第六章　图形变换

本章主要内容

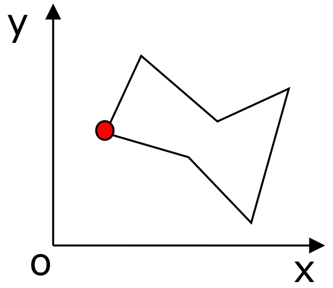
- 线性代数基础：矢量(向量、矩阵等)；
- 二维平移变换、放缩变换、旋转变换、错切变换、对称变换；
- 齐次坐标，变换的固定坐标系模式与活动坐标系模式，世界坐标系、用户坐标系、设备(屏幕)坐标系与局部坐标系；
- 裁剪窗口与视区，二维图形的显示流程图，窗口到视区的变换；
- 三维平移变换、放缩变换、旋转变换，坐标系之间的变换。

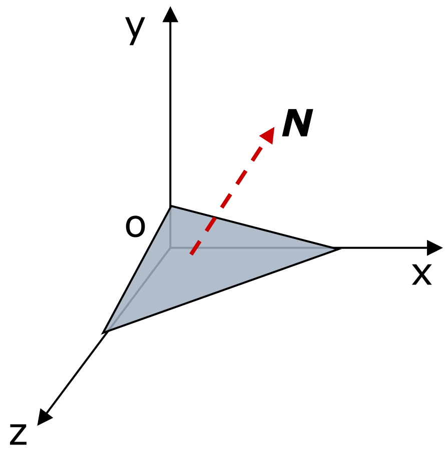
掌握要点

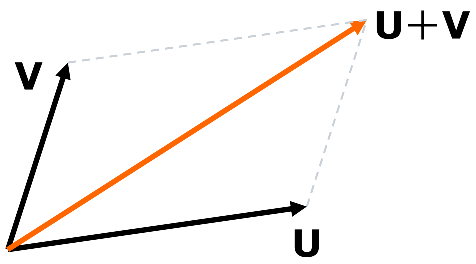
- 掌握矢量、矩阵以及它们的运算；
- 掌握二维平移变换、放缩变换、旋转变换、错切变换及对称变换；
- 了解变换的两种模式：固定坐标系模式与活动坐标系模式；
- 掌握坐标系的概念：世界坐标系、用户坐标系、设备(屏幕)坐标系与局部坐标系；
- 掌握什么是裁剪窗口与视区以及它们各自的作用；
- 掌握齐次坐标的概念，二维(三维)变换在齐次坐标下的表示；
- 了解二维图形的显示过程，掌握窗口到视区的变换；
- 掌握三维平移变换、放缩变换、旋转变换；
- 掌握坐标系之间的变换。

数学基础

- 矢量（向量，vector)
  - 有向线段，具有方向和大小两个参数
  - 图形学的基本研究对象：点、法向
- 什么是向量
  - 中学数学/物理：既有大小又有方向的量
    - 运算满足平行四边形法则
  - 线性代数：向量空间（线性空间）的元素
    - 运算满足公理化定义







数学基础

- 向量空间(Vector Space)
  - 图形学:实数域上的向量空间
    - 向量加法结合律：$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$
    - 向量加法交换律：$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
    - 向量加法单位元：$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}$
    - 向量加法逆元：$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$
    - 标量乘法与数域乘法的结合律：$a(b\boldsymbol{v})=(ab)\boldsymbol{v}$
    - 标量乘法单位元：$1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$
    - 标量乘法对向量加法的分配律：$a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$
    - 标量乘法对数域加法的分配律：$(a+b)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}$

数学基础

- 线性组合(Linear Combination)
  - 线性相关/无关(Linearly dependent/independent)
    - 定义在向量集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$上
    - 线性相关：数域*F*中存在不全为0的一组数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 使得

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = 0$$

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\boldsymbol{u}_2 - \frac{a_3}{a_1}\boldsymbol{u}_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\boldsymbol{u}_n \ (a_1 \neq 0) \text{ 说明 } \boldsymbol{u}_1 \text{ 是 } \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \dots, \boldsymbol{u}_n \text{ 的线性组合}$$

    - 线性无关：数域*F*中不存在不全为0的这样一组数
  - 向量空间的维度
    - 空间内能找出的线性无关的向量的个数的最大值，记为dimV
    - dimV个线性无关的向量构成空间的一组基向量(basis vectors)
      - 任意空间中的向量可以唯一表示为这组基矢的线性组合
      - 线性组合的系数(coefficients)被称为该矢量在这组基下的坐标(coordinates)

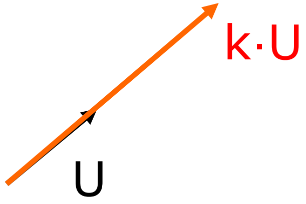
数学基础

- 图形学研究的维度
  - 低维向量和向量空间（2D~4D）
    - 物理空间：Mesh、曲线、点云的坐标及导数
      - 欧几里得空间 (x,y,z)
      - 闵可夫斯基空间 (x,y,z,ict)
    - 颜色空间：RGB, CMYK
  - 高维向量和向量空间
    - 灰度数字图像上所有像素值组成的向量
      - 1920×1080 的灰度数字图像维度达到 200 万
    - 二维或三维图形的所有自由度组成的向量
      - 《原神》中纳西妲运动的顶点自由度数为 45459
      - SIGGRAPH 水体模拟求解的向量维度一般10^6 至10^7

数学基础

- 矢量
  - 矢量表示方法： $U=\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}$ $V=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}$
  - 矢量和、数乘、长度（长度为1的矢量称为单位矢量）

$$U+V=\begin{bmatrix}u_x+v_x\\u_y+v_y\\u_z+v_z\end{bmatrix} \qquad k\bullet U=\begin{bmatrix}ku_x\\ku_y\\ku_z\end{bmatrix}$$



$$\|U\|=\sqrt{U\bullet U}=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$$

- 矢量的点积 $U \bullet V = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$
  - 性质

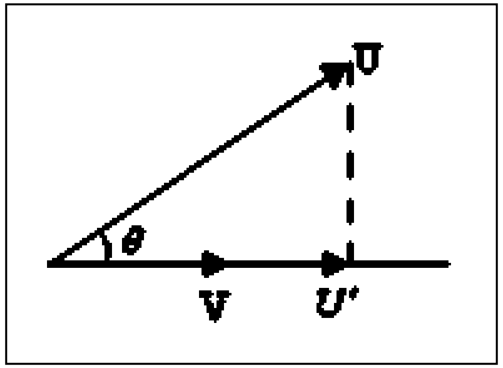
$$U \bullet V = V \bullet U$$

$$U \bullet V = 0 \Leftrightarrow U \perp V$$

$$U \bullet U = 0 \Leftrightarrow U = 0$$

  - 对于任意两个矢量U和V，若它们的夹角为θ，则：

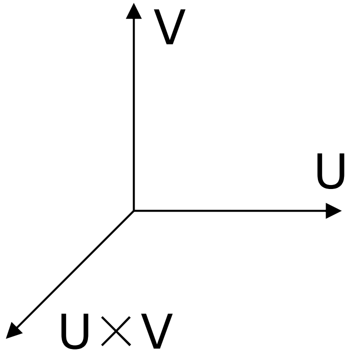
$$\cos\theta = \frac{U \bullet V}{\|U\| \bullet \|V\|}$$



  - 若U,V是单位矢量，则： $\cos\theta = U \bullet V$

矢量的叉积

$$U \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y v_z - v_y u_z \\ u_x u_z - u_x v_z \\ u_x v_y - v_x u_y \end{vmatrix}$$



- 点积的结果是标量
- 叉积的结果是矢量

矩阵

- m×n阶矩阵，记为A或$A_{m\times n}$或$(a_{ij})_{m\times n}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- m=n，n阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 零矩阵：元素全为0的矩阵，记为$0_{m\times n}$或0
- 行向量(m=1时)与列向量(n=1时)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- 单位矩阵：主对角线为1，其他为0的n阶矩阵(记为I_n)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n}\cdot I_n = A_{m\times n}$$
$$I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

矩阵的加法

- 设两个矩阵A和B都是m×n的，把他们对应位置的元素相加而得到的矩阵叫做A、B的和，记为A + B
- 只有在两个矩阵的行数和列数都相同时才能加法。
- 矩阵加法满足交换律和结合律

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的数乘

- 用数k乘矩阵A的每一个元素而得的矩阵叫做k与A之积，记为 kA

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

- 矩阵的乘法
  - 只有当前一矩阵的列数等于后一矩阵的行数时两个矩阵才能相乘。
  - $C_{m\times n}=A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}$ ，矩阵C中的每一个元素：

