

第九章 曲线与曲面

主要内容

- 曲线的非参数表示与参数表示,
 - 曲线的弧长, 切矢量, 法矢量, 曲率
 - 曲线的参数连续性与几何连续性
 - 插值、逼近、拟合及光顺
 - Bernstein基函数, Bezier曲线
 - Bezier曲面。
-

掌握要点

- 掌握曲线的两种表示形式：非参数表示(包括显式表示与隐式表示)、参数表示；了解非参数表示方法与参数表示方法的优缺点；
 - 掌握参数曲线的弧长、切矢量、法矢量、曲率的定义；
 - 掌握参数曲线的两种连续性：参数连续性与几何连续性，了解它们之间的关系；
 - 掌握Bernstein基函数的定义及其性质；
 - 掌握Bezier曲线的定义、性质(包括端点位置、端点切矢量、端点曲率、仿射不变性、凸包性、直线再生性、平面曲线的保型性等等)、离散生成算法、光滑拼接；
 - 了解Bezier曲面的定义及其性质。
-

参数曲线曲面基础

- 1963年波音(Boeing)飞机公司的佛格森(Ferguson)最早引入参数三次曲线, 将曲线曲面表示成参数矢量函数形式, 构造了组合曲线和由四角点的位置矢量、两个方向的切矢定义的佛格森双三次曲面片。
 - 1964年, 麻省理工学院(MIT)的孔斯(Coons)用封闭曲线的四条边界定义一张曲面。同年, 舍恩伯格(Schoenberg)提出了参数样条曲线、曲面的形式。
 - 1971年, 法国雷诺(Renault)汽车公司的贝塞尔(Bezier)发表了一种用控制多边形定义曲线和曲面的方法。同期, 法国雪铁龙(Citroen) 汽车公司的德卡斯特里奥(de Casteljau)也独立地研究出与Bezier类似的方法。
-

-
- 1972年，德布尔(de Boor)给出了B样条的标准计算方法。
 - 1974年，美国通用汽车公司的戈登(Gorden)和里森费尔德(Riesenfeld)将B样条理论用于形状描述，提出了B样条曲线和曲面。
 - 1975年，美国锡拉丘兹(Syracuse)大学的佛斯普里尔(Versprill)提出了有理B样条方法。80年代后期皮格尔(Piegl)和蒂勒(Tiller)将有理B样条发展成非均匀有理B样条方法，并已成为当前自由曲线和曲面描述的最广为流行的技术。
-

曲线的表示形式

- 非参数表示与参数表示

- 非参数表示

 - 显式表示

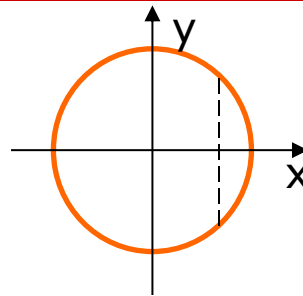
 - 对于一个平面曲线，**显式表示**一般形式是： $y=f(x)$ 。

 - 在此方程中，一个 x 值只能与一个 y 值对应，所以显式方程不能表示封闭或多值曲线，例如，不能用显式方程表示一个圆（上图）。

 - 隐式表示

 - 一个平面曲线，**隐式表示的一般形式**： $f(x, y)=0$ 。

 - 隐式表示的优点是易于判断函数 $f(x, y)$ 是否大于、小于或等于零，也就易于判断点是落在所表示曲线上或在曲线的哪一侧。



-
- 对于非参数表示形式方程 (无论是显式还是隐式) 存在下述问题:
 - 与坐标轴相关
 - 非平面曲线、曲面, 有些复杂的难以用常系数的非参数化函数表示 (如螺旋渐开线)
 - 不便于计算机编程
-

□ 参数表示

- 在几何造型系统中，曲线曲面方程通常表示成参数的形式，即曲线上任一点的坐标均表示成给定参数的函数。

- 假定用 t 表示参数，平面曲线上任一点 P 可表示为：

$$P(t)=[x(t), y(t)]$$

- 空间曲线上任一三维点 P 可表示为：

$$P(t)=[x(t), y(t), z(t)]$$

-
- 最简单的参数曲线是直线段，端点为 P_1 、 P_2 的直线段参数方程可表示为：

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1) t \quad t \in [0, 1]$$

- 注意上述表达方式是：

$$\begin{cases} X(t) = X_1 + (X_2 - X_1) t \\ Y(t) = Y_1 + (Y_2 - Y_1) t \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad \text{的简单表达方式。}$$

- 下面有许多同样方法表达的公式，意义相同。
-

-
- 对于圆，非参数显示只能表示其部分。如第一象限内的单位圆弧：

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

圆整体的参数形式可表示为：

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

□ 参数表示优于显式表示、隐式表示之处

- 规格化的参数变量 $t \in [0, 1]$ ，使得界定曲线、曲面的范围十分简单。
 - 易于用矢量和矩阵运算，大大简化计算。
 - 进行几何变换方便，如：对直线的变换只需将变换作用到顶点，重新计算 t 的表达式即可。
 - 便于处理斜率为无穷大的情形，不会因此而中断计算。
 - 坐标点各分量的表示是分离的，从而便于把低维空间中曲线、曲面扩展到高维空间中去。
-

参数曲线的位置矢量、弧长、切矢量、法矢量、曲率

- 一条用参数表示的三维曲线是一个有界点集，可写成一个带参数的、连续的、单值的数学函数，其形式为：

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \quad 0 \leq t \leq 1;$$

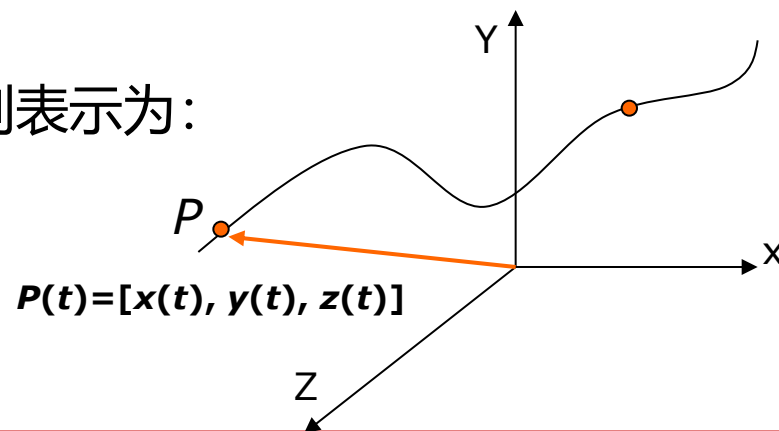
- 位置矢量

- 曲线上任一点P的位置矢量可表示为：

$$P(t)=[x(t), y(t), z(t)];$$

其一阶、二阶和k阶导数矢量(如果存在的话)可分别表示为：

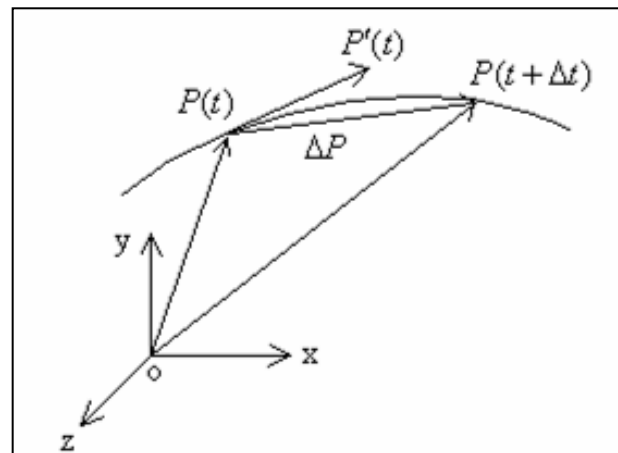
$$P'(t) = \frac{dP}{dt} \quad P''(t) = \frac{d^2 P}{dt^2} \quad P^k(t) = \frac{d^k P}{dt^k}$$



□ 切矢量

- 直线的斜率反映一个坐标变量关于另一个坐标变量的变化率。
- 曲线的切矢量类似斜率，表示当参数递增一个单位时三个坐标变量变化量。
- 记曲线在 t 和 $t + \Delta t$ 处的位置矢量分别是 $P(t)$ 和 $P(t + \Delta t)$ ，则

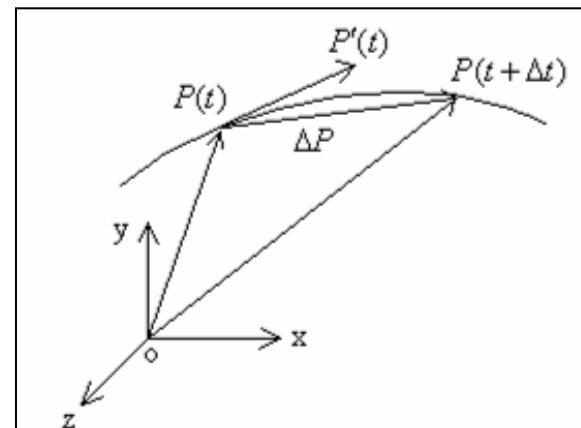
$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$$



- 定义曲线在t处的切矢量为：

$$P'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \begin{bmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

- 切矢量方向与曲线变化方向一致。



□ 弧长

- 对于正则曲线 $P=P(t)$, 定义

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{dP(t)}{dt} \right| dt \quad \text{为曲线起点(参数为0)到参数为t的点的弧长。}$$

其中

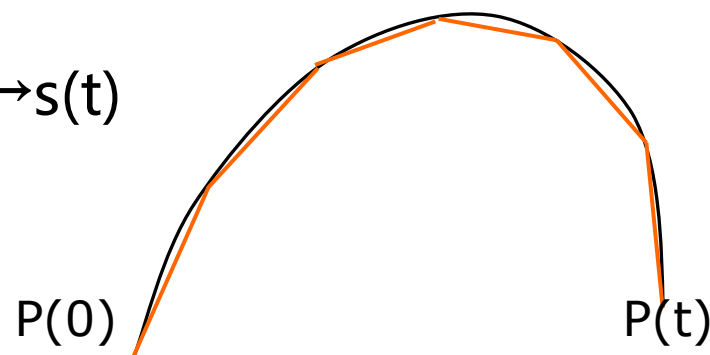
$$\left| \frac{dP(t)}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt} \right)^2} \quad \text{为切矢量} P'(t) \text{的长度。}$$

-
- 几何意义：根据微分几何， $s(t) = \int_0^t \left| \frac{dP(t)}{dt} \right| dt$ 表示曲线连接 $P(0)$ 到 $P(t)$ 两点的折线的长度的极限。

- 在曲线上， $P(0)$ 到 $P(t)$ 间沿着 t 递增的方向取 $n-1$ 个点 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} ，以直线段顺序相连，得到曲线的内接折线，其长度为：

$$L(n) = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

- 当 $\max|P_{i-1}P_i| \rightarrow 0$ ，即 $n \rightarrow \infty$ 时， $L(n) \rightarrow s(t)$



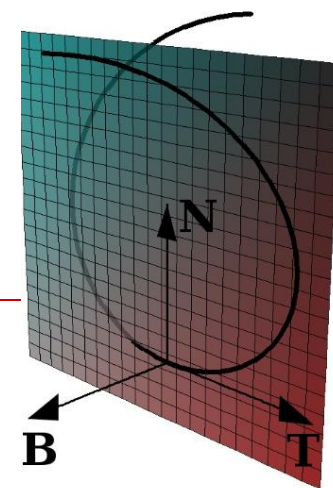
■ 根据上述

□ s 是 t 的可微函数, 有
$$\frac{ds}{dt} = \left(\int_0^t \left| \frac{dP(t)}{dt} \right| dt \right) / dt = \left| \frac{dP(t)}{dt} \right| = |P'(t)| \quad (1)$$

□ $P=P(t)$ 是正则曲线 $\Rightarrow ds/dt > 0$, 即 $s(t)$ 是关于 t 的单调增函数, 从而 $s=s(t)$ 存在反函数 $t=t(s)$ 。

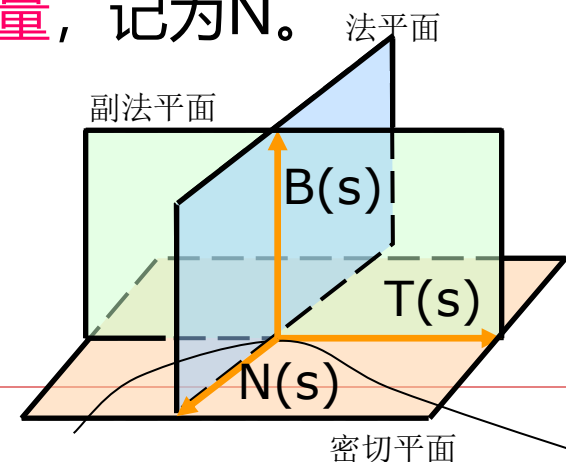
□ 从而曲线 P 也可以用弧长为参数来表示, 方程为: $P=P(s)$

□ 根据式(1), $\frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}$, 即以弧长为参数时, 曲线的切矢量为单位矢量, 记为 $T(s)$

