COMPLETE MATHS

ब्रह्मास्त्र

FORMULA BOOK

• CONCEPTS • FORMULAE • SHORT TRICKS

BY - ADITYA RANJAN
EXCISE INSPECTOR

IMPORTANT FOR

SSC, BANK, RAILWAY, DEFENCE, CSAT, OTHER STATE & GOVT. EXAMS

Follow us 👇

Rankers Gurukul

Maths by Aditya Ranjan

Selected हैं Selection दिलायेंगे

Download Now RG Vikaramjeet App for MATHS SPECIAL BATCH 8506003399

Aditya Ranjan

Maths Expert

Excise Inspector

Motivator & Mentor

Cracked Various exams with Top Rank.

Dedicated to my dear
"ASPIRANTS" & team
"RANKERS' GURUKUL"
who have inspired me
to compile this book.

About Aditya Ranjan

Aditya Ranjan Sir is a renowned Maths Faculty , who has taught lakhs of students through rankers gurukul you tube channel and its offline centre.

His students are selected in various departments in India.

He is the fastest emerging educator in online education.

His free maths & guidance videos have millions of views on you tube.

He has a unique approach of solving new TCS questions . He always focuses on relevant and updated content.

His classes are interactive and he patiently clears the doubts of all his students.

He has got selected at his very early age and his words "**SELECTED है SELECTION दिलायेंगे**" are very popular among students.

His new innovative idea of completing entire maths syllabus for any govt. exam on you tube through "**60 Days 60 Marathon**" is a landmark in online education.

EXAMS QUALIFIED

CGL , CHSL, CPO , CDS (3 TIMES)

**** HE SCORED ****

- **MATHS – 50/50**
- **ENGLISH – 50/50**
- **REASONING – 50/50**

and got selected in **SSC CHSL 2019** with **AIR - 114.**

- He scored the same in CGL 2019 PRE and **227/200 in MAINS (MATHS)** and got selected in SSC CGL 2019 as an **EXCISE INSPECTOR.**

CONTACT US

- **YOU TUBE –** RANKERS GURKUL
- **TELEGRAM –** Maths By Aditya Ranjan
- **Instagram –** aditya__ranjan
- **Facebook –** Maths By Aditya Ranjan
- **Mail –** Mathsbyadityaranjan@gmail.com

ACKNOWLEDGMENT

मैं उन सभी लोगों का आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक को तैयार करने में मेरी मदद की। मैं विशेषकर विक्रमजीत सर का ऋणी हूँ, जिन्होंने हमेशा बड़े भाई की तरह मेरा मार्गदर्शन किया और शायद जिनके बिना इस मुकाम पर पहुँचना संभव नहीं था। साथ में सबसे ज्यादा आभारी Rudra Sir का हूँ, जिन्होंने इस Formula Book को तैयार करने में अपनी जान लगा दी, दिन रात मेहनत करके उन्होंने बच्चों को एक मास्टरपीस दिया है जिससे उनको काफी मदद मिलेगी और जिस तरह से महाभारत के रचयिता वेदव्यास जी है लेकिन इसे लिखा गणेश जी ने है उसी तरह से इस किताब को लिखने वाले हमारे टाइपिस्ट अमित सिंह, अजय कुमार, वीर सिंह और अखिलेश हैं। मैं अपने छात्रों को भी धन्यवाद देना चाहता हूँ जिन्होंने वास्तव में मुझे इस Formula Book को बनाने के लिए प्रेरित किया।

– आदित्य रंजन

INDEX

S.NO.	CHAPTER NAME	PAGE NO.
1.	GEOMETRY	01 – 32
	• LINES & ANGLE	01 – 05
	• TRIANGLE	06 – 16
	• CIRCLE	17 – 25
	• QUADRILATERAL	26 – 31
	• POLYGONS	31 – 32
2.	MENSURATION (2D)	33 – 42
	• TRIANGLE	33 – 33
	• EQUILATERAL TRIANGLE	34 – 34
	• REGULAR HEXAGON	35 – 35
	• ISOSCELES TRIANGLE	35 – 36
	• RIGHT-ANGLED TRIANGLE	36 – 36
	• CIRCLE	37 – 37
	• QUADRILATERAL	38 – 42
3.	MENSURATION (3D)	43 – 53
	• CUBOID & CUBE	43 – 44
	• CYLINDER	44 – 45
	• CONE & FRUSTRUM	46 – 48
	• SPHERE & HEMISPHERE	48 – 48
	• COMBINATION OF 3D OBJECTS	49 – 50
	• PRISM, PYRAMID & TETRAHEDRON	51 – 53

4.	CO-ORDINATE GEOMETRY	54 – 56
5.	ALGEBRA	57 – 63
	• ALIGEBRAIC FORMULAE	57 – 59
	• QUADRATIC EQUATION	59 – 59
	• SUM OF SERIES	60 – 60
	• INDICES AND SURDS	61 – 61
	• SERIES	61 – 62
	• ARITHMETIC & GEOMETRIC PROGRESSION	63 – 63
6.	TRIGONOMETRY	64 – 69
7.	HEIGHT & DISTANCE	70 – 73
8.	NUMBER SYSTEM	74 – 81
	• FACTOR	74 – 75
	• REMAINDER	76 – 77
	• RULES OF DIVISIBILITY	77 – 78
	• UNIT DIGIT	78 – 78
	• LCM & HCF	78 – 79
	• COUNTING OF NUMBERS	79 – 79
	• SERIES OF $a\frac{b}{c}$ TYPE.	80 – 80
	• BAR TYPE	81 – 81
9.	TIME & DISTANCE	82 – 85
	• CONCEPT OF TRAINS	84 – 84
	• RACES & CIRCULAR MOTION	85 – 85
10.	BOAT & STREAM	86 – 87
11.	RATIO, PROPORTION & PARTNERSHIP	88 – 89
12.	ALLIGATION	90 – 93
13.	AVERAGE	94 – 95
14.	TIME & WORK	96 – 96
15.	PERCENTAGE	97 – 97
16.	PROFIT & LOSS AND DISCOUNT	98 – 98
17.	SIMPLE & COMPOUND INTEREST	99 – 99
18.	STATISTICS	100 – 101

ADVANCED MATHS
GEOMETRY
ज्यामिति
MENSURATION
क्षेत्रमिति
ALGEBRA
बीज़गणित
TRIGONOMETRY
त्रिकोणमिति
CO-ORDINATE GEOMETRY
निर्देशांक ज्यामिति
NUMBER SYSTEM
संख्या पद्धति

01 GEOMETRY (ज्यामिति)

Lines & Angles (रेखा और कोण)

We have divided the geometry into five sub-topic, which are as follows:
हमने ज्यामिति को पाँच उप-विषयों में विभाजित किया है, जो इस प्रकार हैं:

- Point, Lines and Angle/ बिन्दु, रेखा और कोण
- Triangle/त्रिभुज
- Quadrilateral/ चतुर्भुज
- Polygon/ बहुभुज
- Circle/वृत्त

Points, Line & Angle/बिन्दु, रेखा और कोण

1. **Point :** A point is a circle of zero radius

बिन्दु : बिन्दु शून्य त्रिज्या का कोई वृत्त होता है।

Types of Point/बिन्दु के प्रकार

(a) Collinear Points: If three or more points situated on a straight line, these points are called collinear points.

सरेख बिन्दु : यदि तीन या तीन से अधिक बिन्दु किसी एक सीधी रेखा में स्थित हो तो ये बिन्दु सरेख बिन्दु कहलाते हैं।

Example : Points *A*, *B*, and *C* are collinear.

उदाहरण : बिन्दु *A*, *B*, और *C* सरेख हैं।

(b) Non-collinear Points: If three or more points are not situated on a straight line, these points are called non-collinear points.

असरेख बिन्दु : यदि तीन या तीन से अधिक बिन्दु किसी एक सीधी रेखा में स्थित नहीं हो तो ये बिन्दु असरेख बिन्दु कहलाते हैं।

2. **Lines:** A line is made up of a infinite number of points and it has only length i.e., it does not has any thickness (or width). A line is endless so, it can be extended in both directions.

रेखा अनंत संख्या में बिन्दुओं से मिलकर बनी होती है और इसमें सिर्फ लंबाई होती है। अर्थात् इसकी कोई मोटाई (चौड़ाई) नहीं होती। रेखा का कोई अंत बिन्दु नहीं होता, इसलिए इसे दोनों दिशाओं में बढ़ाया जा सकता है।

(a) Straight line: A line which does not change its direction at any point is called a straight line.

