

第七章 投影

本章内容

- 三维图形的基本问题
- 平面几何投影
- 观察坐标系中的投影变换
- *介绍：投影举例
- 三维图形的显示流程图
- *三维裁剪
- *总结：图形显示过程小结

掌握要点

- 掌握什么是投影中心、投影平面、投影线、平面几何投影、透视投影与平行投影；
- 了解观察坐标系、观察平面、观察参考点、观察正向，观察坐标系是如何建立的；
- 掌握投影方向、平行投影变换及其矩阵表示，了解什么是三视图；
- 掌握透视投影变换及其矩阵表示，什么是灭点与主灭点，怎样产生一点透视、两点透视与三点透视；
- 了解前、后裁剪面及如何定义一个透视投影（平行投影）视见体；
- 了解视见体的规范化过程；
- 了解在三维空间中直线段与多边形的裁剪；

7.1 三维图形的基本问题

□ 在二维屏幕上如何显示三维物体？

- 显示器屏幕、绘图纸等是二维，显示对象是三维的
- 解决方法----**投影**

□ 如何表示三维物体？

- 二维形体的表示---直线段、折线、曲线段、多边形区域
- 三维形体的表示---空间直线段、折线、曲线段、多边形、曲面片等
- 二维形体的输入简单(图形显示设备与形体的维数一致)三维形体的输入、运算、有效性保证**困难**
- 解决方法----**各种用于形体表示的理论、模型、方法**

□ 如何反映遮挡关系？

- 三维物体之间或物体的不同部分之间存在相互遮挡关系，遮挡关系是空间位置关系的重要组成部分
- 应当如何反映？
- 解决方法----消除隐藏面与隐藏线

□ 如何产生真实感图形

- 何谓真实感图形
- 人们观察现实世界产生的真实感来源于：
 - 空间位置关系----近大远小的透视关系和遮挡关系
 - 光线传播引起的物体表面颜色的自然分布
- 解决方法----建立光照明模型、开发真实感图形绘制方法

因此：三维图形的基本研究内容

□ 投影

- 解决二维设备上显示三维图形的过程
- 借鉴相机成像的投影过程
- 分为平行投影和透视投影

□ 三维形体的表示

- 三种模型：线框模型，表面模型，实体模型
- 线框模型：用一组或几组轮廓线来表示形体
- 表面模型：用多边形或曲面来表示形体
- 实体模型：用标准化的基本体来表示形体

□ 消除隐藏面与隐藏线

- 反映物体间和物体不同部分间相互遮挡关系。
- 当观察者确定了观察点和观察方向后，哪些是可见线，可见面，哪些是隐藏线，隐藏面就确定了。
- 消除隐藏面与隐藏线的过程称为消隐。对于线框模型，只要进行线消隐，对于表面模型，还要进行面消隐。

□ 光照和着色

- 为了模拟真实世界中光线传播的效果，首先需要建立光照模型。
- 局部光照模型vs整体光照模型。
- Depth Cueing技术，反映光在物体与观察者之间的衰减效果。物体距离远→暗
- 着色：颜色反映光源特征，也反映物体对光的反射、折射和透射等物理属性。

7.2 平面几何投影

□ 照像机模型与投影

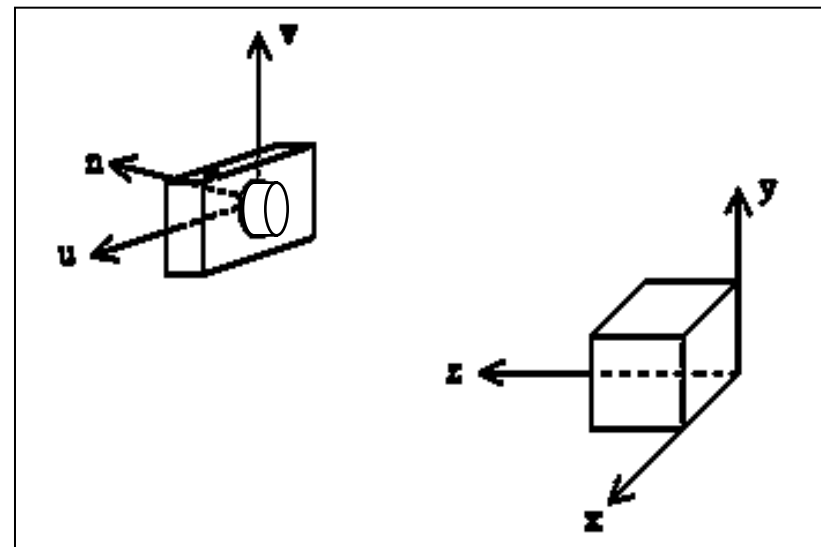
■ 拍摄过程

- 选景
- 取景—裁剪
- 对焦—参考点
- 按快门—成像

■ 移动方式

- 移动景物
- 移动照相机

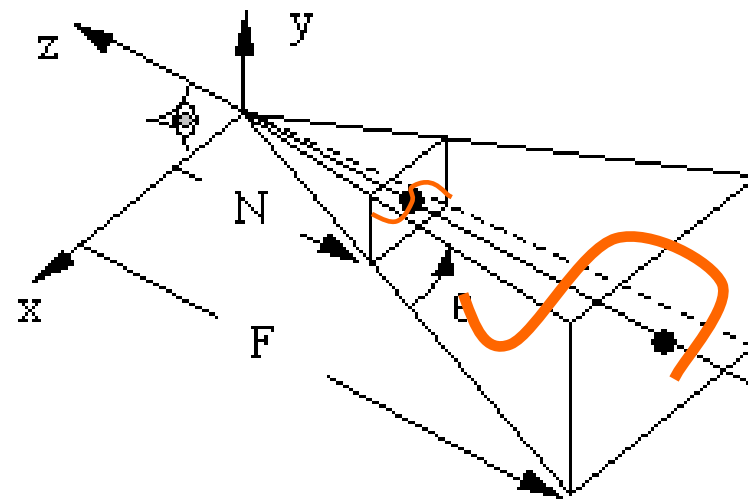
■ 照相机和景物分别具有自己的坐标系 uvn 和 xyz



平面几何投影

□ 对应地：投影—照相机模型

- 建模，选定投影类型 – 选景
- 设置投影参数 – 拍摄方向、距离等
- 三维裁剪 – 取景
- 投影和显示 – 成像



三维图形显示的主要步骤

- 模型变换：在世界坐标系的变换
- 投影变换：将世界坐标系转换为标准设备坐标的变换称为投影变换。
- 图像变换：在标准设备坐标中的变换

平面几何投影及其分类

□ 几个基本定义

■ 投影

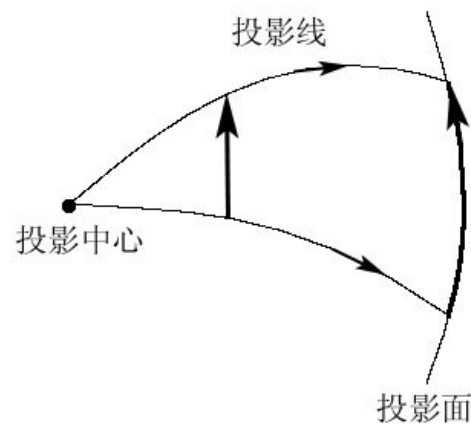
- 广义：将 n 维的点变换成小于 n 维的点
- 我们讨论：将3维的点变换成小于2维的点

■ 投影中心(COP: Center of Projection)

- 视觉系统—观察点、视点
- 电影放映机—光源

■ 投影面

- 必须是一不经过投影中心的面
- 平面—照相机底片
- 曲面—球幕电影，视网膜



平面几何投影及其分类

■ 投影线

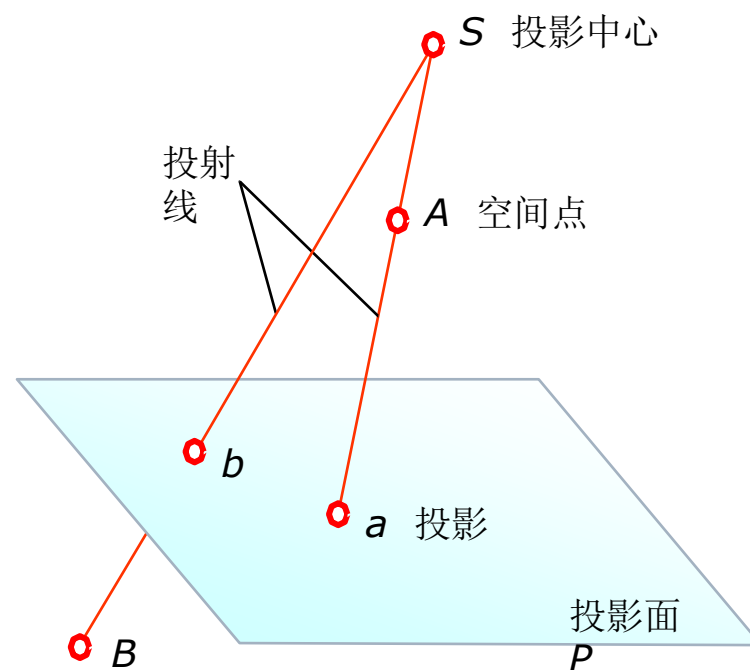
- 从投影中心向物体上各点发出的射线
- 直线—如光线
- 曲线—如喷绘

■ 投影变换

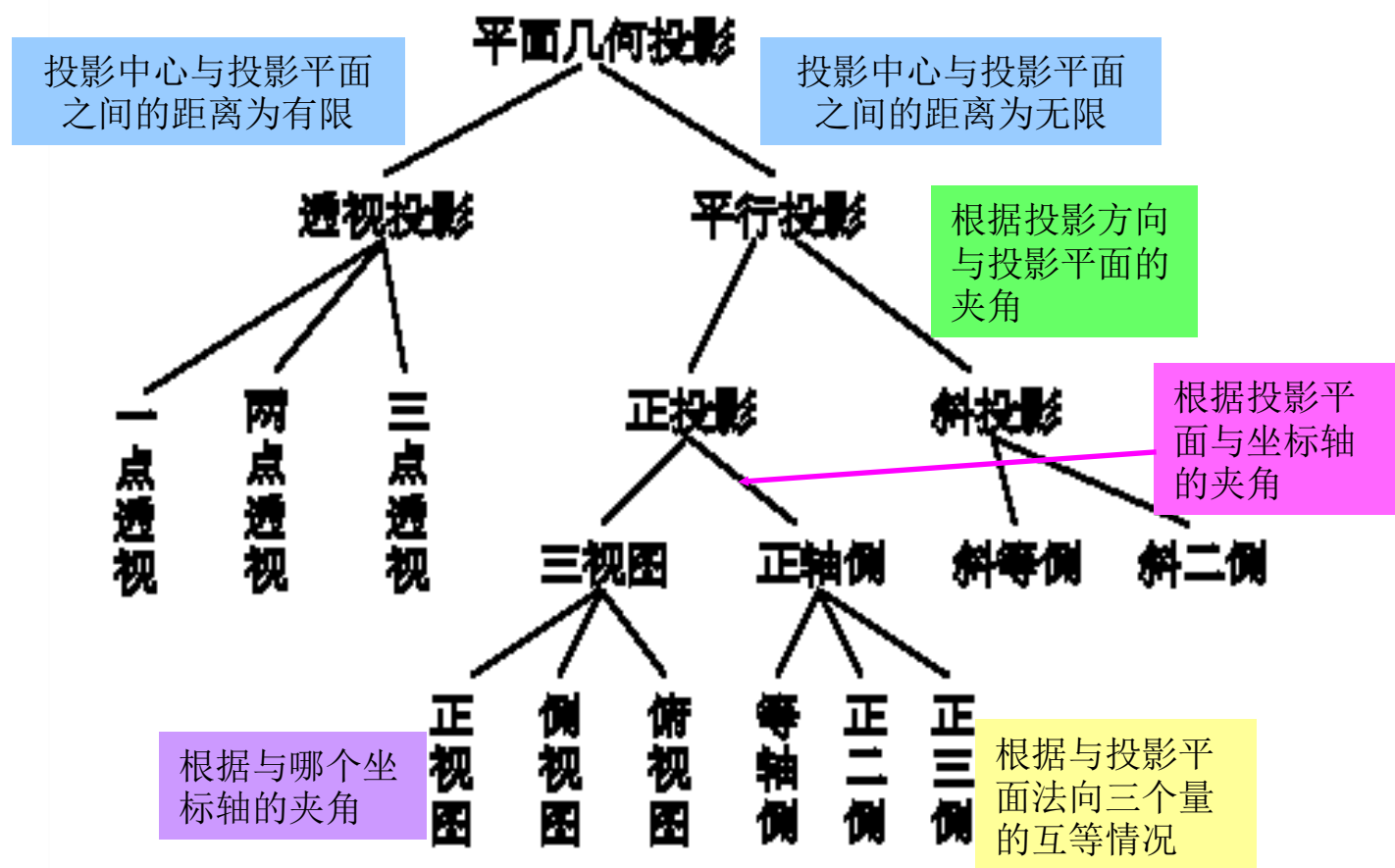
- 投影过程
- 投影的数学表示

■ 我们只讨论平面几何投影

- 投影面是平面
- 投影线为直线

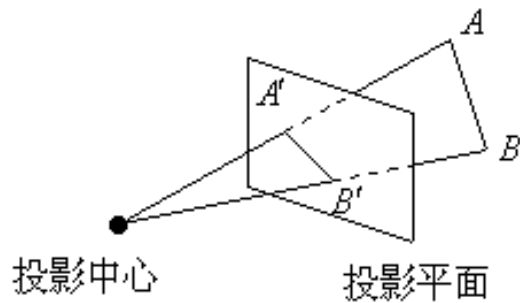


平面几何投影及其分类

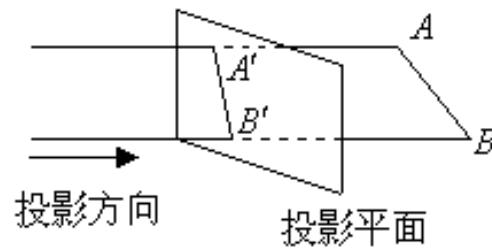


平面几何投影及其分类

□ 直线段的投影



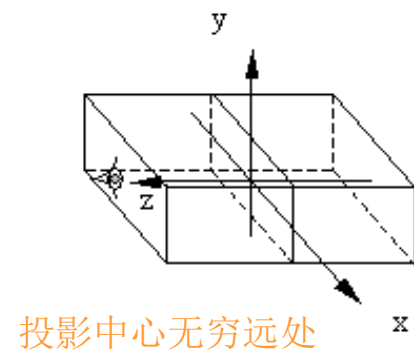
(a)