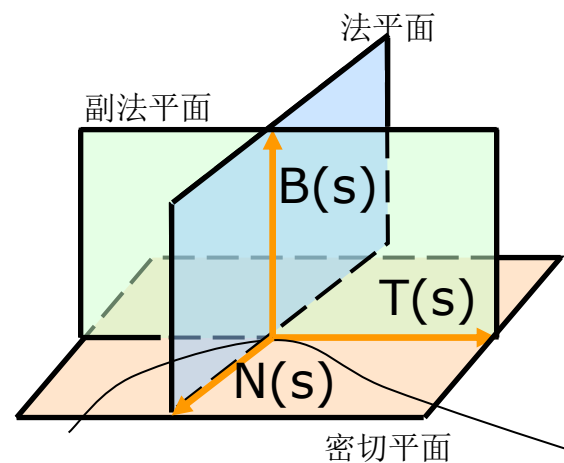
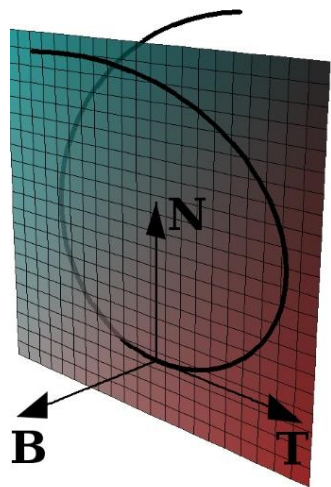


□ 法向量

- 对于空间参数曲线任意一点，所有垂直于切矢量 $T(s)$ 的矢量有一束，且位于同一平面上，该平面称为**法平面**。
- 因为 $[T(s)]^2=1$ ，两边对 s 求导数得： $2T(s) \cdot T'(s)=0$ 。可见切矢量对弧长的变化率 dT/ds 是一个与 T 垂直的矢量。
- 与 dT/ds 平行的单位法向量称为曲线在该点的**主法向量**，记为 N 。
- 记矢量 B 为： $B=T \times N$ ，称为曲线的**副法向量**。



- T (切向量)、 N (主法向量)和 B (副法向量)构成了曲线上的活动坐标系，称为Frenet标架。
- 由 N 、 T 构成的平面称为密切平面， B 、 T 构成的平面称为副法平面。

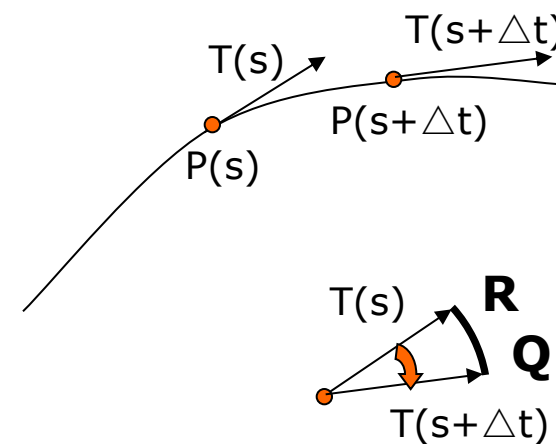


□ 曲率

■ 一些基本概念

- 曲率反映了曲线在某点上的弯曲程度。
- 直线的各点的曲率都是0
- 圆的曲率是一常数，半径越大，曲率越小。

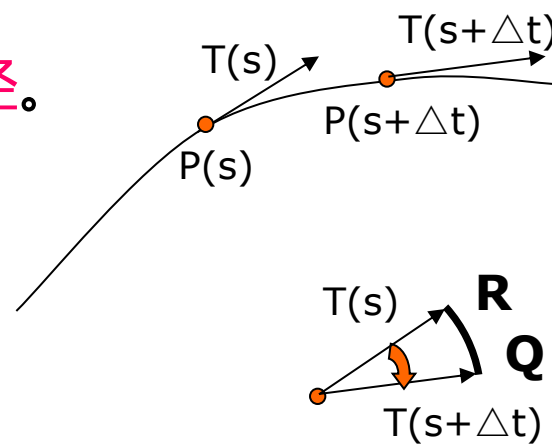
- 设曲线 $P(s)$ 点处的单位切矢量为 $T(s)$ ， $P(s+\Delta s)$ 点处的单位切矢量为 $T(s+\Delta s)$ ，他们夹角为 $\Delta\Phi$



- $\left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta s} \right|$ 反映了曲线在区间 $[s, s + \Delta s]$ 上的平均弯曲程度，称为平均曲率。当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时，得到点 $P(s)$ 上的曲率 $k(s)$ ，即：

$$k(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta s} \right|$$

- $k(s) \neq 0$ 时，称 $\rho = 1/k(s)$ 为该点的曲率半径。



-
- 由于 $\Delta\Phi=QR$, 记 $\Delta T=\widehat{QR}=T(s+\Delta s)-T(s)$, 则

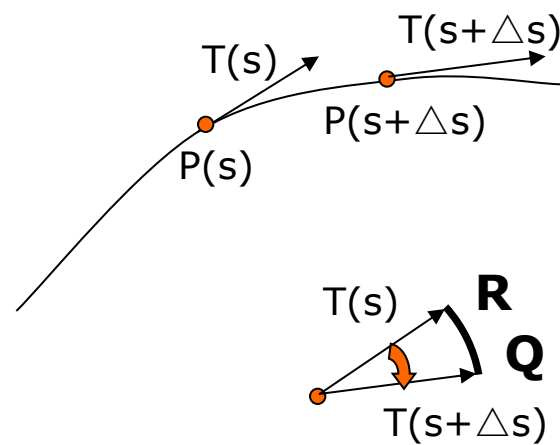
$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta T}\cdot\frac{\Delta T}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\widehat{QR}}{\Delta T}\right|\cdot\left|\frac{\Delta T}{\Delta s}\right|$$

而

$$\lim_{\Delta s\rightarrow 0}\left|\frac{\widehat{QR}}{\Delta T}\right|=1$$

故

$$\begin{aligned}k(s)&=\lim_{\Delta s\rightarrow 0}\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}\right|\\&=\lim_{\Delta s\rightarrow 0}\left|\frac{\Delta T}{\Delta s}\right|=\left|\frac{dT}{ds}\right|=|P''(s)|\end{aligned}$$

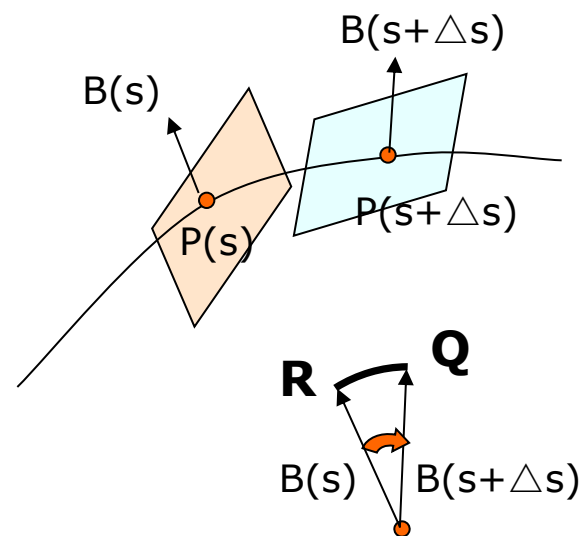


□ 挠率

- 设曲线上 $P(s)$ 点处的单位副法向量为 $B(s)$ ， $P(s+\Delta s)$ 点处的单位副法向量为 $B(s+\Delta s)$ ，二者夹角为 $\Delta\theta$ 。

- $\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$ 反映了曲线在区间 $[s, s+\Delta s]$ 上的平均扭转程度，称为**平均挠率**。当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时，得到点 $P(s)$ 上的**挠率** $\tau(s)$ ，即：

$$\tau(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$



■ 由于 $\Delta \theta = \widehat{QR}$, 记 $\Delta B = \widehat{QR} = B(s + \Delta s) - B(s)$, 则

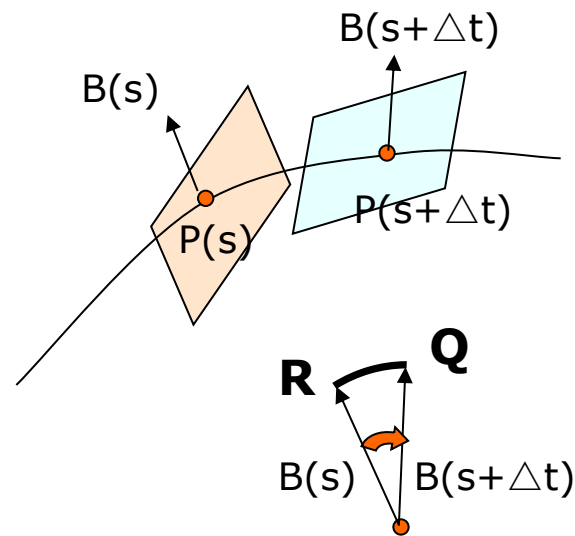
$$\left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta B} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\widehat{QR}}{\Delta B} \right| \cdot \left| \frac{\Delta B}{\Delta s} \right|$$

而

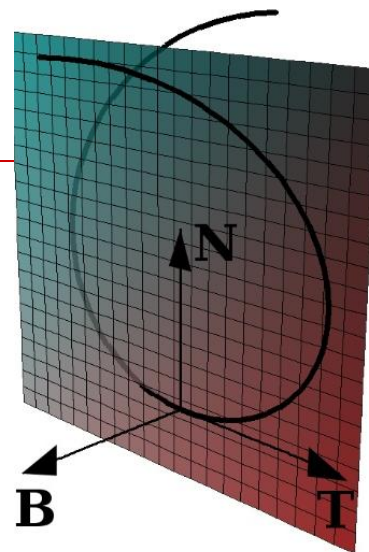
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\widehat{QR}}{\Delta B} \right| = 1$$

故

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta B}{\Delta s} \right| = \left| \frac{dB}{ds} \right| = |B'(s)| \end{aligned}$$



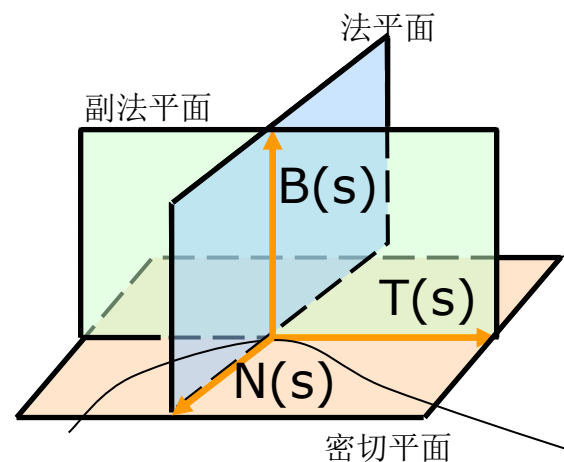
- 挠率的几何意义是曲线在法平面内的扭转程度。
- 直线的挠率处处为0
- 平面曲线的充要条件为：曲线上任何一点的挠率为0



- 曲率和挠率的计算公式分别是：

$$k = \frac{|P'(t) \times P''(t)|}{|P'(t)|^3}$$

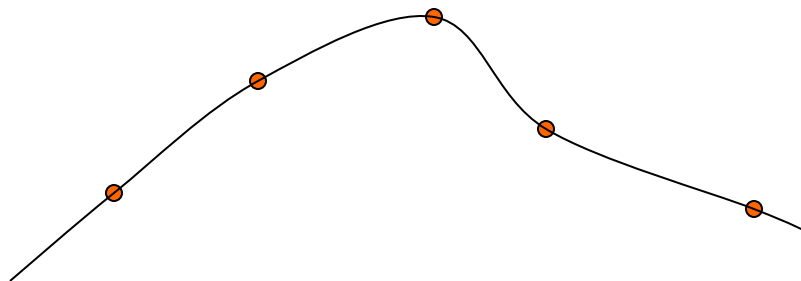
$$\tau = \frac{(P'(t), P''(t), P'''(t))}{(P'(t) \times P''(t))^2}$$