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}*b_{kj})$$

  - 如：A为2×3的矩阵，B为3×2的矩阵，则两者的乘积为：

$$C=A\cdot B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

矩阵的转置

- 交换一个矩阵A_{mxn}的所有的行列元素，那么所得到的nxm的矩阵被称为原有矩阵的转置，记为A^T
- 有：

$$(A^T)^T = A$$

$$(kA)^T = kA^T$$

$$(A+B)^T = (A^T + B^T)$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

矩阵的逆

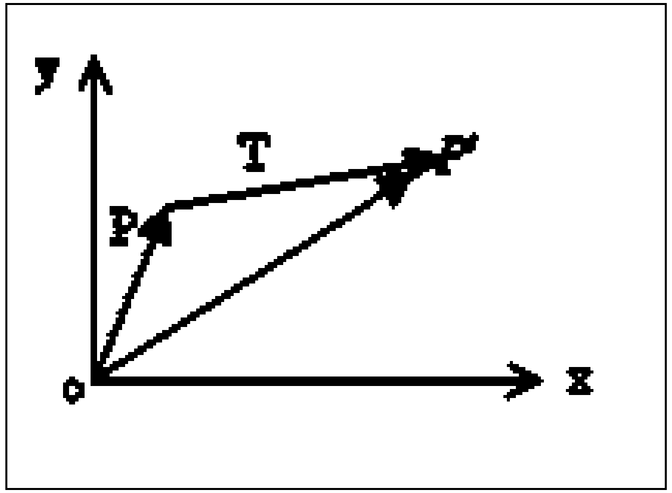
- 对于一个n×n的方阵A，如果存在一个n×n的方阵B，使得$AB=BA=I_n$，则称B是A的逆，记为$B=A^{-1}$。
- 矩阵A可逆的充分必要条件是A为非奇异矩阵(其行列式为0)，非奇异矩阵存在唯一的逆矩阵。
- 任何非奇异矩阵有且只有一个逆矩阵。
- 矩阵的逆是相互的，A同样也可记为$A=B^{-1}$，B也是一个非奇异矩阵。

二维基本变换

平移变换

- 点P(x,y)在x轴方向，y轴方向分别平移距离tx,ty，得到点P’(x’,y’)。则P和P’的坐标关系为：

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$



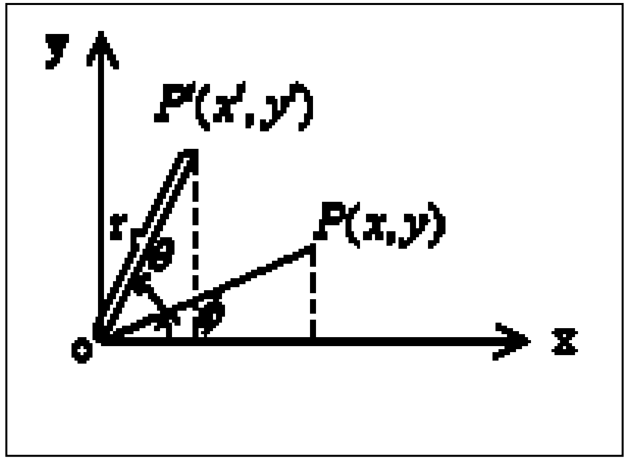
- 矢量形式为 $P' = P + T$

- 其中P’,P,T是如下向量：$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$

旋转变换

- 点P(x,y)的极坐标表示 $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$
- P绕坐标原点旋转角度 θ (逆时针为正，顺时针为负)，得到P’(x’,y’)

$$\begin{cases} x' = r\cos(\theta+\phi) = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin(\theta+\phi) = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$



矩阵表示为： $P' = R \bullet P$

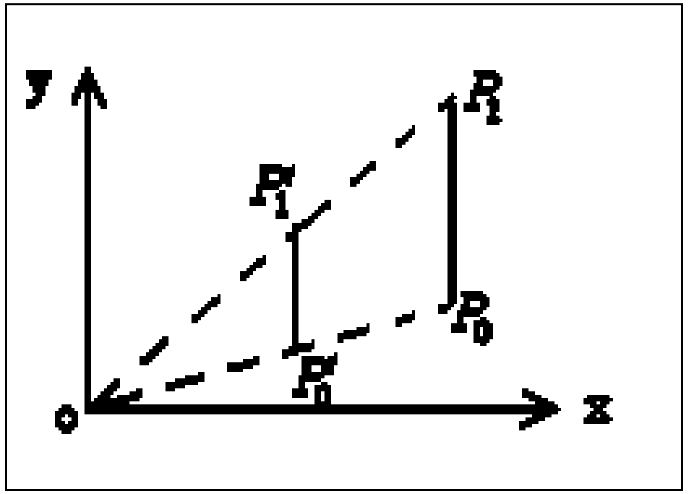
其中：

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

放缩变换

- 点P在x,y方向分别放缩sx和sy倍，得到点P’(x’,y’)，则有： $\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \end{cases}$
- 矢量表示为： $P' = S \bullet P$

其中 $S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$



- 以坐标原点为放缩参照点
- 不仅改变了物体的大小和形状，也改变了它离原点的距离

6.3 齐次坐标与二维变换的矩阵表示

- 为什么需要齐次坐标?
  - 经常要对图形对象做连续多个变换，希望这些多个变换可以合成为一个大的复合变换。
  - 实际情况是：旋转和缩放变换都是矩阵乘法，根据结合律，可以复合：

    例如：一个先旋转再缩放的复合

    $P''=S\cdot P'=S\cdot(R\cdot P)=(S\cdot R)\cdot P=A\cdot P$，其中$A=S\cdot R$
  - 然而，平移变换不能复合，原因：转换表示形式不同。平移变换是矢量加法，旋转和缩放变换都是矩阵乘法。
  - 于是引入齐次坐标，目的：使各种转换的表示形式一致，使变换合成更加容易。

齐次坐标

- 定义
  - (x,y)点对应的齐次坐标为 (x_h, y_h, h)

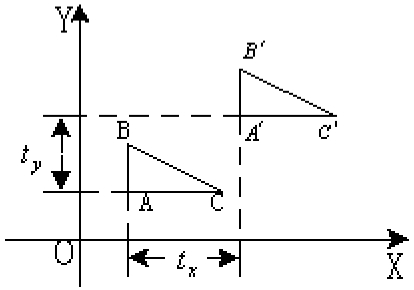
    其中： $x_h = hx, y_h = hy, h \neq 0$
- 点(x,y)用齐次坐标来表示不唯一
- 点(x,y)对应的齐次坐标为三维空间的一条直线
- 为使运算简单，引入标准齐次坐标(x,y,1)

$$\begin{cases} x_h = hx \\ y_h = hy \\ z_h = h \end{cases}$$

二维变换的矩阵表示

- 平移变换

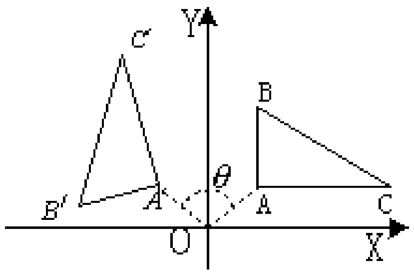
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=} T(t_x, t_y) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



平移示意图

- 旋转变换(θ 逆时针转为正，顺时针转为负)

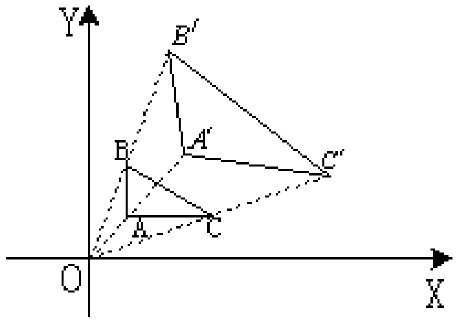
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=} R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



相对原点旋转 θ角

□ 放缩变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{记为}{=} S(s_x, s_y) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



缩放示意图

- T(tx,ty), R(θ), S(sx,sy)分别称为平移变换矩阵，旋转变换矩阵，放缩变换矩阵。

理解齐次坐标变换的矩阵形式

- 二维齐次坐标变换的矩阵的形式是：

$$\left[\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hdashline g & h & i \end{array}\right]$$

- 这个矩阵每一个元素都是有特殊含义的。其中
  - abde参数可以对图形进行缩放、旋转、对称、错切等变换；
  - cf是对图形进行平移变换；
  - gh是对图形作投影变换；
  - i是对图形整体进行缩放变换。

6.4 复合变换及变换的模式

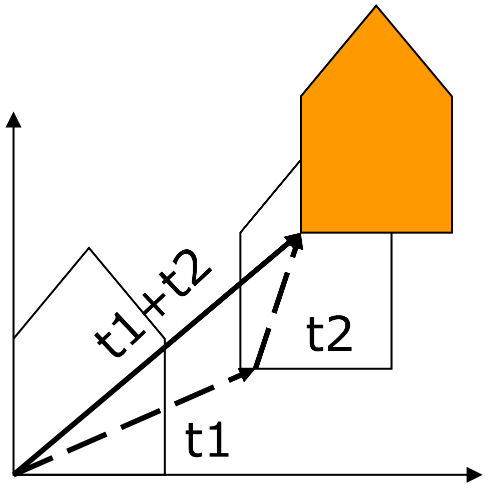
- 问题：如何实现复杂变换?
  - 变换合成提供了一种构造复杂变换的方法。
  - 复杂变换不直接计算，而是分解为多个基本变换，再依次作用于图形(先分解再合成)。
- 以下我们来研究各种不同复杂变换。

□ 复合平移

- 对同一图形做两次平移相当于将两次的平移两加起来：

$$T(t_{x2},t_{y2})\cdot T(t_{x1},t_{y1})=\begin{bmatrix}1&0&t_{x2}\\0&1&t_{y2}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&t_{x1}\\0&1&t_{y1}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&t_{x2}+t_{x1}\\0&1&t_{y2}+t_{y1}\\0&0&1\end{bmatrix}=T(t_{x2}+t_{x1},t_{y2}+t_{y1})$$