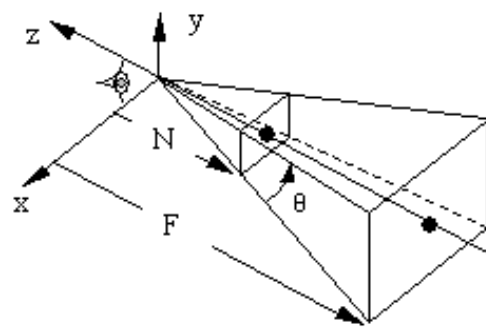
投影中心无穷远处

(b)

□ 矩形的投影



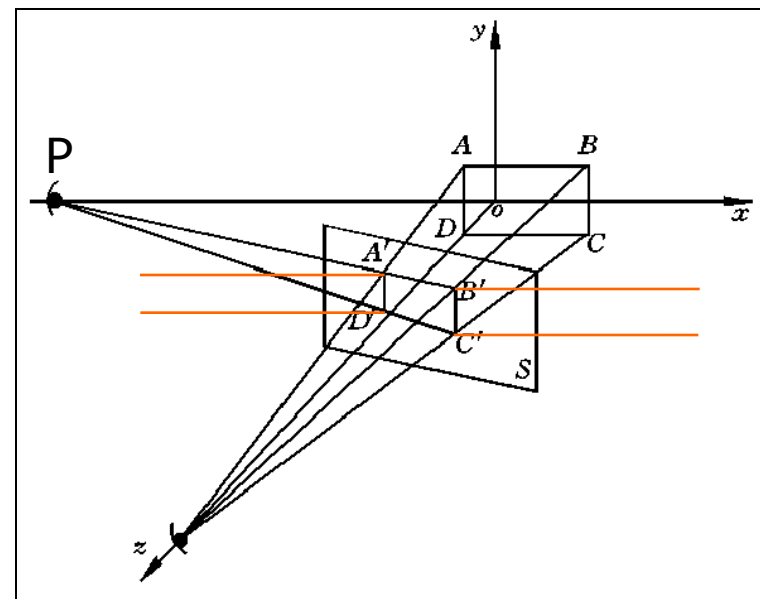
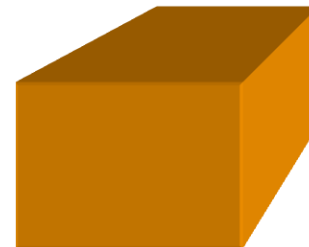
a) 平行投影



b) 透视投影

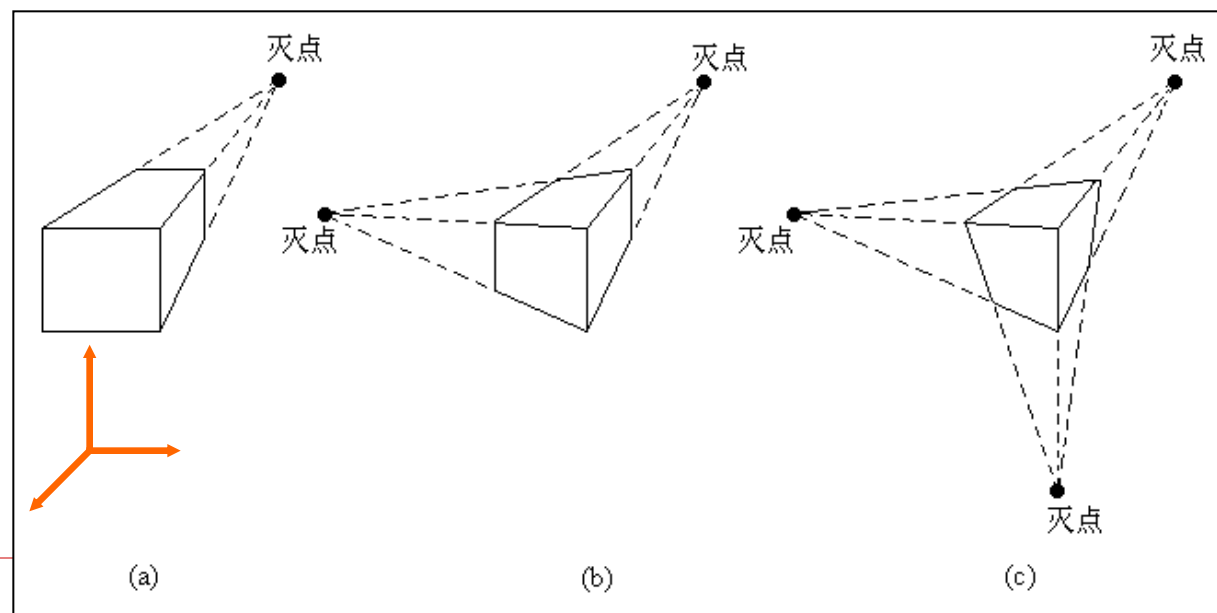
透视投影

- ❑ 充要条件：投影中心与投影平面之间的距离为有限
- ❑ 例子：室内白炽灯的投影，视觉系统
- ❑ 特点：产生近大远小的视觉效果，图形深度感强，看起来真实。但是原有的平行，等距关系不能保持。
- ❑ **灭点**：不平行于投影平面的平行线，经过透视投影之后收敛于一点，称为灭点。如AB,CD投影后收敛于P。



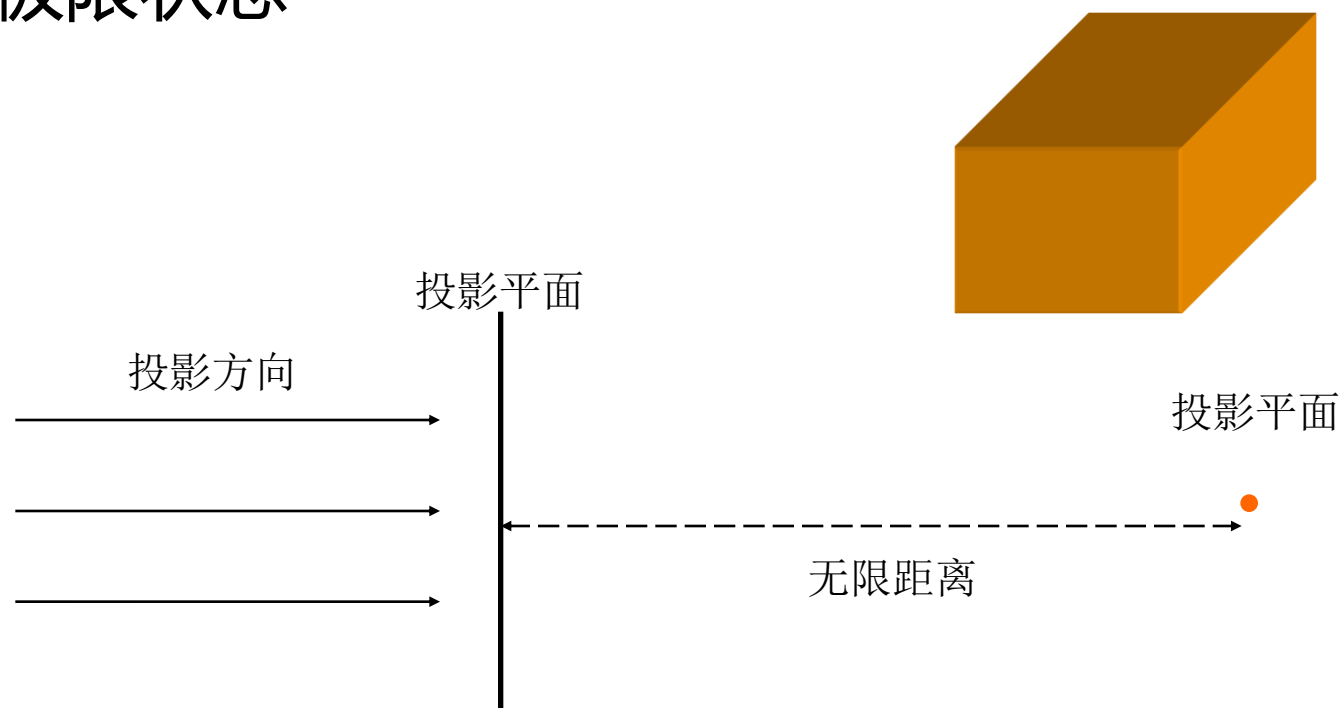
□ **主灭点**: 平行于坐标轴的平行线的灭点。

- 最多三个，个数由与投影平面相交的坐标轴个数决定。
- 透视投影按主灭点的个数分为：一点透视；两点透视；三点透视



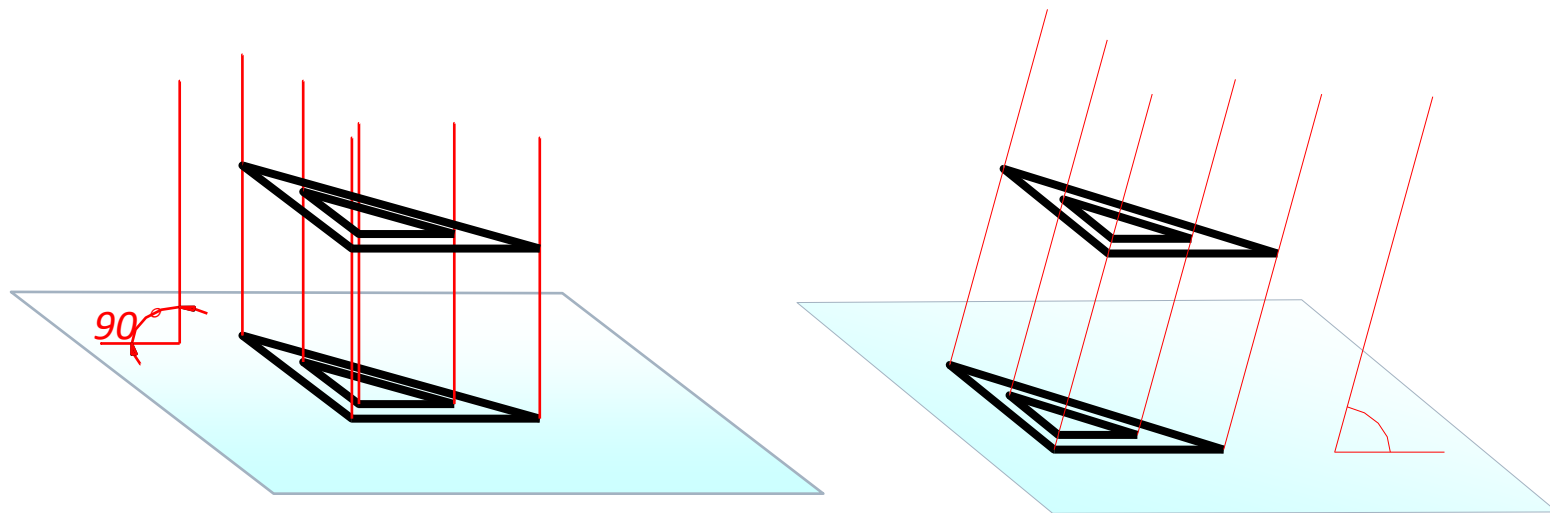
平行投影

- 投影中心与投影平面之间的距离为无限
- 是透视投影的极限状态

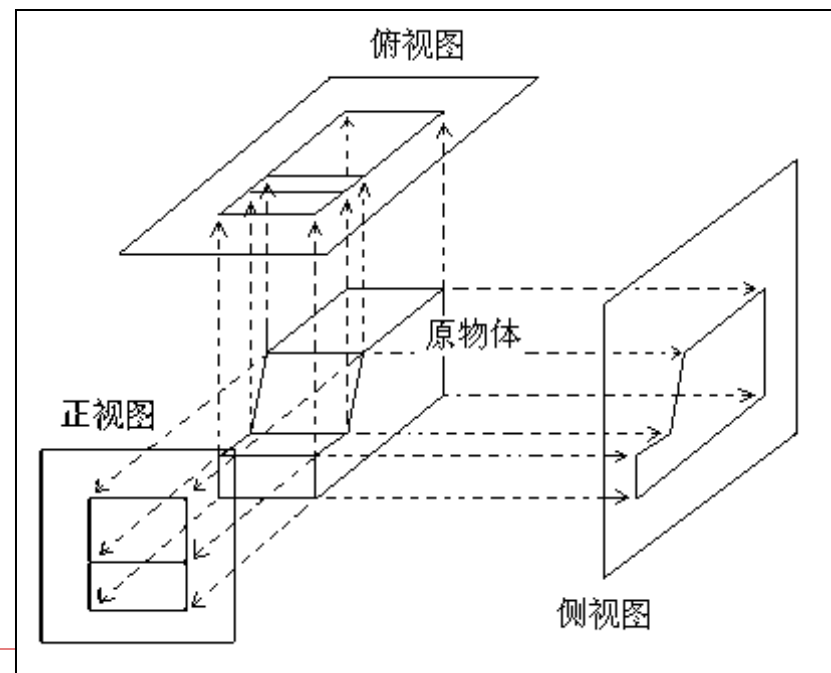
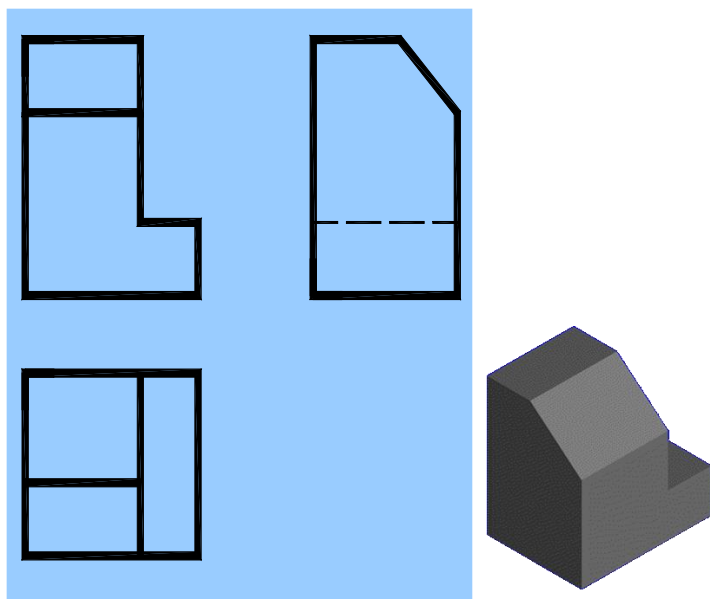