插值、逼近、拟合及光顺

□ 插值：给定一组有序的数据点 P_i , $i=0, 1, \dots, n$, 构造一条曲线顺序通过这些数据点, 称为对这些数据点进行插值, 所构造的曲线称为插值曲线。

- 插值与插值函数
- 线性插值与抛物线插值

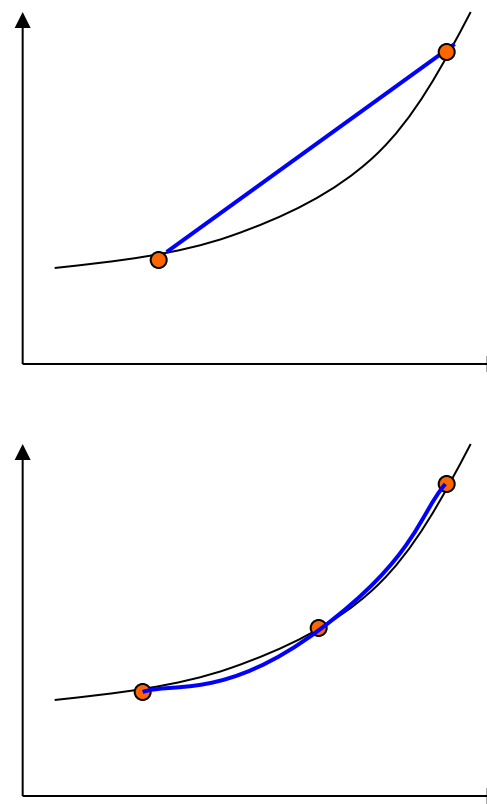


■ 线性插值

- 假设给定函数 $f(x)$ 在两个不同点 x_1 和 x_2 的值，用一个线形函数： $y=ax+b$ ，近似代替，称为线性插值函数。

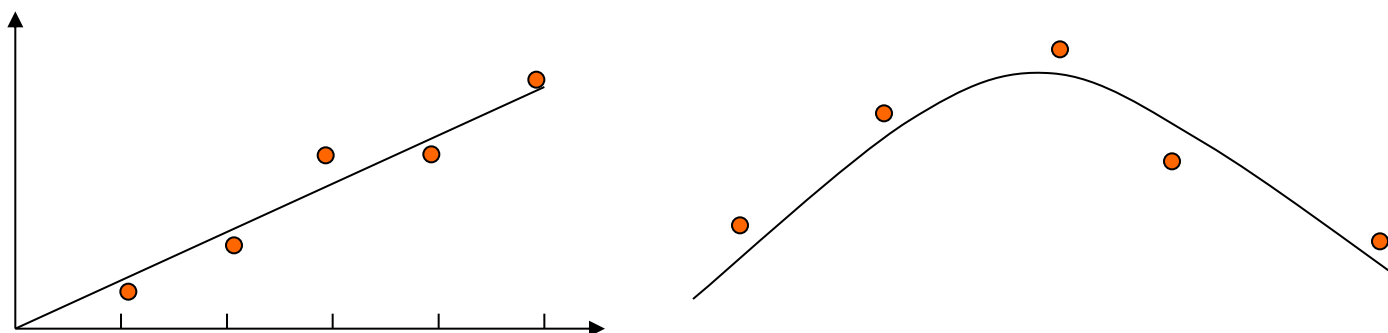
■ 抛物线插值

- 已知函数 $f(x)$ ，三个互异点 x_1, x_2, x_3 的函数值分别为 y_1, y_2, y_3 ，要求构造一个函数 $T(x)=ax^2+bx+c$ ，使抛物线 $T(x)$ 在点 x_i 处与 $f(x)$ 在点 x_i 处的值相等。

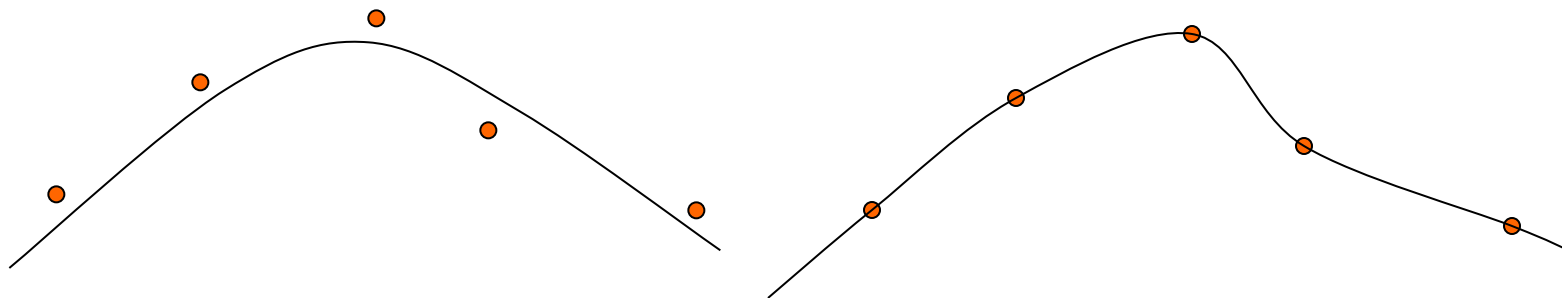


□ **拟合**：构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点(但未必通过这些点)，所构造的曲线为**拟合曲线**。

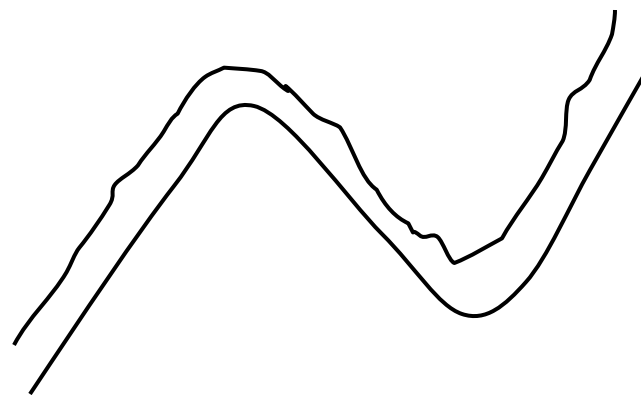
■ 一般使用最小二乘法



-
- 在计算数学中，逼近通常指用一些性质较好的函数近似表示一些性质不好的函数。
 - 在计算机图形学中，逼近继承了这方面的含义，因此插值和拟合都可以视为逼近。



-
- 光顺(Firing)指曲线的拐点不能太多。
 - 对平面曲线而言，相对光顺的条件是：
 - 具有二阶几何连续性(G^2);
 - 不存在多余拐点和奇异点;
 - 曲率变化较小。



参数连续性与几何连续性

- 连续性是曲线的重要性质。
 - 设计一条复杂曲线时，常常通过多段曲线组合而成，这需要解决曲线段之间如何实现光滑连接的问题。
 - 曲线间连接的光滑度的度量有两种：
 - 参数连续性
 - 几何连续性
-

□ 参数连续性

- 如果曲线 $P(t)$ 在 t_0 处的左、右 n 阶导数存在, 并且

$$P(t_0^-) = P(t_0^+)$$

$$P'(t_0^-) = P'(t_0^+) \dots$$

$$P^{(k)}(t_0^-) = P^{(k)}(t_0^+) \dots$$

$$P^{(n)}(t_0^-) = P^{(n)}(t_0^+)$$

即 n 阶连续可微, 称 $P(t)$ 在 t_0 处是 n 阶参数连续的(记为 C^n)。

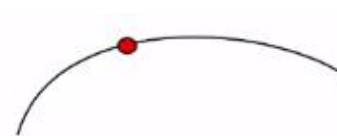
- 若曲线 $P(t)$ 在 $[0,1]$ 内处处是 C^n 的, 则称曲线是 C^n 的。
- 0阶: $P(t_0^-) = P(t_0^+)$
- 1阶: $P(t_0^-) = P(t_0^+), P'(t_0^-) = P'(t_0^+)$



(a) 0阶连续性



(b) 1阶连续性



(c) 2阶连续性

□ 几何连续性

- 如果曲线在 $t=t_0$ 处连续, 即 $P(t_0^-)=P(t_0^+)$, 称曲线在该点上0阶几何连续(GC^0)。
- 如果曲线在 $t=t_0$ 处是 GC^0 的, 并且切向量方向连续, 即存在常数 $a>0$, 使:

$$P'(t_0^-)=aP'(t_0^+)$$

称曲线在该点上1阶几何连续(GC^1)。

- 如果曲线在 $t=t_0$ 处是 GC^1 的, 并且副法向量方向连续、曲率连续, 即:

$$B(t_0^-)=B(t_0^+); k(t_0^-)=k(t_0^+)$$

称曲线在该点上2阶几何连续(GC^2)

□ 从上面的描述可以看出：

- 参数连续条件的计算方法只跟参数曲线方程有关，无法用可观察的几何矢量描述参数连续性。
- 描述几何连续条件的是曲线本身与参数无关的不变量如切矢量，副法矢量的方向和曲率；几何连续条件是可观察的。
- 因此，计算机造型系统中更多使用几何连续性。

□ C^n 连续的条件比 GC^n 连续的条件要苛刻。



9.5 Bezier曲线

- Bernstein基函数的定义及性质
 - Bezier曲线的矩阵表示及生成
 - 三次Bezier曲线的矩阵表示及曲线生成
 - Bezier曲线的离散生成算法
 - de Casteljau算法、分割定理、离散生成
 - Bezier曲线的拼接及其连续性
-

Bernstein基函数的定义及性质

□ 如下形式的多项式称为Bernstein基函数

$$BEZ_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0,1]$$

□ 注意点

- 类似二项式定理各项
- n (次数), i (多项式的第几项)

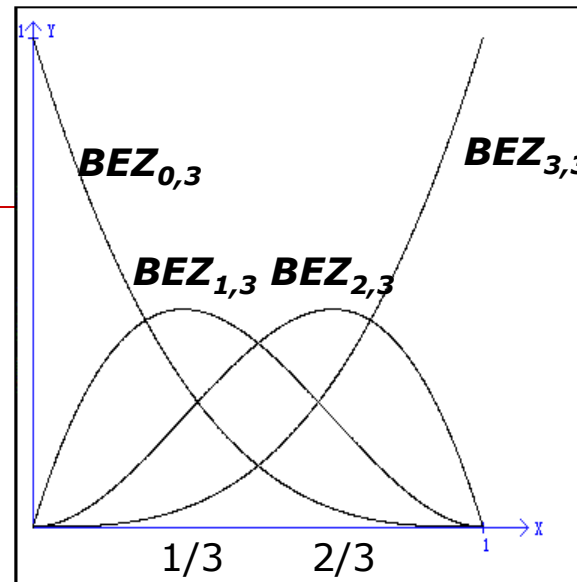
■

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Bernstein基函数的性质

□ 正性:

- $BEZ_{i,n} \geq 0, \quad t \in [0,1]$
- $t=0$ 时, $BEZ_{0,n}(t)=1, \quad BEZ_{i,n}(t)=0, \quad i=1,2,\dots,n$
即 $BEZ_{0,n}(t) \dots BEZ_{n,n}(t) = (1, 0, \dots, 0)$
- $t=1$ 时, $BEZ_{n,n}(t)=1, \quad BEZ_{i,n}(t)=0, \quad i=1,2,\dots,n-1$
即 $BEZ_{0,n}(t) \dots BEZ_{n,n}(t) = (0, 0, \dots, 1)$
- $t \in [0,1]$ 时, $0 < BEZ_{i,n}(t) < 1, \quad i=0,1,\dots,n$



$$BEZ_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0,1]$$

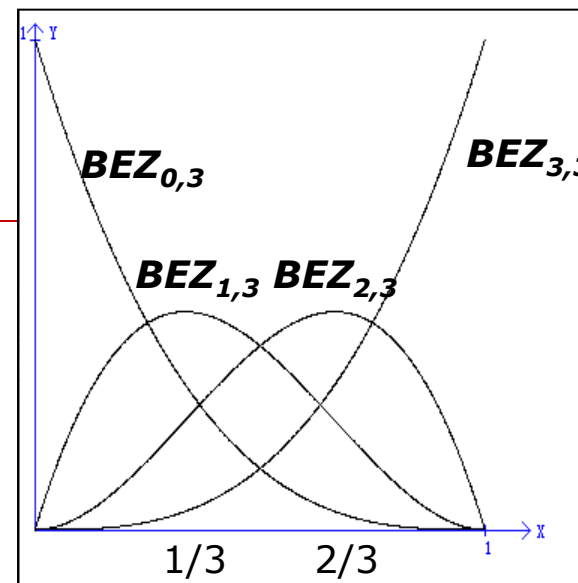
□ 权性:

■
$$\sum_{i=0}^n BEZ_{i,n}(t) \equiv 1 \quad t \in [0,1]$$

■ 根据二项式定理:

$$\sum_{i=0}^n BEZ_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = [t + (1-t)]^n \equiv 1$$

$$BEZ_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0,1]$$



□ 对称性

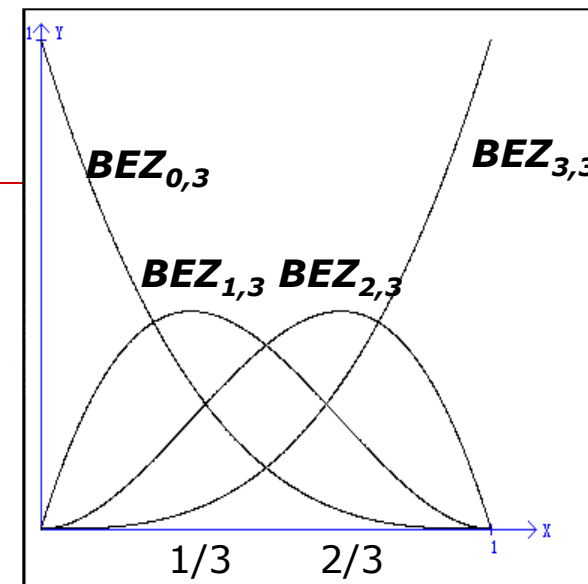
■

■ 证明:

$$BEZ_{i,n}(t) = BEZ_{n-i,n}(1-t) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$BEZ_{n-i,n}(1-t) = C_n^{n-i} (1-t)^{n-i} [1 - (1-t)]^{n-(n-i)}$$

$$= C_n^i (1-t)^{n-i} t^i = BEZ_{i,n}(t)$$



$$BEZ_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0, 1]$$

□ 降阶公式

$$BEZ_{i,n}(t) = (1-t)BEZ_{i,n-1}(1-t) + tBEZ_{i-1,n-1}(t) \quad i = 0, 1, \dots, n$$



■ 即一个n次的Bernstein基函数能表示为两个n-1次的基函数之线性组合。

■ 证明：

$$\begin{aligned} B_{i,n}(t) &= C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}) t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t) C_{n-1}^i t^i (1-t)^{(n-1)-i} + t C_{n-1}^{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)} \\ &= (1-t) B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t) \end{aligned}$$

$$BEZ_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0,1]$$

□ 升阶公式

$$BEZ_{i,n}(t) = \frac{i+1}{n+1} BEZ_{i+1,n+1}(t) + \frac{n+1-i}{n+1} BEZ_{i,n+1}(t) \quad i=0,1,\dots,n$$



■ 即一个n次的Bernstein基函数能表示为两个n+1次的基函数之线性组合。

■ 证明略。

$$BEZ_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0,1]$$

□ 导数

■ 对 $i=0,1,\dots,n$

$$BEZ'_{i,n}(t) = n[BEZ_{i-1,n-1}(t) - BEZ_{i,n-1}(t)]$$

□ 积分

■

$$\int_0^1 BEZ_{i,n}(t) dt = \frac{1}{n+1}$$

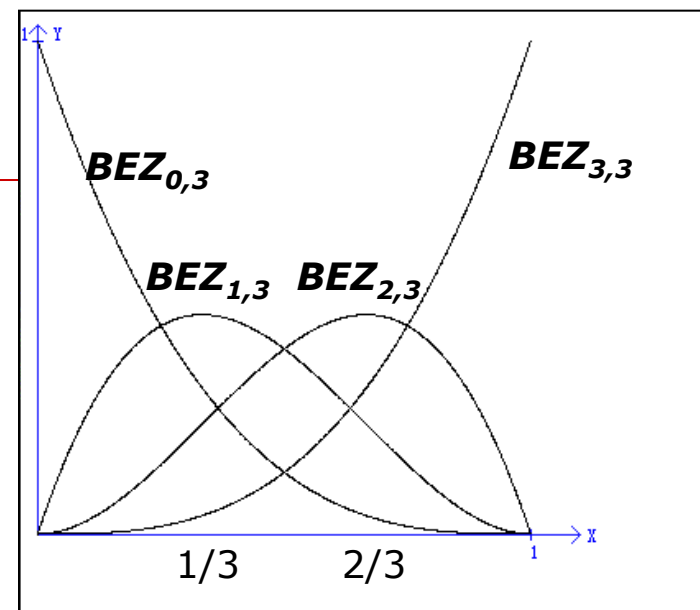
$$BEZ_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad t \in [0,1]$$

□ 最大值

- 在区间 $[0,1]$ 间, $BEZ_{i,n}(t)$ 在 $t = i/n$ 处取得最大值, $i=0,1,\dots,n$ 。3次Bernstein基函数的图像如右:

□ 线性无关性

- 任何一个 n 次多项式都可以表示为 $\{BEZ_{i,n}(t)\}$, $i=0,1,\dots,n$ 的线性组合。

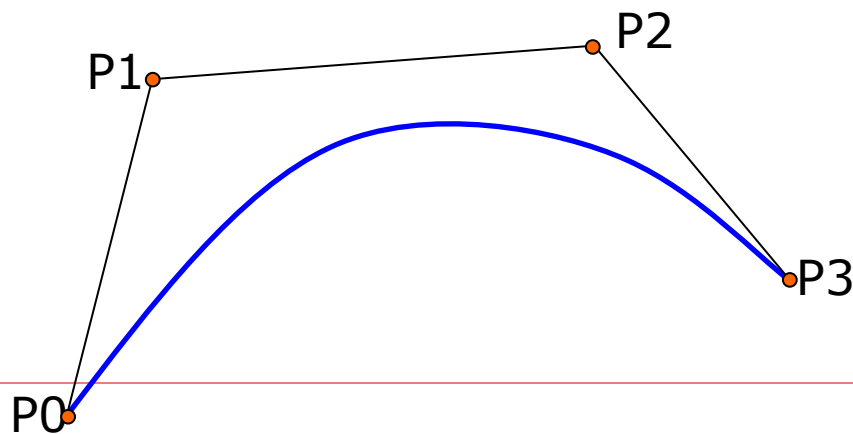


Bezier曲线的定义及性质

- 如下形式的多项式曲线 $P(t)$ 称为 n 次Bezier曲线:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i BEZ_{i,n}(t) \quad t \in [0,1]$$

- 其中 $P_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ 为空间中的点, 称为控制顶点, 折线 $P_0P_1 \dots P_n$ 称为控制多边形, $BEZ_{i,n}(t)$ 为Bernstein基函数。



□ 例：3次Bezier曲线：

$P(t)$

$$= P_0 BEZ_{0,3}(t) + P_1 BEZ_{1,3}(t) + P_2 BEZ_{2,3}(t) + P_3 BEZ_{3,3}(t)$$

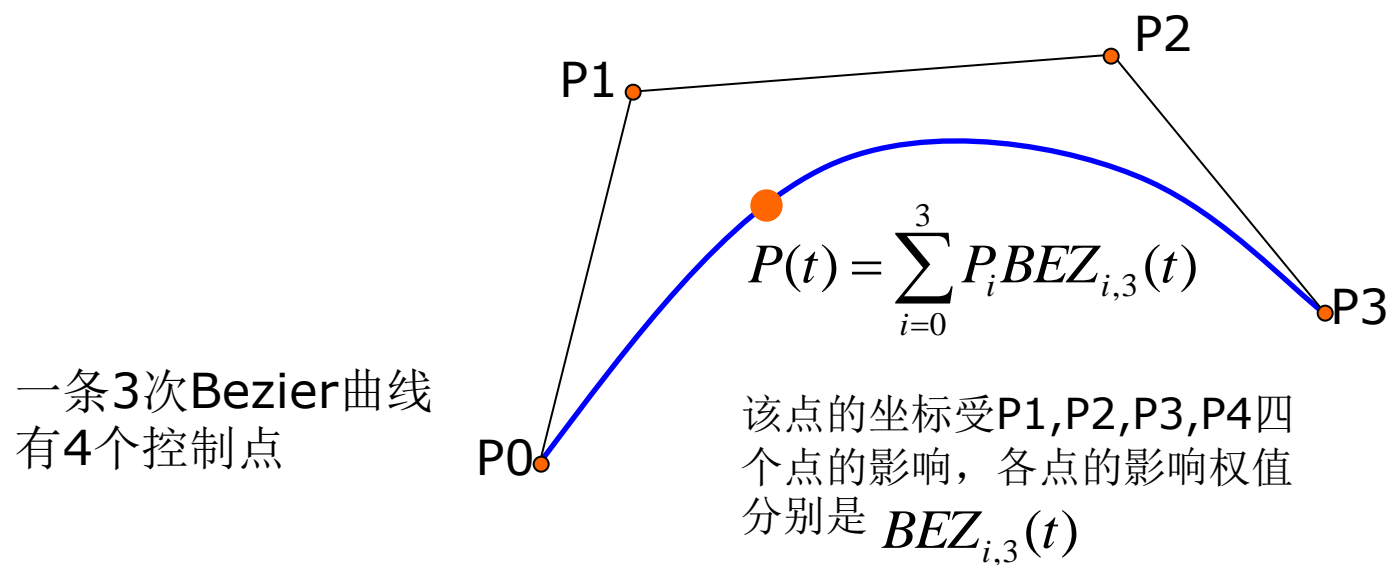
$$= P_0(1-t)^3 + 3P_1t(1-t)^2 + 3P_2t^2(1-t) + P_3t^3$$

□ 其中

$$BEZ_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

$$t \in [0,1]$$

-
- 可见，一条n次Bezier曲线被表示为它的n+1个控制顶点的加权和，权即是Bernstein基函数。从而Bernstein基函数的性质确定了Bezier曲线的性质。



Bezier曲线的性质

□ 端点位置

■ Bezier曲线以 P_0 为起点，以 P_n 为终点，即 $P(0)=P_0, P(1)=P_n$

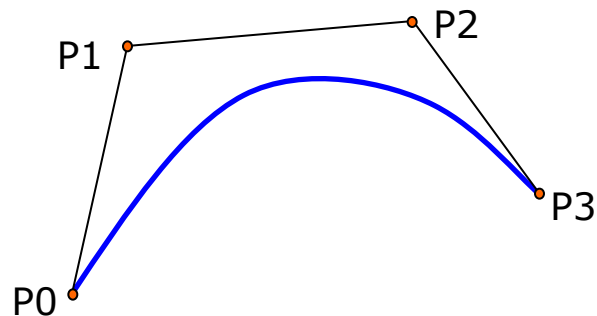
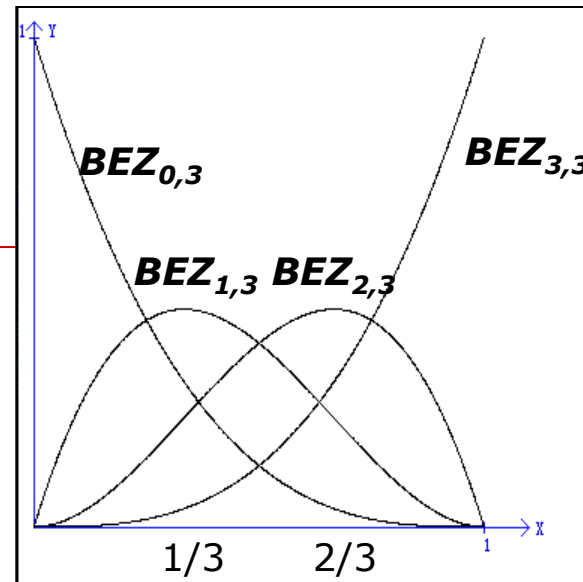
■ 证明：

□ 起点： $t = 0$ ，即 $BEZ_{0,n}(0)=1$ ，其他基函数为0，所以：

$$P(0) = \sum_{i=0}^n P_i BEZ_{i,n}(0) = P_0 BEZ_{0,n}(0) = P_0$$

□ 终点可类似证明。

■ 即Bezier曲线起点终点与控制多边形起点终点重合。



□ 端点切矢量

- Bezier曲线在起点与终点处分别与控制多边形的第一条边与最后一条边相切，它在两端点的切矢量分别是：

$$P'(0)=n(P_1-P_0), P'(1)=n(P_n-P_{n-1}),$$

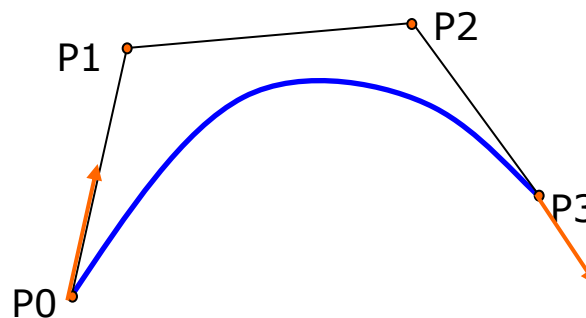
- 证明：

$$P'(t) = \left(\sum_{i=0}^n P_i BEZ_{i,n}(t) \right)' = \sum_{i=0}^n P_i BEZ'_{i,n}(t)$$