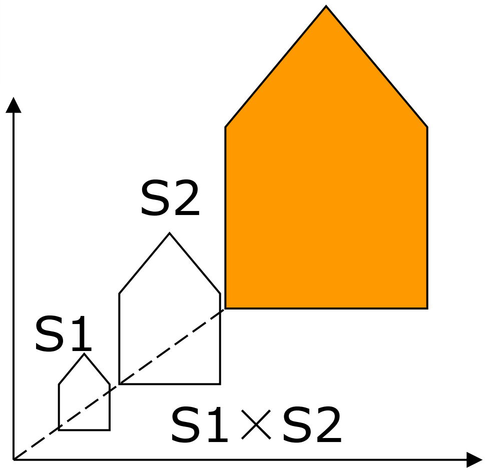


□ 复合缩放

- 两次连续的缩放相当于将缩放操作相乘

$$S(s_{x2},s_{y2})\cdot S(s_{x1},s_{y1})=\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s_{x2}\cdot s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2}\cdot s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=S(s_{x2}\cdot s_{x1},s_{y2}\cdot s_{y1})$$

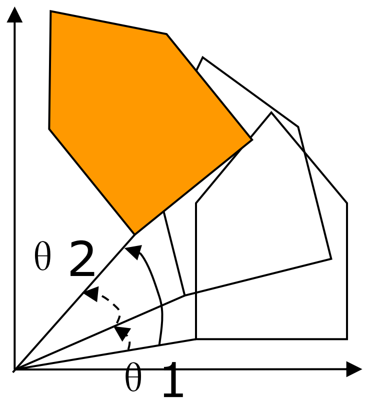


□ 复合旋转

- 两次连续的旋转相当于将两次的旋转角度相加：

$$R(\theta_2)\cdot R(\theta_1)=\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta_2+\theta_1) & -\sin(\theta_2+\theta_1) & 0\\ \sin(\theta_2+\theta_1) & \cos(\theta_2+\theta_1) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=R(\theta_2+\theta_1)$$

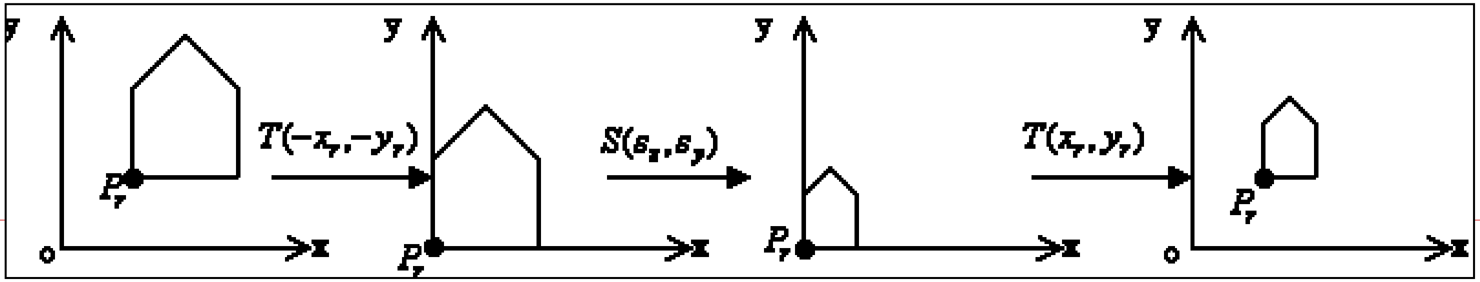


➢ 上面进行的各种变换都是以原点为参考点的。

□ 关于任意参照点(xr,yr)的缩放变换

- 先平移(-xr,-yr) → 缩放S(sx,sy) → 平移(xr,yr)
- 变换矩阵分别为T (-xr,-yr), S(sx,sy), T(xr,yr)
- 最终变换矩阵 $S(x_r,y_r;s_x,s_y)=T(x_r,y_r)\bullet S(s_x,s_y)\bullet T(-x_r,-y_r)$

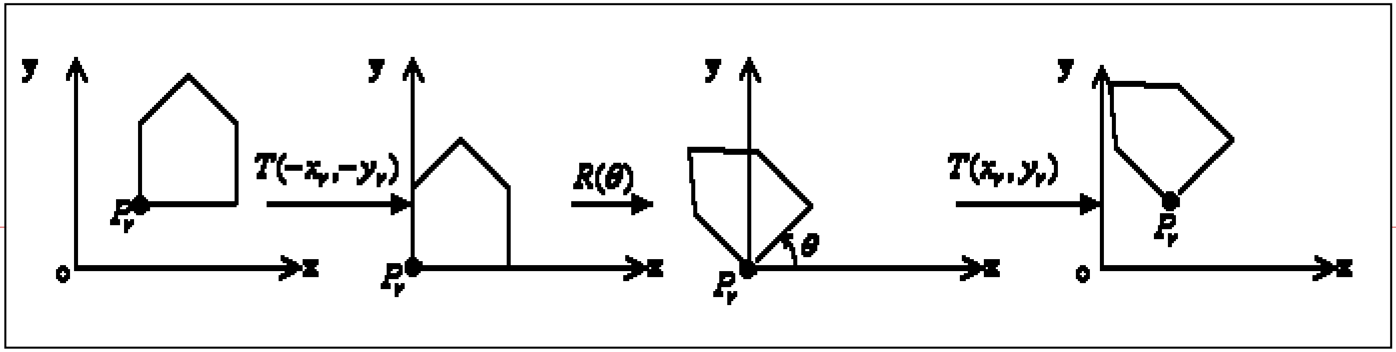
$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & x_f\\ 0 & 1 & y_f\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_f\\ 0 & 1 & -y_f\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_x & 0 & x_f(1-s_x)\\ 0 & s_y & y_f(1-s_y)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



- 关于任意参照点(xr,yr)的旋转变换
  - 先平移(-xr,-yr) → 旋转 θ 角 → 平移(xr,yr)
  - 变换矩阵分别为T (-xr,-yr),R(θ), T(xr,yr)
  - 最终变换矩阵

$$S(x_r, y_r; \theta) = T(x_r, y_r) \bullet R(\theta) \bullet T(-x_r, -y_r)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_f(1-\cos\theta)+y_f\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_f(1-\cos\theta)-x_f\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

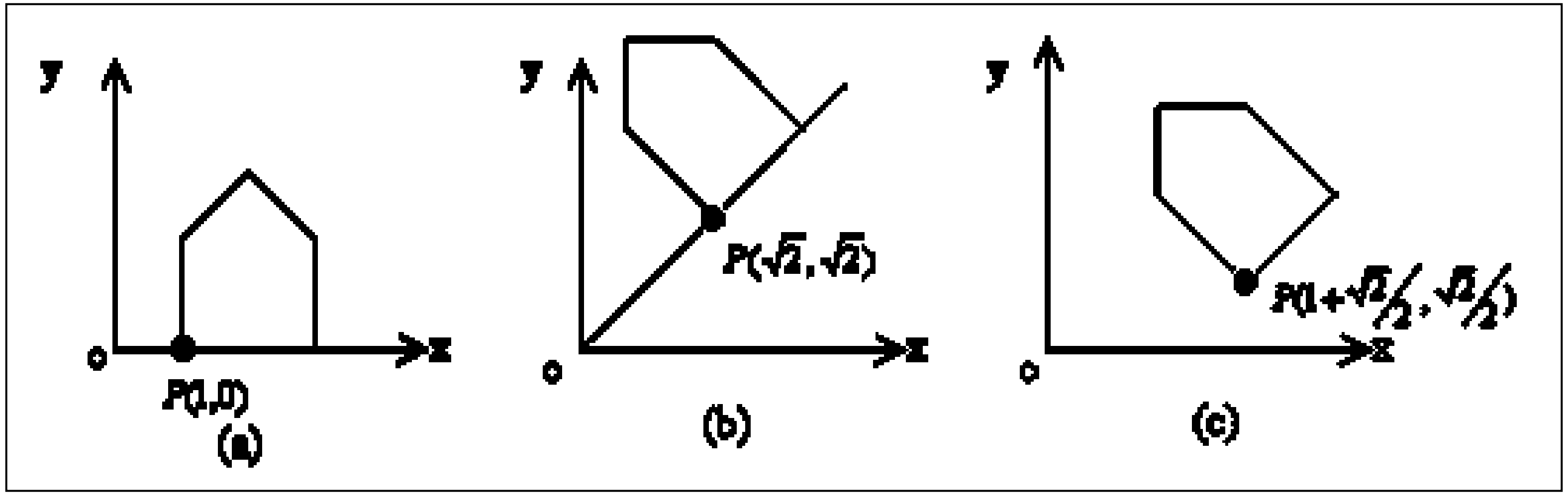


总结

- 如果相对某个一般的参考点(xf,yf)作缩放、旋转变换，相当于将该点移到坐标原点处，然后进行缩放、旋转变换，最后将(xf,yf)点移回原来的位置。
- 切记复合变换时，先作用的变换矩阵在右端，后作用的变换矩阵在左端(矩阵乘法不可交换)。