□ 正投影与斜投影

- 根据投影方向与投影平面之间的关系区分。



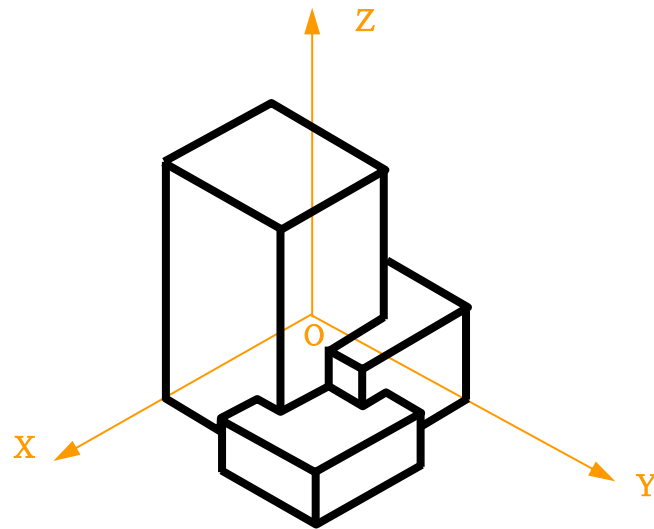
- 根据投影平面的法矢量的方向，正投影分为
 - 投影平面与某坐标轴垂直时：三视图(正视图、侧视图和俯视图)



■ 不垂直时：正轴测

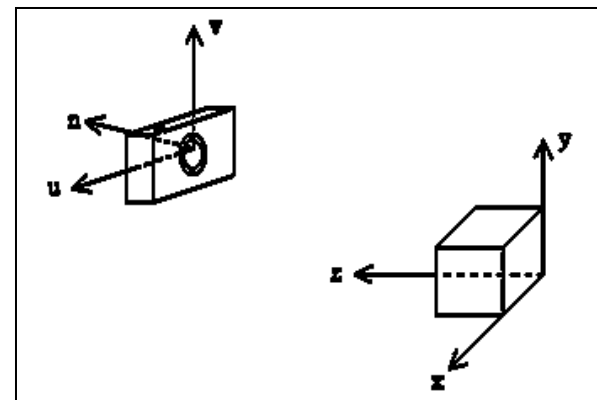
投影平面法线三分量(N_x, N_y, N_z)

- ☐ 都相等：等轴测
- ☐ 二个相等：正二测
- ☐ 都不相等：正三测



7.3 观察坐标系中的投影变换

- 如何进行投影变换?
 - 坐标系变换：变换的分解与合成
- 观察坐标系 (View Reference Coordinate, **VRC**)
 - 照相机所在的坐标系。问题：为什么引入？
 - 生活中的类比—拍摄物体时，移动舞台还是移动摄像机
 - 移动舞台(世界坐标系)
 - 移动难度大
 - 投影表示复杂
 - 移动摄像机(观察坐标系)
 - 依赖于投影平面
 - 投影表示简单
 - 结论：**采用观察坐标系，投影简单**

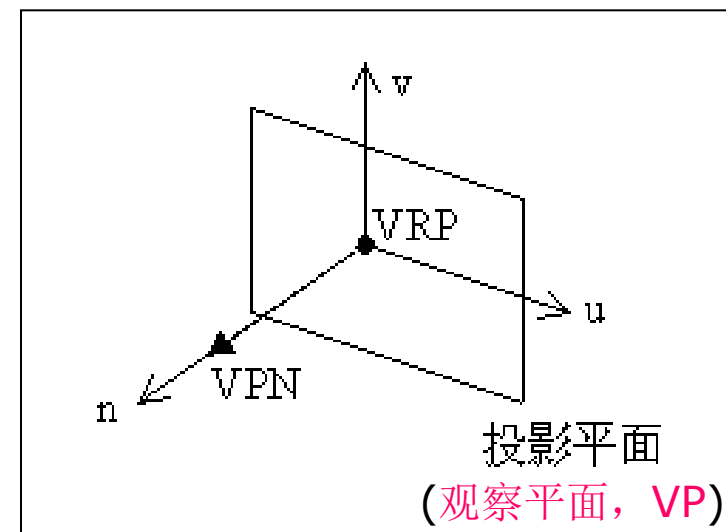


■ 如何建立观察坐标系(u,v,n)

- 坐标原点----观察参考点VRP(View Reference Point)
- n轴----照相机镜头方向(投影平面的法向, View Plane Normal, VPN)
- v轴----照相机向上的方向(观察正向VUP)
- u轴---- $u = v \times n$

■ 为什么需要观察坐标系

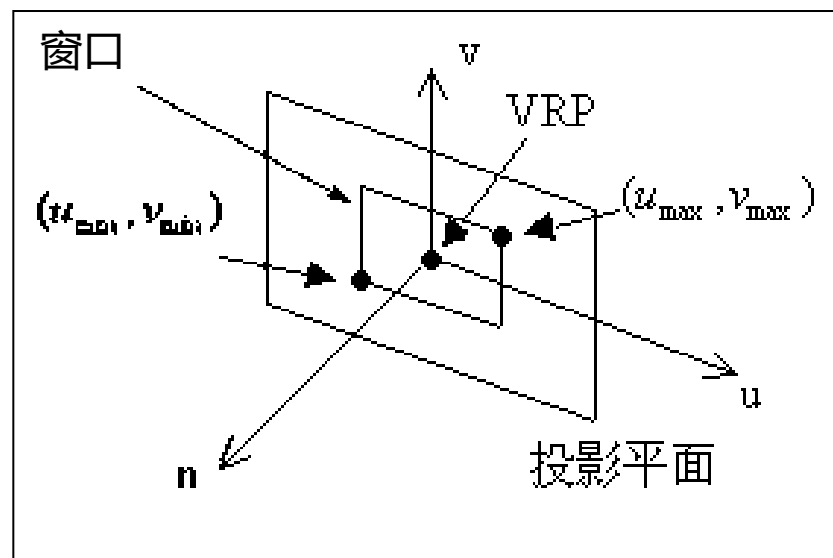
- 简化和加速投影变换
- 投影平面---- $n=0$
- 投影中心---- $(0,0,d)$



观察坐标系中的投影变换

□ 视见体

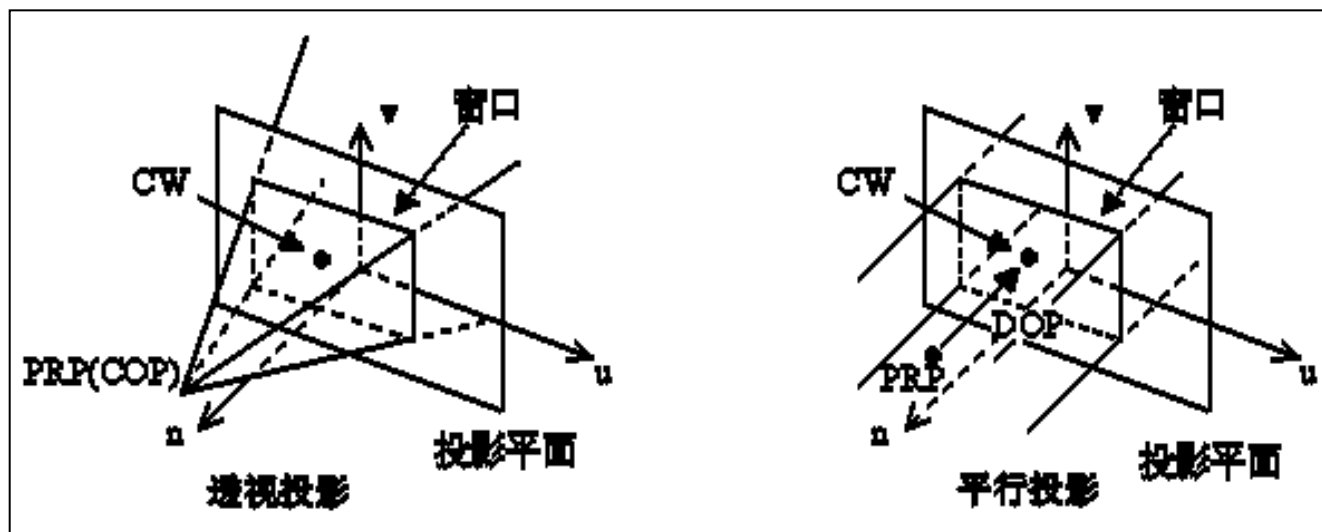
1. 在投影平面上指定一个窗口(类似于二维显示的视口)。以 u_{\min} , u_{\max} , v_{\min} , v_{\max} 四个量确定。
 - 注意：窗口不一定关于原点对称



2. 用户指定投影参考点(Projection Reference Point, PRP), 这也确定了投影中心与投影方向。

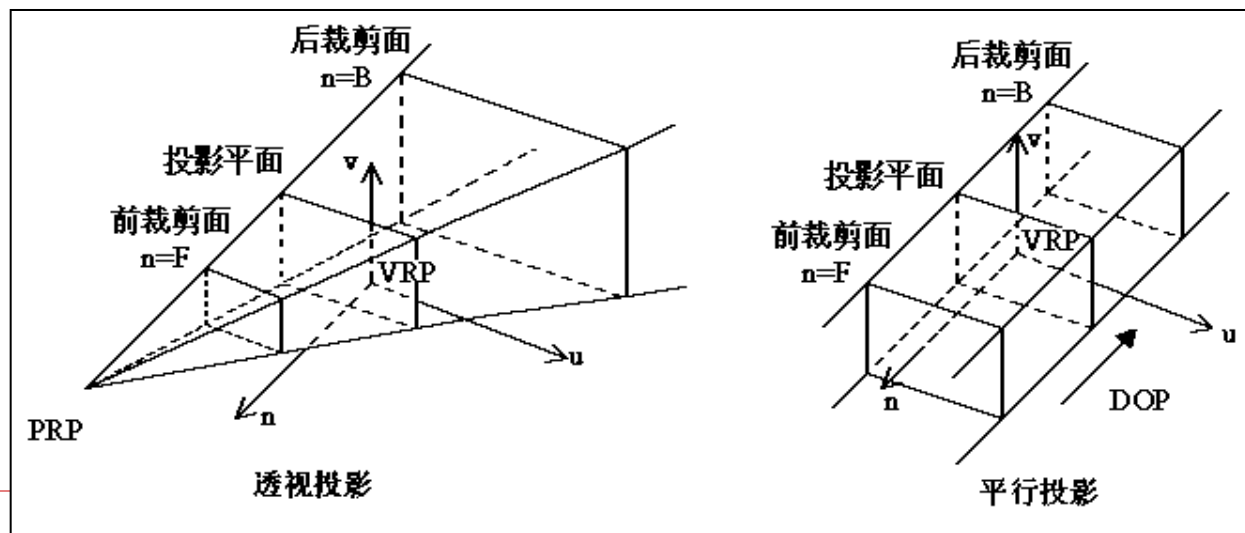
- ❑ 透视投影: PRP就是投影中心(Center of Projection, COP)
- ❑ 平行投影: 投影方向DOP=窗口中心CW-PRP

如此, 观察空间就被定义了



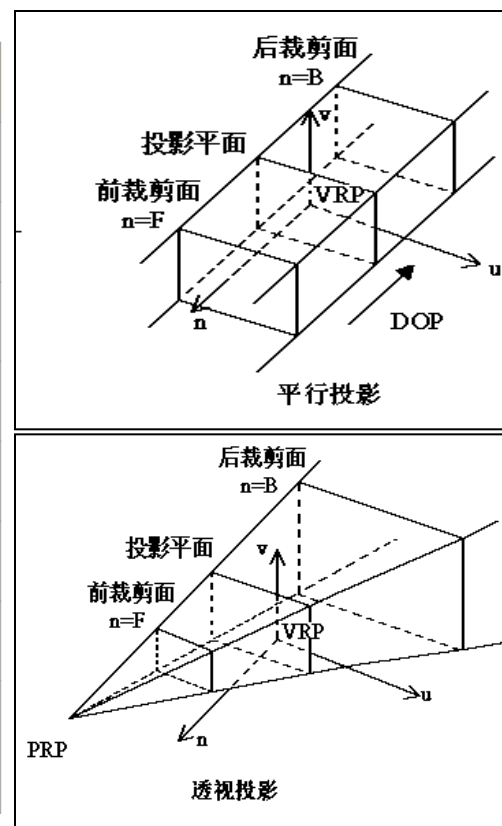
3. 指定前裁剪面与后裁剪面

- 人眼只能看到有限范围内的景物
- 裁剪面平行于投影平面，记为： $n=F$, $n=B$
- 位于前后裁剪面间的有限是观察空间称为**视见体**或**裁剪空间**，物体在被投影前，要关于视见体进行裁剪。



□ 定义一个视见体所需的投影参数及其作用

参数	作用
投影类型	定义投影是平行投影还是透视投影
观察参考点VRP	在世界坐标系中指定，为观察坐标系原点
观察平面法向VPN	在世界坐标系中指定，为观察坐标的 n 轴
观察正向VUP	在世界坐标系中指定，确定观察坐标系的 v 轴
投影参考点PRP	在观察坐标系中指定确定投影中心或投影方向
前裁剪面裁距F	在观察坐标系中指定， $n=F$ 为前裁剪面
后裁剪面裁距B	在观察坐标系中指定， $n=B$ 为后裁剪面
窗口umin, umax, vmin, vmax	在观察坐标系的 uv 平面上指定，窗口