降阶公式

$$= n \sum_{i=0}^n P_i [BEZ_{i-1,n-1}(t) - BEZ_{i,n-1}(t)]$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) BEZ_{i,n-1}(t)$$



□ 端点曲率

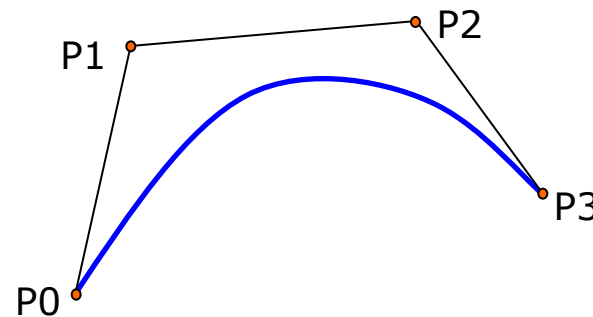
- Bezier曲线在端点处的曲率分别是：

$$k(0) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{|(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_1)|}{|P_1 - P_0|^3} \quad k(1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{|(P_{n-1} - P_{n-2}) \times (P_n - P_{n-1})|}{|P_n - P_{n-1}|^3} \quad \text{式(1)}$$

- 曲率为切矢量再求导：

$$\begin{aligned} P''(t) &= (P'(t))' = \left(n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) BEZ_{i,n-1}(t) \right)' \\ &= n(n-1)[(P_i - P_{i-1}) - (P_{i-1} - P_{i-2})] BEZ_{i,n-2}(t) \end{aligned}$$

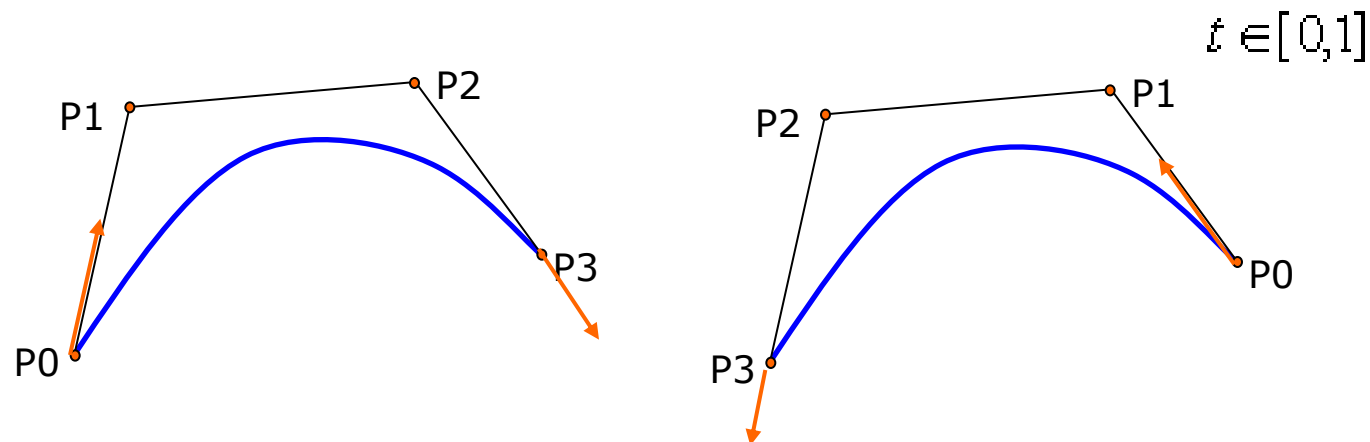
- 根据曲率计算公式得式(1)



□ 对称性

- 如果保持全部控制顶点位置不变，但次序颠倒，则Bezier曲线形状不变，但走向相反。即矢量参数变化方向相反。

$$C^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i^* B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{n-i,n}(1-t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(1-t)$$

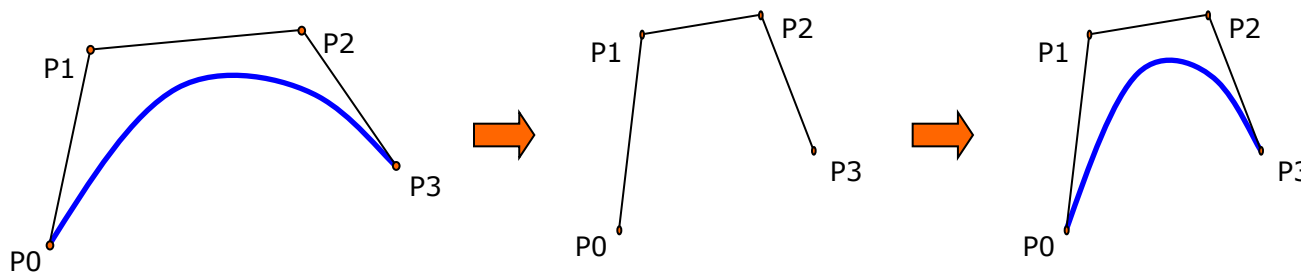


□ 仿射不变性

- 仿射不变性是指：对于任意的仿射变换A，曲线的表示式形式不变，即：

$$A([P(t)]) = A\left\{\sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)\right\} = \sum A[P_i] B_{i,n}(t)$$

- 这说明：对Bezier曲线所做的任意仿射变换(包括平移，旋转，缩放，对称变换)，相当于先对曲线控制顶点做变换，再根据变换后的顶点绘制Bezier曲线。

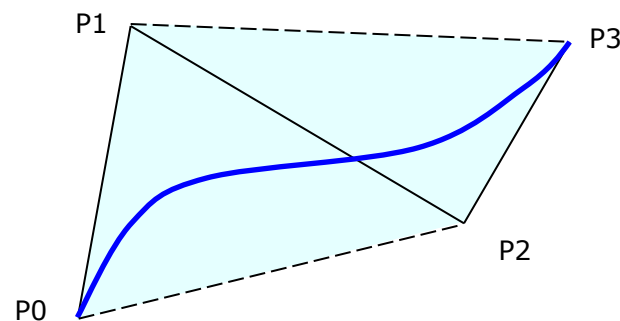
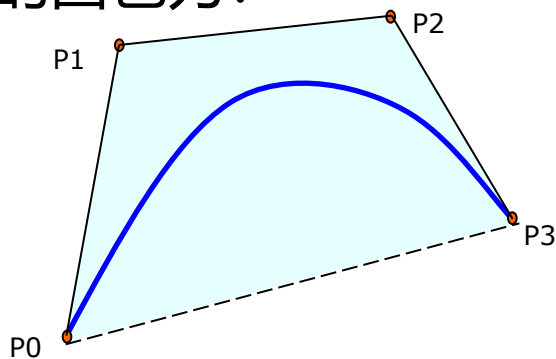


□ 凸包性

- Bezier曲线 $P(t)$ 位于其控制顶点 $P_0P_1\dots P_n$ 的凸包内。
- $P_0P_1\dots P_n$ 的凸包：包含这些点的最小凸集，定义为点集：

$$\left\{ P \mid P = \sum_{i=0}^n a_i P_i, \quad a_i \text{ 满足 } \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0 \right\}$$

- 控制多边形的凸包为：



□ 直线再生性

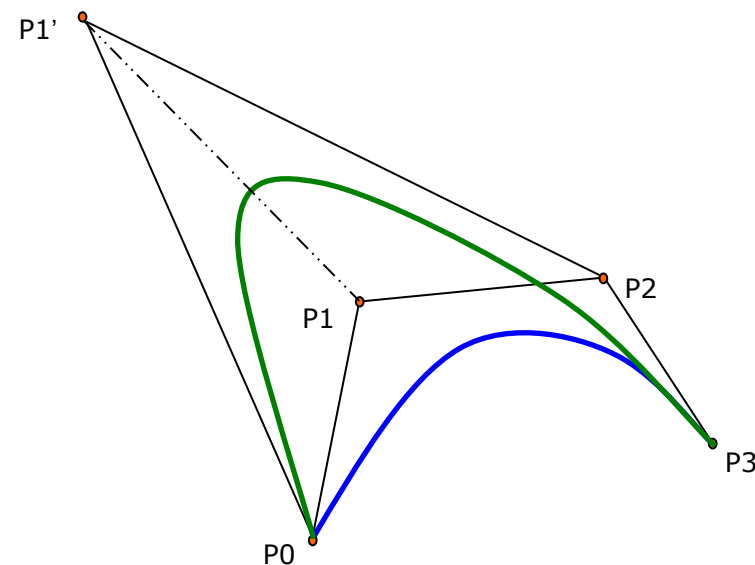
- 若控制顶点 P_0, P_1, \dots, P_n 落于一条直线上, 由凸包性可知, 该Bezier曲线必为一条直线。

□ 平面曲线的保型性

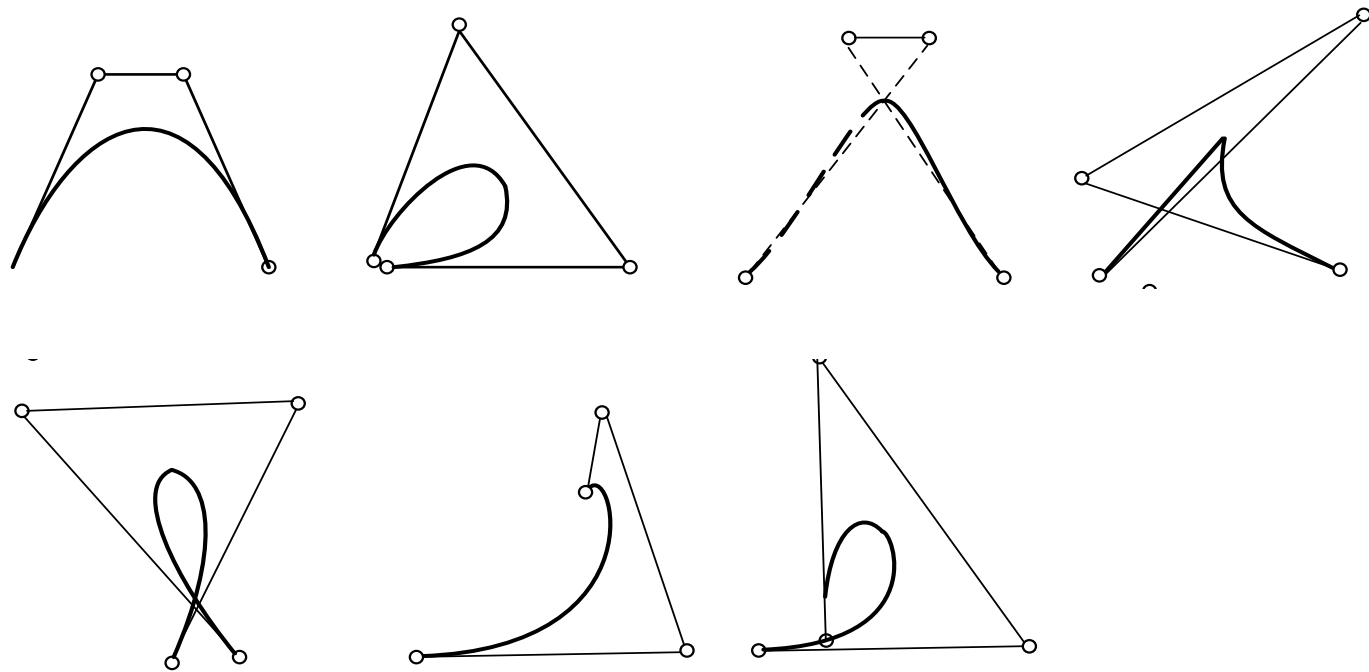
- 假设 P_0, P_1, \dots, P_n 位于一张平面内, 则Bezier曲线是平面曲线, 具有如下两条性质。
 - 保凸性: 如果控制多边形为凸, 则Bezier曲线为凸。
 - 变差缩减性: 平面内任一条直线与Bezier曲线的交点不多于该直线与其控制多边形的交点个数(从而说明Bezier曲线比其控制多边形折线的波动小, 更光顺)。
-