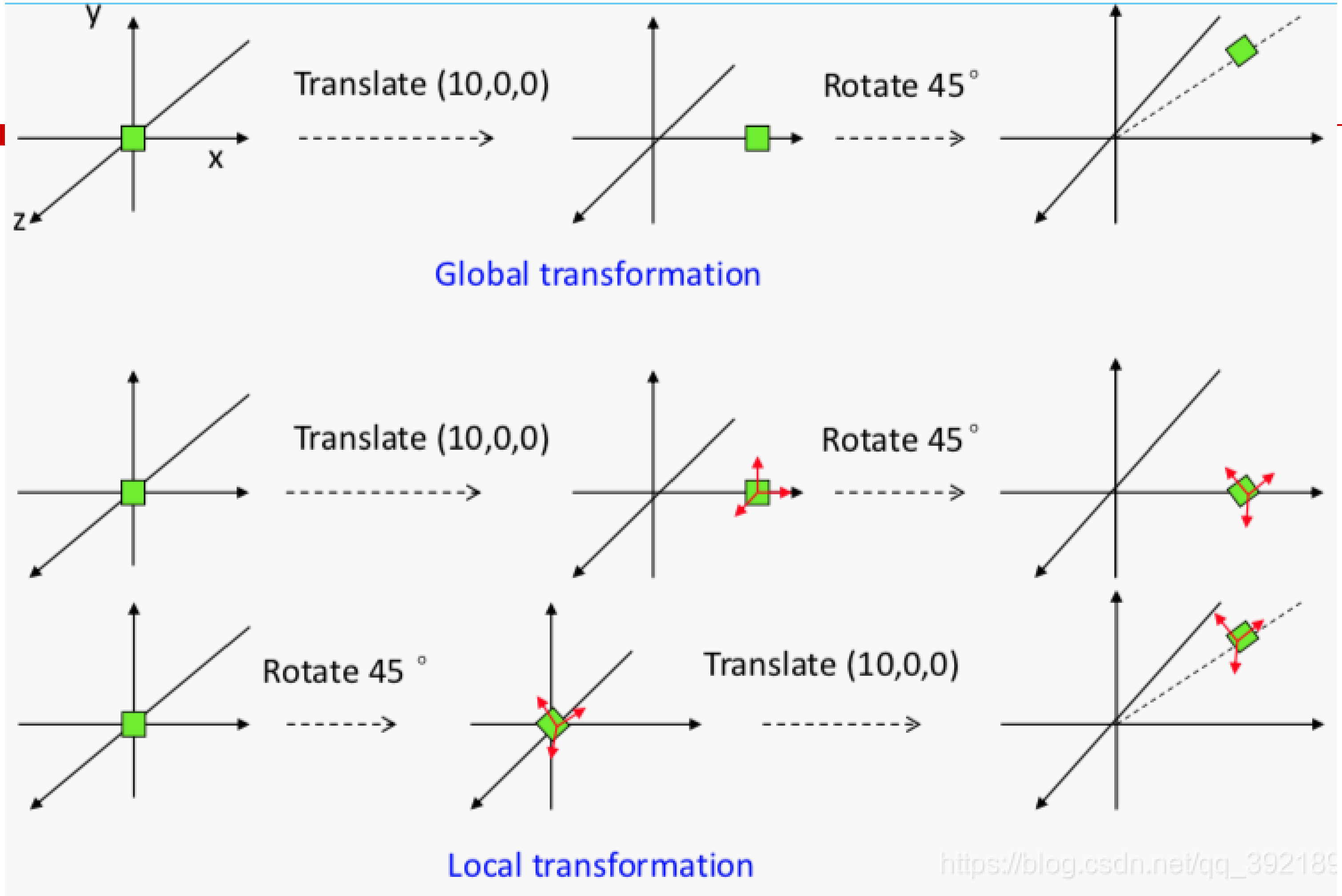
- 变换的结果与变换的顺序有关(矩阵乘法不可交换)

Translate2D(1,0); *Rotate2D(45);* *House();*	*Rotate2D(45);* *Translate2D(1,0);* *House();*



固定坐标系模式vs活动坐标系模式

- 固定坐标系模式（图形模式）
  - 相对于同一个固定坐标系
  - 先调用的变换先执行，后调用的变换后执行
- 活动坐标系模式(空间模式,人的思维方式, 类似于跟随物体的局部坐标)
  - 每次变换产生一个新的坐标系
  - 合并模式相反
  - 先调用的变换后执行，后调用的变换先执行(图形系统一般用堆栈实现)



y
x
z
Translate (10,0,0)
Rotate 45°
Global transformation
Translate (10,0,0)
Rotate 45°
Rotate 45°
Translate (10,0,0)
Local transformation
https://blog.csdn.net/qq_39218

- 选择哪种坐标系模式？全局or局部？
  - 场景中有一个运动的机器人，计算机器人跑动的位移；当机器人跑动的时候，计算四肢的运动状态，如位置、摆动角度和高度等数据。

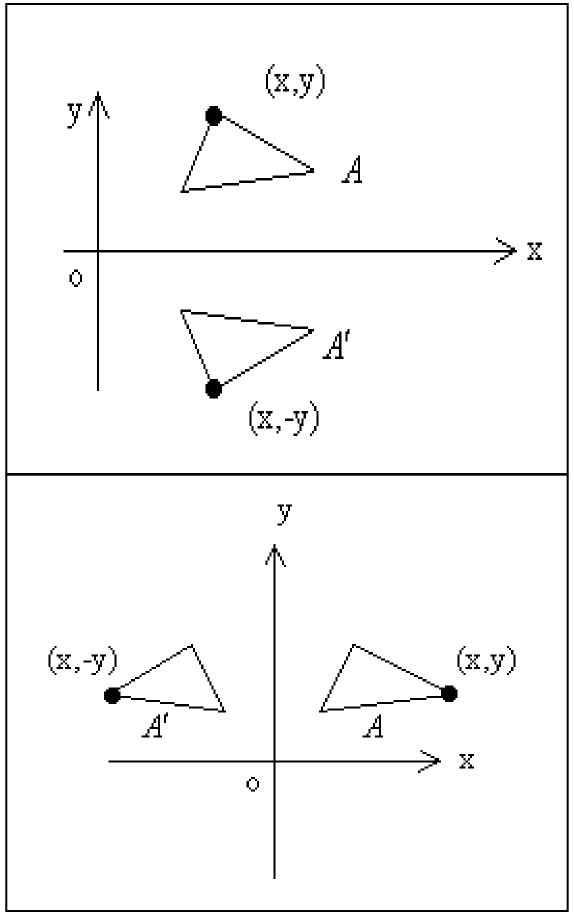
6.5 其它变换

- 对称变换(镜像)
  - 关于x轴的对称变换(x坐标不变，y坐标取负)

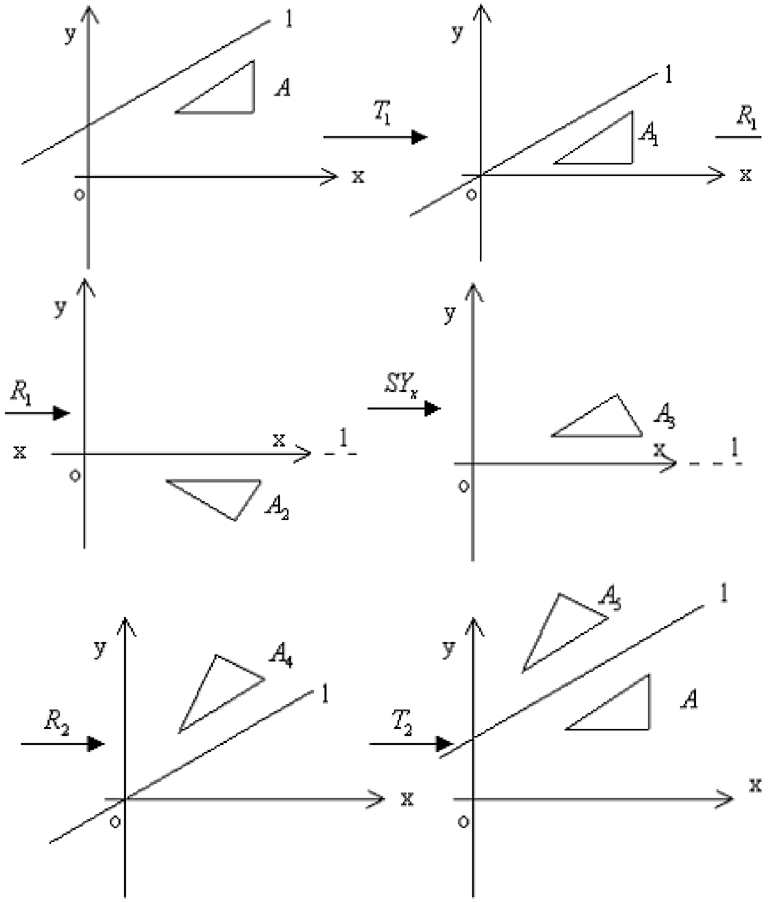
$$SY_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - 关于y轴的对称变换(y坐标不变，x坐标取负)

$$SY_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



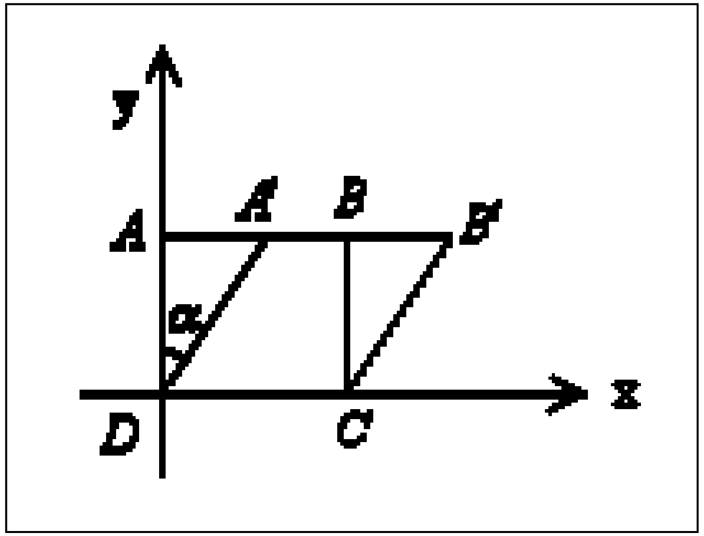
- 关于任意轴(直线l)的对称变换
  1. 平移使l过坐标原点(T1)
  2. 旋转θ使l与横坐标重合(R1)
  3. 求关于x轴的对称图形(SY)
  4. 旋转-θ(R2)
  5. 平移使l回到原先位置(T2)
  6. 总变换：T2·R2·SY·R1·T1



