	0	0
	C_B	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
初始	3	x_1	13/7	1	0	1/7	0	2/7	0
	-1	x_2	9/7	0	1	-2/7	0	-3/7	0
	0	x_4	31/7	0	0	-3/7	1	22/7	0
	0	x_6	-6/7	0	0	-1/7	0	[-2/7]	1
	σ_j			0	0	-5/7	0	-3/7	0
最终	3	x_1	1	1	0	0	0	0	1
	-1	x_2	5/4	0	1	0	-1/4	0	-5/4
	0	x_3	5/2	0	0	1	-1/2	0	-11/2
	0	x_5	7/4	0	0	0	1/4	1	-3/4
	σ_j			0	0	0	-1/4	0	-17/4

从第四行产生一个割平面约束：$-\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{4}x_6\leqslant-\frac{3}{4}$

引入松弛变量，得到割平面方程 $-\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{4}x_6+x_7=-\frac{3}{4}$

割平面法

- 利用对偶单纯形法求解，得到：

C_j			3	-1	0	0	0	0	0
C_B	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_1	1	1	0	0	0	0	1	0
-1	x_2	2	0	1	0	0	0	-1	-1
0	x_3	4	0	0	1	0	0	-5	-2
0	x_5	1	0	0	0	0	1	-1	1
0	x_4	3	0	0	0	1	0	1	-4
σ_j			-1	0	0	0	-4	0	-1

分支定界法

- **分支定界法的解题步骤：**
- **1）求整数规划的松弛问题最优解；**

  若松弛问题的最优解满足整数要求，得到整数规划的最优解否则转下一步；
- **2）分支与定界：**
- 任意选一个非整数解的变量x_i，在松弛问题中加上约束：

$$x_i \le [\, x_i \,] \quad 和 \quad x_i \ge [\, x_i \,]+1$$

- 组成两个新的松弛问题，称为**分支**。新的松弛问题具有特征：当原问题是求最大值时，目标值是分支问题的上界；当原问题是求最小值时，目标值是分支问题的下界。

分支定界法

- **分支定界法的解题步骤：**
- 检查所有分支的解及目标函数值，若某分支的解是整数并且目标函数值大于（max）等于其它分枝的目标值，则将其它分支剪去不再计算，若还存在非整数解并且目标值大于(max)整数解的目标值，需要继续分支，再检查，直到得到最优解。

分支定界法

- 例 6 用分支定界法求解整数规划问题

$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且全为整数} \end{cases} \qquad \text{IP}$$

- 解：首先去掉整数约束，变成一般线性规划问题(原整数规划问题的松驰问题)

$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{LP}$$

分支定界法

- **用图解法求松弛问题的最优解，如图所示。**

① x_1＝18/11, x_2 =40/11

② Z=－218/11≈(－19.8)