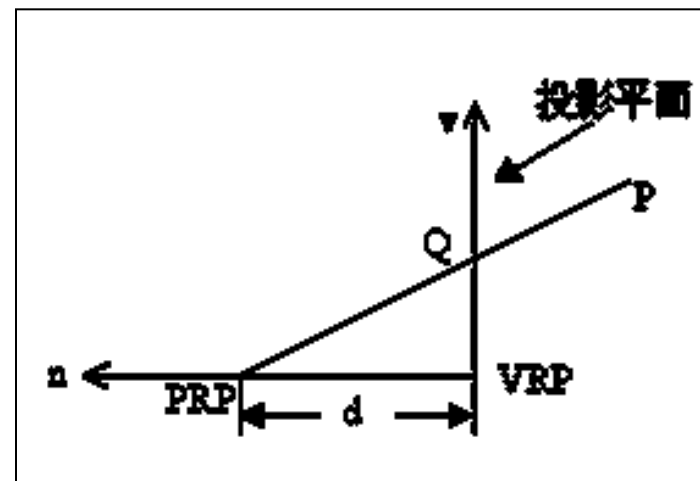
透视投影变换

□ 问题：在观察坐标系 uvn 中，投影平面为 $n=0$ ，投影中心为 $(0,0,d)$ ，待投影点为 P ，求投影点 Q

1. 投影线的参数方程

$$\begin{cases} u = t \bullet u_p \\ v = t \bullet v_p \\ n = t(n_p - d) + d \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$$

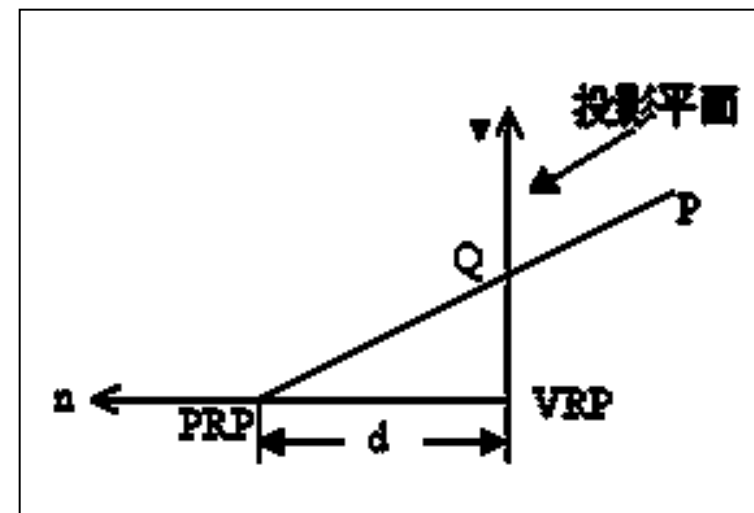
2. 投影平面方程 $n=0$



3. 根据1,2, Q点的坐标

$$\begin{cases} u_Q = \frac{u_P}{1 - (n_P / d)} \\ v_Q = \frac{v_P}{1 - (n_P / d)} \\ n_Q = 0 \end{cases}$$

- $|n_P| \uparrow \quad u_Q \downarrow \quad v_Q \downarrow$
- 由此式可解释为什么透视投影产生近大远小的视觉效果



□ 用透视投影变换矩阵 M_{per} 来表示上式:

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix}$$

□ 作用是将三维物体变换为其二维透视投影, 即 $Q = M_{per} \cdot P$, 其中 P 用齐次坐标表示:

$$P = [u_p, v_p, n_p, 1]^T$$

$$Q = M_{per} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ n_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 0 \\ 1 - \frac{n_p}{d} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_Q = \frac{u_p}{1 - (n_p / d)} \\ v_Q = \frac{v_p}{1 - (n_p / d)} \\ n_Q = 0 \end{cases}$$

平行投影变换

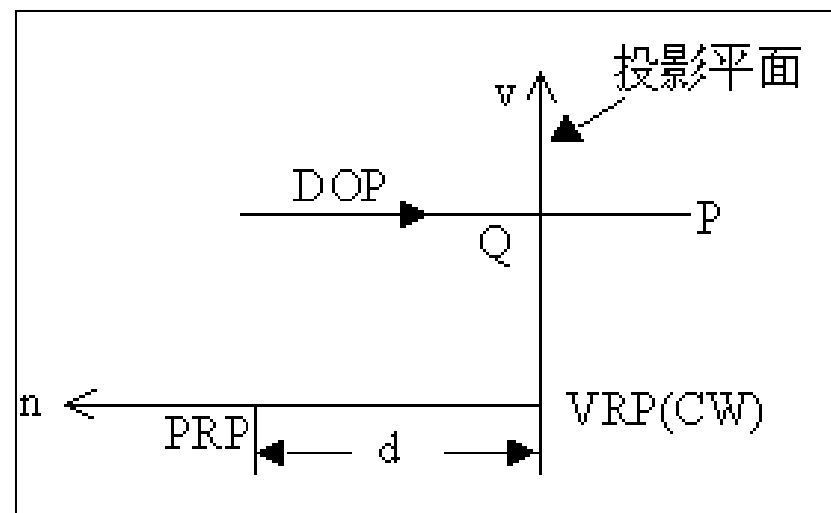
□ 问题：在观察坐标系 uvn 中，投影平面为 $n=0$ ，投影方向为 $(0, 0, -1)$ ，待投影点为 P ，求投影点 Q

■ 投影线的参数方程

$$\begin{cases} u = u_p \\ v = v_p \\ n = d - t \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$$

■ 投影平面方程 $n=0$

■ Q 点的坐标 $\begin{cases} u_Q = u_P \\ v_Q = v_P \\ n_Q = 0 \end{cases}$



□ 平行投影变换矩阵 M_{ort}

$$M_{ort} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_Q = u_P \\ v_Q = v_P \\ n_Q = 0 \end{cases}$$

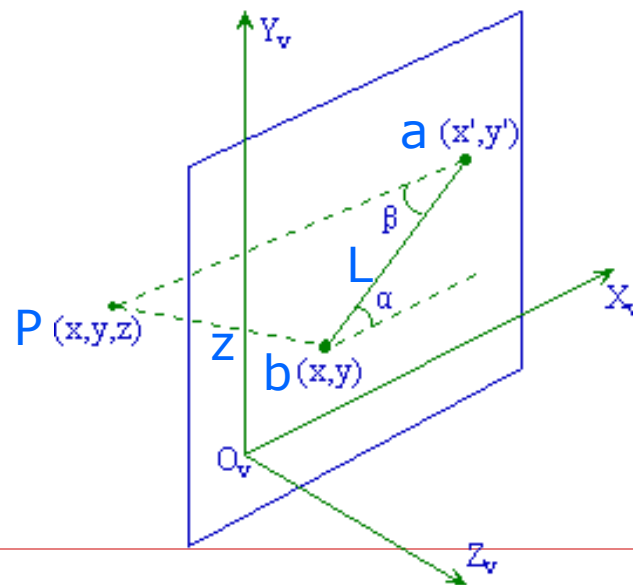
□ 作用是将三维物体变换为其二维透视投影，即 $Q = M_{ort} \cdot P$ ，其中 P 用齐次坐标表示：
 $P = [u_P, v_P, n_P, 1]^T$

□ 透视投影与平行投影之间的关系

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix} \quad M_{ort} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lim_{d \rightarrow \infty} M_{per} = M_{ort}$$

斜平行投影

- 投影方向不垂直于投影平面的平行投影被称为斜平行投影。
- 右图中的 $Z=0$ 的坐标平面为观察平面，点 $b(x,y)$ 为点 $P(x,y,z)$ 在观察平面上的正平行投影坐标，点 $a(x',y')$ 为斜投影坐标。
- $b(x,y)$ 与 $a(x',y')$ 的距离为 L 。



□ 斜投影变换的公式为：

$$\begin{cases} x' = x + L \cos \alpha \\ y' = y + L \sin \alpha \end{cases}$$

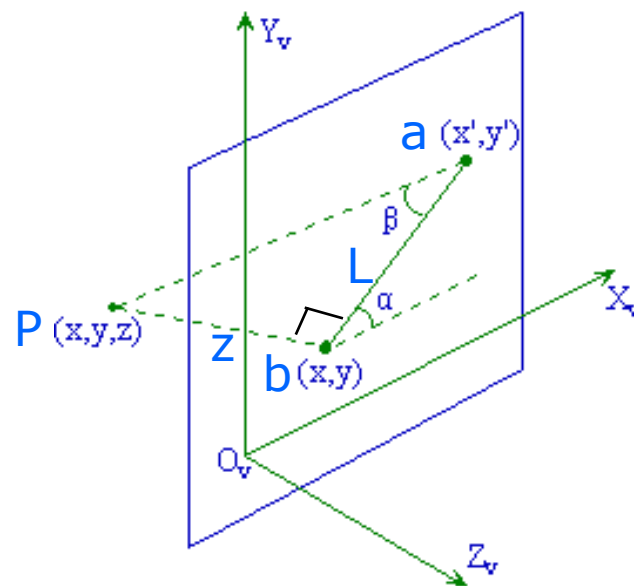
□ B为投影角已知，且L与 β 具有如下关系： $\operatorname{tg} \beta = z / L$

□ 令 $L_1 = L/z$ ，则上式改写为：

$$\begin{cases} x' = x + z(L_1 \cos \alpha) \\ y' = y + z(L_1 \sin \alpha) \\ z' = 0 \end{cases}$$

□ 斜投影变换的矩阵运算式为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 & L_1 \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



7.3.5 从世界坐标系到观察坐标系的变换

- 一旦观察坐标系建立后，后续的如投影、裁剪等将在其中进行。但是物体最初是在世界坐标系(用户坐标系)中构造的，因此必须将它们变换到观察坐标系中。这个变换即从世界坐标系到观察坐标系的变换。
- 坐标系的变换在已学过，在7.9节。
- 要求的是从世界坐标系到观察坐标系的变换矩阵(4×4)。

□ 条件

■ WC(Oxyz), VRC(unv), 记变换矩阵为 $M_{WC \rightarrow VRC}$

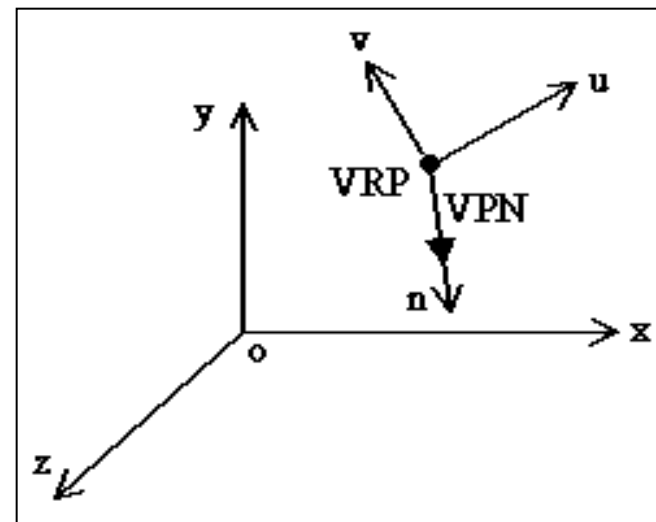
■ 已知

□ VRC的坐标原点(观察参考点)VRP (VRPx, VRPy, VRPz)

□ 投影平面法向VPN

□ 观察正向VUP

□ 则VRC三个坐标轴方向上的单位矢量

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \frac{VPN}{\|VPN\|} \text{ 记为 } [n_x, n_y, n_z] \\ u = \frac{VUP \times VPN}{\|VUP \times VPN\|} \text{ 记为 } [u_x, u_y, u_z] \\ v = n \times u \text{ 记为 } [v_x, v_y, v_z] \end{array} \right.$$


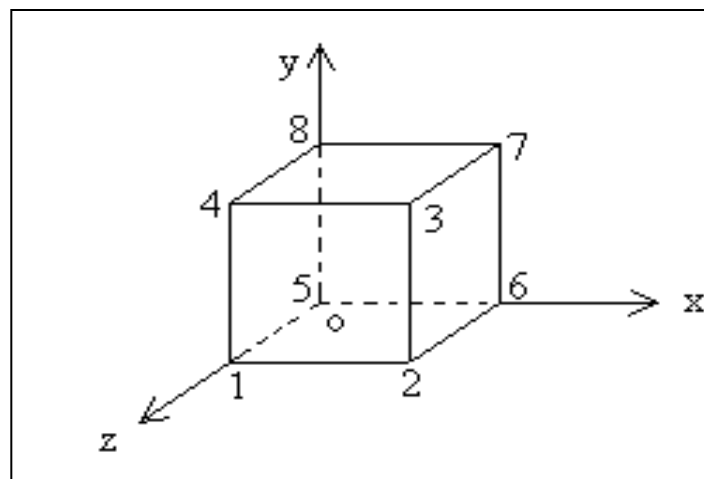
□ 结论:

- 先平移使VRP落于WC的原点O，再旋转使u,v,n和x,y,z一致。

$$M_{WC \rightarrow VRC} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -VRP_x \\ 0 & 1 & 0 & -VRP_y \\ 0 & 0 & 1 & -VRP_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.4 投影举例

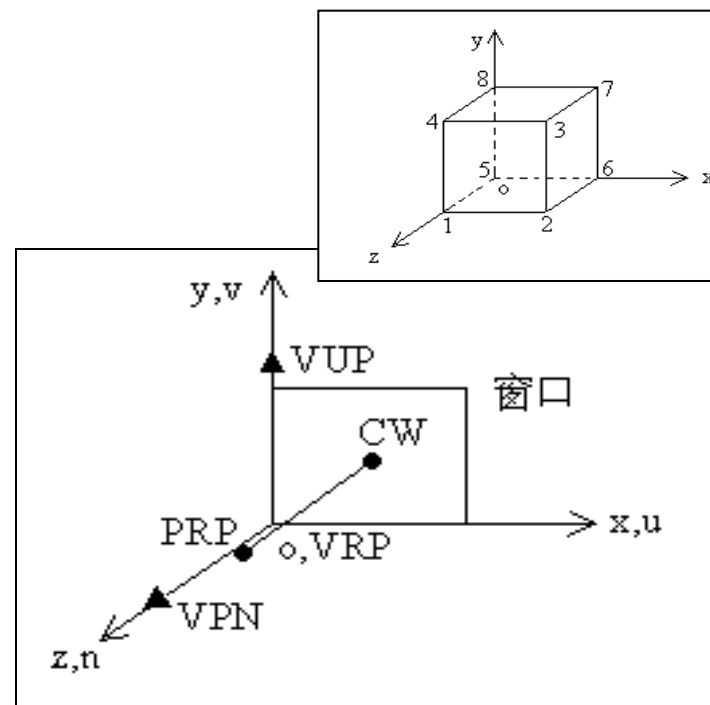
- 本节将运用上文所说的概念建立两种投影方式下的不同投影。
- 待投影的物体：单位立方体
 - 各顶点用1-8表示
 - 顶点5在坐标原点
 - 顶点3在 $(1,1,1)$