□ 错切变换

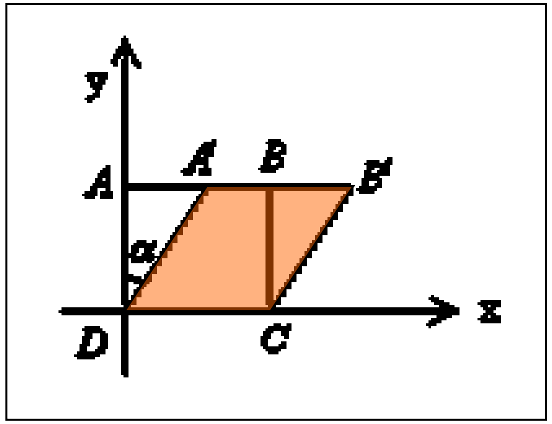
- 图形各点的某一坐标值不变，另一坐标值关于该坐标值呈线形变化。前者称为依赖轴，后者称为方向轴。
- 右图：
  - □ X方向轴
  - □ Y依赖轴
  - □ A'相对于A，AY不变AX关于AY值线性变化

    变化率sh_x=tan(a)



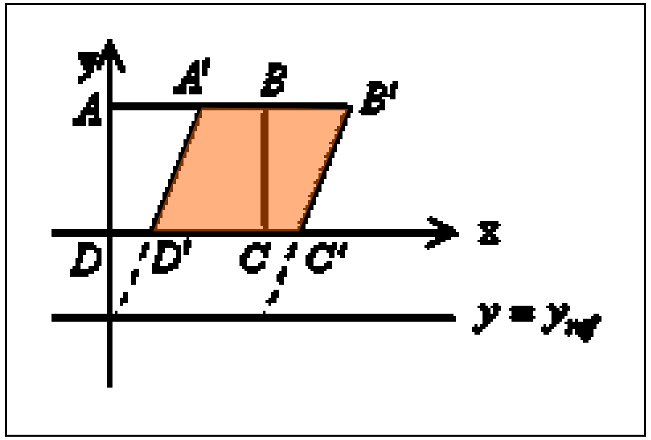
- 以y轴为依赖轴的错切变换(以y=0为参考轴)
  - 点(x,y)错切后变为(x',y')
  - 变换矩阵为 $\begin{cases} x' = x + sh_x y \\ y' = y \end{cases}$

$$SH_y(sh_x) = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



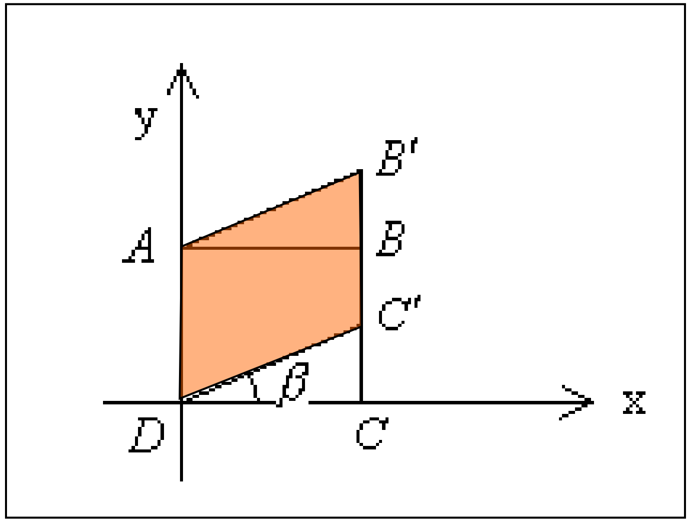
  - sh_x=tan(a), 几何意义是y=1上的点沿x轴方向移动的距离。
  - y=0上的点在错切过程中位置不变，因此称y=0为参考轴。

- 以y轴为依赖轴的错切变换的一般形式(以$y = y_{ref}$为参考轴)
  - 已知
$$\begin{cases} x' = x + sh_x(y - y_{ref}) \\ y' = y \end{cases}$$
  - 变换矩阵
$$SH_y(sh_x, y_{ref}) = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & -sh_x \bullet y_{ref} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- 以x轴为依赖轴的错切变换
  - 已知

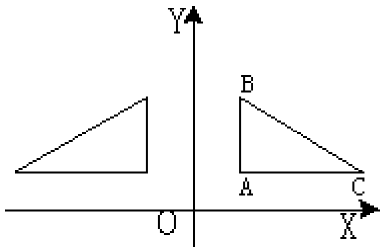
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = sh_y x + y \end{cases}$$



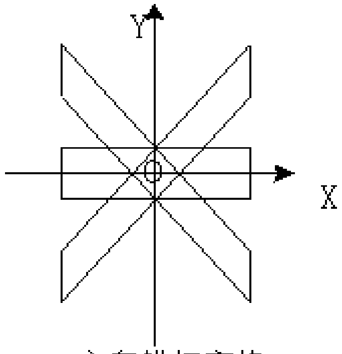
  - 变换矩阵 $SH_x(sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

□ 介绍：仿射变换

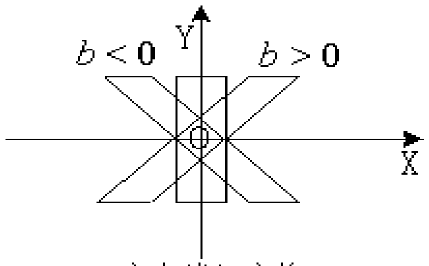
- 变换前后，能保持平行直线的关系
- 以上讨论的变换形式都是仿射变换的特例
- 一般情况下不能表示为多个基本变换之积
- 表示为: $\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$
- 变换矩阵为: $A_f = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