सीधी रेखा : ऐसी रेखा जो किसी भी बिन्दु पर अपनी दिशा नहीं बदलती सीधी रेखा कहलाती है।

(b) Curved line: A line which changes its direction is called a curved line.

घुमावदार रेखा : ऐसी रेखा जो अपनी दिशा बदलती हो, घुमावदार रेखा कहलाती है।

(c) Line Segment: A line segments has two end points, but generally speaking line segment is called a line.

रेखाखंड : रेखाखंड के दो अंत बिन्दु होते हैं, परंतु साधारणतः बोलने में रेखाखंड को रेखा बोलते हैं।

★ Types of Lines/रेखाओं के प्रकार

The lines are basically of five types as discussed below:

रेखाएँ मूलतः पाँच प्रकार की होती हैं -

(i) Intersecting Lines: If two or more lines intersect each other, then they are called intersecting lines. In the figure *AB* and *CD* are intersecting lines.

प्रतिच्छेदी रेखाएँ : यदि दो या दो से अधिक एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं तो वे प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाते हैं। दिये गये चित्र में *AB* और *CD* प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं।

Maths by Aditya Ranjan sir

(ii) **Concurrent Lines :** If three or more lines pass through a point, then they are called concurrent lines and the point through which these all lines pass is called point of concurrent.

संगामी रेखाएँ : यदि तीन या तीन से अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर गुजरती है तो वे संगामी रेखाएँ कहलाती हैं और जिस बिन्दु से होकर ये सभी रेखाएँ गुजरती है उसे समवर्ती बिन्दु कहते हैं।

(iii) **Parallel Lines :** Two straight lines are parallel if they lie in the same plane and do not intersect even if they produced infinitely. Perpendicular distances between two parallel lines are always same at all places.

समांतर रेखाएँ : दो सीधी रेखाएँ समांतर होंगी यदि वे समान तल में स्थित हों और अनंत तक बढ़ाने पर भी एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित न करे। दो समांतर रेखाओ के बीच की लंबवत दूरी सभी जगह समान होती है।

In the figure AB and CD are parallel lines.

दिये गये चित्र में **AB** और **CD** समांतर रेखाएँ हैं।

Symbol for parallel lines is ||.

Hence, AB || CD.

समांतर रेखाओं का प्रतिचिह्न || है।

अतः **AB || CD.**

(iv) **Perpendicular Lines :** If two lines intersect at right angles, then two lines are called perpendicular lines. In the following figure AB and CD are perpendicular lines.

लंबवत रेखाएँ : यदि दो रेखाएँ समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं तो दोनों रेखाएँ लंबत रेखाएँ कहलाती हैं। नीचे दिये गये चित्र **AB** और **CD** में लंबत रेखाएँ हैं।

Symbolically it is represented as AB ⊥ CD or we can also say that CD ⊥ AB.

संकेत रूप में इसे **AB ⊥ CD** द्वारा प्रदर्शित करते हैं अथवा हम कह सकते हैं कि **CD ⊥ AB** है।

(v) **Transversal Lines :** A line which intersects two or more given lines at distinct points is called a transversal of the given lines.

तिर्यक रेखाएँ : वह रेखा जो दो या दो से अधिक दी गई रेखाओं को अलग-अलग बिंदुओं पर काटती है, दी गई रेखाओं की तिर्यक रेखा कहलाती है।

In figure straight lines AB and CD are intersected by a transversal PQ.

दिये गये चित्र में सीधी रेखाएँ **AB** और **CD** तिर्यक रेखा **PQ** द्वारा प्रतिच्छेदित की गई हैं।

IMPORTANT POINTS – LINES

- There is one and only one line passing through two distinct points.

  दो अलग बिन्दुओं से होकर सिर्फ और सिर्फ एक रेखा गुजरती है।

- Two or more lines are said to be coplanar if they lie in the same plane, otherwise they are said to be non-coplanar.

  दो या दो से अधिक रेखाएँ समतलीय कहलाती हैं यदि वे एक ही तल में हों, अन्यथा वे असमतलीय कहलाती हैं।

- The intersection of two planes is a line.

  दो तलों का प्रतिच्छेद एक रेखा होती है।

3. **Angles :** An angle is the union of two non-collinear rays with a common initial point. The two rays forming an angle are called arms of the angle and the common initial point is called the vertex of the angle.

कोण : जब दो किरणें एक ही उभयनिष्ठ बिन्दु से प्रारंभ होती हैं तो एक कोण बनता है। जो दो किरणें कोण बनाती है उन्हें कोण की भुजा कहते हैं और उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु शीर्ष कहलाता है।

Maths by Aditya Ranjan sir

The angle *AOB* denoted by $\angle AOB$, is formed by rays *OA* and *OB* and point *O* is the "vertex" of the angle.

किरणों *OA* और *OB* द्वारा बना हुआ कोण *AOB* को $\angle AOB$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है और बिन्दु *O* कोण का शीर्ष है।

★ Types of Angles/कोण के प्रकार

(i) **Acute Angle:** If the measure of an angle is less than 90°, it is an acute angle.

न्यून कोण : यदि किसी कोण की माप 90° से कम हो तो यह न्यून कोण होता है।

$0° < \theta < 90°$ ($\angle AOB$ is an acute angle)

(ii) **Right Angle :** If measure of an angle is equal to 90°, then it is a right angle.

समकोण : यदि किसी कोण की माप 90° के बराबर हो तो यह समकोण होता है।

$\theta = 90°$ ($\angle AOB$ is a right angle)

(iii) **Obtuse Angle:** If measure of an angle is more than 90° but less than 180°, then it is a obtuse angle.

अधिक कोण : यदि किसी कोण की माप 90° से अधिक परंतु 180° से कम हो, तो वह अधिक कोण कहलाता है।

$90° < \theta < 180°$ ($\angle AOB$ is an obtuse angle)

(iv) **Straight Angle:** If measure of an angle is equal to 180°, then it is a straight angle.

ऋजु कोण : यदि किसी कोण की माप 180° क बराबर हो तो यह ऋजु कोण कहलाता है।

$\theta = 180°$ ("*AOB* is a straight angle)

(v) **Reflex Angle:** If measure of an angle is more than 180° but less than 360°, then it is a reflex angle.

वृहत्त कोण : यदि किसी कोण की माप 180° से अधिक परंतु 360° से कम हो तो यह वृहत्त कोण कहलाता है।

$180° < \theta < 360°$ ($\angle AOB$ is a reflex angle)

★ Pairs of Angles/कोणों का युग्म

(i) **Adjacent Angles:** Two angles are called adjacent angles if:

आसन्न कोण : दो कोण आसन्न कहे जाते हैं यदि

- They have the same vertex,

  उनके शीर्ष समान हों

- They have a common arm,

  उनकी एक भुजा उभयनिष्ठ हो

- Uncommon arms are on either side of the common arm.

  गैर-उभयनिष्ठ भुजाएँ, उभयनिष्ठ भुजा के दोनों ओर हों।

- In the figure, $\angle AOC$ and $\angle BOC$ have a common vertex *O*. Also, they have a common arm *OC* and the distinct arms *OA* and *OB*, lie on the opposite side of the line *OC*.

  दिये गये चित्र में, $\angle AOC$ और $\angle BOC$ का एक उभनिष्ठ शीर्ष O है। उनकी एक उभयनिष्ठ भुजा OC और गैर-उभयनिष्ठ भुजा OA और OB भी रेखा OC के विपरीत दिशाओं में स्थित है।

Maths by Aditya Ranjan sir

(ii) **Complementary Angles :** If sum of two angles is equal to 90°, then the two angles are called complementary angles.

पूरक कोण : यदि दो कोणों का योग 90° हो, तो ये दोनों कोण सम्पूरक कोण कहलाते हैं।

$\angle BAD$ and $\angle DAC$ are complementary angles, if $x^o + y^o = 90°$

(iii) **Supplementary Angles:** If sum of two angles is equal to 180°, then the two angles are called supplementary angle.