□ 缺省投影参数

- 在这组缺省参数下，世界坐标系WC(xyz)与观察坐标系VRC(uvn)重合。
- 窗口在XOY(或UOV)平面上。
- 投影法向(VPN)与Z轴(N轴)重合。

参数	值
投影类型	平行投影
VRP(WC)	(0,0,0)
VPN(WC)	(0,0,1)
VUP(WC)	(0,1,0)
PRP(VRC)	(0.5,0.5,1)
窗口(VRC)	(0,1,0,1)
F(VRC)	正无穷
B(VRC)	负无穷



透视投影

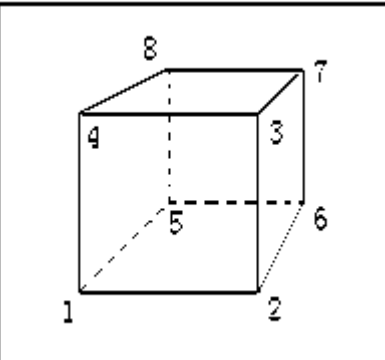
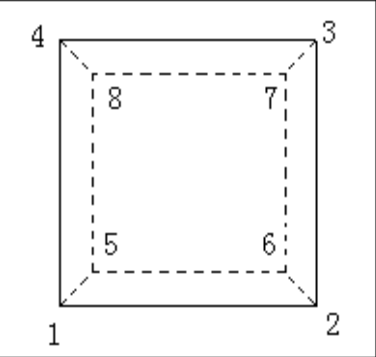
□ 一点透视

参数	值
投影类型	透视投影
VRP(WC)	(0,0,0)
VPN(WC)	(0,0,1)
VUP(WC)	(0,1,0)
PRP(VRC)	(0.5,0.5,4.0)
窗口(VRC)	(-0.5,1.5,-0.5,1.5)

改为透视投影

投影中心后移

窗口放大



参数	值
投影类型	透视投影
VRP(WC)	(0,0,0)
VPN(WC)	(0,0,1)
VUP(WC)	(0,1,0)
PRP(VRC)	(2.0,2.0,4.0)
窗口(VRC)	(-0.5,1.5,-0.5,1.5)

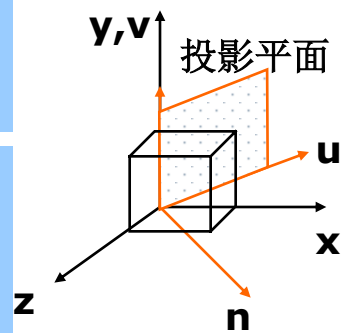
投影中心移动

透视投影

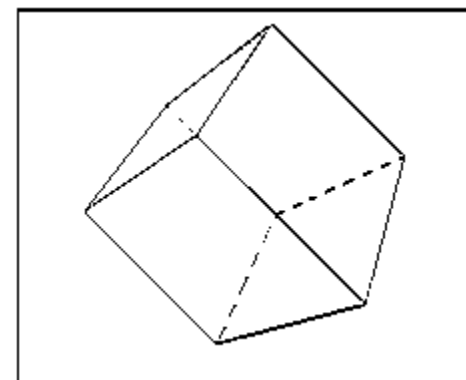
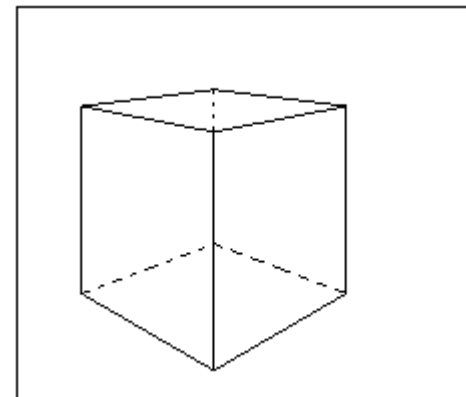
□ 二点透视：(投影平面与两个坐标轴相交)

参数	值
投影类型	透视投影
VRP(WC)	(0,0,0)
VPN(WC)	(1,0,1)
VUP(WC)	(0,1,0)
PRP(VRC)	(0.5,0.5,4)
窗口(VRC)	(-1.5,1.5,-1.5,1.5)

投影法向为
(1,0,1)，投影
平面与x轴和y
轴相交



改变了观察正
向(UVP)，相
当于相机侧倾
效果



平行投影

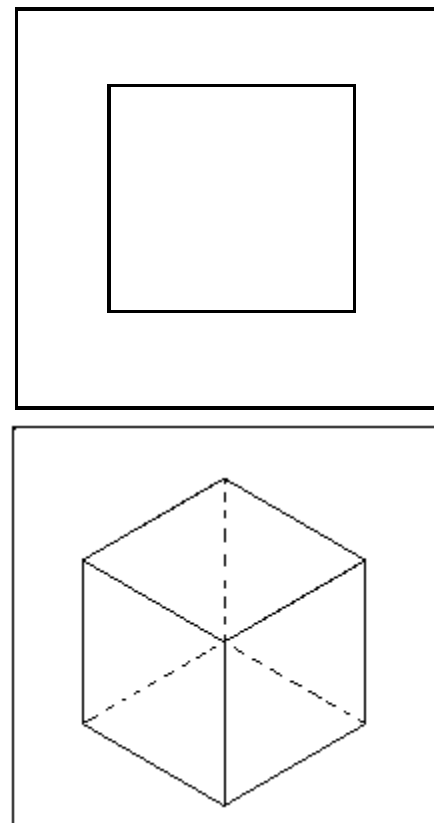
□ 平行投影

参数	值
投影类型	平行投影
VRP(WC)	(0,0,0)
VPN(WC)	(0,0,1)
VUP(WC)	(0,1,0)
PRP(VRC)	(0.5,0.5,1)
窗口(VRC)	(-0.5,1.5,0.5,1.5)

平行投影

参数	值
投影类型	平行投影
VRP(WC)	(0,0,0)
VPN(WC)	(1,1,1)
VUP(WC)	(0,1,0)
PRP(VRC)	(0.5,0.5,2)
窗口(VRC)	(-0.5,1.5,0.5,1.5)

观察平面法向
变化为(1,1,1)
因此得到等轴
侧投影

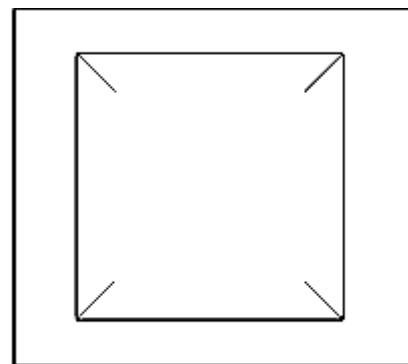
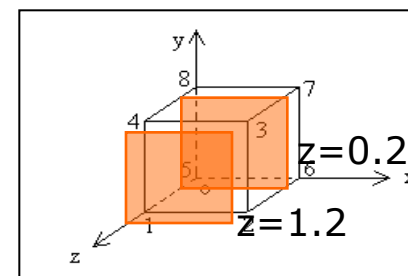


□ 前、后裁剪面的影响

参数	值
投影类型	透视投影
VRP(WC)	(0,0,0)
VPN(WC)	(0,0,1)
VUP(WC)	(0,1,0)
PRP(VRC)	(0.5,0.5,2)
窗口(VRC)	(-0.5,1.5,-0.5,1.5)
F(VRC)	1.2
B(VRC)	0.2

透视投影

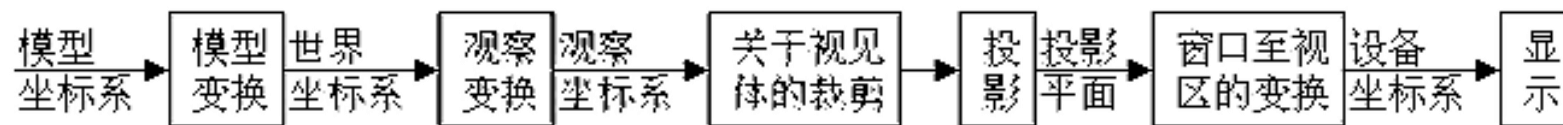
新增裁减面



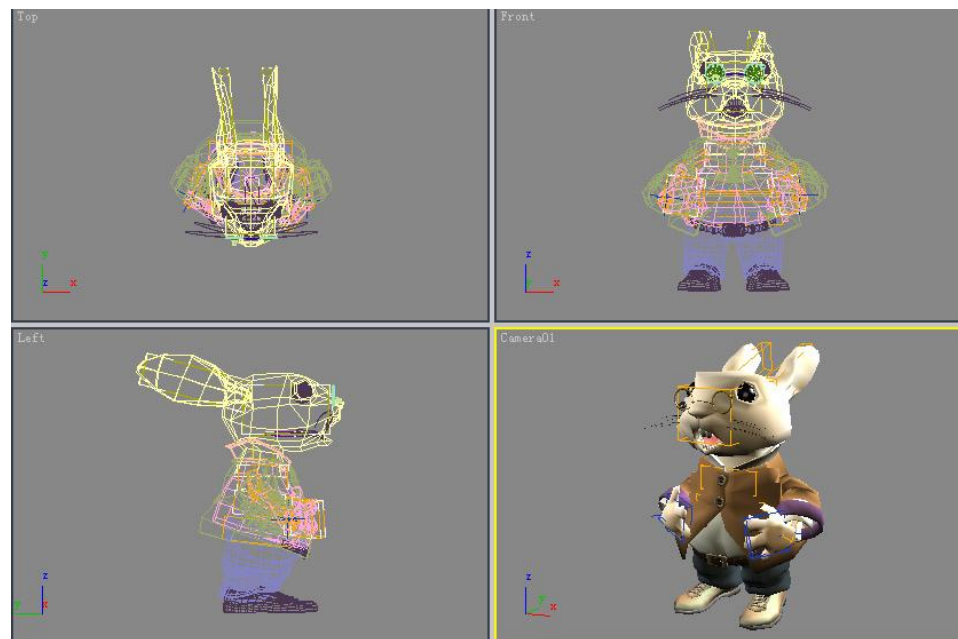
尾部被截掉的立方体

7.4 三维图形的显示流程图

□ 显示流程图

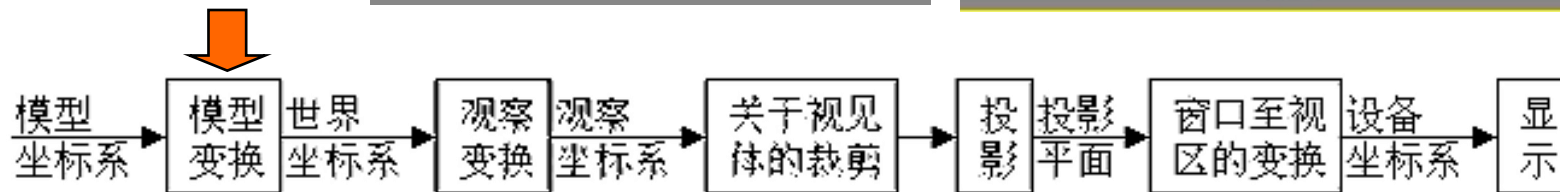
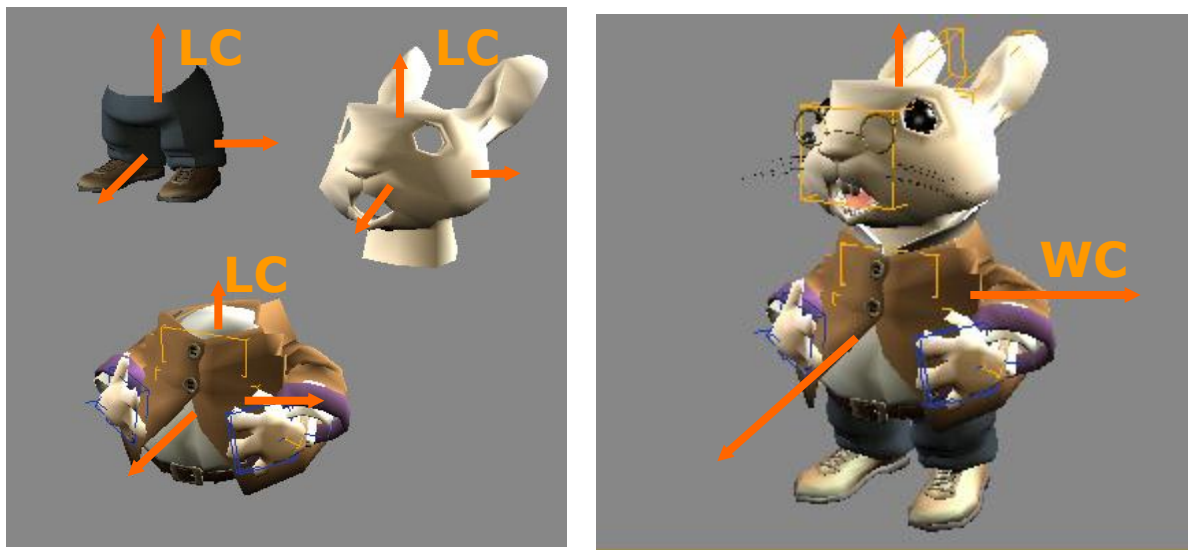


