姓名: ______________　　　　　　　　学号: ________________

1. 对下面连续时间周期信号

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

1）求基波频率ω_0

2）求傅里叶级数系数a_k，以表示成$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

3）求傅里叶级数系数A'_k与相位θ_k，以表示成$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$

1). $\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ 周期为 $\frac{2\pi}{2\pi/3} = 3 \ (T_1 = 3)$

$\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$ 周期为 $\frac{2\pi}{5\pi/3} = \frac{6}{5} \ (T_2 = \frac{6}{5})$

令 $T = T_1 . m = T_2 . n$ (m,n为整数)

则: $m = 2, \ n = 5$

$T = 6$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$

2). $x(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2}{3}\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2}{3}\pi t} + \frac{2}{j}e^{j\frac{5}{3}\pi t} - \frac{2}{j}e^{-j\frac{5}{3}\pi t}$

$\because \omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$\therefore a_0 = 2, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{2}{j} = -2j$

$a_{-5} = -\frac{2}{j} = 2j$

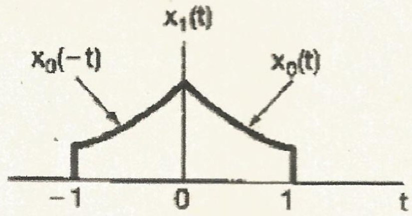
3). $A'_2 e^{j\theta_2} = a_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A'_2 = \frac{1}{2}, \ \theta_2 = 0$

$A'_5 e^{j\theta_5} = a_5 = -2j$

$\Rightarrow A'_5 = 2, \quad \theta_5 = -\frac{\pi}{2}$

2. 有非周期的信号$x_0(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{其余}t \end{cases}$，计算以下信号$x_1(t)$的频域表示$X_1(j\omega)$。



$X_0(j\omega) = \int_0^1 e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-(j\omega+1)}}{j\omega + 1}$

由线性和时域反转性质:

$X_1(j\omega) = X_0(j\omega) + X_0(-j\omega) = \frac{1 - e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1} + \frac{1 - e^{-(-j\omega+1)}}{-j\omega+1}$

$= \frac{1 - e^{-(j\omega+1)} - j\omega + j\omega e^{-(j\omega+1)} + 1 - e^{-(-j\omega+1)} + j\omega - j\omega e^{-(-j\omega+1)}}{1+\omega^2}$

$= \frac{2 - e^{-1}(e^{-j\omega} + e^{j\omega}) - e^{-1}j\omega(e^{j\omega} - e^{-j\omega})}{1+\omega^2}$

$= \frac{2 - 2e^{-1}\cos\omega + 2e^{-1}\omega\sin\omega}{1+\omega^2}$

3. 对以下信号的频域表示$X(j\omega)$，其时域表示$x(t)$是多少？

$$X(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j2\omega}$$

由傅里叶变换关系:

$\begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$

因此: $\begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin\omega}{\omega}$

由时移性质:

$\begin{cases} 1, & |t-2| < 1 \\ 0, & |t-2| > 1 \end{cases} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j2\omega}$

$x(t) = \begin{cases} 1, & 1 < t < 3 \\ 0, & t < 1 \text{ 或 } t > 3 \end{cases}$

姓名: ______________　　　　　　　　学号: ________________

4. 有一因果线性时不变系统，其传递函数为：

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

对于某一特定的输入$x(t)$，观察到该系统的输出是

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

求$x(t)$。

$$Y(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)] e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(jw+3)t} dt - \int_{0}^{+\infty} e^{-(jw+4)t} dt$$

$$= -\frac{1}{jw+3}(0-1) - (-\frac{1}{jw+4})(0-1) = \frac{1}{jw+3} - \frac{1}{jw+4}$$

$$X(jw) = \frac{Y(jw)}{H(jw)} = \frac{\frac{1}{jw+3} - \frac{1}{jw+4}}{\frac{1}{jw+3}} = 1 - \frac{jw+3}{jw+4} = \frac{1}{jw+4}$$

由 $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t) \xleftrightarrow{F} Y(jw) = \frac{1}{jw+3} - \frac{1}{jw+4}$ 可知:

$f(t) = e^{-4t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(jw) = \frac{1}{jw+4}$

5. 有以下连续时间的线性时不变系统，其传递函数为：

$$H(j\omega) = \int_{+\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

如果该系统的输出信号为一个周期信号：

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 <= t < 4 \\ -1, & 4 <= t < 8 \end{cases}$$

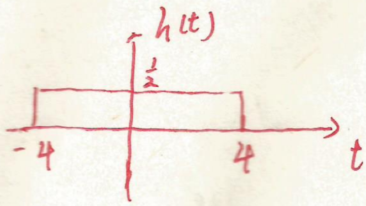
周期为8，计算该系统的输出信号$y(t)$

由傅里叶变换关系:

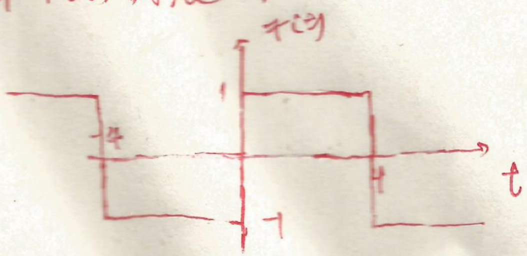
$$\begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} \frac{2\sin wT_1}{w}$$

解:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 4 \\ 0, & |t| > 4 \end{cases} \xleftrightarrow{F} H(jw) = \frac{\sin(4w)}{w}$$



画出f(t)的波形:



因此: $y(t) = f(t) * h(t) = 0$