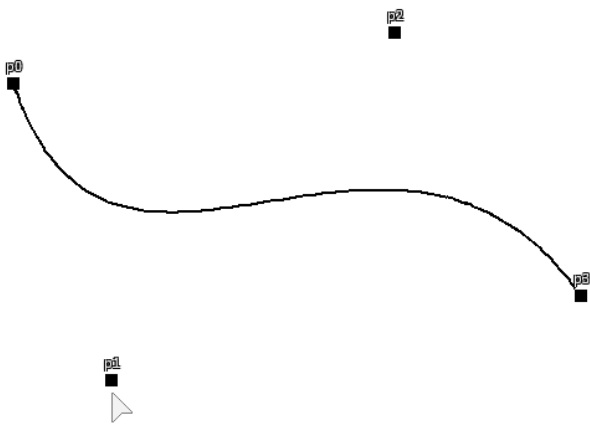
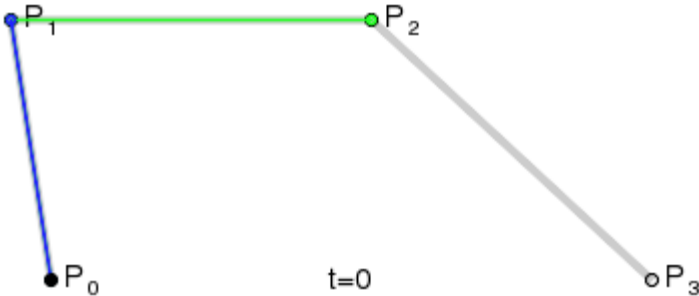
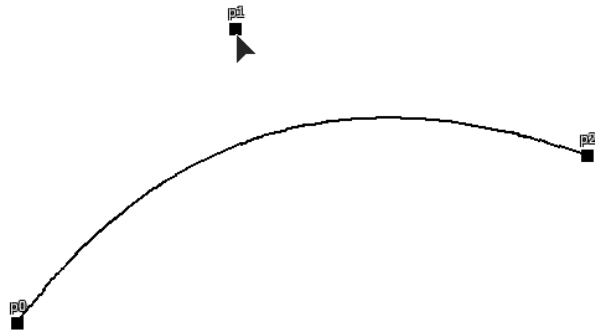
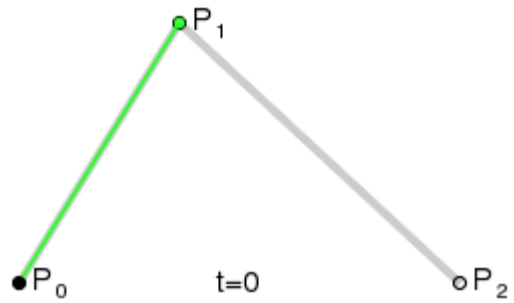
□ 拟局部性

- **局部性**：移动一个控制顶点，它只影响曲线的某个局部。
- Bezier曲线不具有局部性，但具有拟局部性。
拟局部性是指当移动一个控制顶点 P_i ，对应参数 $t=i/n$ 的曲线上的点变动最大，远离 $t=i/n$ 的曲线上的点变动越来越小。



□ 各种不同形状的Bezier曲线





9.5.3 三次Bezier曲线的矩阵表示和生成

- 利用Bezier造型时，如果
 - 次数太高，能表示更复杂的形体，但计算复杂度大大增加。而且控制顶点太多，形状不易控制。
 - 二次Bezier曲线，表示能力有限，且不能表示三维曲线。
- 因此：最常用三次Bezier曲线

三次Bezier曲线的矩阵表示

□ 三次Bezier曲线的定义式为:

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i BEZ_{i,3}(t)$$

□ 上式可分解为两个矢量的点积:

$$P(t) = [P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3] \cdot \begin{bmatrix} BEZ_{0,3}(t) \\ BEZ_{1,3}(t) \\ BEZ_{2,3}(t) \\ BEZ_{3,3}(t) \end{bmatrix} = G_{BEZ} \begin{bmatrix} C_3^0 (1-t)^3 \\ C_3^1 t(1-t)^2 \\ C_3^2 t^2(1-t) \\ C_3^3 t^3 \end{bmatrix} = G_{BEZ} \begin{bmatrix} 1-3t+3t^2-t^3 \\ 3t-6t^2+3t^3 \\ 3t^2-3t^3 \\ t^3 \end{bmatrix}$$
$$= G_{BEZ} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} = G_{BEZ} \bullet M_{BEZ} \bullet T$$

G_{BEZ} : 三次Bezier曲线的几何矩阵
 M_{BEZ} : 三次Bezier曲线的基矩阵

9.5.4 Bezier曲线的离散生成方法

□ 上述方法用于高次曲线的计算量过大，因此提出离散生成方法 (de Casteljau算法)

□ de Casteljau算法

■ 对于n次Bezier曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i BEZ_{i,n}(t) \quad t \in [0,1]$$

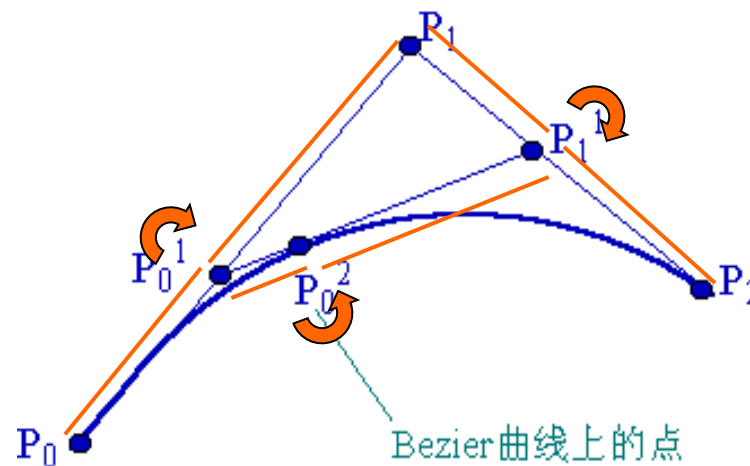
de Casteljau算法描述了从参数 $t \in [0,1]$ 计算型值点 $P(t)$ 的过程

□ 抛物线的三切线定理：

- 如图所示，设 P_0 、 P_0^2 、 P_2 是一条抛物线上顺序三个不同的点。过 P_0 和 P_2 点的两切线交于 P_1 点，在 P_0^2 点的切线交 P_0P_1 和 P_2P_1 于 P_0^1 和 P_1^1 ，则如下比例成立：

$$\frac{P_0 P_0^1}{P_0^1 P_1} = \frac{P_1 P_1^1}{P_1^1 P_2} = \frac{P_0^1 P_0^2}{P_0^2 P_1^1}$$

这是所谓**抛物线的三切线定理**。

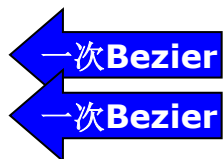


- 令上述比值为 $t:(1-t)$ ，即有：

$$P_0^1 = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$P_1^1 = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$P_0^2 = (1-t)P_0^1 + tP_1^1$$

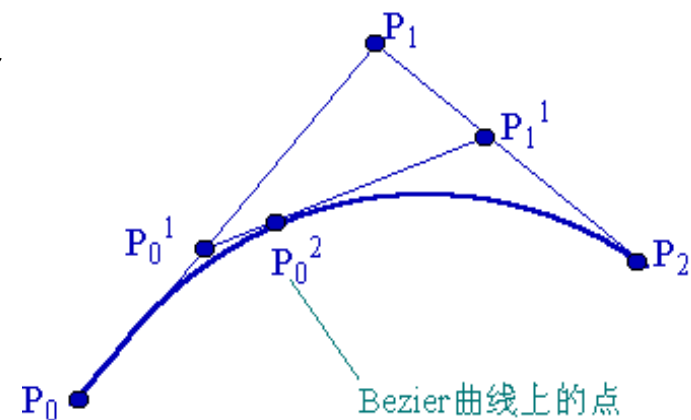


$$P_0^2 = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$



将一、二式代入第三式得：

- 当 t 从0变到1时，它表示了由三顶点 P_0 、 P_1 、 P_2 三点定义的一条二次Bezier曲线。
- 并且：这条二次Bezier曲线 P_0^2 可以定义为分别由前两个顶点(P_0, P_1)和后两个顶点 (P_1, P_2)决定的一次Bezier曲线的线性组合。



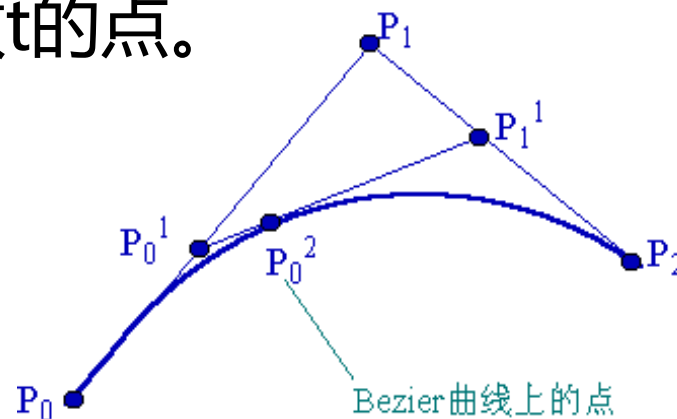
-
- 依次类推，由四个控制点定义的三次Bezier曲线 P_0^3 可被定义为分别由 (P_0, P_1, P_2) 和 (P_1, P_2, P_3) 确定的二条二次Bezier曲线的线性组合，
 - 由 $(n+1)$ 个控制点 $P_i (i=0, 1, \dots, n)$ 定义的 n 次Bezier曲线 P_0^n 可被定义为分别由前、后 n 个控制点定义的两条 $(n-1)$ 次Bezier曲线 P_0^{n-1} 与 P_1^{n-1} 的线性组合：

$$P_0^n = (1-t)P_0^{n-1} + tP_1^{n-1} \quad t \in [0,1]$$

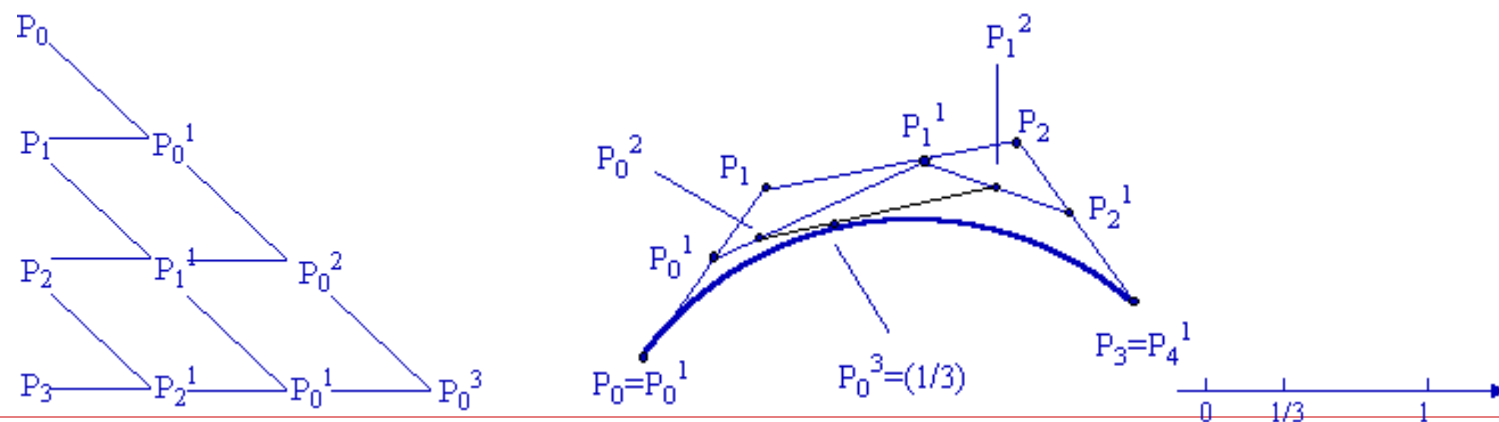
- 由此得到Bezier曲线的递推计算公式：

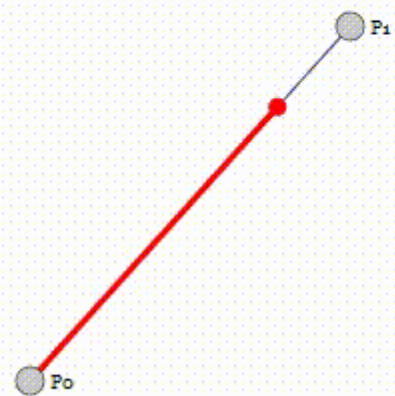
$$P_i^k = \begin{cases} P_i & k=0 \\ (1-t)P_i^{k-1} + tP_{i+1}^{k-1} & k=1,2,\dots,n, i=0,1,\dots,n-k \end{cases}$$