■ 例子：



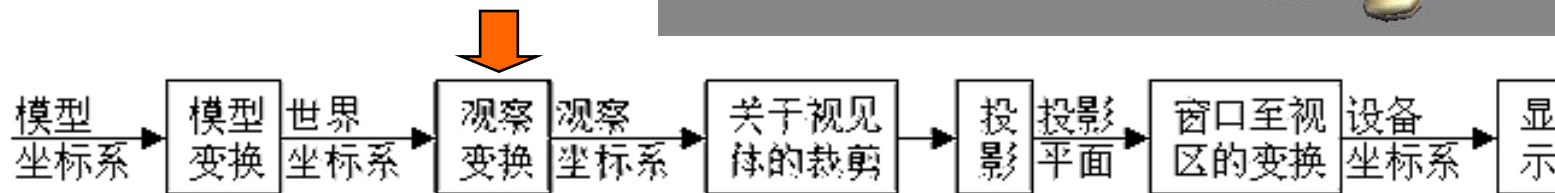
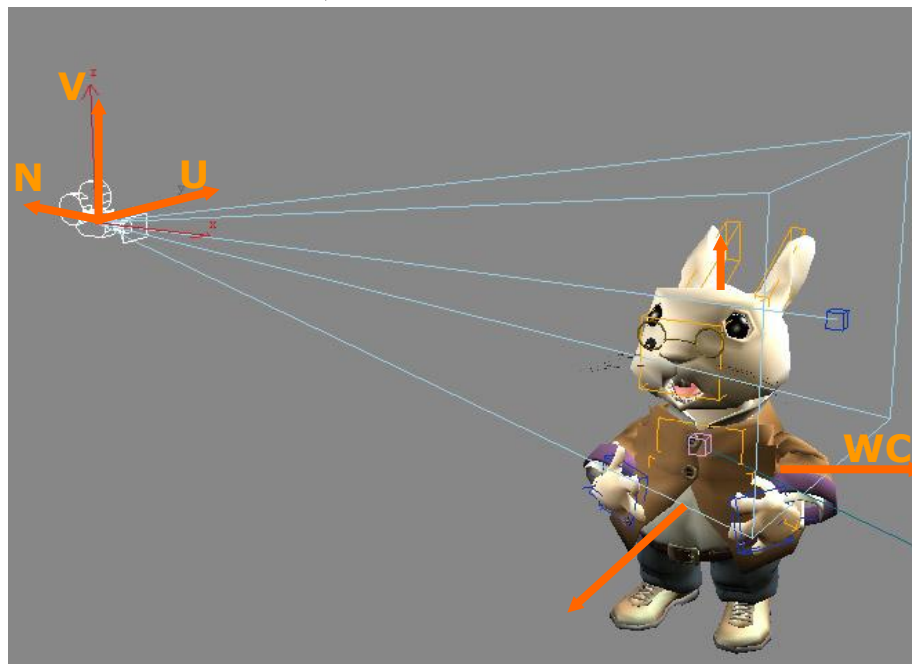
模型变换

- 物体最初定义于自己的局部坐标系，经适当的几何变换(模型变换)后进入世界坐标系中。



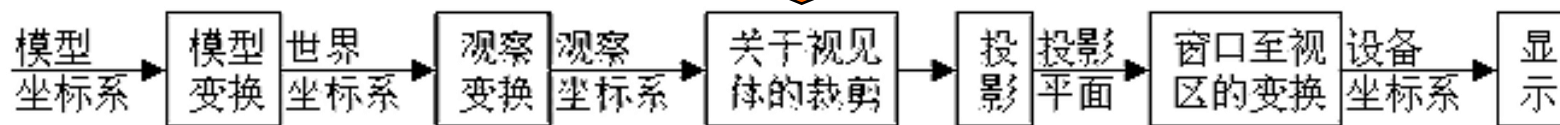
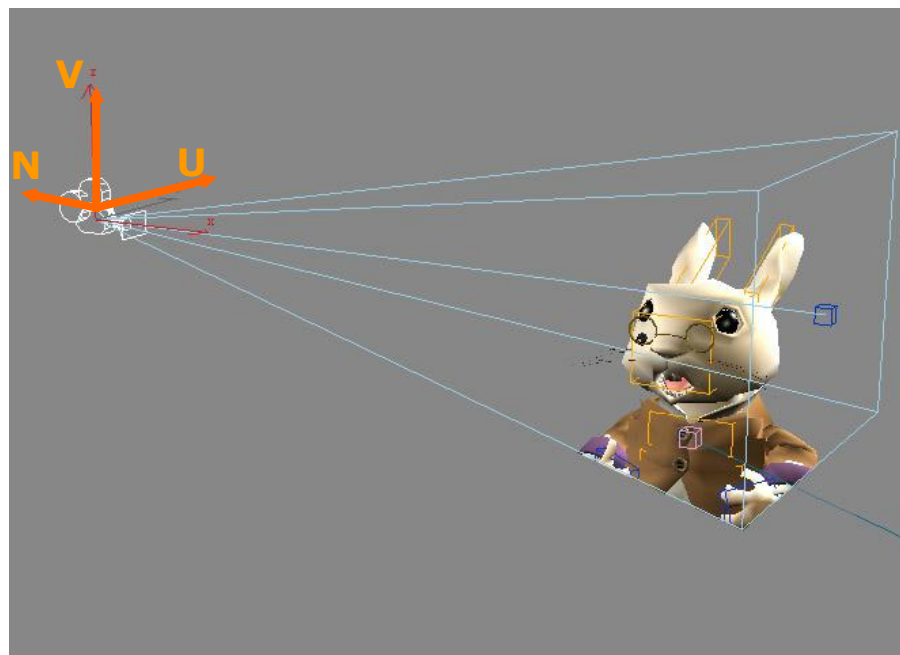
观察变换

- 经观察变换，获得物体在观察坐标系的表示。

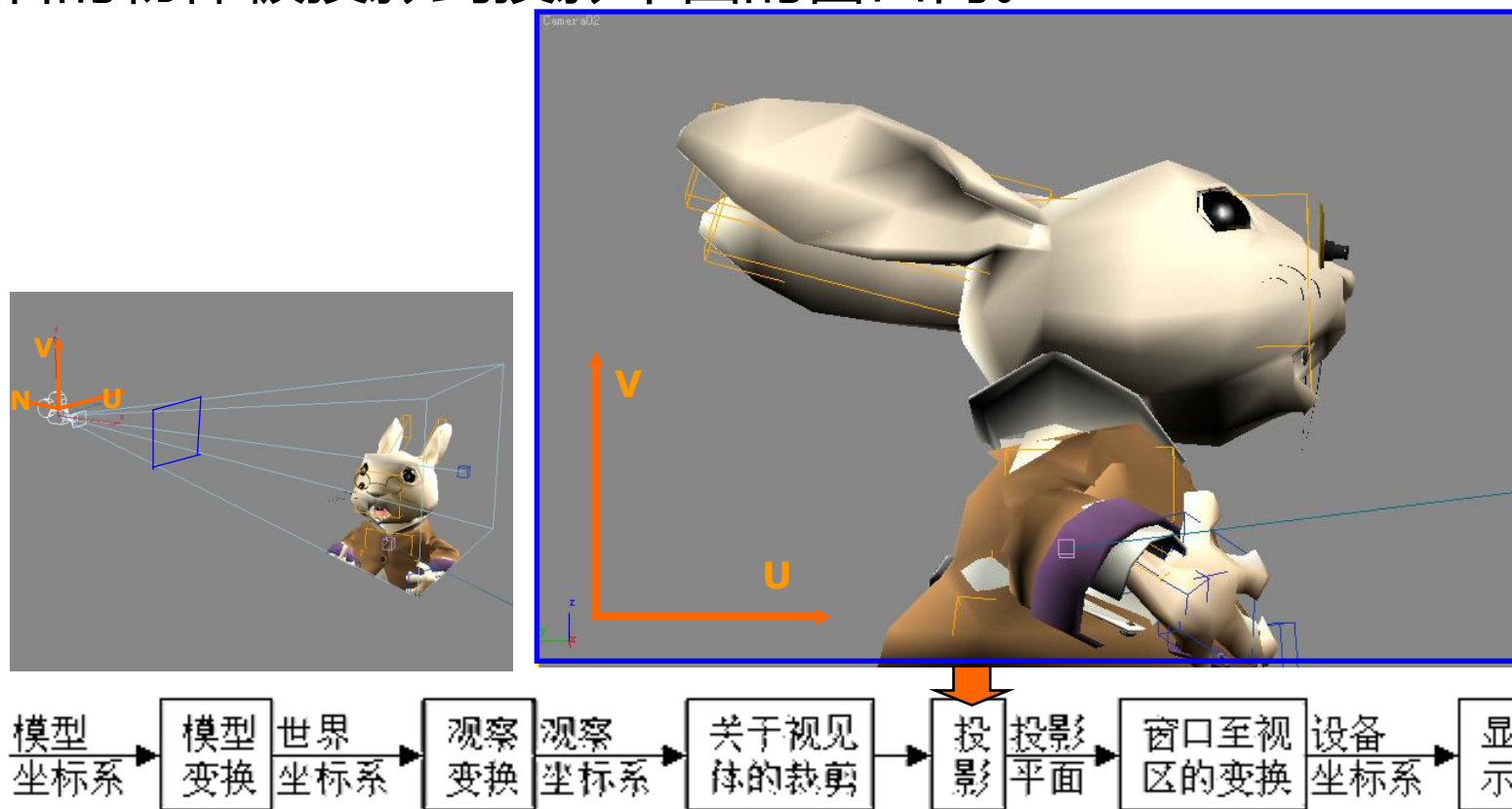


关于视见体的裁剪

- 观察坐标系的视见体划定了物体可见范围，裁剪之。

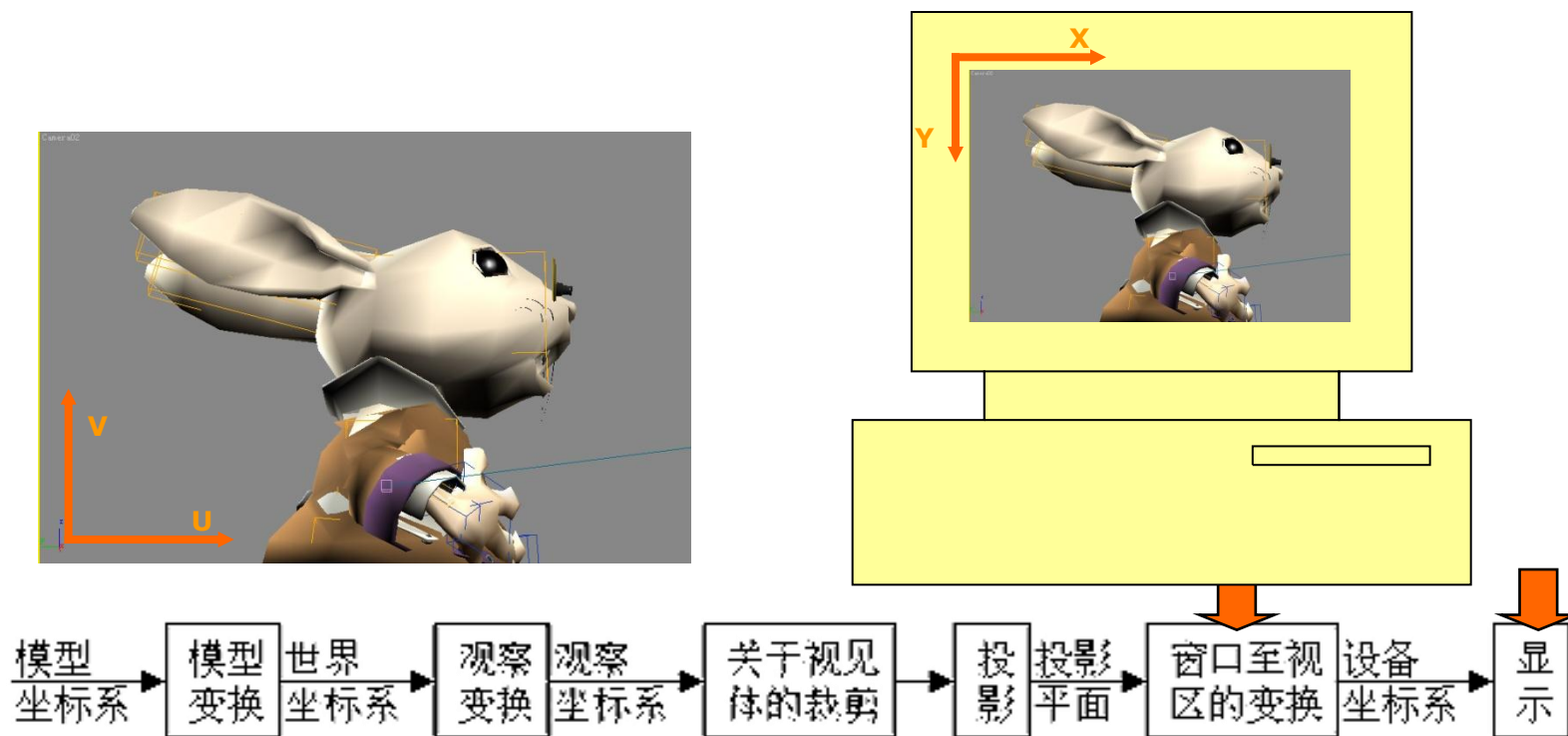


- 裁剪后的物体被投影到投影平面的窗口内。



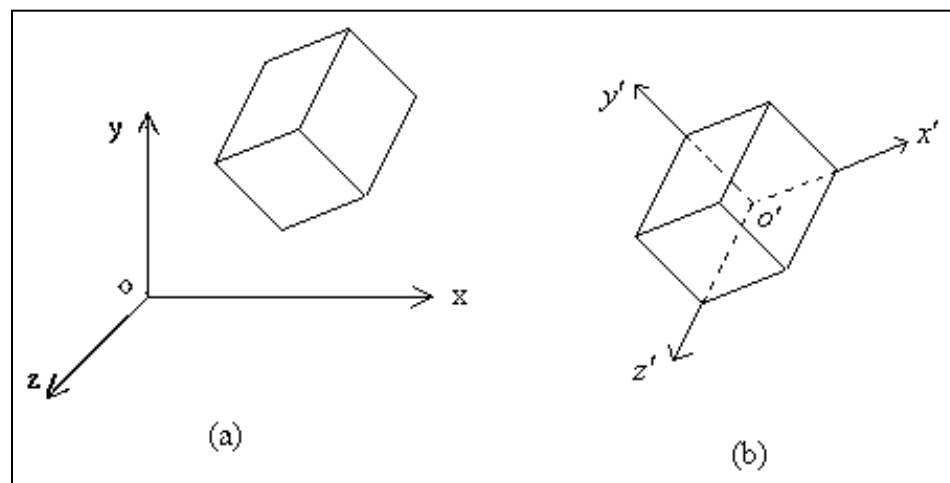
窗口至视区的变换

- 通过窗口至视区的变换，物体的二维投影影像被变换到设备坐标系并显示。



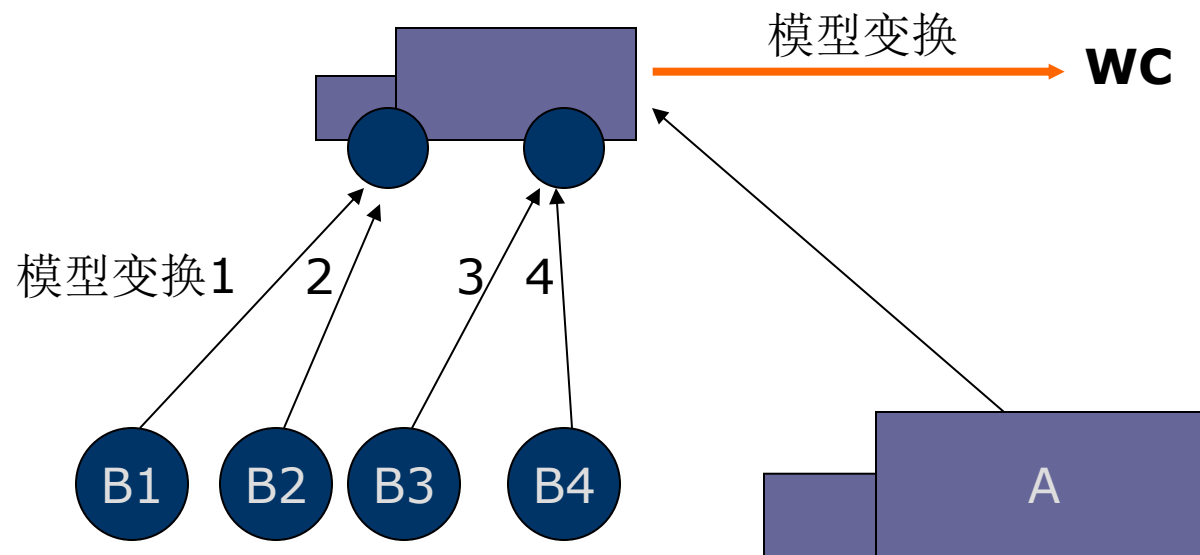
□ 模型坐标系

- 构造一个复杂场景(世界)需要很多物体，如果这些物体都直接定义于WC中是复杂而困难的。
- 因此：引入模型坐标系(Modeling Coordinate)，或称局部坐标系(LC)
- 模型坐标系附着于模型本身。
- 在模型坐标系中物体的表示比较简单。