सम्पूरक कोण : यदि दो कोणों का योग 180° हो, तो ये दोनों कोण पूरक कोण कहलाते हैं।

$\angle BAC$ and $\angle DAC$ is supplementary angles, if $x^o + y^o = 180°$

(iv) **Linear Pair of Angles:** Two adjacent angles are said to form a linear pair of angles, if their noncommon arms are two opposite rays.

कोणों का रैखिक युग्म : दो आसन्न कोण, कोणों का रैखिक युग्म तब बनाते हैं जब उसकी दो असमान भुजाएँ दो विपरीत किरण हों।

- In figure, OA and OB are two opposite rays $\angle AOC$ & $\angle BOC$ are the adjacent angles. Therefore, $\angle AOC$ and $\angle BOC$ form a linear pair.

  दिये गये चित्र में, OA और OB विपरीत किरणें हैं, $\angle AOC$ और $\angle BOC$ आसन्न कोण है इसलिए $\angle AOC$ और $\angle BOC$ रैखिक युग्म बनाते हैं।

- If a ray stand on a line, the sum of the adjacent angles so formed is 180°.

  यदि कोई किरण किसी रेखा पर पड़ी हो तो इस प्रकार बने आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

Note:- Conversely, if the sum of two adjacent angles is 180°, then their non-common arms are two opposite rays.

इसके विपरीत, यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो उनकी गैर उभयनिष्ठ भुजाएं दो विपरीत किरणें हैं।

(v) **Vertically opposite Angles :** If arm of two angles form two pairs of opposite rays, then the two angles are called as vertically opposite angles.

शीर्षाभिमुख कोण : यदि दो कोणों की भुजा विपरीत किरणों के दो युग्म बनाती हों, तो दोनों कोण शीर्षाभिमुख कहलाते हैं।

- In other words, when two lines intersect, two pairs of vertically opposite angles are formed. Each pair of vertically opposite angles are equal.

  दूसरे शब्दों में, जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो शीर्षाभिमुख कोणों के दो युग्म बनते हैं। शीर्षाभिमुख कोणों की प्रत्येक युग्म बराबर होते हैं।

- In the figure, two lines AB and CD intersect at O. We find that $\angle AOC$ and $\angle BOD$ are vertically opposite angles

  चित्र में दो रेखाएँ AB और CD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

  So, $\angle AOC = \angle BOD$

  Similarly, $\angle BOC$ and $\angle AOD$ are vertically opposite angles.

  इसी प्रकार, $\angle BOC$ और $\angle AOD$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।

  So, $\angle BOC = \angle AOD$

(vi) **Corresponding Angles :** When two parallel lines are intersected by a transversal. They form pairs of corresponding angles.

संगत कोण : जब दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित की जाती है तो वे संगत कोणों के युग्म बनाती हैं।

Lines l and m are intersected by the transversal n. Then $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 7$ and $\angle 2 = \angle 6$.

रेखाएँ l और m तिर्यक रेखा n द्वारा प्रतिच्छेदित की गई हैं, तो $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 7$ और $\angle 2 = \angle 6$.

Maths by Aditya Ranjan sir

(vii) **Alternate Angles :** When two parallel lines are intersected by a transversal, they form pairs of Alternate Angles. Each pair of alternate angles are equal.

एकान्तर कोण : जब दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित की जाती है तो वे एकांतर कोणों के युग्म बनाती हैं। एकांतर कोणों के प्रत्येक युग्म बराबर होते हैं।

In the given figure alternate interior angles $\angle 3 = \angle 5$ and $\angle 2 = \angle 8$ and alternate exterior angles $\angle 1 = \angle 7$ and $\angle 4 = \angle 6$.

दिये गये चित्र में एकांतर अंत:कोण $\angle 3 = \angle 5$ तथा $\angle 2 = \angle 8$ और एकान्तर वाह्य कोण $\angle 1 = \angle 7$ तथा $\angle 4 = \angle 6$

Note: Conversely, if a transversal intersects two lines in such a way that a pair of alternate interior angles is equal, then the two lines are parallel.

इसके विपरीत यदि कोई तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि एकांतर अंत:कोणों का एक युग्म बराबर हो तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

(viii) **Consecutive Interior Angles :** When two parallel lines are intersected by a transversal, they form two pairs of interior angles. The pairs of interior angles so formed are supplementary

क्रमागत आंतरिक कोण : जब दो समांतर रेखाएं एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित होती हैं तो आंतरिक कोणों के दो युग्म बनते हैं। इस प्रकार बने आंतरिक कोण पूरक होते हैं।

Pair of interior angles are:
$\angle 2 + \angle 5 = 180°$ & $\angle 3 + \angle 8 = 180°$

Maths by Aditya Ranjan sir

TRIANGLE/त्रिभुज

Properties of triangle/त्रिभुज के गुणधर्म

1. **Sum of all three angles of a triangle is always 180°, *i.e.* ∠A + ∠B + ∠C = 180°.**
किसी भी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। अर्थात् ∠A + ∠B + ∠C = 180°

2. **If a side of triangle is produced, then the exterior angle so formed is equal to the sum of the two interior opposite angles.**
यदि त्रिभुज की किसी भुजा को बढ़ाया जाता है तो इस प्रकार बना बाह्य कोण दो विपरीत आंतरिक कोणों के योगफल के बराबर होता है।
∠ACD = ∠CAB + ∠ABC

3. **In a triangle the angle between internal bisector of a base angle and external bisector of the other base angle is half of the remaining vertex angle.**
According to this property $\angle BEC = \frac{\angle A}{2}$.
किसी त्रिभुज में एक आधार कोण के आंतरिक समद्विभाजक और दूसरे आधार कोण के बाह्य समद्विभाजक के बीच बना कोण शेष शीर्ष कोण का आधा होता है।
इस गुण के अनुसार $\angle BEC = \frac{\angle A}{2}$

4. **In ΔABC, the side BC produced to D and angle bisector of ∠A meets BC at E then ∠ABC + ∠ACD = 2 ∠AEC.**
ΔABC में भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है और ∠A का समद्विभाजक भुजा BC से बिन्दु E पर मिलता है, तो ∠ABC + ∠ACD = 2 ∠AEC

5. **The angle between perpendicular drawn by a vertex to opposite side and angle bisector of the vertex angle is half of difference between other two remaining vertex angles.**
शीर्ष से विपरीत भुजा पर डाले गए लम्ब और शीर्ष कोण के समद्विभाजक के बीच का कोण शेष दो शीर्ष कोणों के अंतर का आधा होता है।

AD ⊥ BC and AE is angle bisector of ∠A

Then $\angle DAE = \left|\frac{\angle B - \angle C}{2}\right|$

6. (i) **Sum of any two sides of a triangle is always greater than the third side, *i.e.***
किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा से हमेशा बड़ा होता है। अर्थात्
$a + b > c$
$b + c > a$
$c + a > b$

(ii) **Difference of any two sides of a triangle is always smaller than the third side.**
किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से हमेशा छोटा होता है। अर्थात्
$|a - b| < c$
$|b - c| < a$
$|c - a| < b$

7. (i) **Angles opposite to the equal sides of a triangle are equal.**
किसी त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।

(ii) **The angle opposite to the greater side is always greater than the angle opposite to the smaller side.**
बड़ी भुजा के विपरीत का कोण हमेशा छोटी भुजा के विपरीत कोण से बड़ा होता है।

Maths by Aditya Ranjan Sir

8.

(a) **Sine Rule : Ratio of side and sine of opposite angle of a triangle is equal to double of circum radius.**

ज्या का नियम : किसी त्रिभुज में भुजा और उसके विपरीत कोण की ज्या का अनुपात त्रिभुज की बाह्य त्रिज्या के दोगुने के बराबर होता है।

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(b) **Cosine Rule : If two sides and angle between sides are given, then we can find the opposite side by Cosine Rule.**

को-ज्या का नियम : यदि दो भुजा और भुजाओं के बीच का कोण दिया हो, तो को-ज्या के नियम से हम विपरीत भुजा ज्ञात कर सकते हैं।

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

9. **Area of Triangle**

(a) **Area of triangle ABC = $\frac{1}{2}$ × base × height**

त्रिभुज **ABC** का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

Note : **To calculate area of ΔABC, we take any of the side as base and the perpendicular from the vertex to the base is called the height. In triangle ABC,**

नोट : त्रिभुज **ABC** की गणना के लिए हम किसी भी भुजा को आधार और शीर्ष से आधार पर डाले गए लम्ब को ऊँचाई मानते हैं। त्रिभुज **ABC** में,

AD ⊥ BC, BE ⊥ AC and CF ⊥ AB.

