Lecture 2: Complex Numbers & Signal Property

- 重要概念：

对离散时间信号，频率为ω_0的复指数信号与频率为ω_0 +m.2π的复指数信号是同一个信号（m为整数）；对连续时间信号，上述关系不成立。

Discrete-time:

$$e^{j(\omega_0+m\cdot 2\pi)n} = \cos(\omega_0 n + m\cdot 2\pi\, n) + j\sin(\omega_0 n + m\cdot 2\pi\, n)$$

$$= \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n) \ \text{(as } m.n \text{ is an integer)}$$

$$= e^{j\omega_0 n}$$

Continuous-time:

$$e^{j(\omega_0+m\cdot 2\pi)t} = \cos(\omega_0 t + m\cdot 2\pi\, t) + j\sin(\omega_0 t + m\cdot 2\pi\, t)$$

$$\neq \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) \ \text{(as } m.t \text{ may not be an integer)}$$

$$= e^{j\omega_0 t}$$

Lecture 2: Complex Numbers & Signal Property

- 上述概念的意义：

For periodic discrete-time:

$$e^{j(\omega_0+m\cdot 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow\ e^{j(k\omega_0+2\pi)n} = e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow\ e^{j(k\omega_0+N\omega_0)n} = e^{j((k+N)\omega_0)n} = e^{jk\omega_0 n}$$

对周期为N的离散时间复指数信号，第k+N次谐波与第k次谐波相同

=> 对周期为N的离散时间信号进行傅里叶级数展开，则只有N个不同的频率分量，频域表示具有周期性。

Lecture 2: Complex Numbers & Signal Property

- 上述概念的另一个意义：

判断离散时间信号是否具有周期性：

$$e^{j(\omega_0+m\cdot 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow\ e^{j(\omega_0 n+m\cdot 2\pi)} = e^{j\omega_0 n}$$

若具有周期性(周期为N)，则:

$$e^{j(\omega_0 n+m\cdot 2\pi)} = e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 n+\omega_0 N)}$$

对具有周期性的离散时间信号, ω_0N=2πm, 则基波频域满足$\omega_0 = 2\pi\left(\frac{m}{N}\right)$（$m, N$为整数)

例：$x[n] = \cos(\frac{1}{8}n - \pi)$不是周期信号，因为$\omega_0 = \frac{1}{8}$，不满足$\omega_0 = 2\pi\left(\frac{m}{N}\right)$（$m, N$为整数
)

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 时域连续、离散、周期、非周期对应频域特点：

Periodic in time domain ↔ Discrete in frequency domain

Aperiodic in time domain ↔ Continuous in frequency domain

Continuous in time domain ↔ Aperiodic in frequency domain

Discrete in time domain ↔ Periodic in frequency domain

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数、傅里叶变换转换关系：

$$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

傅里叶级数、傅里叶变换常用性质

	连续时间傅里叶级数 $x(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k$	连续时间傅里叶变换 $x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)$	离散时间傅里叶级数 $x[n]\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k$	离散时间傅里叶变换 $x[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})$
线性	$\mathrm{A}x(t)+By(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}Aa_k+Bb_k$	$\mathrm{a}x(t)+by(t)\overset{F}{\leftrightarrow}aX(j\omega)+bY(j\omega)$	$\mathrm{A}x[n]+By[n]\overset{FS}{\leftrightarrow}Aa_k+Bb_k$	$\mathrm{a}x[n]+by[n]\overset{F}{\leftrightarrow}aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
时移	$x(t-t_0)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_ke^{-jk\omega_0t_0}$	$x(t-t_0)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$	$x[n-n_0]\overset{FS}{\leftrightarrow}a_ke^{-jk\omega_0n_0}$	$x[n-n_0]\overset{F}{\leftrightarrow}X\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega n_0}$
频移	$x(t)e^{jM\omega_0t}\overset{FS}{\leftrightarrow}a_{k-M}$	$x(t)e^{j\omega_0t}\overset{F}{\leftrightarrow}X(j(\omega-\omega_0))$	$x[n]e^{jM\omega_0n}\overset{FS}{\leftrightarrow}a_{k-M}$	$x[n]e^{j\omega_0n}\overset{F}{\leftrightarrow}X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
时间反转	$x(-t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_{-k}$	$x(-t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(-j\omega)$	$x[-n]\overset{FS}{\leftrightarrow}a_{-k}$	$x[-n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(e^{-j\omega})$
尺度变换	$x(\alpha t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k$ （此时a_k对应的频率由$\mathrm{k}\omega_0$变为$\mathrm{k}\omega_0\alpha$）	$x(at)\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$	$x_{(m)}[n]\overset{FS}{\leftrightarrow}\frac{1}{m}a_k$ （m为大于0的整数，此时a_k对应的频率由$\mathrm{k}\omega_0$变为$\frac{\omega_0}{m}\alpha$）	$x_{(k)}[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X\left(e^{jk\omega}\right)$ （k为大于0的整数）
卷积	$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\overset{FS}{\leftrightarrow}Ta_kb_k$	$x(t)*h(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)H(j\omega)$	$\sum_{r=\langle N\rangle}x[r]y[n-r]\overset{FS}{\leftrightarrow}Na_kb_k$	$x[n]*h[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$
乘法	$\mathrm{x}(t)y(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k*b_k$	$s(t)p(t)\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}[S(j\omega)*P(j\omega)]$	$\mathrm{x}(t)y(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}\sum_{l=\langle N\rangle}a_lb_{k-l}$	$x_1[n]x_2[n]\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
帕斯瓦尔关系	$\frac{1}{T}\int_0^T\lvert x(t)\rvert^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert a_k\rvert^2$	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2d\omega$	$\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}\lvert x[n]\rvert^2=\sum_{k=\langle N\rangle}\lvert a_k\rvert^2$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2d\omega$