关于Y轴对称示意图



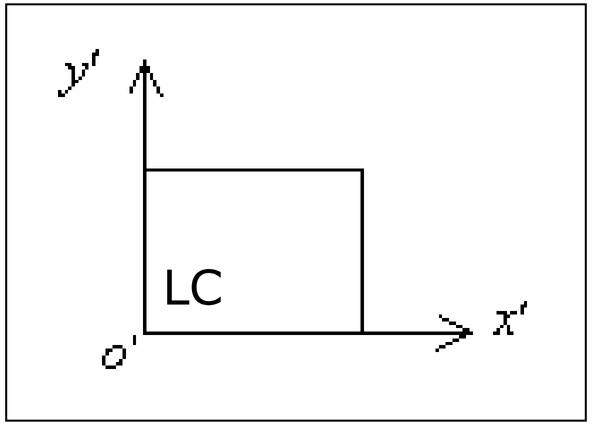
Y方向错切变换

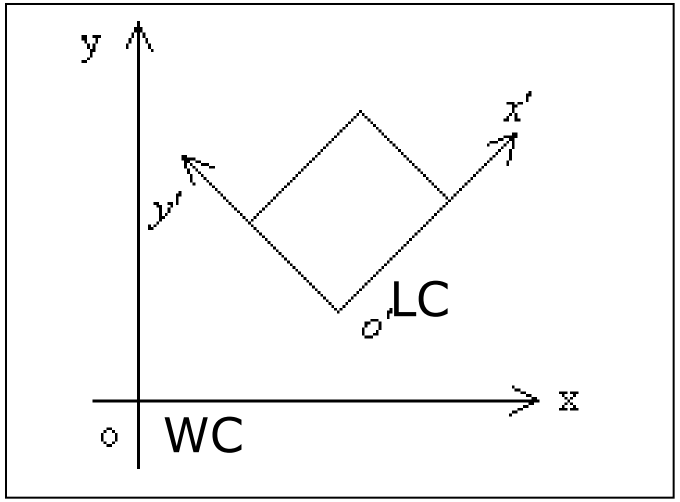


X方向错切变换

6.6 二维图形的显示流程图

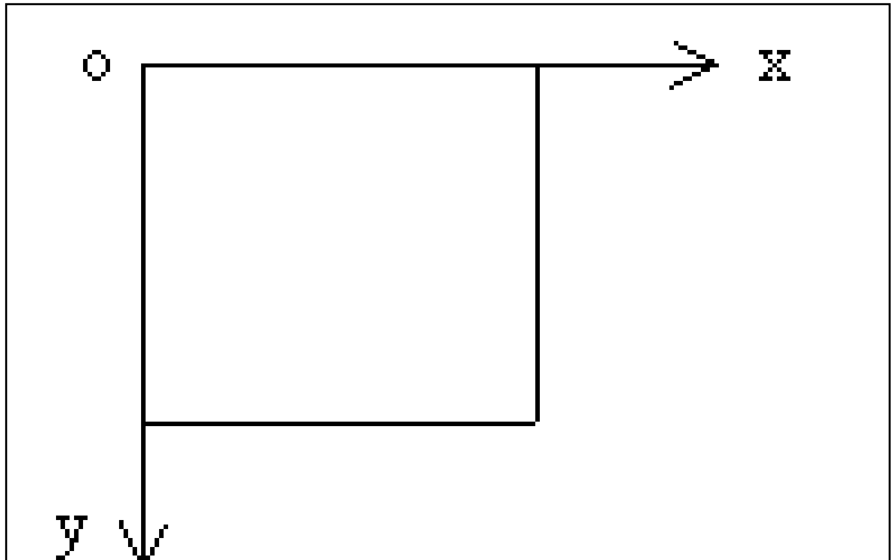
- 坐标系：建立了图形与数之间的对应联系
  - 世界坐标系(world coordinate)，即用户坐标系(user coordinate)：相对于物体所在空间
  - 局部坐标系(local coordinate)：相对于物体





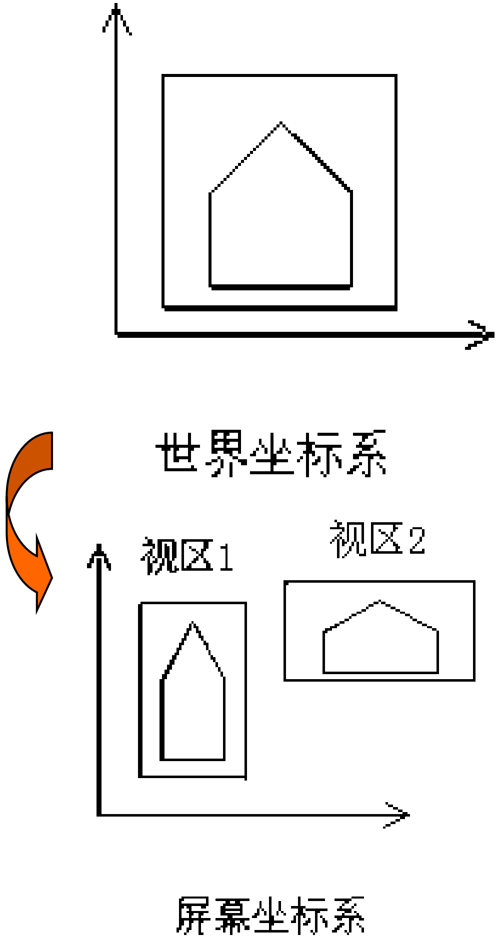
- 屏幕坐标系(screen coordinate)，即设备坐标系(device coordinate)：在显示器或绘图纸上绘制图形所用的二维坐标系。

坐标轴方向可能根据不同的设备而不同

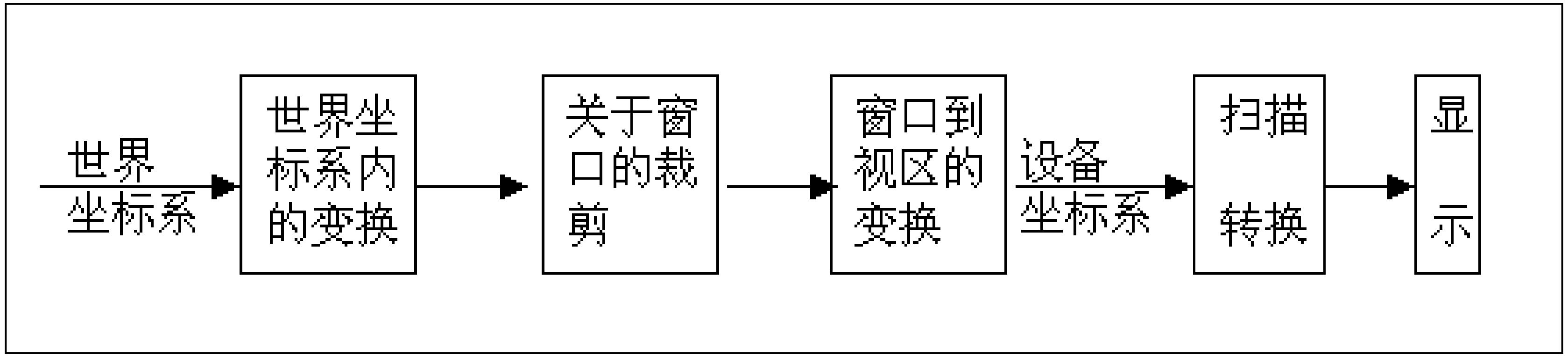


常用显示器的屏幕坐标系

- 窗口
  - 图形很大，屏幕有限，在<u>世界坐标系</u>中指定一个矩形区域，用来指定要显示的图形。
- 视区
  - 在<u>设备坐标系</u>(屏幕或绘图纸)上指定的矩形区域，用来指定窗口内的图形在屏幕上显示的大小及位置。
- 窗口到视区的变换
  - 窗口与视区在不同坐标系，物体坐标必须进行变换后才能在视区显示。



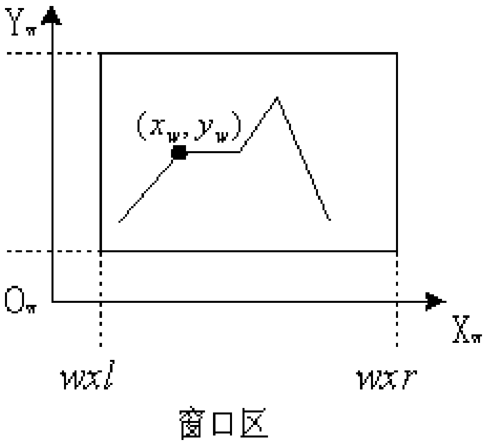
二维图形的显示流程



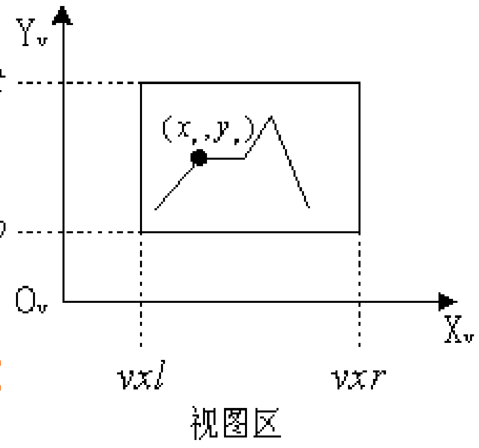
6.7 窗口到视区的变换

- 实际的窗口区与视图区往往不一样大小，要在视图区正确地显示形体，必须将其从窗口区变换到视图区。
  - 变换目标：将图像从窗口坐标系变换到视区坐标系中
  - 变换的求法：变换的分解与合成