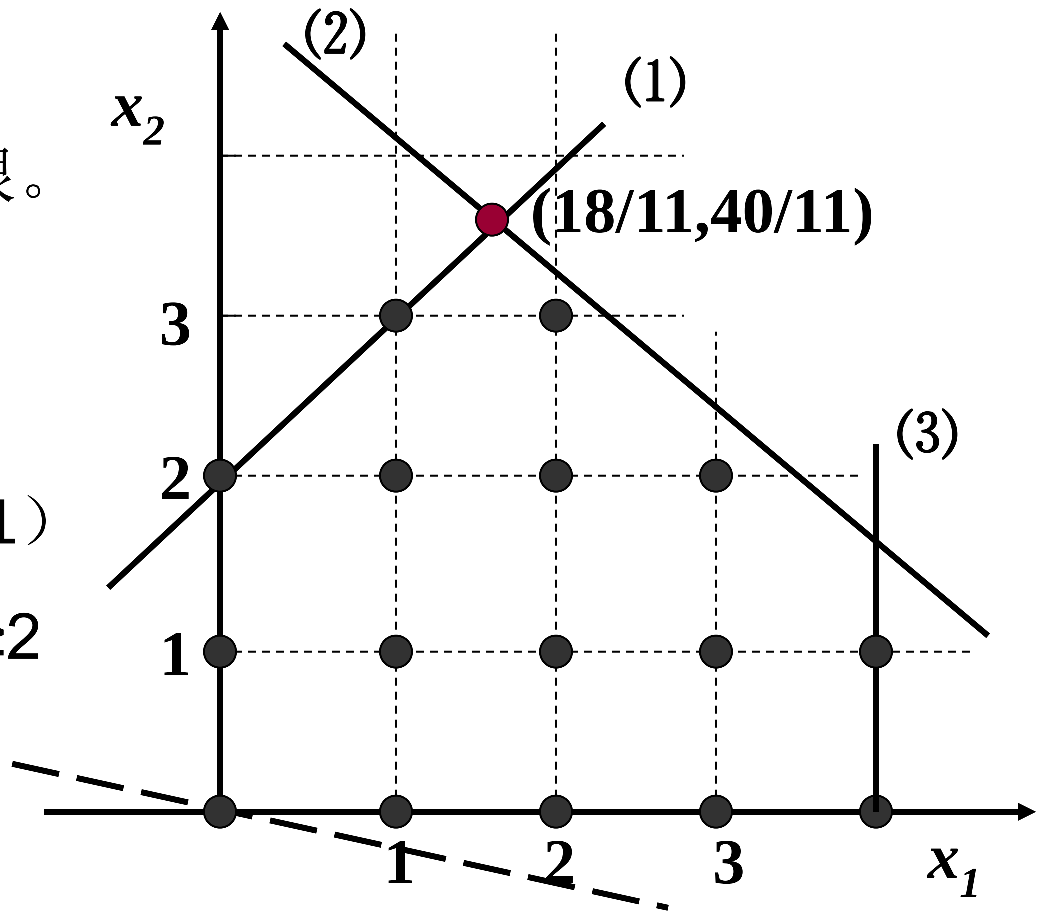
即Z 也是*IP*最小值的下限。

③ 对于x_1＝18/11≈1.64，

④ 取值$x_1 \le 1$， $x_1 \ge 2$

⑤ 先将（LP）划分为（LP1）

和（LP2）,取x1 ≤1, x1 ≥2



分支定界法

- **分支：**

$$\min Z=-x_1-5x_2 \qquad\qquad \min Z=-x_1-5x_2$$

$$(IP1)\begin{cases} x_1-\ x_2\geq -2\\ 5x_1+6x_2\leq 30\\ x_1\qquad\quad\ \leq 4\\ x_1\qquad\quad\ \leq 1\\ x_1,x_2\geq 0\text{且为整数}\end{cases} \qquad (IP2)\begin{cases} x_1-\ x_2\geq -2\\ 5x_1+6x_2\leq 30\\ x_1\qquad\quad\ \leq 4\\ x_1\qquad\quad\ \geq 2\\ x_1,x_2\geq 0\text{且为整数}\end{cases}$$

- **分别求出（LP1）和（LP2）的最优解。**

分支定界法

- **先求LP1**, 如图所示。此时在 B 点取得最优解。
- $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ Z^{(1)} = -16$
- 找到整数解，问题已探明，
  此支停止计算。

同理求LP2,如图所示。在*C* 点取得最优解。即:

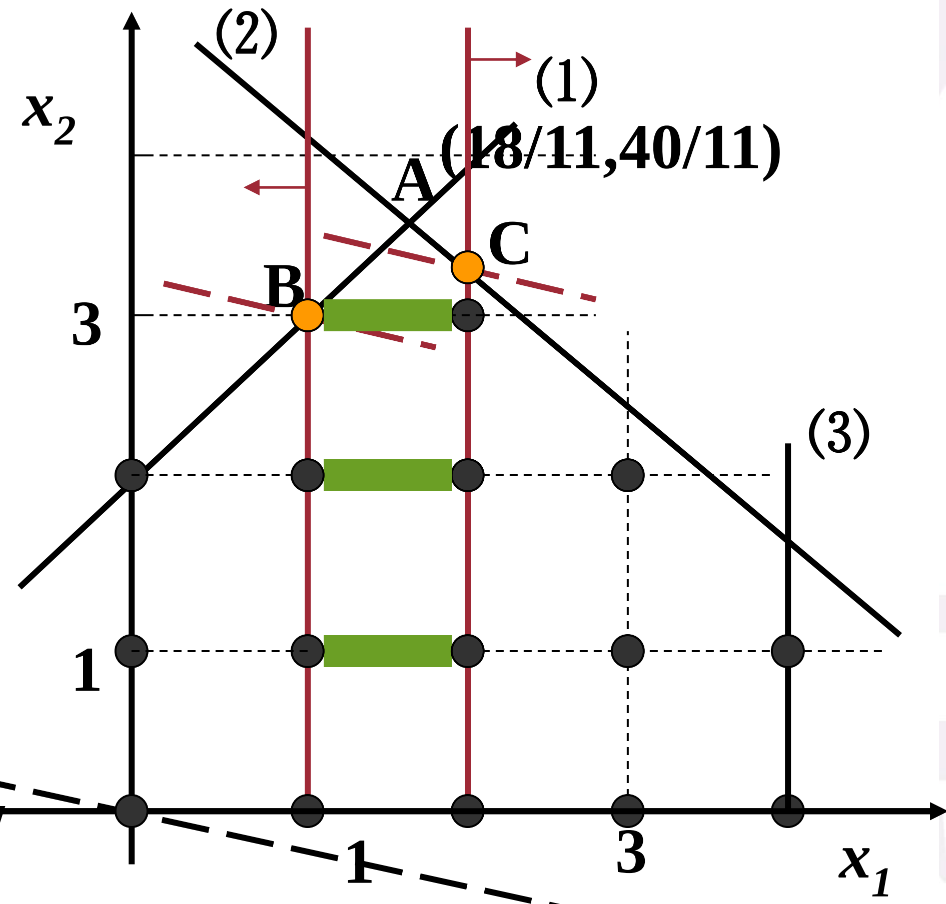
$x_1 = 2,\ \boldsymbol{x_2 = 10/3},$

$Z^{(2)} = -56/3 \approx -18.7$

$\because Z^{(2)} < Z^{(1)} = -16$

∴原问题有比 - 16更小的最优解，

但 *x2* 不是整数，故继续分支。



分支定界法

- 在 LP2 中分别再加入条件： $x_2 \le 3$, $x_2 \ge 4$ 得下式两支：

$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP21)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