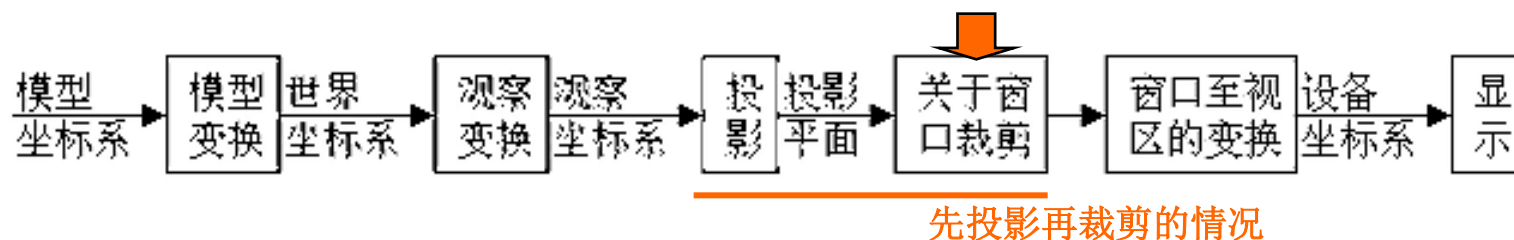
■ 模型变换(Modeling Transformation)

- 将物体从本身的模型坐标系变换到上层物体的模型坐标系(最终：世界坐标系)的几何变换
- 模型变换是构造复杂物体的重要方法
- 例子：



□ 何时裁剪的问题

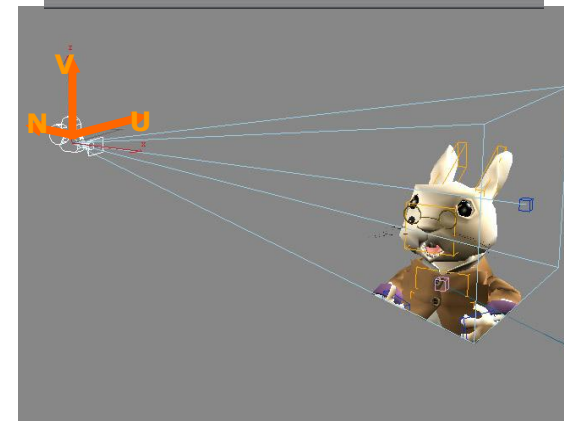
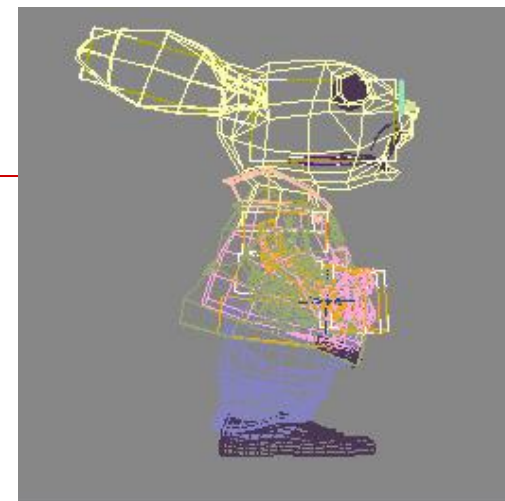
- 如果把流程图中裁剪与投影的顺序颠倒过来...



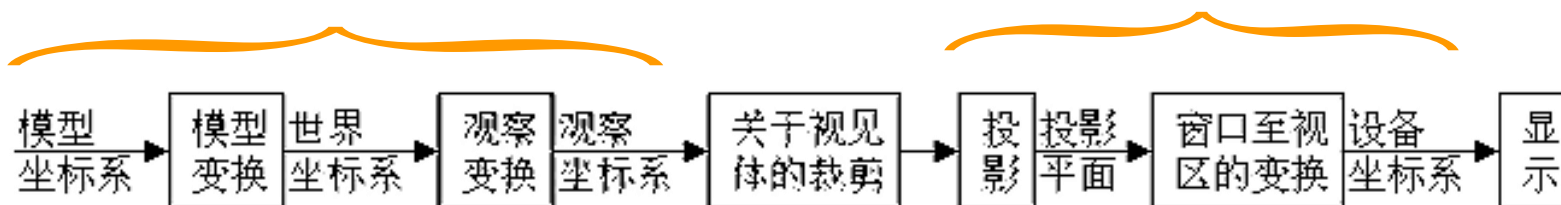
- 结论：也是可行的。
- 先裁剪再投影的优点：只对可见的物体进行投影变换，大大减少投影计算量；
缺点：三维裁剪算法相对复杂；
- 先投影再裁剪的优点：二维裁剪相对容易；缺点：要对所有物体进行投影变换，计算量大。

■ 为什么我们选择先裁剪再投影

- 三维物体的表面通常被离散表示成多边形或折线(例如上例), 而对这类简单图元, 三维裁剪同样比较简单。
- 三维图形在显示过程中需要被消隐, 做这个工作要有图形的深度信息, 所以必须在投影之前完成。消隐很费时, 如果在此之前进行裁剪, 可使需要消隐的图形量减至最小。



- 从显示流程图可以看出，图形显示前经历了很多步骤，如果对每个图元孤立执行上述步骤是很费时的。
- 注意到这些步骤除裁剪外都可以通过变换矩阵来表示，因此，我们可以预先做适当变换合成，将裁剪前后的变换各合并为一个矩阵。
- 这样在显示图元时只要做两次矩阵乘法+裁剪工作就可以了。



□ 规范视见体

■ 为什么引入规范视见体

- 裁剪的效率极大影响图形显示速度
- 视见体由六个面构成，裁剪涉及图元与视见体六个表面的求交，需要大量运算
- 因此，引入规范视见体概念，简化裁剪，简化投影

■ 平行投影的规范视见体

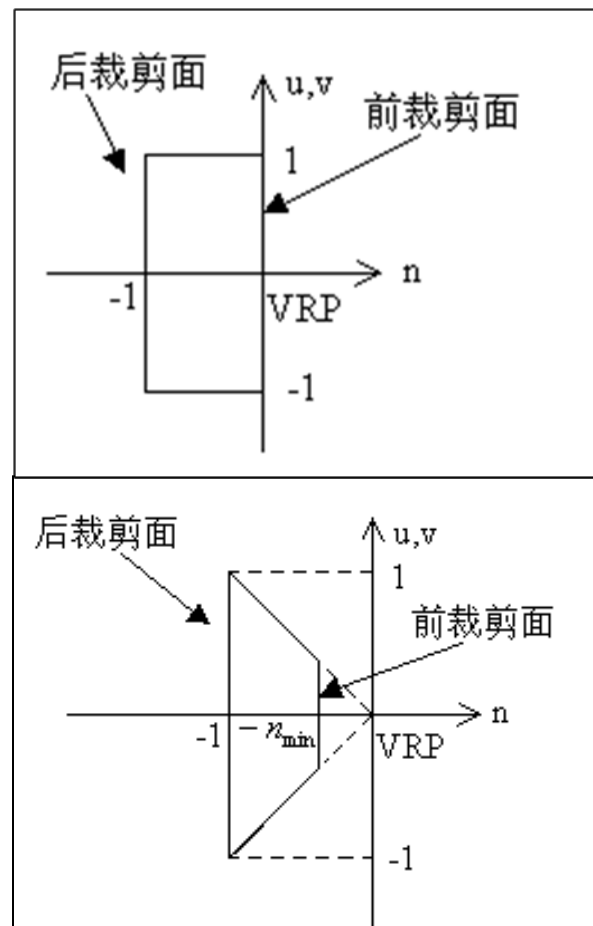
□ 半立方体，其六个面：

$$\begin{cases} u = 1, u = -1 \\ v = 1, v = -1 \\ n = 0, n = -1 \end{cases}$$

■ 透视投影的规范视见体

□ 四棱台，其六个面：

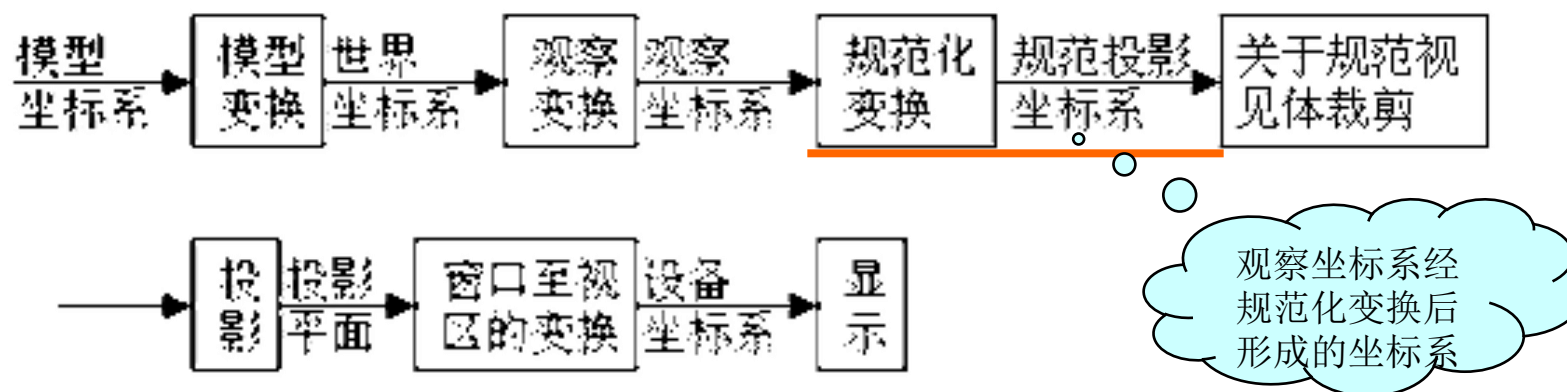
$$\begin{cases} u = 1, u = -1 \\ v = 1, v = -1 \\ n = -n_{\min}, n = -1 \end{cases}$$



-
- 用户根据需要指定的投影参数所确定的视见体未必是规范视见体(甚至投影方式也不一定是正平行投影), 因此需进行规范化变换。
 - 规范化变换可表示为一系列复合图形变换, 记为: N_{per} (平行投影规范化变换)或 N_{par} (透视投影规范化变换)

■ 定义了规范视见体后，在观察坐标系中，处理步骤为：

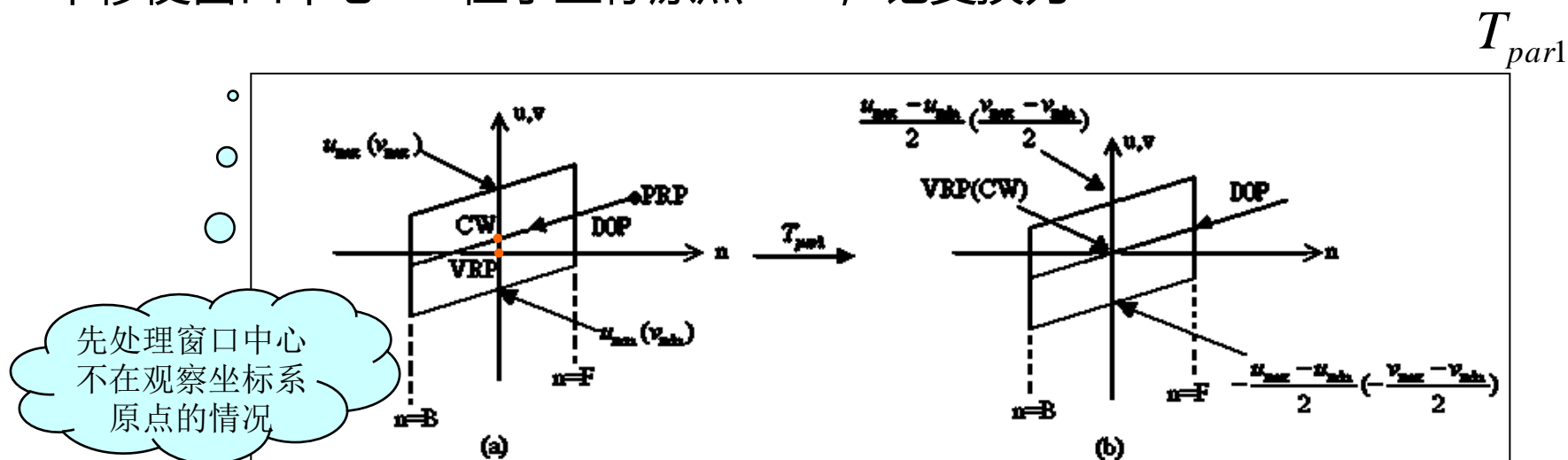
1. 视见体规范化(场景中的物体同时变换)
2. 关于规范视见体进行三维裁剪(硬件实现，速度快)
3. 对物体投影