WC



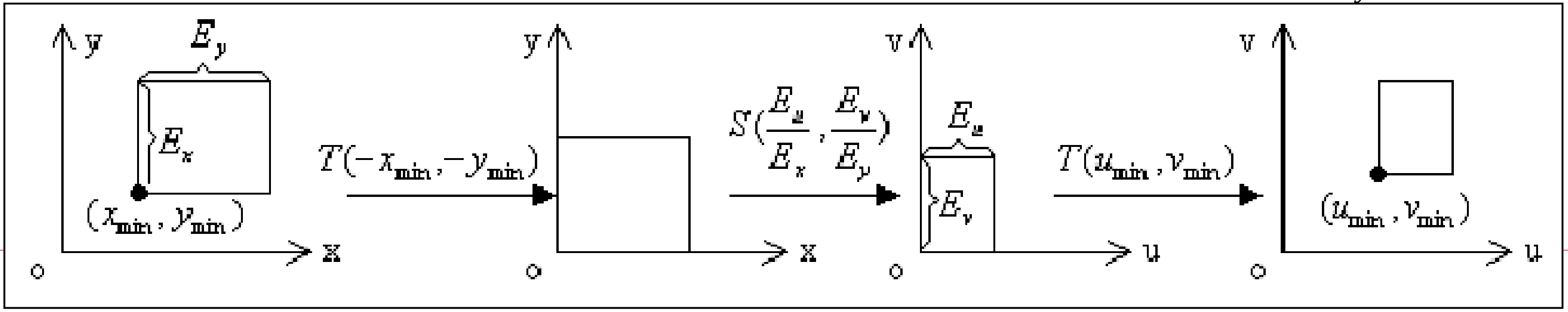
DC



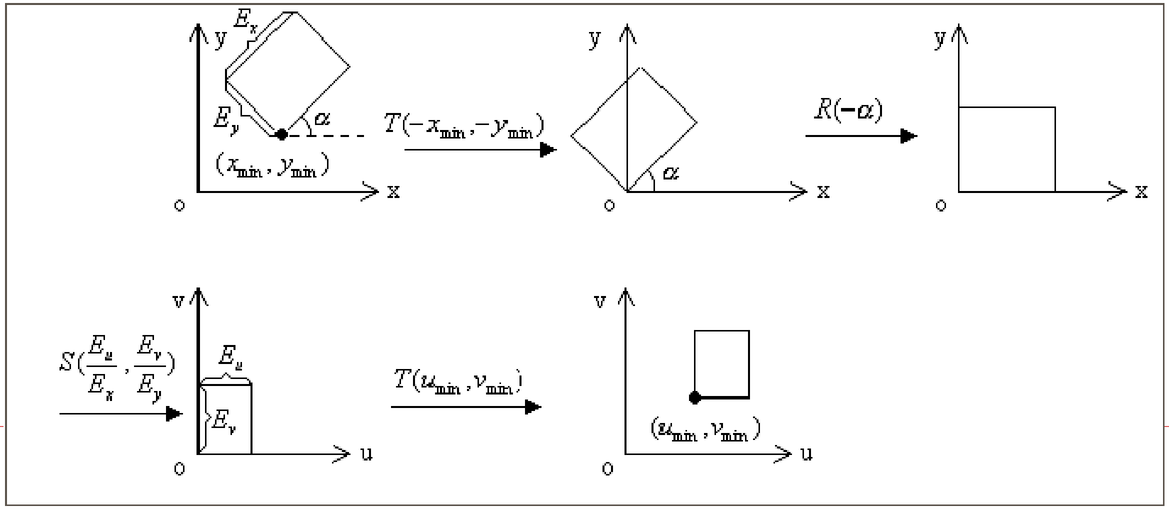
□ 窗口边与视区边平行时：

- 设世界坐标系中窗口左下角(x_{min},y_{min})，两边长E_x,E_y
- 设设备坐标系中视区左下角(u_{min},v_{min})，两边长E_u,E_v
- 世界坐标系中平移使(x_{min},y_{min})至原点→ 放缩使窗口大小与视区相等→ 设备坐标系中平移窗口与视图重合。即

$$M_{wv}=T(u_{min},v_{min})S(\frac{E_x}{E_x},\frac{E_v}{E_y})T(-x_{min},-y_{min})$$

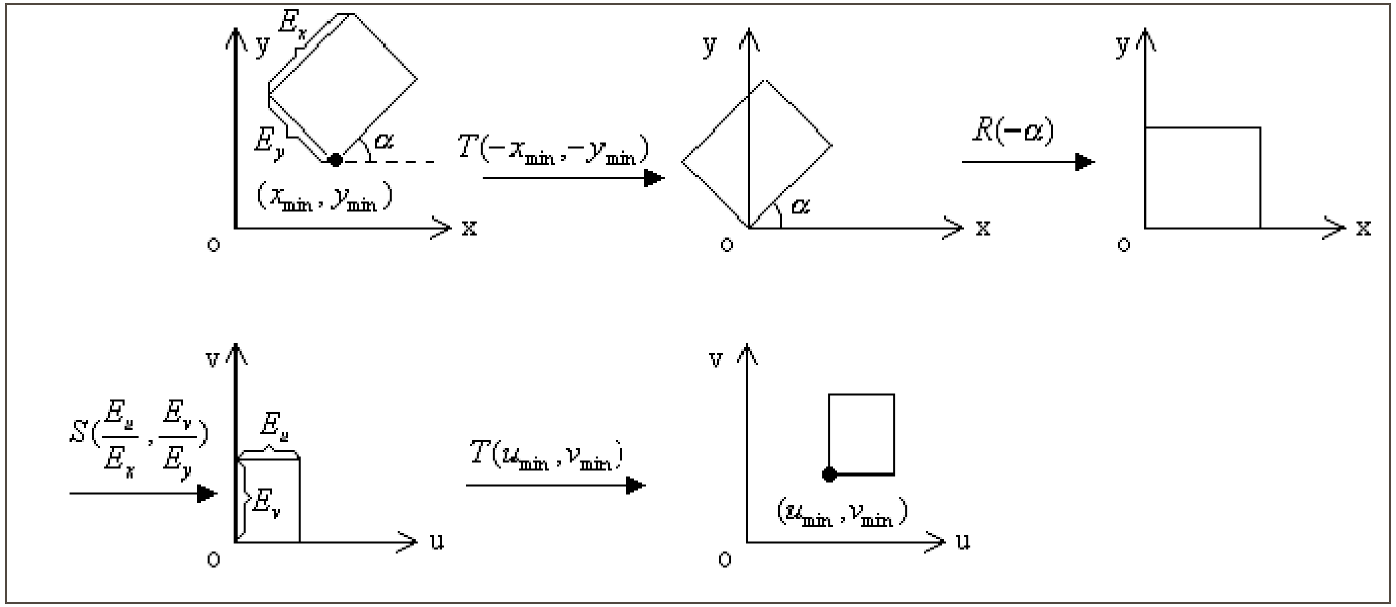


- 窗口边与视区边不平行时:
  - 多给出一个转角a
  - 世界坐标系中平移使(x_{min},y_{min})至原点→ 旋转使窗口边与坐标重合→ 放缩使窗口大小与视区相等→ 设备坐标系中平移窗口与视图重合。即:



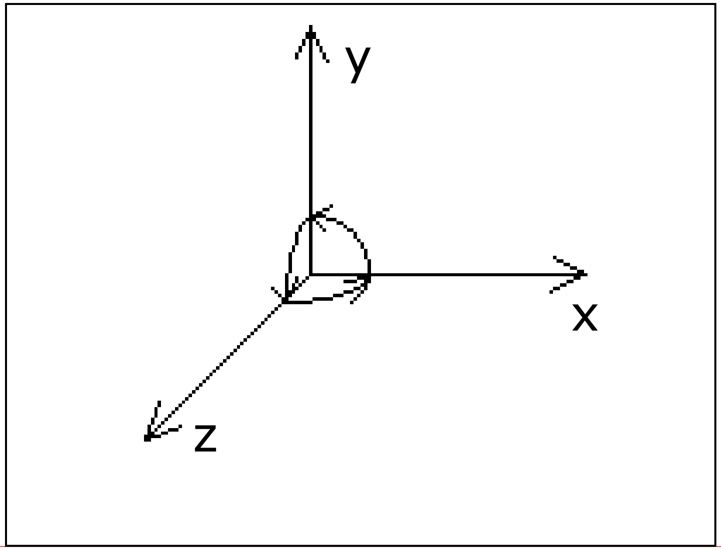
- 总的变换矩阵为：

$$M_{wv} = T(u_{\min}, v_{\min}) S(\frac{E_x}{E_x}, \frac{E_v}{E_y}) R(-\alpha) T(-x_{\min}, -y_{\min})$$



6.8 三维几何变换

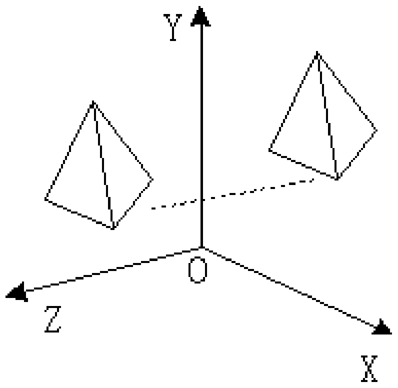
- 三维齐次坐标
  - (x,y,z)点对应的齐次坐标为 (x_h, y_h, z_h, h)
    其中 $x_h = hx, y_h = hy, z_h = hz, h \neq 0$
  - 标准齐次坐标(x,y,z,1)
- 右手坐标系
  - 本书采用
  - 拇指与一坐标系同向时，四指方向为绕该轴旋转的正向。



平移变换

- P(x,y,z)→P'(x',y',z')，在三坐标轴上分别移动了tx,ty,tz
- 表示为P'=P+T，其中T = [tx,ty,tz]^T
- 三维平移变换矩阵

$$T(t_x,t_y,t_z)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & t_x\\ 0 & 1 & 0 & t_y\\ 0 & 0 & 1 & t_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



放缩变换

- 类似地，三维缩放变换矩阵

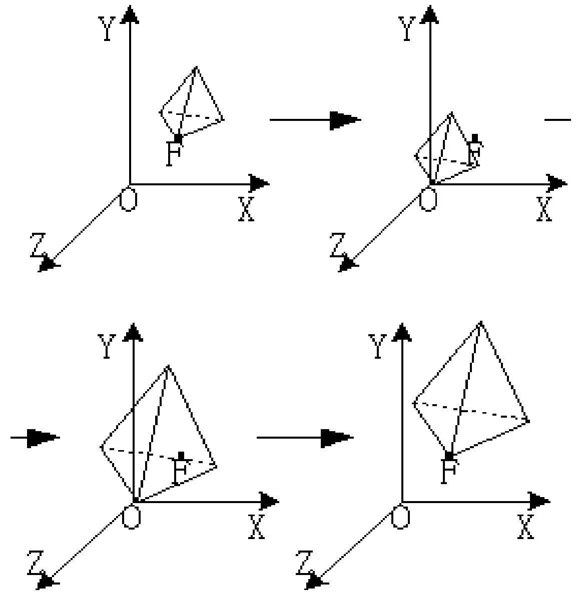
$$S(s_x,s_y,s_z)=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 此变换的参照点为原点。