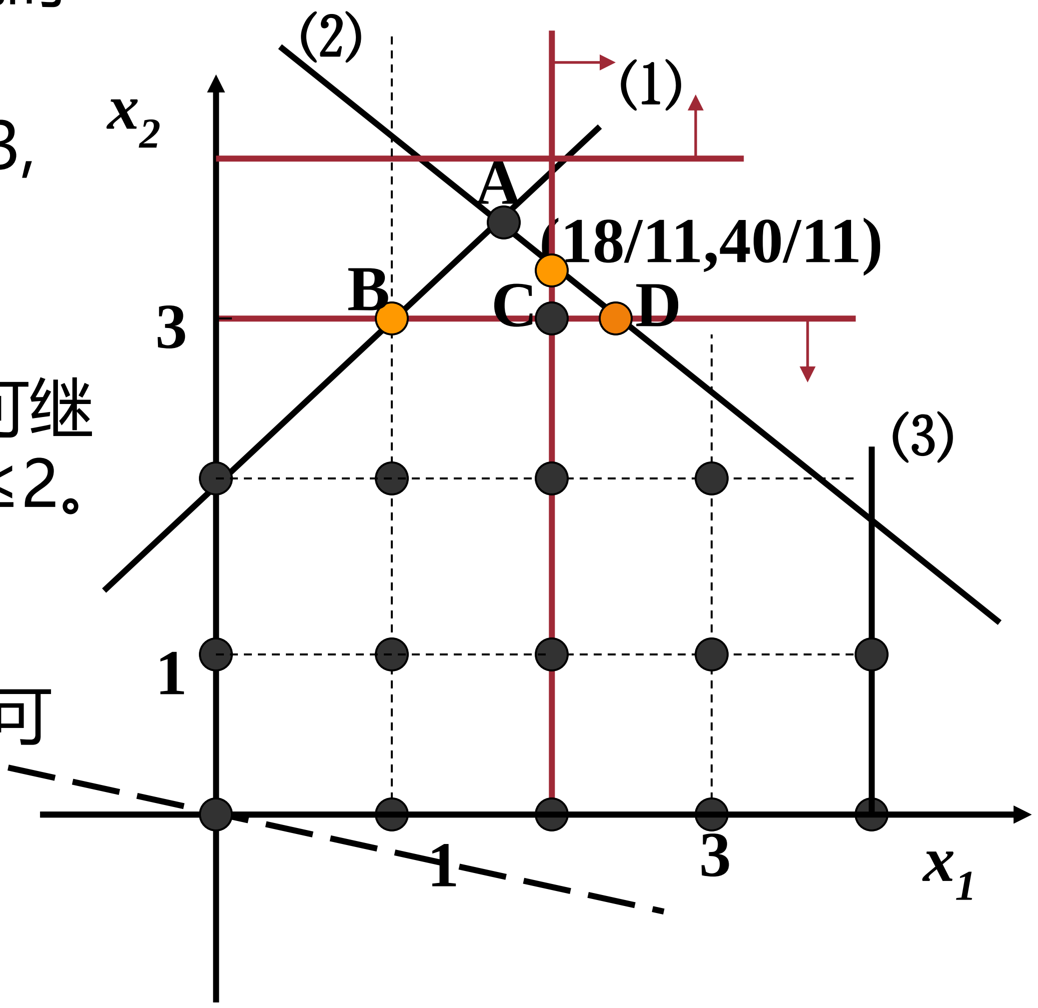
$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP22)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

- 分别求出 LP21 和 LP22 的最优解。

分支定界法

- **先求LP21**,如图所示。此时D 在点取得最优解。
- 即 $\mathbf{x_1 = 12/5 \approx 2.4}$, $x_2 = 3$,
- $Z^{(21)} = -87/5 \approx -17.4 < Z^{(1)} = -16$
- 但$x_1 = 12/5$不是整数，可继续分支。即 $x_1 \geq 3$， $x_1 \leq 2$。
- **求LP22**，如图所示。无可行解，故不再分支。



分支定界法

- 在（LP21）的基础上继续分枝。加入条件$x_1 \geq 3$， $x_1 \leq 2$有下式：

$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP211)\begin{cases} x_1 - \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \qquad\qquad \leq 4 \\ x_1 \qquad\qquad \geq 2 \\ x_2 \qquad\qquad \leq 3 \\ x_1 \qquad\qquad \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

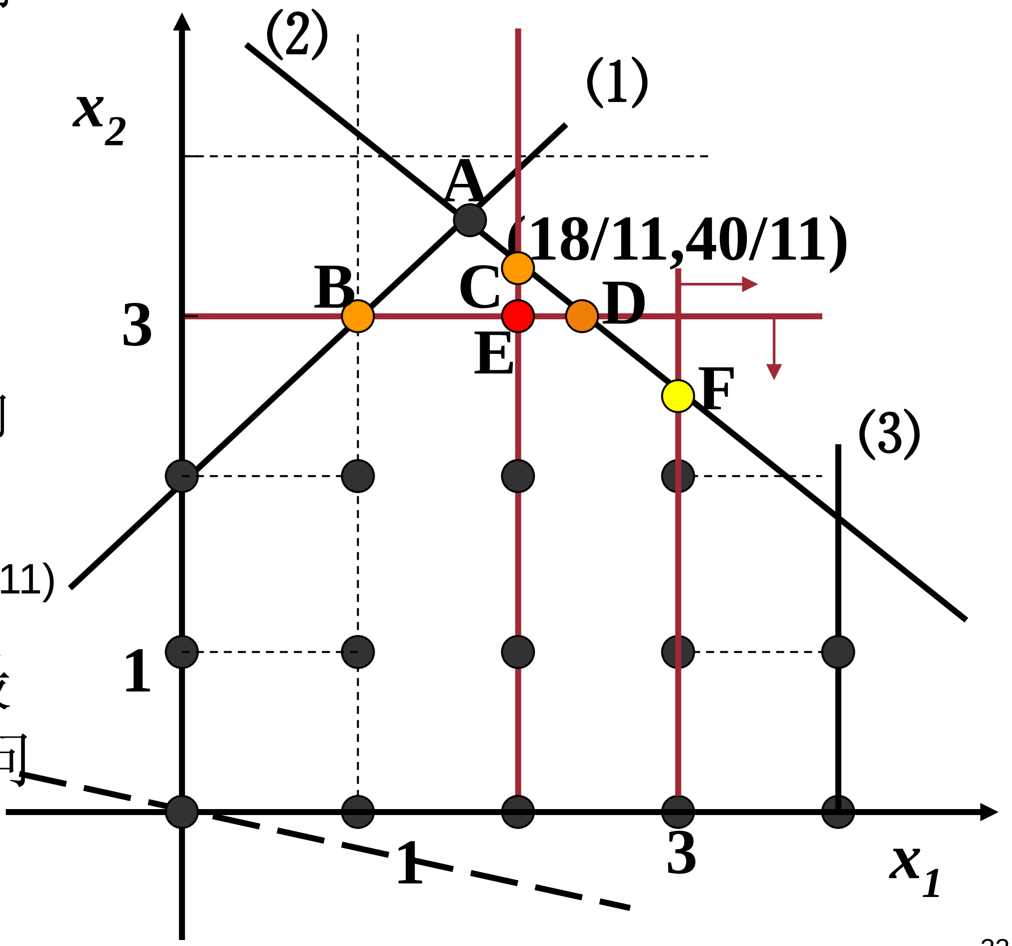
$$\min Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP212)\begin{cases} x_1 - \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \qquad\qquad \leq 4 \\ x_1 \qquad\qquad \geq 2 \\ x_2 \qquad\qquad \leq 3 \\ x_1 \qquad\qquad \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