Area of ΔABC = $\frac{1}{2}$ × BC × AD = $\frac{1}{2}$ × BE × AC

= $\frac{1}{2}$ × CF × AB

(i) **If the heights of the two triangles is same, the ratio of their area is proportional to the ratio of their base.**

यदि दो त्रिभुजों की ऊचाइयाँ समान हो, तो इनके क्षेत्रफल का अनुपात, इनके आधार के अनुपात के समानुपाती होता है।

If AD = PS, then

Ar (ΔABC) : Ar (ΔPQR) = BC : QR

(ii) **If the base of the two triangles is the same, the ratio of their areas is proportional to the ratio of their heights.**

यदि दो त्रिभुजों के आधार समान हो, तो इनके क्षेत्रफल का अनुपात, इनकी ऊँचाइयों के अनुपात के समानुपाती होता है।

If BC = QR, then

Ar (ΔABC) : Ar (ΔPQR) = AD : PS

(b) **Area of ΔABC = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,**

where s = semi-perimeter and a, b, c are the lengths of the sides of the triangle.

ΔABC का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जहाँ **s** = अर्द्ध परिमाप और **a, b, c** त्रिभुज के भुजाओं की लंबाइयाँ हैं।

(c) **Area of ΔABC/** त्रिभुज **ABC** का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

Maths by Aditya Ranjan sir

Centres of triangle/त्रिभुज के केन्द्र

1. Angle bisector/कोण समद्विभाजक

➢ If line AD is such that ∠BAD = ∠CAD, then AD is the interior bisector of the angle A.
यदि रेखा AD इस प्रकार है कि ∠BAD = ∠CAD, तो AD आंतरिक कोण A का द्विभाजक कहलाती है।

(a) Internal Angle bisector theorem
आंतरिक कोण समद्विभाजक प्रमेय

The Internal bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally in the ratio of the sides containing the angle, i.e.
किसी त्रिभुज के किसी कोण का आंतरिक समद्विभाजक विपरीत भुजा को कोण को बनाने वाली दोनों भुजाओं के अनुपात में अंत:विभाजित करता है।

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

Note:-

(i)

AD = angle bisector of ∠A.
$AD^2 = ab - xy$.

(ii)

$$AD = \frac{2ab\cos\theta}{a+b}$$

(b) External Angle bisector theorem
वाह्य कोण समद्विभाजक प्रमेय

The external bisector of an angle of a triangle divides the opposite side externally in the ratio of the sides containing the angle.
किसी त्रिभुज के किसी कोण का वाह्य समद्विभाजक विपरीत भुजा को कोण को बनाने वाली दोनों भुजाओं के अनुपात में वाह्यत: विभाजित करता है।

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

1. Incentre/अन्त:केन्द्र

(a) The point of intersection of the internal bisector of the angles of a triangle is called the incentre.
अन्त:केन्द्र : त्रिभुज की आंतरिक समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु अंत:केन्द्र कहलाता है।

$$\angle BIC = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle A}{2} \text{ or } 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle AIC = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle B}{2} \text{ or } 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$$

$$\angle AIB = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle C}{2} \text{ or } 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$$

(b) Incentre divides each angle bisector in the ratio of length of sum of two adjacent side and opposite side.
अंत:केन्द्र प्रत्येक कोण समद्विभाजक को दो संगत भुजाओं और विपरीत भुजा के अनुपात में विभाजित करता है।

Here, AD, BE and CF are angle bisectors of ∠A, ∠B and ∠C respectively.
यहाँ AD, BE और CF क्रमश: ∠A, ∠B और ∠C के समद्विभाजक हैं।

AI : ID = $b + c : a$
BI : IE = $a + c : b$
CI : IF = $a + b : c$

Maths by Aditya Ranjan sir

(c) Inradius/अंत:त्रिज्या

(i) Inradius of a triangle/ त्रिभुज की अंत:त्रिज्या

$$= \frac{\Delta}{s} = \frac{\text{Area / क्षेत्रफल}}{\text{Semi - perimeter / अर्द्ध - परिमाप}}$$

(ii) Inradius of a right-angled triangle

समकोण त्रिभुज की अंत:त्रिज्या

$$= \frac{p+b-h}{2}$$

(iii) Inradius of an equilateral triangle

समबाहु त्रिभुज की अंत:त्रिज्या

$$= \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\text{side}}{2\sqrt{3}}$$

(iv) If triangle is not right angled then find out inradius by following relation

यदि त्रिभुज समकोण नहीं है तो अंत:त्रिज्या निम्न संबंध से निकालते हैं।

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

2. Circumcentre/परिकेन्द्र

The point of intersection of the perpdndicular bisectors of the sides of a triangle is called the circumcentre.

किसी त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु को परिकेन्द्र कहते हैं।

OD ⊥ AB and AD = BD
OE ⊥ BC and BE = EC
OF ⊥ AC and CF = FA

(a) If O be the circumcentre, then

यदि **O** परिकेन्द्र हो, तो

- **In acute-angled triangle ABC,**
  न्यूनकोण त्रिभुज **ABC** में

∠BOC = 2∠A, ∠COA = 2∠B & ∠AOB = 2∠C

- **In a right-angled triangle, ABC,**
  समकोण त्रिभुज **ABC** में

∠BOC = 2∠A = 180°
∠COA = 2∠B = 180° – 2∠C
∠AOB = 2∠C = 180° – 2∠B

- **In an obtuse-angled triangle ABC,**
  अधिककोण त्रिभुज **ABC** में,

∠BOC = 2(180° – ∠A)
∠COA = 2∠B & ∠BOA = 2∠C

(b)

- **In a acute triangle, the circumcentre is always inside the triangle.**
  किसी न्यूनकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के अंदर होता है।

- **In a right-angled triangle, the circumcentre is mid-point of the hypotenuse.**
  किसी समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र हमेशा कर्ण का मध्य बिन्दु होता है।

Maths by Aditya Ranjan sir

- In an obtuse-angled triangle, the circumcentre is always outside the triangle and will be at the front of the angle which is obtuse.
  किसी अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के बाहर और अधिक कोण के सामने होता है।

(c) **Circumradius/परित्रिज्या**

The radius of the circumcircle of a triangle is called the circumradius. It is denoted by R.
किसी त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या, परित्रिज्या कहलाती है। इसे R द्वारा निरूपति किया जाता है।

- The circumradius of any triangle ABC
  किसी भी त्रिभुज ABC की परित्रिज्या

$$= \frac{\text{Multiplication of all three sides}}{4 \times \text{Area of the triangle}} = \frac{abc}{4\Delta}$$

- The circumradius of a right-angled triangle
  समकोण त्रिभुज की परित्रिज्या

$$= \frac{\text{Hypotenuse}}{2} = \frac{h}{2}$$

- The circumradius of an equilateral triangle
  समबाहु त्रिभुज की परित्रिज्या

$$= \frac{\text{Side}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

- $2(r + R) = a + b$

  Where a and b are the base and perpendicular of right angle triangle.

  जहाँ a तथा b समकोण त्रिभुज के आधार तथा लम्ब हैं।

- Note : Distance between circum-centre and incentre in any triangle is $\sqrt{R^2 - 2Rr}$.

  किसी भी त्रिभुज में परिकेन्द्र तथा अंत:केन्द्र के बीच की दूरी = $\sqrt{R^2 - 2Rr}$

  Where, R = circum-radius/परित्रिज्या

  r = inradius/अंत:त्रिज्या

3. Excentre/बहिकेन्द्र

The intersection point of internal angle bisector of one angle and bisectors of other two opposite exterior angles. एक कोण के आन्तरिक समद्विभाजक तथा अन्य दो बाह्य विपरीत कोणों के समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु को बहिकेन्द्र कहते हैं।

(a) $\angle BEC = 90° - \frac{\angle A}{2}$

(b) ex-radii:

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a}; r_b = \frac{\Delta}{s-b}; r_c = \frac{\Delta}{s-c}$$

(c) $r_a = \frac{rs}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

where, $S = \frac{a+b+c}{2}$

(d) $\Delta(\text{area}) = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}$

(e) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

(f) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = S^2$

(g) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2S^2$

Maths by Aditya Ranjan sir

4. Centroid/केन्द्रक

The polint of intersection of the medians of the triangle is called the centroid. It is denoted by G.