- 关于空间任一点Pr(xr,yr,zr)的放缩变换
  1. 平移使Pr落入原点，变换为T(-xr,-yr,-zr)
  2. 放缩，变换为S(Sx,Sy,Sz)
  3. 移回，变换为T(xr,yr,zr)
  4. 最终的变换矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & x_f\\0 & 1 & 0 & y_f\\0 & 0 & 1 & z_f\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0 & 0\\0 & s_y & 0 & 0\\0 & 0 & s_z & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -x_f\\0 & 1 & 0 & -y_f\\0 & 0 & 1 & -z_f\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

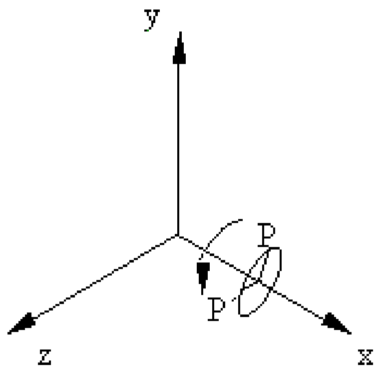
$$=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0 & (1-s_x)\cdot x_f\\0 & s_y & 0 & (1-s_y)\cdot y_f\\0 & 0 & s_z & (1-s_z)\cdot z_f\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



□ 旋转变换

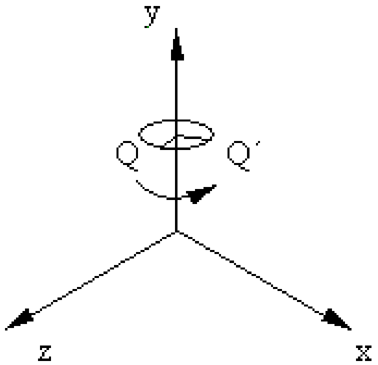
- 绕x轴(x不变，y,z在x=xp的平面上形成圆)

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



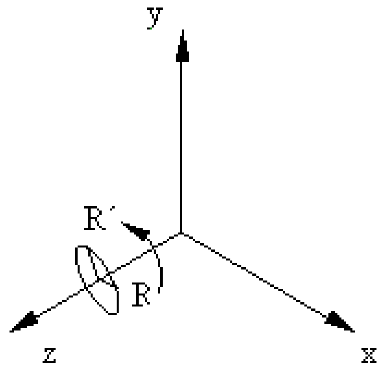
- 绕y轴

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

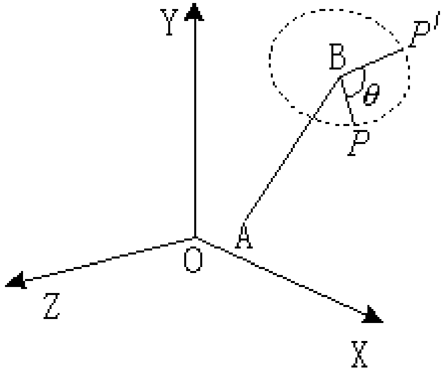


- 绕z轴

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



- 绕空间任意轴
  - 设旋转轴AB由任意一点A(xa,ya,za)及其方向向量(a,b,c)定义，空间一点P(xp,yp,zp)绕AB轴旋转到P’(xp’,yp’,zp’)，转角θ
  - 通过下列步骤来实现P点的旋转：
    1. 将A点移到坐标原点。
    2. 使AB分别绕X轴、Y轴旋转适当角度与Z轴重合。
    3. 将点P绕Z轴旋转θ角。
    4. 作上述变换的逆操作，使AB回到原来位置。



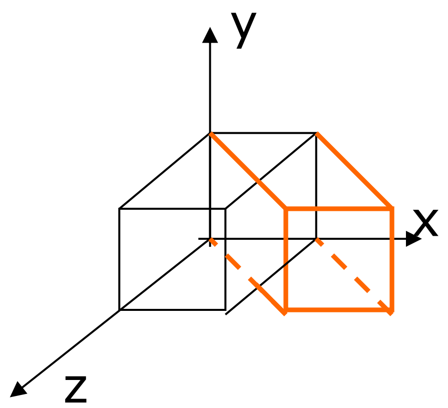
  - 转换矩阵 $R_{ab}(\theta)=T^{-1}(-x_a,-y_a,-z_a)R_x^{-1}(\alpha)R_y^{-1}(\beta)R_z(\theta)R_y(\beta)R_x(\alpha)T(-x_a,-y_a,-z_a)$

错切变换

- 以z为倚赖轴时，z不变，x,y按z坐标呈线性变化，变换矩阵为：

$$SH_z(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

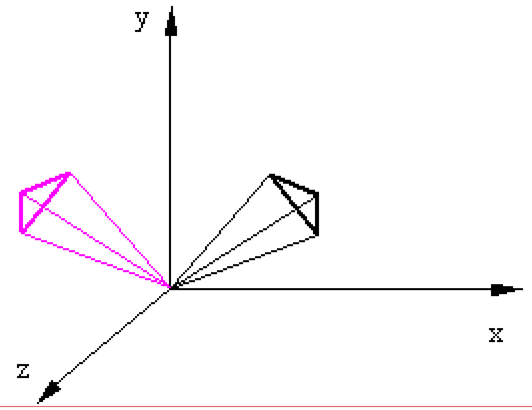
- 其他情况类推



□ 对称变换

- 关于坐标平面xy的对称变换：x,y坐标不变，z取反。变换矩阵为

$$SY_{xy}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



- 其他情况类推

- 对多边形的变换结果可以通过对其各顶点进行变换得到。
- 三维变换的一般形式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.9 坐标系之间的变换

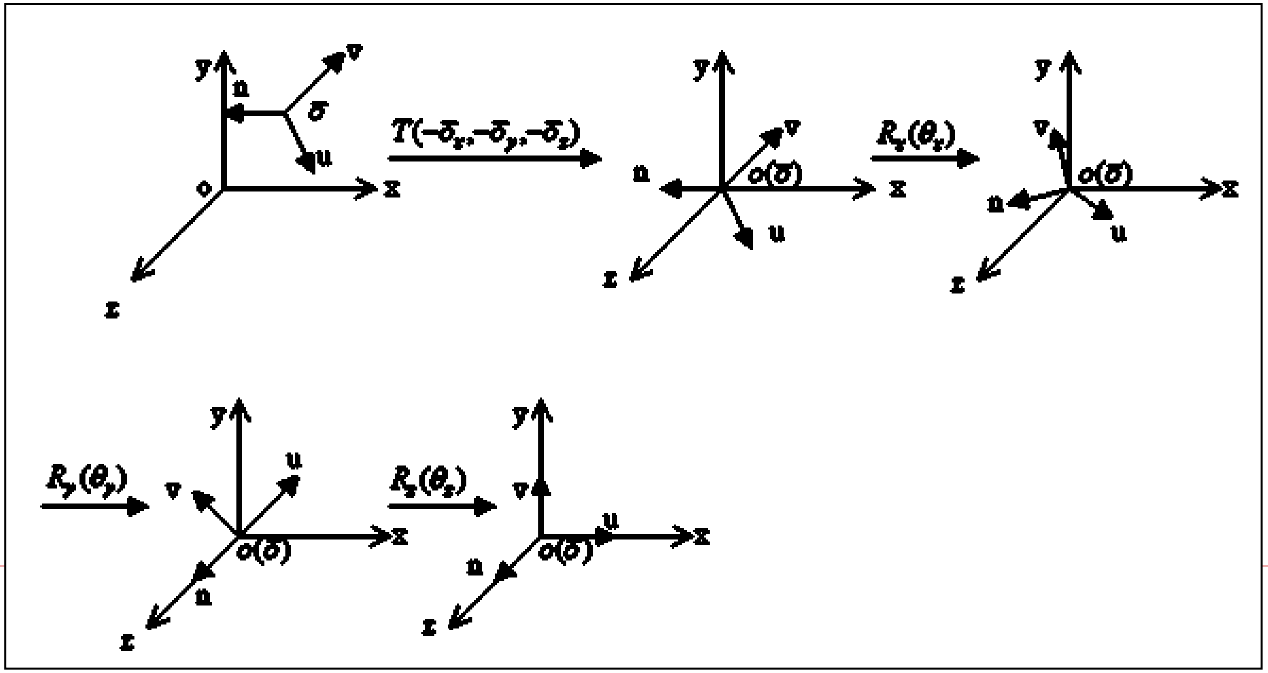
- 如果我们需要得到同一图形对象在不同坐标系中的表示，这时就需要建立坐标系之间的变换，即将图形从一个坐标系中变换到另一个坐标系中。
- 设有两个坐标系：OXYZ和O’UVN, 且
  - 点O’在OXYZ中的坐标为(Ox,Oy,Oz)
  - 单位向量O’U,O‘V,O’N在OXYZ中分别为(Ux,Uy,Uz), (Vx,Vy,Vz), (Nx,Ny,Nz)
  - 现要将坐标系OXYZ中的图形变换到坐标系O‘UVN中去，记变换为$M_{xyz\to uvn}$。由线性代数知识可以求得这两个坐标系之间的正交变换为：

$$R=\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 但其中还应有坐标系位置关系的平移变换，即坐标系之间的变换应为：

  $M_{xyz\text{->}uvn}=R\cdot T(-Ox,-Oy,-Oz).$

- 用变换合成方法亦可，得到一样结果



END