- $P_i^0 = P_i$ 是定义Bezier曲线的控制点，从 P_i 起算，根据递推公式一直算到 P_0^n ，该点即为曲线 $P(t)$ 上具有参数 t 的点。
- 这便是著名的 **de Casteljau** 算法。

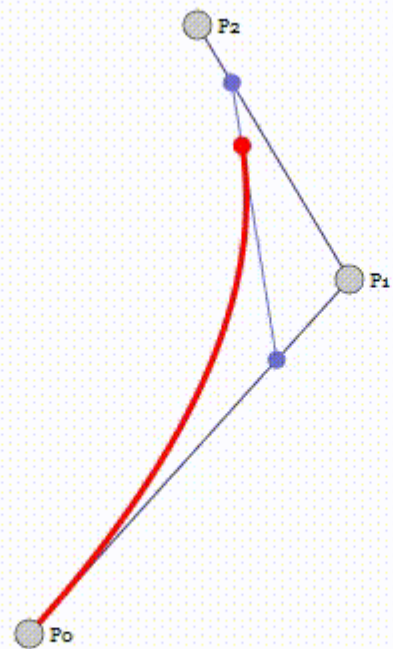


- 当 $n=3$ 时，de casteljau算法递推出的 P_i^k 呈直角三角形，对应结果如图所示。从左向右递推，最右边点 P_0^3 即为曲线上的点。
- 作图法：给定参数 $t \in [0,1]$ ，依次对原始控制多边形每一边执行同样的 $t:1-t$ 的定比分割，对得到的中间顶点构成的控制多边形再执行 $t:1-t$ 定比分割...重复进行下去，直到 n 级递推得到一个中间顶点 P_0^n 即为所求曲线上的点 $P(t)$ ，如图。

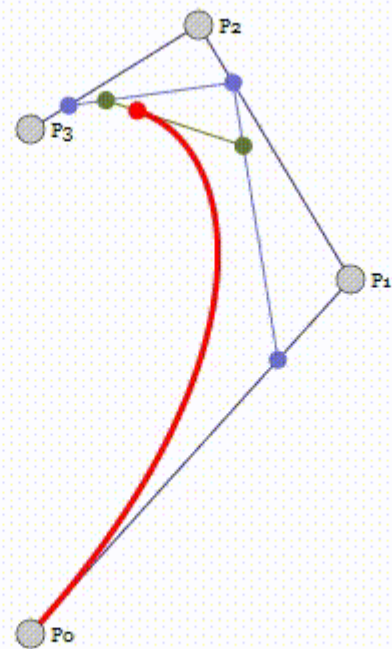




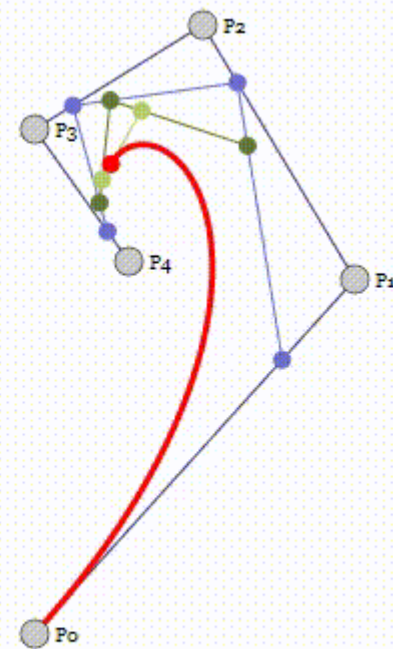
$t=0,77$



$t=0,77$



$t=0,77$



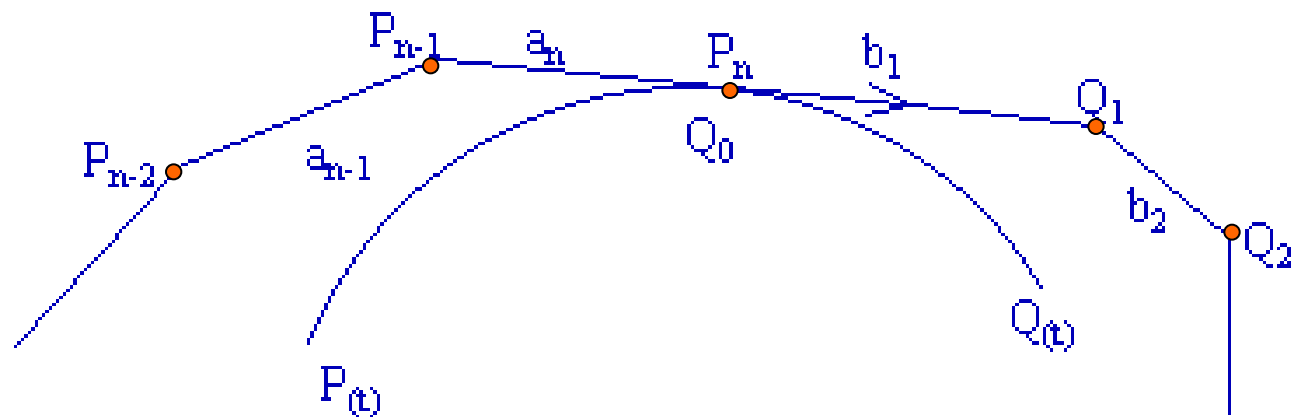
$t=0,77$

W

9.5.5 Bezier曲线的拼接

- 几何设计中，一条Bezier曲线往往难以描述复杂的曲线形状。
 - 解决方法有两种：
 - 增加控制顶点数，提高Bezier曲线次数。但计算复杂(实际使用中一般不超过10次)。
 - 采用分段设计，然后将各段低次曲线相互连接起来，并在接合处保持一定的连续条件。
 - 下面讨论两段Bezier曲线达到不同阶几何连续的条件。
-

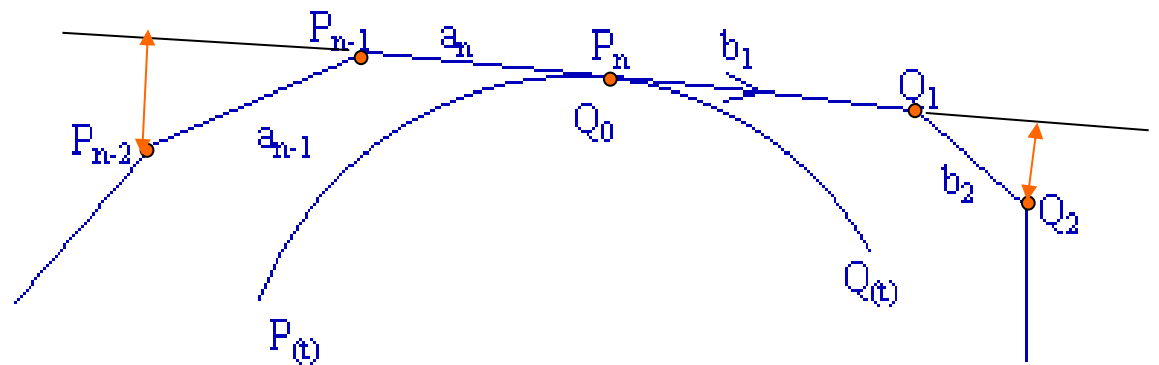
-
- 给定两条Bezier曲线 $P(t)$ 和 $Q(t)$ ，相应控制点为 $P_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 和 $Q_i (i = 0, 1, \dots, m)$ ，且令 $a_i = P_i - P_{i-1}$ ， $b_i = Q_i - Q_{i-1}$ ，我们现在把两条曲线连接起来。



1. 要使它们达到GC⁰连续, 则: $P_n = Q_0$;
2. 要使它们达到GC¹连续, 则: $b_1 = \alpha * a_n (\alpha > 0)$, 由此可知 $P_{n-1}, P_n = Q_0, Q_1$ 三点共线。
3. 要使它们达到GC²连续, 则: 在GC¹连续的条件下, 并且曲率矢量连续。

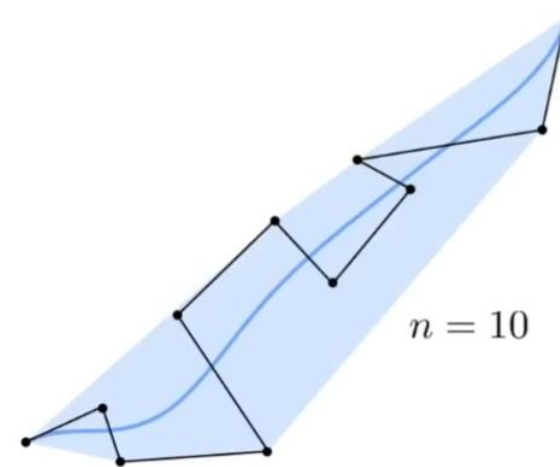
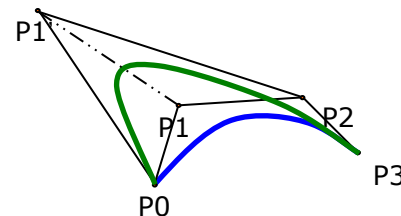
□ $P_{n-2}, P_{n-1}, P_n(Q_0), Q_1, Q_2$ 共面

□ $d(P_{n-2}, P_{n-1}Q_1)/d(Q_2, P_{n-1}Q_1)$
 $= n(m-1)/m(n-1) * |P_{n-1}P_n|^2/|Q_0Q_1|^2$

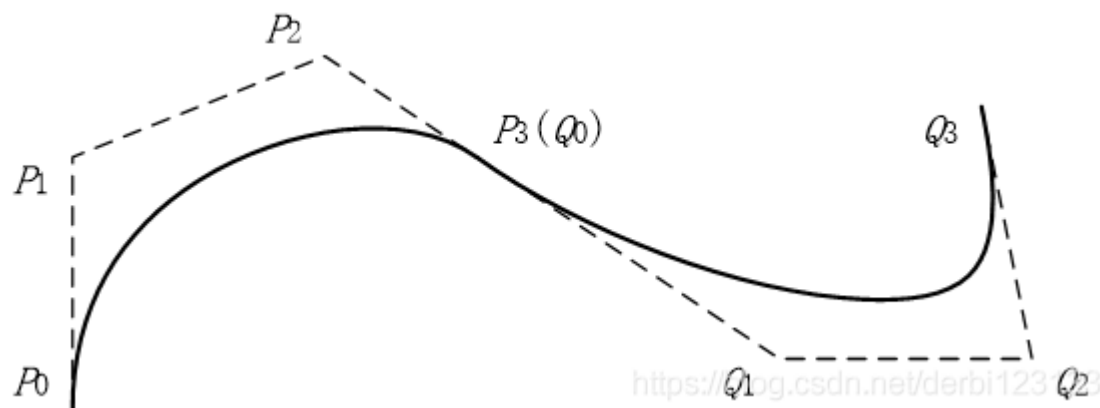


□ Bezier曲线的缺点:

- 只有拟局部性，非局部性
 - 任何一控制点的变化会引起曲线上所有点的改变，无法针对局部进行编辑的
- 样条阶数和控制点个数成正比
 - 控制点的增加，计算量会快速增加。
 - Bezier曲线的阶数增加，对于**曲线形状的控制将变得困难**。主流的图形套件所提供的Bezier曲线接口很少超过3阶。
- 多边形的顶点数 n 决定了所定义的Bezier曲线的阶次（ $n-1$ 次），控制的**自由度较少**。



- 要用Bezier曲线作为唯一工具去绘制一个较为复杂的图形，为了保证可编辑性和渲染效率，只能将整个结构拆分成很多小段，用低阶数的Bezier曲线进行拟合，再进行拼接。

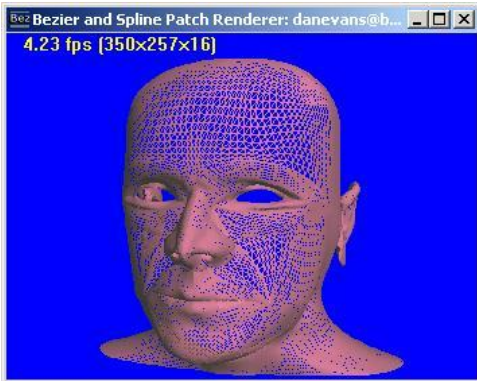


B样条 (B-Spline)