- 分别求出（LP211）和（LP212）的最优解

分支定界法

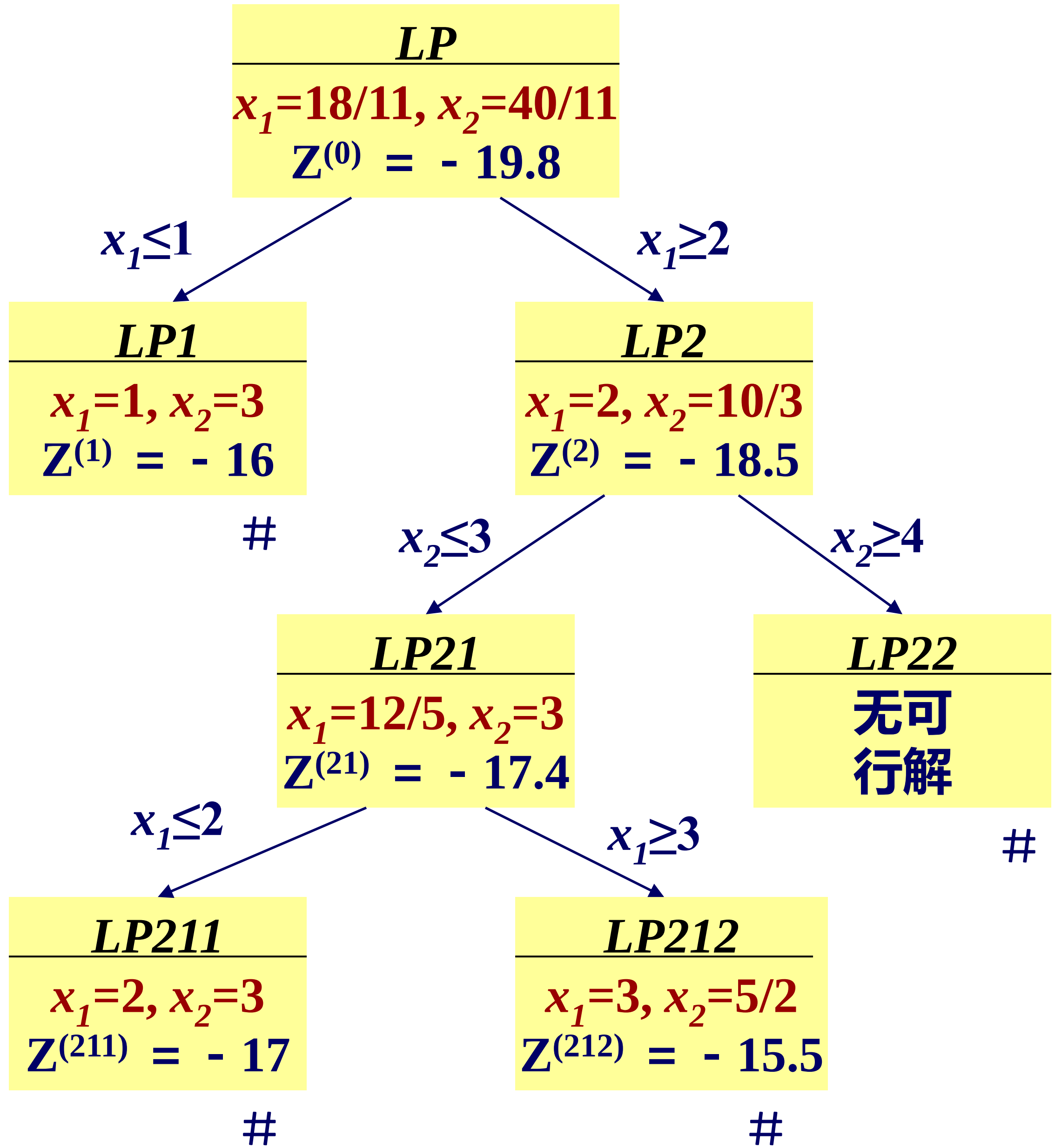
- 先求（**LP211**）,如图所示。此时 在*E*点取得最优解。即 $x1=2,\ x2=3,\ Z^{(211)}=-17$
- 找到整数解，问题已探明，此支停止计算。
- 求（**LP212**），如图所示。此时 F在点取得最优解。即 $x1=3,\ x2=2.5,$ $Z^{(212)}=-31/2\approx-15.5>Z^{(211)}$
- 如对LP212继续分解，其最小值也不会低于－15.5，问题探明, 剪支。