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数、傅里叶变换常用性质

其它重要性质：

1. 信号奇偶分解：

   信号$x(t)$的偶信号部分：$x_e(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$

   信号$x(t)$的奇信号部分：$x_o(t)=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$

2. 奇偶共轭性质：

   信号时域表示为实且偶，则频域表示也为实且偶；

   信号时域表示为实且奇，则频域表示也为纯虚且奇。

3. 对偶性：

   连续时间傅里叶变换的对偶性：$x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)=X'(\omega)$

   $X'(t)\overset{F}{\leftrightarrow}2\pi x(-\omega)$

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数、傅里叶变换常用性质

4. 连续时间傅里叶变换

时域微分：$\frac{dx(t)}{dt}\overset{F}{\leftrightarrow}j\omega X(j\omega)$（高通）

频域微分：$\mathrm{t}x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}\mathrm{j}\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

时域积分：$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$（低通）

5. 离散时间傅里叶变换

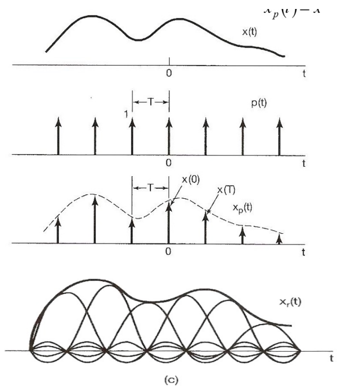
时域一阶差分*：$x[n]-x[n-1]\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)\left(1-e^{-j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$（高通）

频域微分：$nx[n]\overset{F}{\leftrightarrow}j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$

时域累加*：$\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X\left(e^{j\omega}\right)+\pi X\left(e^{j0}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$ （低通）

Lecture 6: Sampling

- 信号采样的数学模型：冲激串采样
- 信号重建的方法：低通滤波器，时域表现为内插

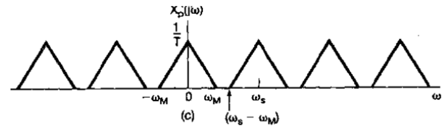


Lecture 6: Sampling

Impulse train sampling

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j(\omega - k\omega_s)\right)$$

For $\omega_s - \omega_M > \omega_M \Rightarrow \omega_s > 2\omega_M$:



- In such a case, $x(t)$ can be precisely reconstructed by feeding $x_p(t)$ into an ideal low-pass filter with gain T and cut-off frequency $\omega_c \in (\omega_M, \omega_s - \omega_M)$

Lecture 6: Sampling

- 奈奎斯特采样定理：
- A band-limited （带限） continuous-time signal can be sampled and perfectly reconstructed from its samples if the waveform is sampled over twice as fast as it's highest frequency component.

The highest frequency of $x(t)$: ω_M

The highest sampling frequency that may cause aliasing effect (Nyquist rate奈奎斯特率):

$$\omega_s = 2\omega_M$$

- 混叠现象：When $\omega_s < 2\omega_M$, spectrum overlapped, frequency components confused, resulting in aliasing effect, such that the sampled signal can’t be reconstructed by low-pass filtering.