किसी त्रिभुज की माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु केन्द्रक कहलाता है। इसे G द्वारा निरूपित करते हैं।

(a) Apollonius Theorem/अपोलोनियस प्रमेय

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$ OR

Length of median AD

$= \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}$

(b) If AD, BE and CF are medians of ΔABC and G is the centroid, then

यदि AD, BE और CF, ΔABC की माध्यिका है और G केन्द्रक हो, तो

$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$

(c) The sum of any two sides of a triangle is greater than twice the median drawn to the third side.

त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा पर खींची गई माध्यिका के दोगुने से अधिक होता है।

$AB + AC > 2AD$ ...(1)

$AB + BC > 2BE$ ...(2)

$AC + BC > 2CF$ ...(3)

Adding (1), (2) and (3)

$2(AB + AC + BC) > 2(AD + AE + CF)$

$AB + AC + BC > AD + BE + CF$

Sum of sides (perimeter) ia slways greater than sum of all median.

भुजाओं का योगफल (परिमाप) हमेशा माध्यिकाओं के योगफल से अधिक होता है।

(d) $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

(e)

If ΔABC is RAT

AD & CE are medians

$4(AD^2 + CE^2) = 5AC^2$

$AD^2 + CE^2 = 5ED^2$

$AD^2 + CE^2 = AC^2 + ED^2$

(f)

BE & CD are medians

If medians are ⊥r. (BE ⊥ CD) then,

$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

or, $b^2 + c^2 = 5a^2$

AO = BC = a.

(g) $AB^2 + PC^2 = AC^2 + BP^2$

$AP^2 + MC^2 = AC^2 + MP^2$

(h) If the area of ΔABC = x, AD, BE and CF are three medians and G is centroid, then

यदि ΔABC का क्षेत्रफल = x हो, AD, BE और CF तीन माध्यिकाएँ और G केन्द्रक हो, तो

Aditya Ranjan Maths by

(i) Area of triangle formed by joining mid points of two sides and centroid is $\frac{1}{12}$th of area of triangle.

दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं और केन्द्रक को मिलाने से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल मूल त्रिभुज के क्षेत्रफल का $\frac{1}{12}$ भाग होता है।

Ar ΔOFE = Ar ΔOFD = Ar ΔOED = $\frac{1}{12}$ Ar ΔABC

ΔOFE ~ ΔOCB

(According to Mid point theorem FE || BC so that $\angle$EFO = $\angle$OCB, $\angle$OEF = $\angle$OBC)

(j) The line segment joining the mid points of two sides divides the line joining of vertex in between line to the centroid in the ratio 3 : 1.

दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड भुजाओं के मध्य के शीर्ष को केन्द्रक से मिलाने वाली रेखा को 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

AG : GO = BH : HO = CI : IO = 3 : 1

Note:

G is the Mid point of AD and FE

G भुजा AD और FE का मध्य बिन्दु है।

(k) If three medians of a triangle are given then

यदि किसी त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ दी गई हों, तो

Area of Δ = $\frac{4}{3}$ (Area of triangle considering medians as side)

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{4}{3}$ (माध्यिकाओं को भुजा मानते हुए त्रिभुज का क्षेत्रफल)

5. Orthocentre/लम्बकेन्द्र

Point of intersections of the altitudes of a triangle is called the orthocentre of the triangle. It is gener ally denoted by H.

किसी त्रिभुज के शीर्ष लम्बों के प्रतिच्छेद बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहते हैं। इसे सामान्यतः H से निरूपित किया जाता है।

All the three altitudes of a triangle pass through a point (orthocentre)

किसी त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्ब एक ही बिन्दु (लम्ब केन्द्र) से होकर गुजरते हैं।

(a) • In an acute-angled triangle the orthocentre is always inside the triangle.

किसी न्यूनकोण त्रिभुज में लम्ब केन्द्र हमेशा त्रिभुज के भीतर होता है।

• In a right-angled triangle the orthocentre is on the vertex of the triangle at which triangle is the right-angled.

किसी समकोण त्रिभुज में लम्ब केन्द्र समकोण बनाने वाले त्रिभुज के शीर्ष पर स्थित होता है।

• In an obtuse-angled triangle the orthocentre is always outside of the triangle and will be at the back of the angle which is obtuse.

अधिककोण त्रिभुज में लम्ब केन्द्र हमेशा त्रिभुज के बाहर और अधिक कोण के पीछे की ओर होता है।

Maths by Aditya Ranjan sir

(b) • $\angle BHC = 180° - \angle A$
$\angle CHA = 180° - \angle B$
$\angle AHB = 180° - \angle C$

It is true for all types of triangle.

यह सभी प्रकार के त्रिभुजों के लिए सत्य है।

• $\angle BHD = \angle C$ and $\angle CHD = \angle B$
$\angle CHE = \angle A$ and $\angle AHE = \angle C$
$\angle AHF = \angle B$ and $\angle BHF = \angle A$

• (i) $\Delta BFH \sim \Delta CEH$

$BH \times HE = CH \times HF$

ALSO,

$BH \times HE = CH \times HF = AH \times HD$

(ii) $BD \times DC = AD \times DH$

$BE \times EH = CE \times EA$

$CF \times FH = AF \times FB$

(iii) $(AB + BC + CA) > (AD + CF + BE)$

$\sum$ sides > $\sum$ Altitudes

Note:

Relation between Orthocenter, centroid and circumcenter/लम्ब केन्द्र, केन्द्रक और परिकेन्द्र के बीच संबंध

In any triangle, orthocenter, centroid and circumcenter are co-linear and centroid divides the line in 2:1 as in figure/किसी भी त्रिभुज में लम्ब केन्द्र, केन्द्रक और परिकेन्द्र सरेखीय होते है तथा केन्द्रक रेखा को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

Congruence & Similarity in Triangle/ त्रिभुज में सर्वांगसमता और समरूपता

CONGRUENCE/सर्वांगसमता

- Symbol (≅)
- Same Shape.
- Conditions: SSS, SAS, ASA, AAS, RHS

SIMILARITY/समरूपता

- Symbol (~)
- Shapes and sizes are both the same.
- Conditions: AA, SSS, SAS

(A) Properties of Similar triangles/समरूप त्रिभुज के गुण

If ΔABC and ΔPQR are similar, then

यदि ΔABC और ΔPQR समरूप हों, तो

(i) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

(ii) Ratio of corresponding sides

संगत भुजाओं का अनुपात

= Ratio of perimeter/परिमाप का अनुपात

= Ratio of semi-perimeter(s)/अर्द्ध-परिमाप का अनुपात

= Ratio of corresponding medians/संगत माध्यिकाओं का अनुपात

= Ratio of inradius/अन्तःत्रिज्या का अनुपात

= Ratio of circumradius/बाह्य त्रिज्या का अनुपात

(iii) Ratio of area = (Ratio of corresponding sides)^2

क्षेत्रफल का अनुपात = (संगत भुजाओं का अनुपात)^2

Maths by Aditya Ranjan sir

(B) In a right-angled triangle ABC, if a perpendicular (CD) is drawn from the vertex which is right angle (C) to the hypotenuse (AB), then

किसी समकोण त्रिभुज ABC में, यदि शीर्ष (C) जो कि समकोण है, से कर्ण (AB) पर लम्ब (CD) डाला जाता है, तो

(i) (a) $a^2 = x \times c$

(b) $b^2 = y \times c$

(ii) $p^2 = x \times y$

(iii) $a \times b = p \times c$

(iv) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

In other words,/दूसरे शब्दों में,

(i) (a) $BC^2 = BD \times AB$

(b) $AC^2 = AD \times AB$

(ii) $CD^2 = BD \times AD$

(iii) $BC \times AC = CD \times AB$

(iv) $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AC^2}$

(C) Basic Proportionality Theorem (Thales Theorem)/आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय)

(a) A line drawn parallel to one side of a triangle divides other two sides in the same ratio.

किसी त्रिभुज के एक भुजा के समांतर खींची गई कोई रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

(b) If a line divides any two sides of a triangle in the same ratio, the line must be parallel to the third side.

यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होनी चाहिए।

In ΔABC,

(c) If DE || BC, then $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

(d) or if $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, then DE || BC

(e) Some of the results desired from this theorem, we will use, are as follows :

इस प्रमेय से निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं, जिन्हें हम प्रयोग करते हैं :

(i) $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$

(ii) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

(iii) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

(iv) $\frac{Ar(\Delta ADE)}{Ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

(D) Mid-Point Theorem/मध्यबिन्दु प्रमेय

(a) (i) The line segment joining the mid-points of any two sides of a triangle is parallel to the third side and is half of the third side.

किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर और तीसरी भुजा का आधा होता है।

(ii) A line drawn parallel to the one side of a triangle and the length of the line is half of that of the side, the line will pass through the mid-points of the other two sides.

किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई कोई रेखा और रेखा की लंबाई भुजा से आधी हो तो रेखा अन्य दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से होकर गुजरेगी।

(b) If D and E are mid-points of AB and AC, respectively, then

यदि D और E क्रमशः रेखा AB और AC के मध्य बिन्दु हों, तो

DE || BC and DE = $\frac{BC}{2}$

(c) DE || BC and DE = $\frac{BC}{2}$, then D and E are the mid-points of AB and AC respectively. In this case

यदि DE || BC और DE = $\frac{BC}{2}$, तो D और E क्रमशः AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। इस स्थिति में

Maths by Aditya Ranjan sir

(i) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$

(iii) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

(iv) $\frac{Ar(\Delta ADE)}{Ar(\Delta ABC)} = \frac{1}{4}$

☞ **In Acute angled triangle/न्यूनकोण त्रिभुज में**

The sum of the squares of any two sides of the triangle is greater than the square of the third side.

त्रिभुज के दो भुजाओं के वर्गों का योगफल तीसरी भुजा के वर्ग से अधिक होता है।

(a) $AB^2 + BC^2 > AC^2$

(b) $BC^2 + AC^2 > AB^2$

(c) $AC^2 + AB^2 > BC^2$

☞ **In Right Angled Triangle/समकोण त्रिभुज में**

Pythagoras Theorem : In a right triangle, the square of the hypotenuse is equal to the sum of the square of the other two sides.

पायथागोरस प्रमेय : किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

If a, b and c be three sides of a right-angled triangle, then according to the Pythagoras Theorem,

यदि a, b और c किसी समकोण त्रिभुज की तीन भुजाएँ हों, तो पायथागोरस प्रमेय के अनुसार

$a^2 + b^2 = c^2$

Pythagorean Triplets : A set of three integers a, b, c which satisfy Pythagoras Theorem ($a^2 + b^2 = c^2$) or are the sides of aright-angled triangle is called Pythagorean triplets.

पायथागोरियन ट्रिपलेट : तीन पूर्णांकों a, b और c का समूह जो पायथागोरस प्रमेय ($a^2 + b^2 = c^2$) को संतुष्ट करे या किसी समकोण त्रिभुज की भुजा हो, पायथागोरियन ट्रिपलेट कहलाता है।

The smallest Pythagorean triplet is (3, 4, 5).

सबसे छोटी पायथागोरियन ट्रिपलेट (3, 4, 5) है।

If (a, b, c) be a Pythagorean triplets, then (ak, bk, ck) or $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ will also be the Pythagorean triplet.

यदि (a, b, c) पायथागोरियन ट्रिपलेट हो, तो (ak, bk, ck) या $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ भी पायथागोरियन ट्रिपलेट होंगे।

Following Pythagorean triplets are frequently used in the examinations.

निम्न पायथागोरियन ट्रिपलेट परीक्षाओं में बहुतायत पूछे जाते हैं।

- (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), (15, 20, 25)
- (5, 12, 13), (10, 24, 26)
- (7, 24, 25), (14, 48, 50), (3.5, 12, 12.5), (21, 72, 75)
- (8, 15, 17) • (9, 40, 41)
- (11, 60, 61)
- $(1, 1, \sqrt{2})$ • $(1, \sqrt{3}, 2)$
- $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$
- $\left(\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}, n\right)$
- $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$

☞ **In Obtuse angled triangle/अधिक कोण त्रिभुज में**

The sum of the square of two smaller sides is less than the square of the third side (the largest side).

दो छोटी भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा (सबसे बड़ी भुजा) के वर्ग से कम होता है।

$AB^2 + BC^2 < AC^2$

Scalene Triangle/विषमबाहु त्रिभुज

Perimeter, Semi-perimeter and Area of scalene triangle

विषमबाहु त्रिभुज का परिमाप, अर्द्ध-परिमाप और क्षेत्रफल

Perimeter/परिमाप = $a + b + c$

Semi-perimeter/अर्द्ध-परिमाप (s) = $\frac{a+b+c}{2}$

Area of ΔABC/त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Maths by Aditya Ranjan sir

Isoceles Triangle/समद्विबाहु त्रिभुज

Perimeter, semi-perimeter and Area

परिमाप, अर्द्ध-परिमाप और क्षेत्रफल

Perimeter/परिमाप = AB + BC + CA = 2a + b.

Semi perimeter/अर्द्ध-परिमाप

$$s = \frac{AB + BC + CA}{2} = a + \frac{b}{2}$$

$$AD = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

Area of ΔABC/ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

$$= \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Sin}\alpha$$

- **ABC is an isosceles triangle (AB = AC) If P is a point on the side BC and DP || AC & EP || AB then,**
  DP + EP = AB = AC

Equilateral Triangle/समबाहु त्रिभुज

- **Area of an Equilateral Triangle / समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल** $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
- **Height of an Equilateral Triangle / समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई** $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$
- **If P is a point inside an equilateral triangle ABC, the sum of altitudes from the point P to the sides** AB, BC and AC equal to the median of the **ΔABC.**
  यदि किसी समबाहु त्रिभुज ABC के अंदर P कोई बिन्दु है तो P से भुजा AB, BC और AC पर डाले गए लम्बों का योगफल ΔABC की माध्यिका के बराबर होता है।

Let the altitudes from point P to side BC, AC and AB be h_1, h_2 and h_3 respectively and the side of the triangle be a, then
माना बिन्दु P से भुजाओं BC, AC और AB पर डाले गए लंब क्रमशः h_1, h_2 और h_3 हैं तथा त्रिभुज की भुजा a है, तो

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \text{Height of equilateral Tirangle}$$

- **If P is a point inside the triangle and PF || AB, PD || AC, PE || CB. then,**
  PD + PE + PF = AB = BC = CA.

Maths by Aditya Ranjan sir

CIRCLE/वृत्त

1. **Equal chords of a circle subtend equal angle at the centre.**

   वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण बनाती हैं।

   If AB = CD, then ∠AOB = ∠COD

2. **The angles subtended by the chords of a circle at the centre are equal, then the chords are equal.**

   यदि जीवाओं द्वारा केन्द्र पर बनाए गए कोण बराबर हो तो जीवाओं की लंबाई भी बराबर होती है।

   If ∠AOB = ∠COD, then AB = CD

3. **Equal chords of two equal circles subtend equal angles at their centres.**

   दो बराबर वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्र पर बराबर कोण बनाती हैं।

   If C_1 and C_2 are equal circles and AB = PQ, then $\angle AO_1B = \angle PO_2Q$.

4. **The angles subtended by the chords of equal circles at their centres are equal, then the chords are equal.**

   यदि दो समान वृत्तों की जीवाओं द्वारा उनके केन्द्र पर बनाए गए कोण बराबर हों तो जीवाएँ बराबर होती है।

   If C_1 and C_2 are equal circles and $\angle AO_1B = \angle PO_2Q$, then AB = PQ.

5. **Equal chords of a circle are equidistance from centre. If AB = PQ, then OL = OM**

   किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होते हैं। यदि **AB = PQ** हो, तो **OL = OM**

6. **If two chords are equidistant from the centre, the chords are equal.**

   यदि दो जीवा केन्द्र से बराबर दूरी पर हो तो जीवा की लंबाई समान होती है।

   If OL = OM, then AB = PQ

7. **A perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chord.**

   वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

   If OL ⊥ AB, then AL = LB.

Maths by Aditya Ranjan sir

8. If OL ⊥ AB, then AL = LB and ΔOLB is a right-angled triangle, i.e. $OL^2 + LB^2 = OB^2$

यदि OL ⊥ AB है, तो AL = LB और ΔOLB एक समकोण त्रिभुज है, अर्थात् $OL^2 + LB^2 = OB^2$

9. The angle subtended by an arc of a circle at the centre is double the angle sutended on it at any point on the remaining part of the circle on the same side in which the centre lies.