- ❑ 解决Bezier曲线在应用过程中暴露出的一系列缺陷
 - ❑ 真正的局部性
 - ❑ B-Spline对控制点和阶数做了解耦，两者再无直接关系
 - ❑ 引入了节点向量 (Knots)
 - ❑ 整条曲线有统一的表达式，有统一的算法，但形状可以分段控制
-

Bezier曲面

- 基于Bezier曲线的讨论，我们可以方便地给出Bezier曲面的定义和性质，Bezier曲线的一些算法也可以很容易扩展到Bezier曲面的情况。

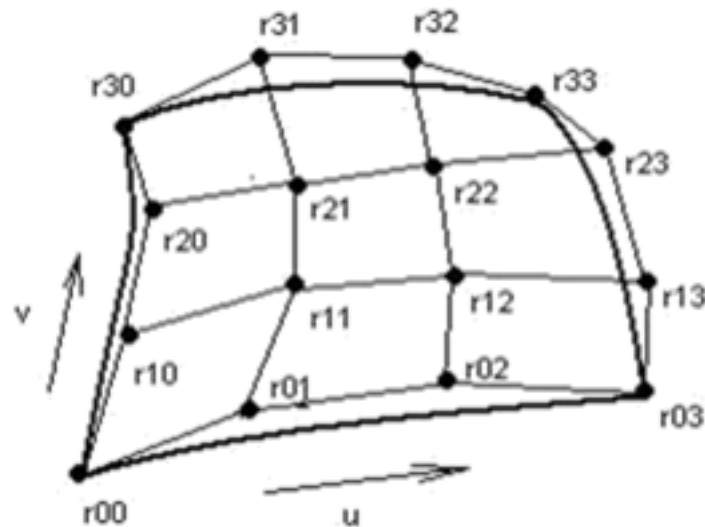


Bezier曲面的定义和性质

- 给定空间 $(m+1) \times (n+1)$ 个点 $P(i,j)$ ，则 $m \times n$ 次张量积形式的Bezier曲面定义为：

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} BEZ_{i,m}(u) BEZ_{j,n}(v) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

- $P(i,j)$ 称为**控制顶点**。
- 所有 $P(i,j)$ 构成的空间的一张网格称**控制网格**。



Bezier曲面的性质

□ 角点位置

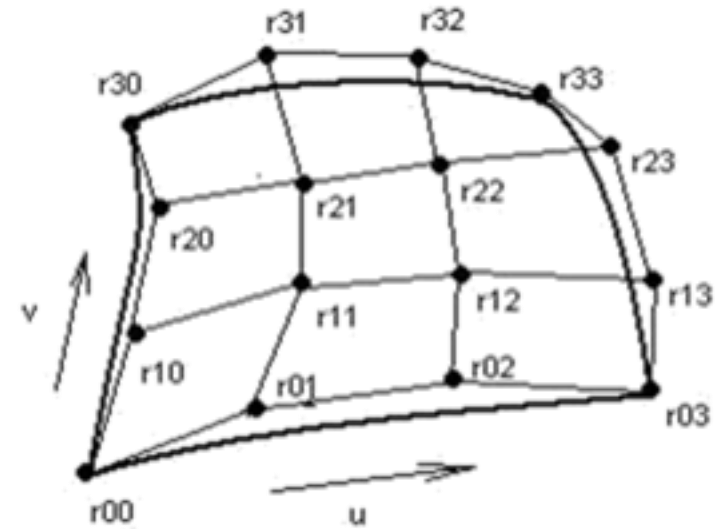
- Bezier曲面的四个角点分别是控制网格的四个角点，即

$$P(0,0)=P_{0,0}$$

$$P(0,1)=P_{0,1}$$

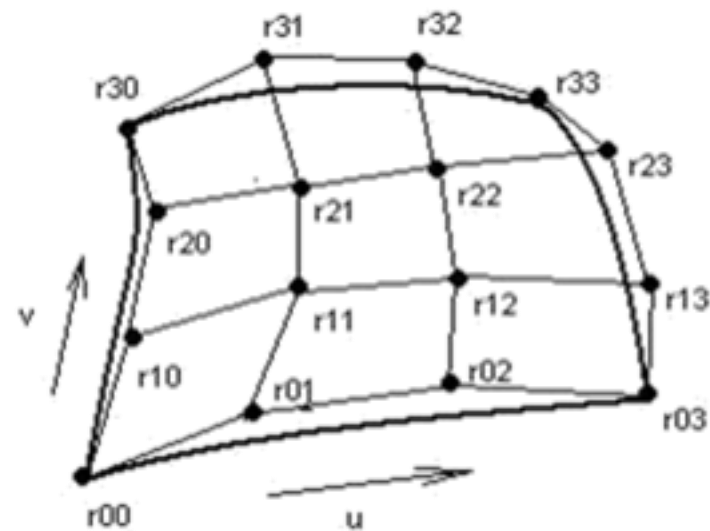
$$P(1,0)=P_{1,0}$$

$$P(1,1)=P_{1,1}$$



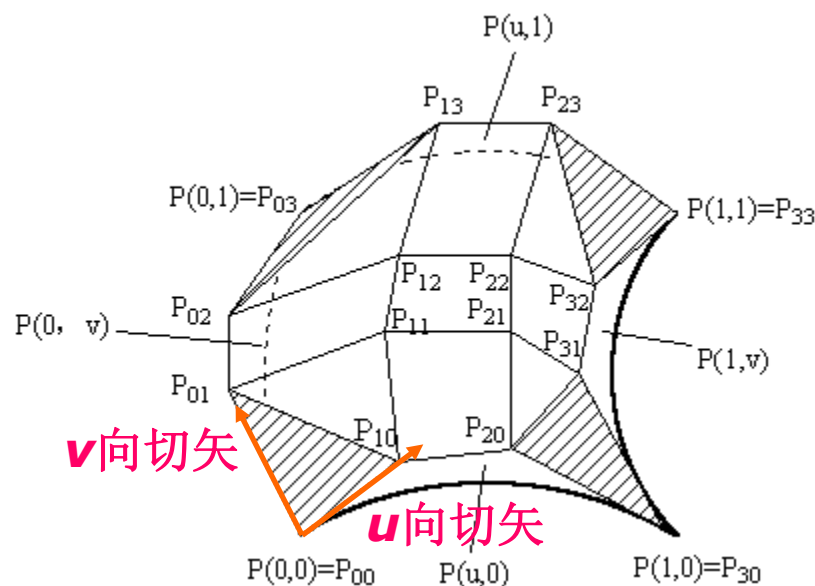
□ 边界线

- $P(u,v)$ 的四条边界线是Bezier曲线。
- 控制网格最外一圈顶点定义Bezier曲面的四条边界



□ 角点切平面

- 角点 $P_{0,0}$ 处，曲面 u 向切矢量和 v 向切矢量分别为 $m(P_{1,0}-P_{0,0})$ 和 $n(P_{0,1}-P_{0,0})$
- 从而曲面在该点的切平面即为 $P_{0,0}$, $P_{0,1}$, $P_{1,0}$ 三个控制点确定的平面。
- 同理曲面在另外三个角点的切平面分别由斜线标出。



□ 角点法矢量

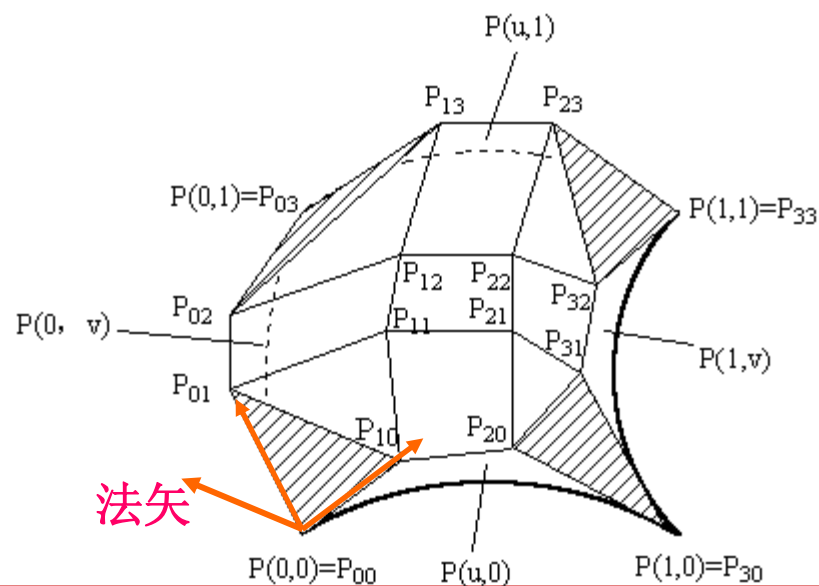
- 角点 $P_{0,0}$ 处，曲面 u 向切矢量和 v 向切矢量分别为 $m(P_{1,0}-P_{0,0})$ 和 $n(P_{0,1}-P_{0,0})$
- 曲面在四个角点的法矢量分别是：

$$mn(P_{1,0}-P_{0,0}) \times (P_{0,1}-P_{0,0})$$

$$mn(P_{1,0}-P_{0,0}) \times (P_{0,1}-P_{0,0})$$

$$mn(P_{1,0}-P_{0,0}) \times (P_{0,1}-P_{0,0})$$

$$mn(P_{1,0}-P_{0,0}) \times (P_{0,1}-P_{0,0})$$

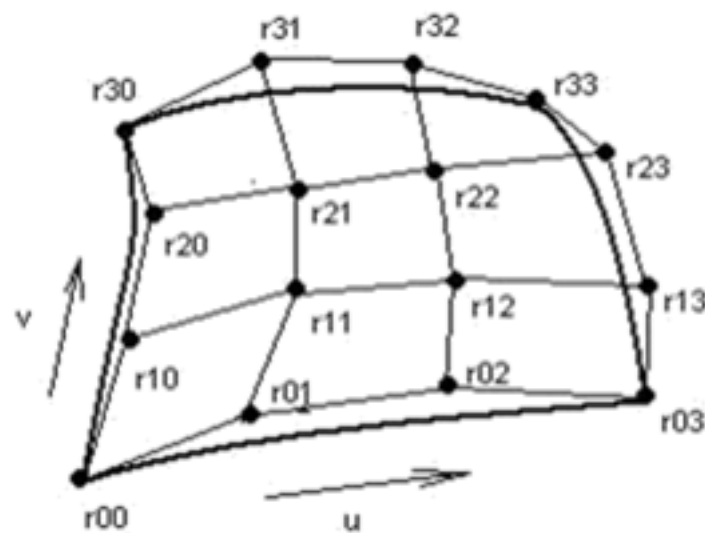


□ 凸包性

- 曲面 $P(u,v)$ 包含于其控制顶点 P_{ij} 的凸包内。

□ 平面再生性

- 所有控制顶点落在一张平面内时，
由凸包性，Bezier曲面也落在平面内。

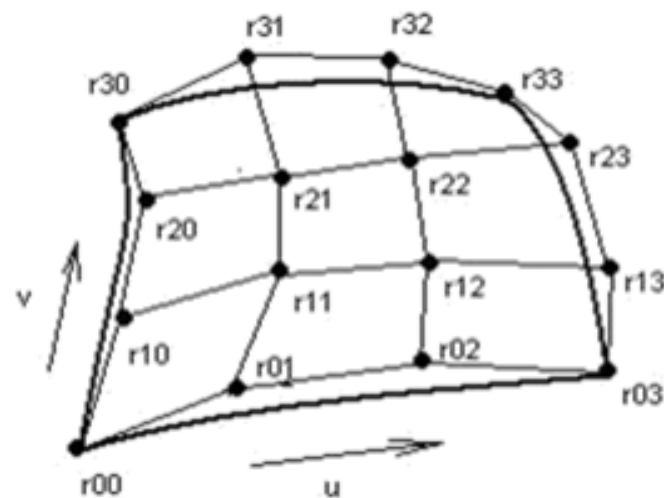


□ 仿射不变性

- 对任一仿射变换，对曲面做变换等价于对其控制顶点做变换。

□ 拟局部性

- 修改一个控制顶点时，曲面上距离它近的点受影响大，距离远的受影响小。



□ Bezier曲面的矩阵表示方式

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(u) & B_{1,n}(u) & \cdots & B_{m,n}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,m}(v) \\ B_{1,m}(v) \\ \cdots \\ B_{n,m}(v) \end{bmatrix}$$

M^T : Bezier曲面的基矩阵

G : Bezier曲面的几何矩阵

M : Bezier曲面的基矩阵

Bezier曲面的离散生成算法

- 迭代算法
- de Casteljau算法

END