分支定界法

- 原整数规划问题的最优解为:
- $x_1=2,\ x_2=3,$

  $Z^* = -17$
- 以上的求解过程可以用一个树形图表示如右:



分支定界法

- **例 7** 用分支定界法求解

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

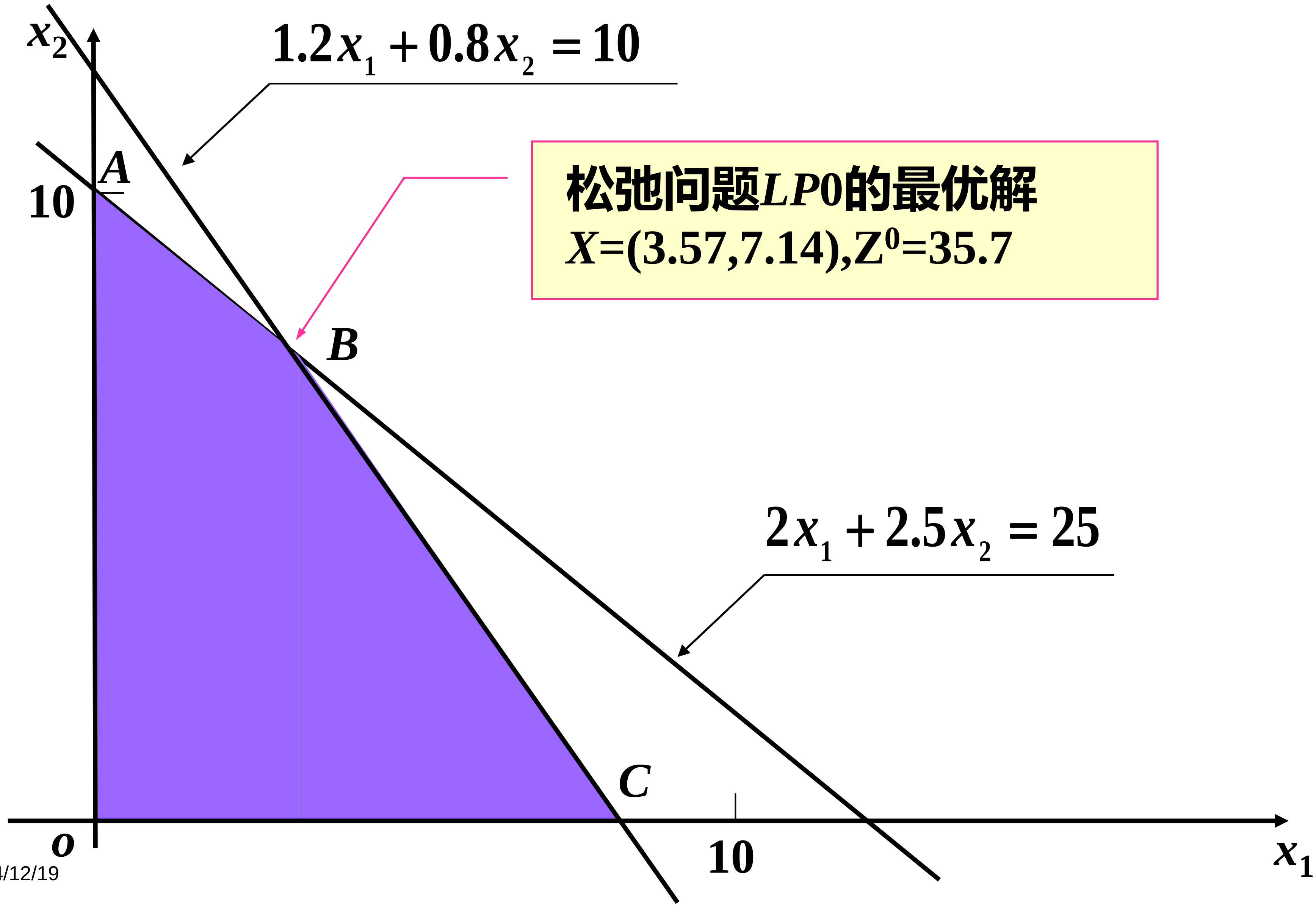
$$\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且均取整数} \end{cases}$$

解: 先求对应的松弛问题（记为LP^0）

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$st \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \qquad (LP^0) \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