किसी वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण वृत्त के उसी ओर शेष भाग में किसी बिन्दु पर बनाए गए कोण का दोगुना होता है।

If ∠APB = θ, then ∠AOB = 2θ.

❖ ∠ACB + ∠OAB
= ∠ACB + ∠OBA = 90°
x + θ = 90°

10. The angle in the same segment of a circle are equal i.e.

किसी वृत्त के एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

∠APB = ∠AQB = ∠ARB

11. (a) If AB is a chord, O is the centre and P and Q are any points in the major and the minor segments of the circle respectively, then

यदि AB जीवा, O केन्द्र और P तथा Q क्रमशः दीर्घ वृत्तखंड और लघु वृत्तखंड में दो बिन्दु हैं, तो

If ∠APB = θ, then

∠AOB = 2θ and ∠AQB = π − θ.

(b) The angles in the major segment and the minor segment are supplementary.

दीर्घ वृत्तखंड और लघु वृत्तखंड में कोण अनुपूरक होते हैं।

12. The angle of a semicircle is a right angle.

अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।

If AB bs a diameter and P any point on the circumference, then

यदि AB व्यास और P परिधि पर कोई बिन्दु हो तो

∠APB = 90°

13. The tangent at any point on a circle is perpendicular to the radius drawn through the point of contact.

वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर खींची गई त्रिज्या पर लम्ब होती है।

If the $\overleftrightarrow{lm}$ is a tangent, O is the centre and P is the point of contact, then OP ⊥ *lm*.

यदि $\overleftrightarrow{lm}$ एक स्पर्श रेखा है, O केन्द्र है और P स्पर्श बिन्दु है, तो OP ⊥ *lm*.

14.

∠θ = 180 − 2α

Maths by Aditya Ranjan sir

15. Two tangent PA and PB are drawn from an external point P on a circle, whose centre is O, then

O केन्द्र वाले किसी वृत्त में वाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB खींची गई है।

(a) $\Delta PAO \cong \Delta PBO$
(b) PA = PB
(c) $\angle PAO = \angle PBO = 90°$
(d) $\angle APO = \angle BPO$

16. PA and PB are two tangents, O is the center of the circle and R and S are the points on the circle, then

O केन्द्र वाले किसी वृत्त में वाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB खींची गई है और R तथा S वृत्त पर दो बिन्दु हैं :

Let APB = 2θ, then
$\angle AOB = 180° - 2\theta$
$\angle ARB = 90° - \theta$
$\angle ASB = 90° + \theta$
$\angle AOB = 2\angle MON$

17. If a quadrilateral ABCD circumscribe a circle then

यदि चतुर्भुज ABCD के अंदर एक वृत्त बना हो, तो

AB + CD = BC + AD

18. A cricle externally touch side BC of a ΔABC at P, AB produced at Q and AC produced at R. If AQ = a cm, then what is perimeter of ΔABC?

एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को बाहृत: बिन्दु P, AB को बढ़ाने पर बिन्दु Q तथा AC को बढ़ाने पर बिन्दु R पर स्पर्श करता है यदि AQ = a सेमी हो तो ΔABC का परिमाप ज्ञात कीजिए।

Perimeter=2×AQ=2a

19. A chord is drawn through the point of contact of a tangent, then the angles which the chord makes with the tangent is equal to the angle made by that chord in the alternate segment.

स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से होकर एक जीवा खींची गई है तो जीवा द्वारा स्पर्श रेखा पर बनाया गया कोण जीवा द्वारा एकांतर खंड में बने कोण के बराबर होता है।

Let $\angle MPQ = \theta$, then
$\angle PRQ = \theta$
and let $\angle lPR = \alpha$, then $\angle PQR = \alpha$

20. PA × PB = PC × PD

21. If PC be a tangent, then

यदि PC स्पर्श रेखा हो, तो

$PA \times PB = PC^2$

22.

PA × PB = PC × PD

$$r = \sqrt{\frac{AP^2 + PD^2 + CP^2 + BP^2}{2}}$$

If $\angle APD = 90°$

$$r = \sqrt{\frac{BC^2 + AD^2}{2}}$$

Aditya Ranjan Maths by sir

23. If radius = r and O is the centre of a circle

यदि r त्रिज्या और O वृत्त का केन्द्र हो, तो

(a) Diameter/व्यास (AB) = $2r$

(b) Circumference/परिधि = $2\pi r$

(c) Area/क्षेत्रफल = πr^2

24. Semi-circle/अर्द्धवृत्त

(a) Diameter/व्यास = $2r$

(b) Perimeter/परिमाप = $r(2 + \pi)$

(c) Area/क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{2}$

25. Sector/वृत्तखंड (If ∠AOB = θ)

(a) Perimeter/परिमाप = $r(2 + \theta)$

(b) Area/क्षेत्रफल = $\pi r^2 \times \left(\frac{\theta}{360°}\right)$

(c) Minor segment/लघु त्रिज्यखंड (If ∠AOB = θ)

(d) Area (Shaded part)/छायांकित भाग का क्षेत्रफल =

$$\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\theta}{180°} - \sin\theta\right)$$

26. Length of the common tangent :

उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई

(a) When two circles of radii R and r are separated such that the distance between their centres is d, then

जब R तथा r त्रिज्या के दो वृत्त उनके केन्द्रों के बीच की दूरी d द्वारा अलग किये गये हों, तो

Length of the Direct common tangent /अनुस्पर्श उभयनिष्ठ रेखा की लंबाई

$= \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$

Length of the Transverse common tangent/अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ रेखा की लंबाई

$= \sqrt{d^2 - (R + r)^2}$

(b) When two circles of radii R and r touch each other externally, then

जब R तथा r त्रिज्या के दो वृत्त एक-दूसरे को वाह्यतः स्पर्श करते हों, तो

Distance between the centre = $R + r$

केन्द्रों के बीच की दूरी

Length of the direct common tangent/

अनुस्पर्श उभयनिष्ठ रेखा की लंबाई

$= 2\sqrt{Rr}$

Note : In all of the above cases if $R = r$, then length of the direct common tangent = d = distance between the center.

नोट : उपर्युक्त सभी दशाओं में यदि $R = r$ हो, तो अनुस्पर्श उभयनिष्ठ रेखा की लंबाई = d = केन्द्रों के बीच की दूरी।

Maths by Aditya Ranjan sir

27. Common Chord/उभयनिष्ठ जीवा

(a) Two circles of radii R and r intersects and AB is the common chord, then

R तथा r त्रिज्या के दो वृत्त एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करते हों तथा AB उनकी उभयनिष्ठ जीवा हो, तो

O and P are the centers AB is common chord,

O तथा P केन्द्र और AB उभयनिष्ठ जीवा है

$$AQ = BQ = \frac{AB}{2}$$

$$OP = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB^2}{2}\right)} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{AB^2}{2}\right)}$$

$\angle AQO = \angle AQP = 90°$

(b) When/जब $\angle OAP = 90°$ i.e.

The tangent of a circle at point A or B pass through the centre of the other circle.

बिन्दु A अथवा B पर वृत्त की स्पर्श रेखा दूसरे वृत्त के केन्द्र से होकर जाएगी

$$OP = \sqrt{R^2 + r^2}$$

$$OQ = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

$$QP = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

$$AB = \frac{2Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}} \text{ or}$$

$$AB = \frac{2Rr}{OP}$$

(c) When radii of both the circles are equal, then $R = r$.

जब दोनों वृत्त की त्रिज्या समान हो, तो $R = r$

$$OP = \sqrt{4R^2 - AB^2}$$

$$OQ = PQ = \frac{OP}{2}$$

(d) When radii of both the circles are equal and the both the circles pass through the centres of the other circle, *i.e.* $R = r$

जब दो वृत्तों की त्रिज्या बराबर हो तथा दोनों वृत्त एक-दूसरे के केन्द्र से होकर गुजरते हों अर्थात् $R = r$

ΔOPA is an equilateral triangle.

ΔOPA एक समबाहु त्रिभुज है।

$OP = r$, $AB = \sqrt{3}r$

$\therefore$ OBPA is a rhombus.

28. Cyclic Quadrilateral/चक्रीय चतुर्भुज

If all the four vertices of a quadrilateral lie on the circumference of a circle, then the quadrilateral is called a cyclic quadrilateral.