□ 平行投影视见体的规范化(即求矩阵 N_{par})

- 将任意的平行投影视见体变换为规范平行投影视见体
- 方法：变换的分解与合成

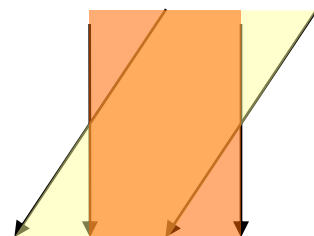
1. 平移使窗口中心CW位于坐标原点VRP，记变换为



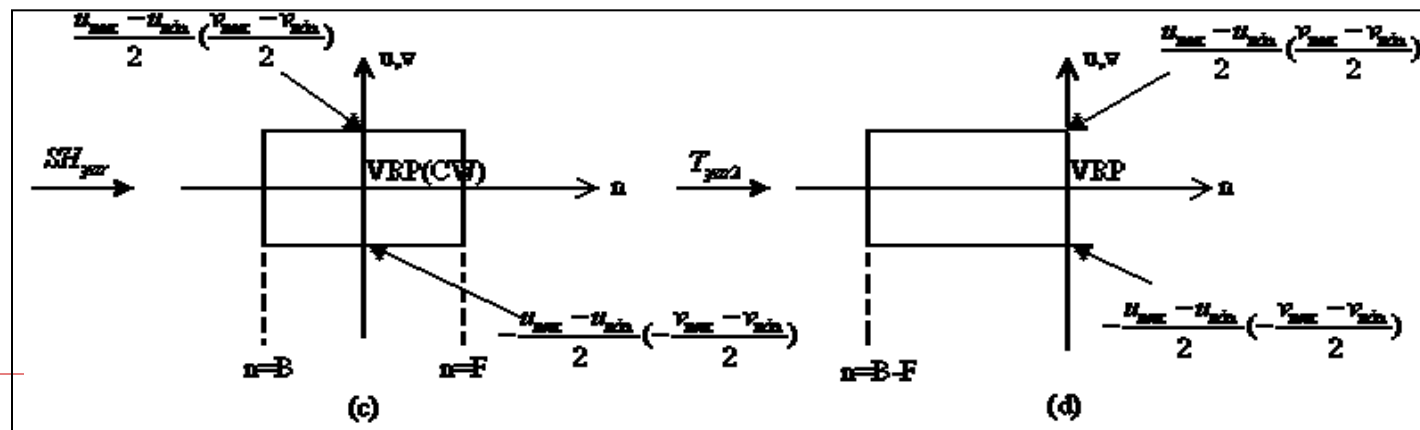
2. 错切使投影方向DOP与n轴平行, 记此变换为 SH_{par}

3. 平移使前裁剪面与UV平面重合, 记变换为 T_{par2}

将非正平行投影
转化为正平行投影,
因此是错切而非旋
转操作



将前裁剪面
放到正确位
置上

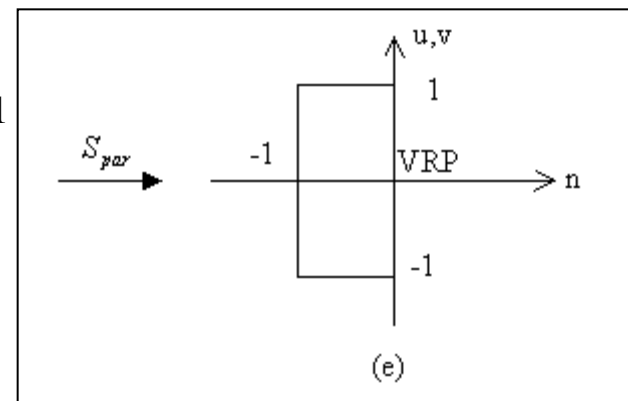


4. 缩放使后裁剪面与 $n=-1$ 平面重合, 记变换为 S_{par}

将后裁剪面
放到正确位
置上

■ 结果

$$N_{par} = S_{par} \bullet T_{par2} \bullet SH_{par} \bullet T_{par1}$$

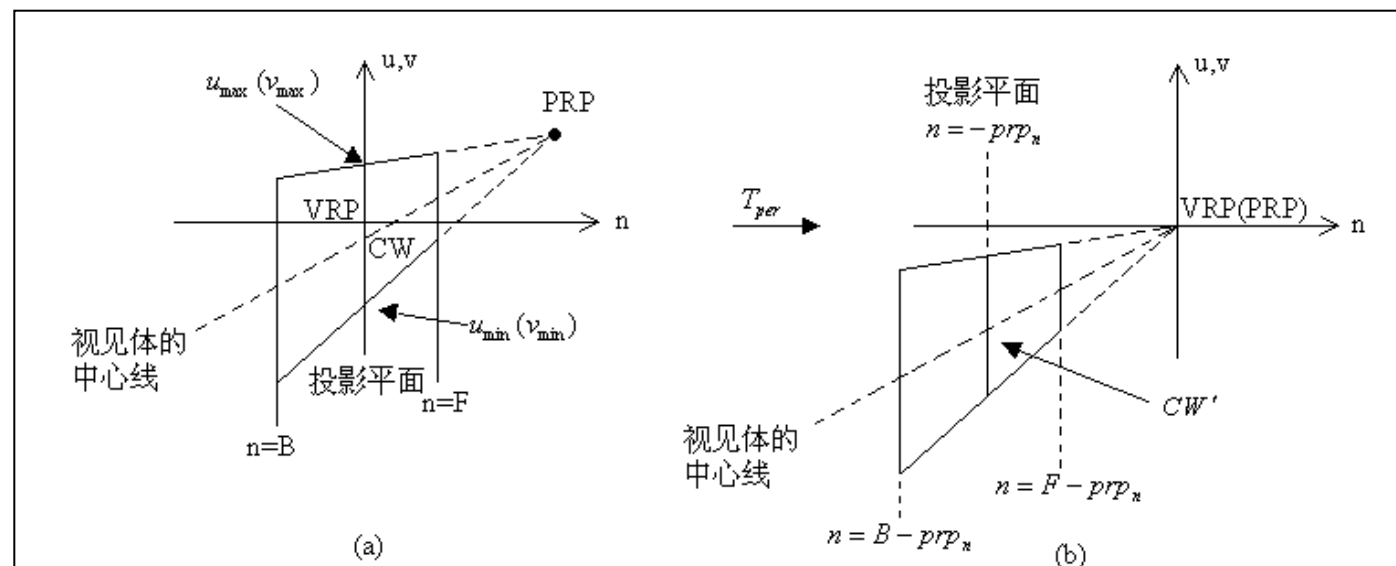


□ 透视投影视见体的规范化

■ 方法：变换的分解与合成

1. 平移使投影参考点PRP落于原点VRP，变换为

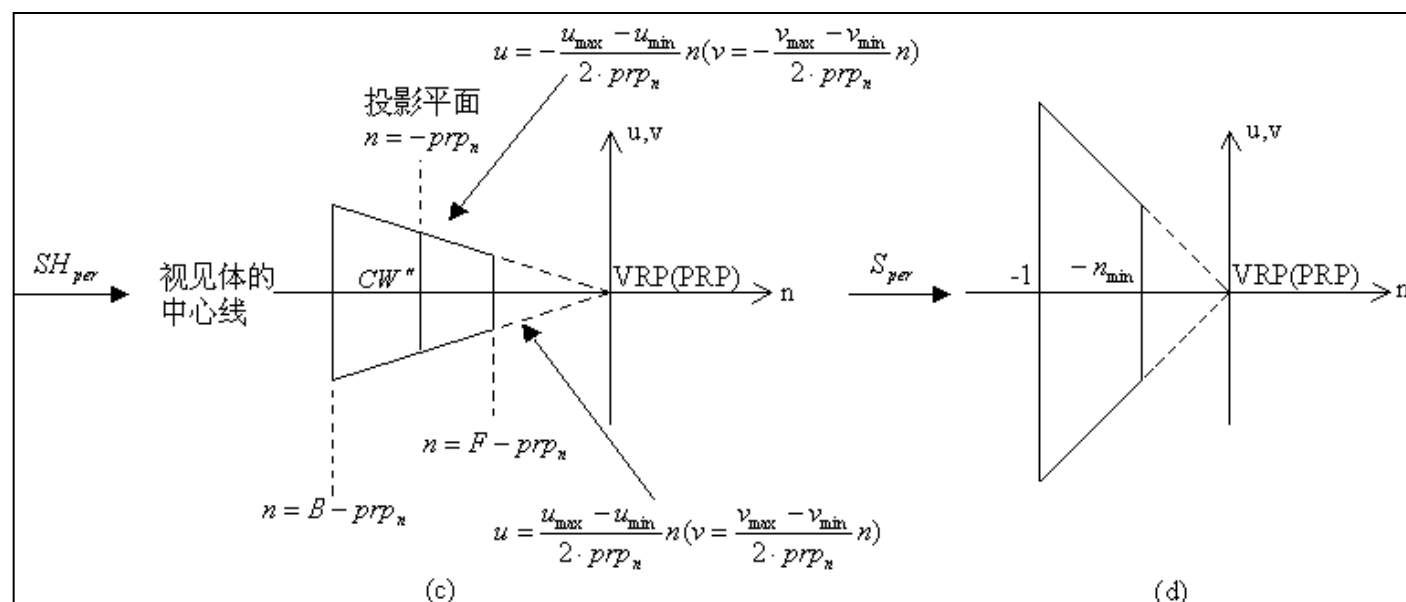
$$T_{per}$$



2. 错切使视见体中心线与n轴重合, 变换为 SH_{per}
3. 放缩使视见体规范化, 变换为 S_{per}

■ 结果

$$N_{per} = S_{per} \bullet SH_{per} \bullet T_{per}$$



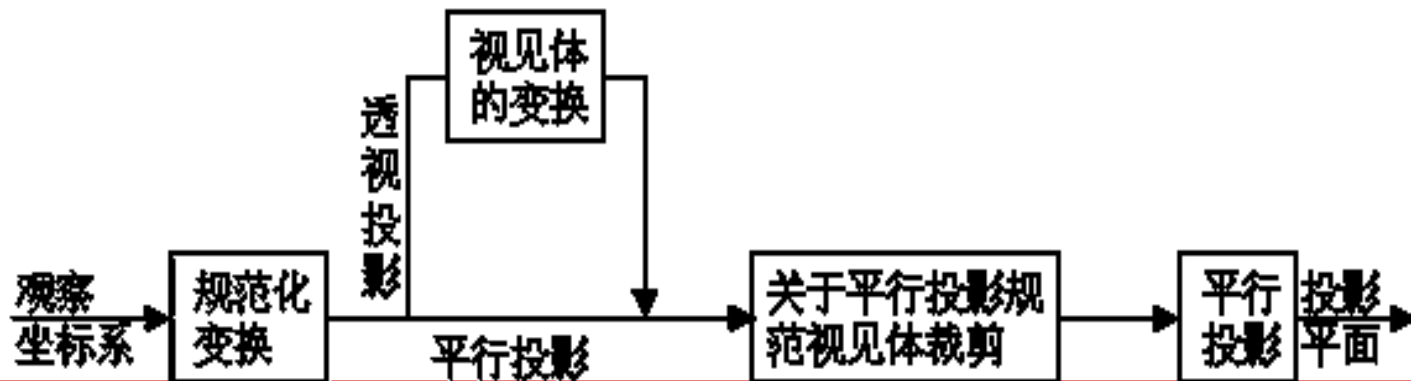
□ 规范视见体之间的变换

- 透视投影与平行投影的规范视见体(正四棱台, 长方体)间可以互相变换。
- 通过视见体变换完成。

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-n_{\min}} & \frac{n_{\min}}{1-n_{\min}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

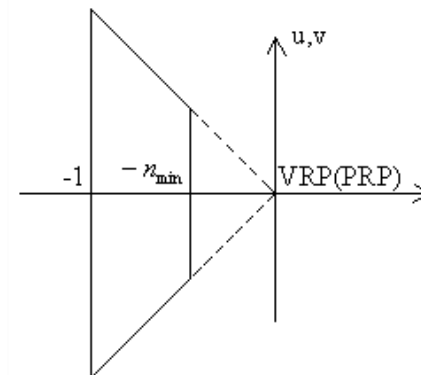
- 某些图形系统在显示图形时，首先将透视投影的规范视见体变换为平行投影的规范视见体，这样就将透视投影转化为平行投影了。这么做的理由是：

- 关于长方体的裁剪较关于正四棱台的裁剪简单。
- 平行投影较透视投影简单。
- 透视投影与平行投影都采用同一套裁剪与投影程序，处理一致，便于用硬件实现。



- 将透视投影的规范视见体变换为平行投影的规范视见体的变换为：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-n_{\min}} & \frac{n_{\min}}{1-n_{\min}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



- 含义：对于三维物体A，它的透视投影与对其做变换M后得到的物体M·A的平行投影是一致的。

*7.5 三维裁剪

□ 三维裁剪的两种方法

■ 将齐次坐标转换为三维坐标，在三维空间关于视见体裁剪

□ 优点：三维裁剪相对容易

□ 缺点：需要将齐次坐标转换为三维坐标

■ 直接在四维齐次坐标空间中进行裁剪

□ 优点：

■ 不需要将齐次坐标转换为三维坐标

■ 有理曲线曲面可能直接用齐次坐标来表示，对它们的裁剪只能在齐次坐标空间中进行

□ 缺点：四维裁剪相对复杂

□ 关于规范视见体的裁剪方法

- 直线段裁剪的Cohen_Sutherland算法、*梁友栋_Barskey算法的增强版
- 多边形裁剪的Sutherland_Hodgman算法的增强版

□ 齐次坐标空间中的裁剪

- 定义四维裁剪体
- 将相应算法推广到齐次坐标空间中来

7.6 图形显示过程小结

□ 对应于三维裁剪的实现过程

1. 将三维坐标扩展为齐次坐标, $(x,y,z) \rightarrow (x,y,z,1)$;
2. 进行模型变换;
3. 进行观察变换;
4. 进行视见体的规范化变换 N_{par} 或 N_{per} ;
5. 除以 h 返回三维空间(有些情况下, h 保持为1, 所以不必做除法运算);
6. 关于规范视见体进行裁剪;
7. 将三维坐标扩展为齐次坐标;
8. 进行投影变换 M_{ort} 或 M_{per} ;
9. 进行窗口至视区的变换;
10. 除以 h 返回二维设备坐标系 ;
11. 扫描转换(显示)。

END