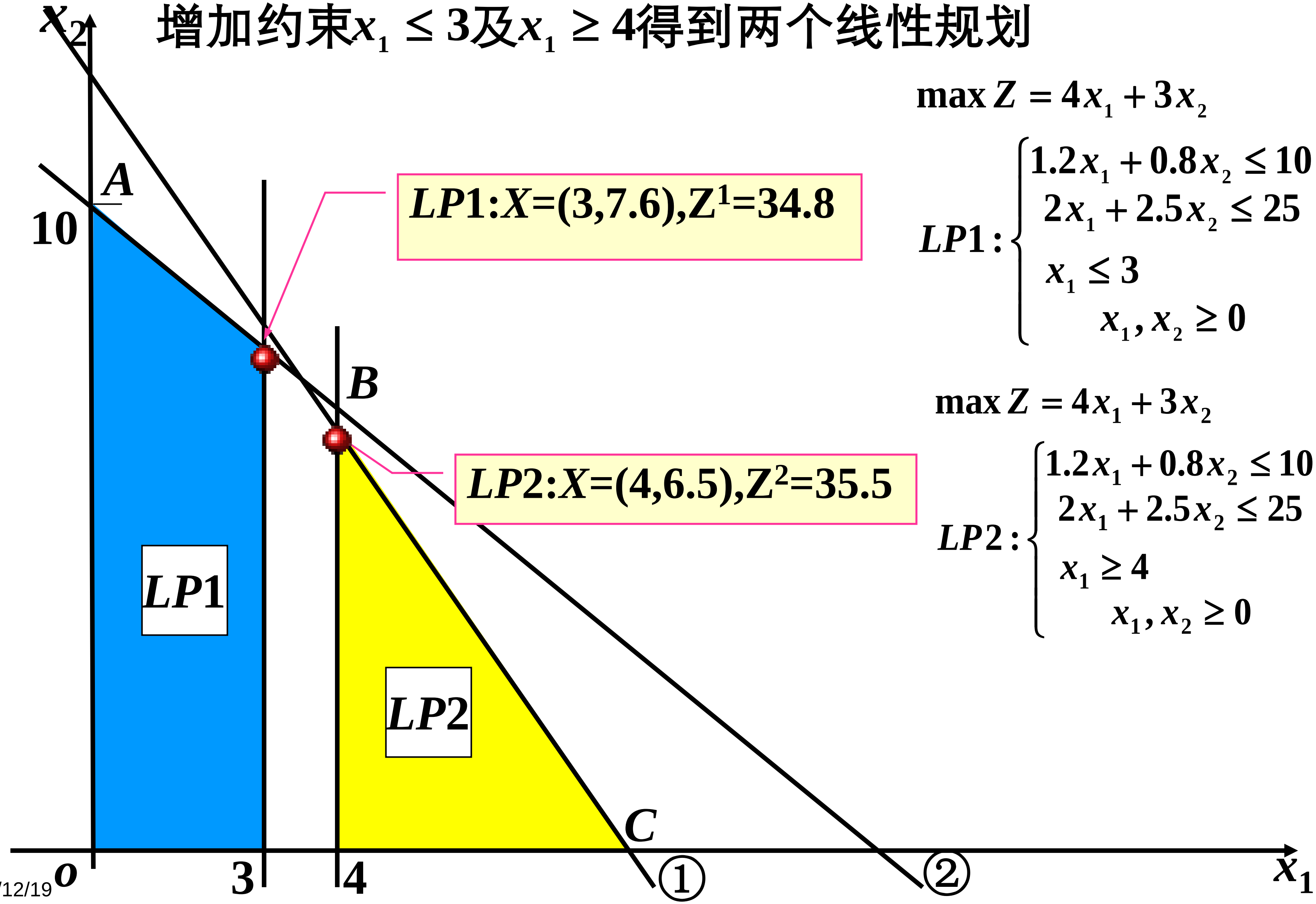


松弛问题*LP*0的最优解

$X=(3.57,7.14), Z^0=35.7$

分支定界法

增加约束$x_1 \le 3$及$x_1 \ge 4$得到两个线性规划



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

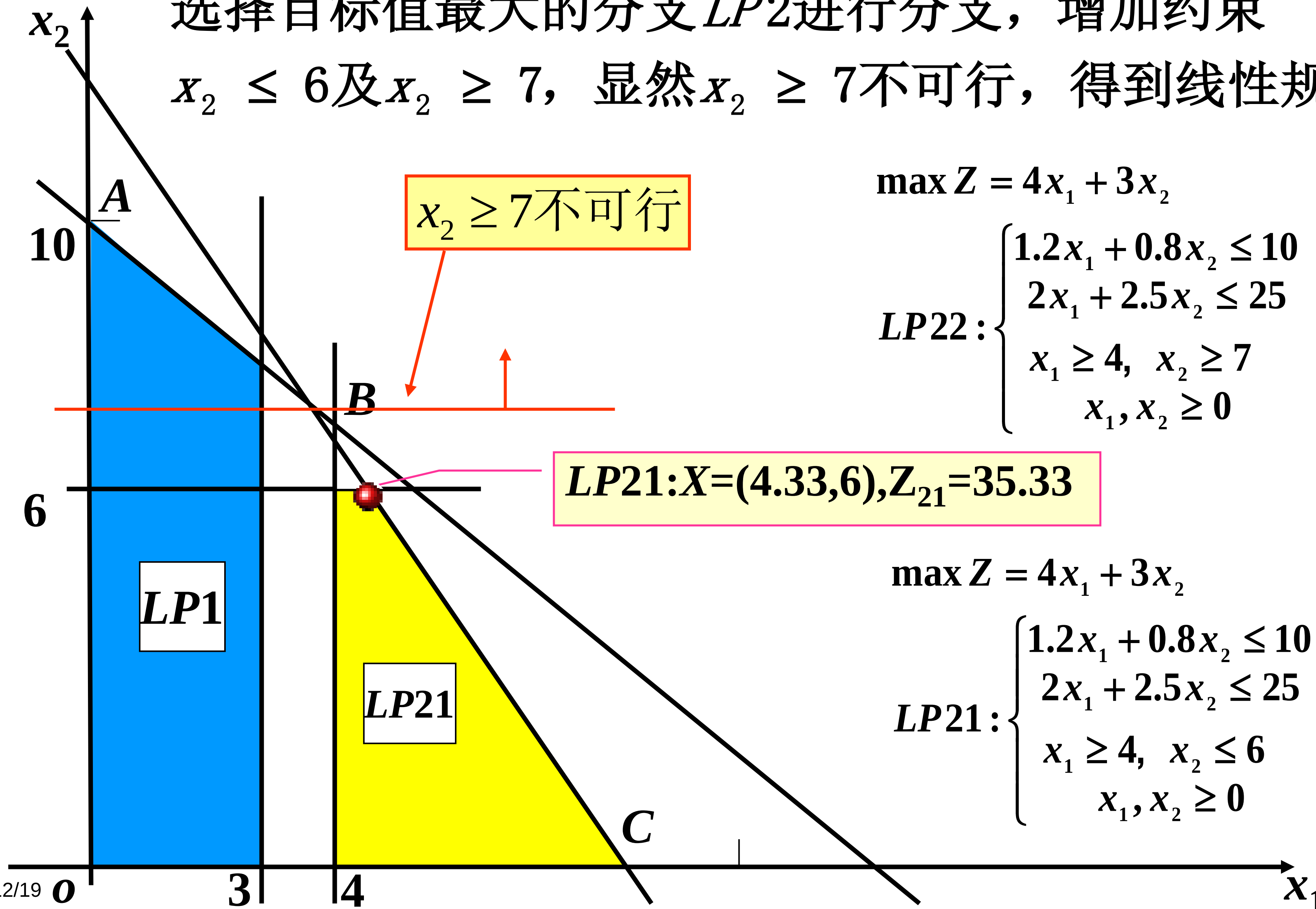
$$LP1: \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP2: \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

选择目标值最大的分支$LP2$进行分支，增加约束$x_2\le 6$及$x_2\ge 7$，显然$x_2\ge 7$不可行，得到线性规划



$LP21: X=(4.33,6), Z_{21}=35.33$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

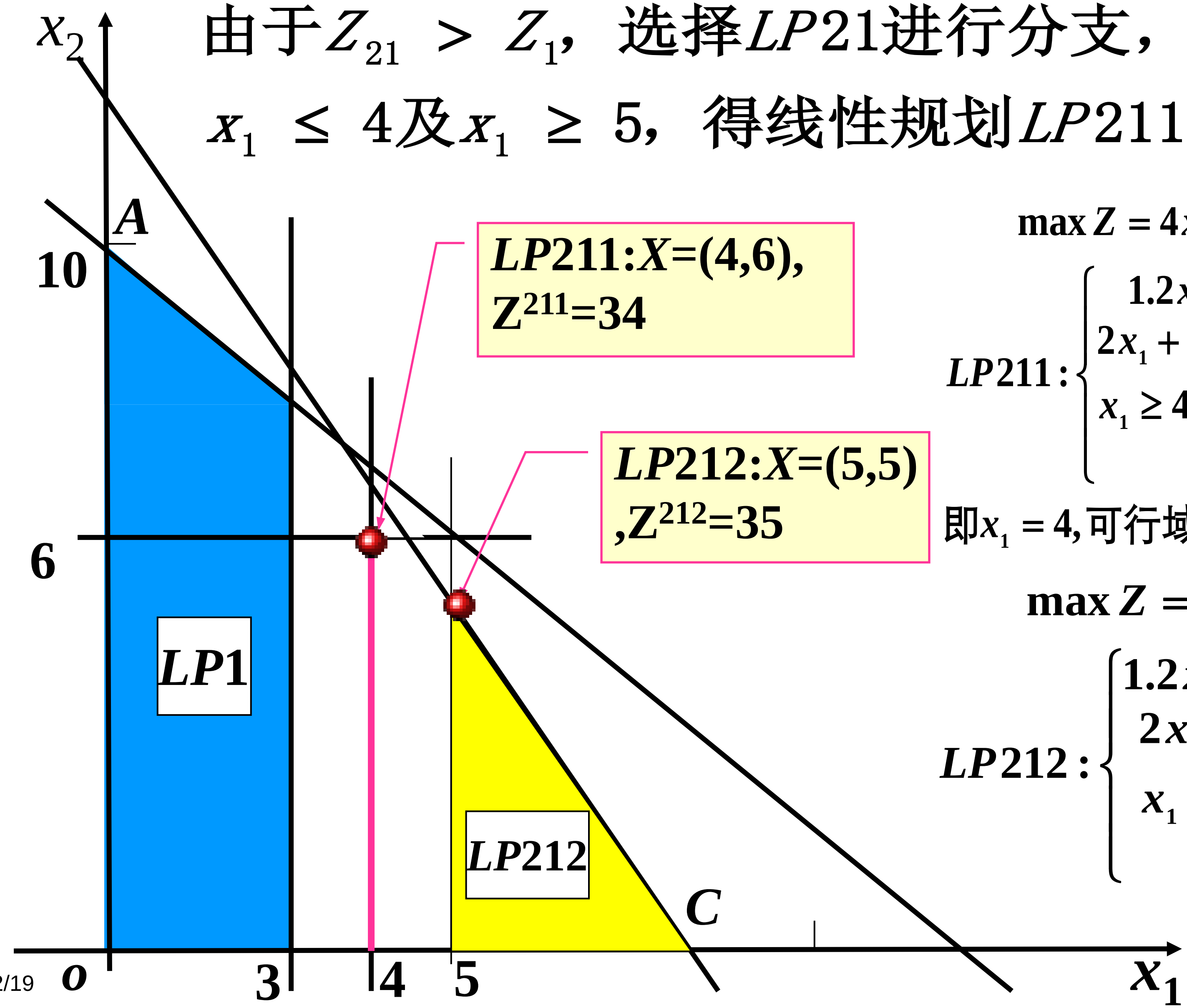
$$LP22:\begin{cases}1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10\\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25\\ x_1 \ge 4,\quad x_2 \ge 7\\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP21:\begin{cases}1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10\\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25\\ x_1 \ge 4,\quad x_2 \le 6\\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases}$$

分支定界法

由于$Z_{21} > Z_1$，选择$LP21$进行分支，增加约束$x_1 \le 4$及$x_1 \ge 5$，得线性规划$LP211$及$LP212$：



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP211:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \le 6,\ \ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

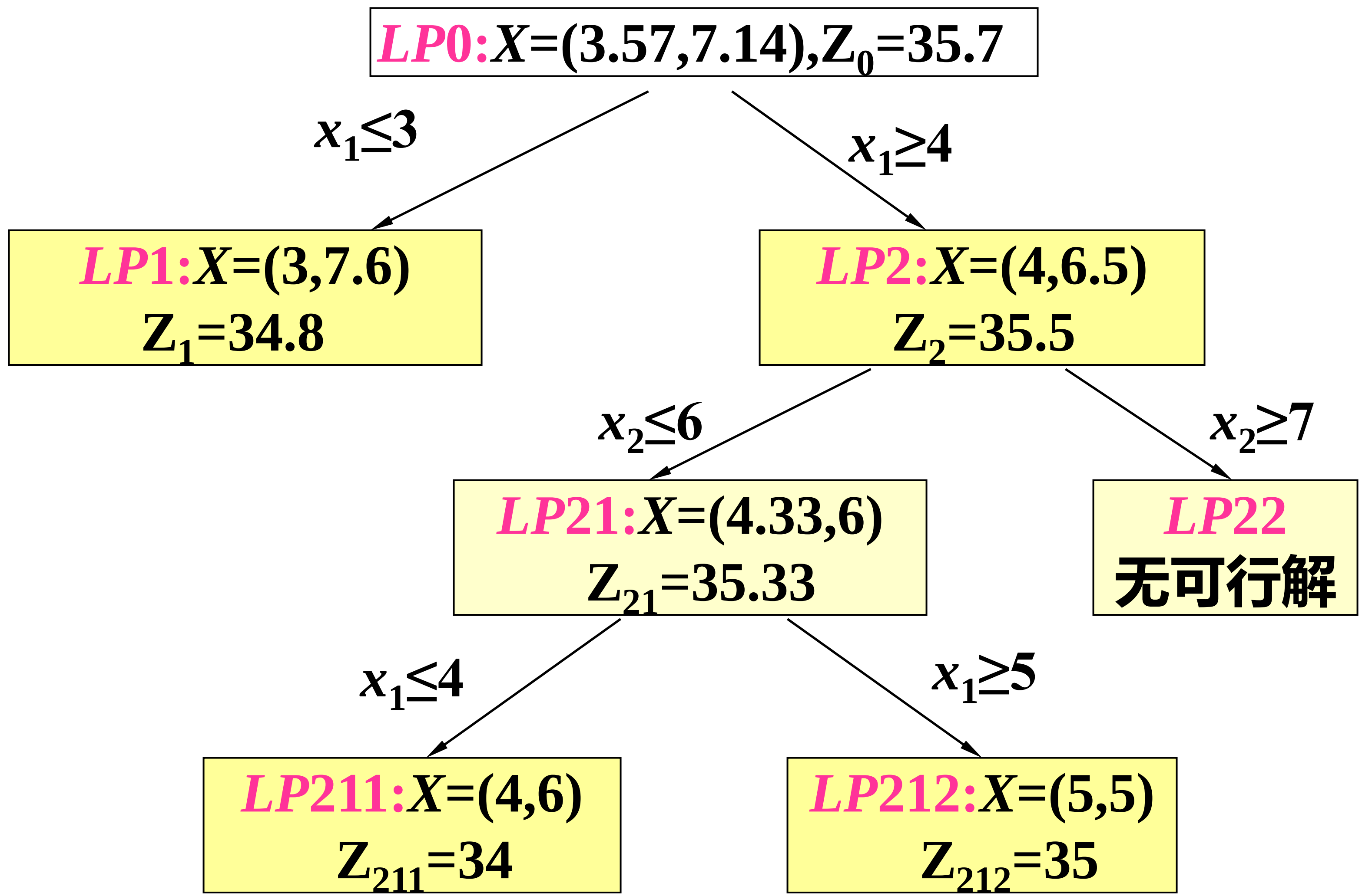
即$x_1 = 4$,可行域是一条线段

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP212:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 5,\ \ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

- 上述分支过程可用下图表示：



割平面法和分支定界法异同

1. **相同点**：缩小松弛问题的可行域，使得整数解出现在可行域的顶点。

2. **不同点**：

① **割平面法**：

通过添加线性约束，去掉可行域的一部分；

② **分支定界方法**：

将可行域一分为三，舍弃中间部分。

作 业

运筹学教程，p.146

① **5.1**

② **5.4(1)**

作 业

5.1 下列说法中正确的有：

(1) 用分枝定界法求解一个极大化的整数规划问题时，任何一个可行解的目标函数值是该问题目标函数值的下界；

(2) 用割平面法求解整数规划时，构造的割平面有可能切去一些不属于最优解的整数值；

(4) 一个整数规划问题如存在两个以上最优解，则一定有无穷多最优解。

谢　谢！