यदि किसी चतुर्भुज की चारों शीर्ष किसी वृत्त की परिधि पर स्थित हों तो चतुर्भुज, चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।

Maths by Aditya Ranjan sir

★ **Properties of a Cyclic Quadrilateral** ★

चक्रीय चतुर्भुज की विशेषताएँ

If ABCD is a cyclic quadrilateral, then

यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज हो, तो

(i) The sum of the opposite angles is 180°.

विपरीत कोणों का योगफल 180° होता है।

$\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

(ii) Exterior angle at a vertex = opposite interior angle. If BC is extended to E, then $\angle A = \angle DCE$.

किसी शीर्ष का वाह्य कोण = विपरीत अंतः कोण। यदि BC को E तक बढ़ाया जाए तो $\angle A = \angle DCE$

(iii) Ptolemy's Theorem : If ABCD is a cyclic quadrilateral, then

टॉल्मी का प्रमेय : यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, तो

$AB \times DC + BC \times AD = AC \times BD$

(iv)

If one diagonal of cyclic quadrilateral bisects other diagonal then

यदि चक्रीय चतुर्भुज का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करे तो

$AB \times BC = CD \times AD$

(v) If the sides of a cyclic quadrilateral is *a, b, c* and *d*, then

यदि चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ *a, b, c* तथा *d* हों तो,

Area of the cyclic quadrilateral

चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$\text{where } s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

29. If circles are concentric/

यदि वृत्त सकेन्द्रीय हों

Lenght of AB = 2AC = $2\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$

30. ABC is an isosceles triangle with AB = AC . A circle through B touching AC at the middle point and intersect AB at P. Then AP : AB ?.

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। एक वृत्त जो B से होकर गुजरता है। और AC को मध्य बिन्दु पर स्पर्श तथा AB को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करता है तो AP : AB ?

$AQ^2 = AB \times AP$

$1 = 2 \times AP \Rightarrow AP = \frac{1}{2}$

$\frac{AP}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

Aditya Ranjan Maths by sir

31. Two parellel chords are drawn in a circle of diameter 30 cm. The lengths of one chord is 24 cm and the distance between the two chords is 21 cm. the length of the other chord is

30 सेमी व्यास वाले एक वृत्त में दो समानांतर जीवाएँ खींची जाती हैं। एक जीवा की लम्बाई 24 सेमी तथा दोनों जीवाओं के बीच की दूरी 21 सेमी है। दूसरी जीवा की लंबाई है

$OE = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9\,cm$

$OF = 21 - 9 = 12\,cm$

$CF = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9\,cm$

$CD = 2 \times 9 = 8\ cm$

32. In a circle of radius 17 cm, two parellel chords of length 30 cm and 16 cm are drawn. If both the chords are on the same side of the centre, then the distance between the chords is:

17 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त में 30 सेमी और 16 सेमी लंबाई की दो समानांतर जीवाएँ खींची जाती हैं। यदि दोनों जीवाएँ केंद्र के एक ही ओर हों, तो जीवाओं के बीच की दूरी है:

$OE = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8\,cm$ &

$OF = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15\,cm$

$EF = OF - OE = 15 - 8 = 7cm$

33. Two chords AB and CD of a circle with centre O, intersect each other at P. If ∠AOD = x°. and ∠BOC = y°. Then the value of ∠APC is:

O केंद्र वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को P पर काटती हैं। यदि ∠AOD = x° और ∠BOC = y° है तब ∠APC का मान है:

$\angle APC = 180° - \frac{(x+y)}{2}$

34. Two chords AB and CD of a circle with centre O, intersect each other at P. If ∠AOC = x° and ∠BOD = y°. Then the value of ∠BPD is:

O केंद्र वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को P पर काटती हैं। यदि ∠AOC = x° और ∠BOD = y° है तब ∠BPD का मान है:

$\angle BPD = \frac{(x+y)}{2}$

35 Chords are intersecting at an external point.

जीवाएं एक बाहरी बिंदु पर प्रतिच्छेद कर रही हैं।

$\angle BPD = \frac{(x-y)}{2}$

Maths by Aditya Ranjan sir

36. I and O are respectively the incentre and circumcentre of a triangle ABC. The line AI produced intersects the circumcircle of triangle ABC at the point D. If angle $\angle ABC = x^\circ, \angle BID = y^\circ$ & $\angle BOD = z^\circ$ then find the value of $\frac{x+z}{y}$?

I और O क्रमशः त्रिभुज ABC के अंतःकेंद्र और परिकेन्द्र हैं। बड़ी रेखा AI त्रिभुज के परिवृत्त को बिंदु D पर प्रतिच्छेद करती है। यदि $\angle ABC = x^\circ$ $\angle BID = y^\circ$ & $\angle BOD = z^\circ$ है तो $\frac{x+z}{y}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$\angle BAD = \frac{z}{2}$ In ΔBAI, $y = \frac{x}{2} + \frac{z}{2}$

$\Rightarrow \frac{x+z}{y} = 2$

37.

$r^2 = ab$

38.

r_1, r_2 & r_3 are always in G.P

$r_2 = \sqrt{r_1 . r_3}$

39.

If CD = 2b, AB = 2a,

EO = c

$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$

40.

$AB \times AC + DE \times AE$

$= AE^2$

Where, AE is angle bisector of $\angle BAC$

41.

If x° & y° is given then,

$\angle QSR = 180 - (x + y)$

Maths by Aditya Ranjan sir

42.

$$x = 90 - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

43.

AB is diameter of circle If ∠BAC is given]

∠DAC = 90° – 2 ∠BAC

If ∠DAC is given

∠BAC = ∠DAC – 90°

44.

If PQ || SR then ΔSQR makes isosceles triangle

∠SQR = θ, ∠QSR = ∠QRS

Maths by Aditya Ranjan sir

Quadrilateral/चर्तुभुज

(a) **Sum of interior angles of a quadrilateral = 360°**

चतुर्भुज के अंत:कोणों का योगफल = 360°

i.e., $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

(b) **If diagonals of the quadrilateral intersect each other at 90°, then**

यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करे तो,

$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

(c) **Area of quadrilateral/चतुर्भुज का क्षेत्रफल**

= $\frac{1}{2}$ × **diagonal × (sum of perpendicular dropped on it)**

= $\frac{1}{2}$ × विकर्ण × (विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग)

(d) **The quadrilateral formed by joining the mid-point of the adjacent side of the quadrilateral will be a parallelogram of half area.**

चतुर्भुज की आसन्न भुजा के मध्य-बिंदु को मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज आधे क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज होगा।

If P, Q , R , S are the mid-point of the side AB, BC, CA and DA, respectively, then

यदि **P, Q , R , S** क्रमशः भुजाओं **AB, BC, CA** और **DA** के मध्य बिंदु हो तो:

(i) **PQRS is a parallelogram**

PQRS एक समान्तर चतुर्भुज होगा

(ii) **If the area of the quadrilateral is x, then**

Area of the parallelogram PQRS = $\frac{x}{2}$

यदि चतुर्भुज का क्षेत्रफल **x** हो तो समान्तर चतुर्भुज **PQRS** का क्षेत्रफल = $\frac{x}{2}$

(e) **If BO and CO are the angle bisectors of angles ∠B and ∠C, respectively, then**

यदि **BO** तथा **CO** क्रमशः **∠B** और **∠C** के कोण समद्विभाजक हो तो:

$\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

(f) **If ABCD is any quadrilateral, A, B, C, D are areas, then**

$A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4$

Maths by Aditya Ranjan sir

Square/वर्ग

(a) All sides are equal and parallel.

सभी भुजाएँ बराबर और समांतर होती हैं।

(b) All angles are right angles.

सभी कोण समकोण होते हैं।

(c) Diagonals are equal and bisect each other at right angle.

विकर्ण बराबर एवं एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(d) Straight lines joining the mid points of adjacent sides of any square forms a square.

वर्ग की संगत भुजाओं के मध्य बिन्दु को मिलाने से बनने वाली आकृति वर्ग होती है।

P, Q, R, and S are mid points and PQRS is a square.

P, Q, R और S मध्य-बिन्दु हैं तथा PQRS एक वर्ग है।

(e) Side of a circumscribed square is equal to the diameter of the inscribed circle.

किसी वृत्त के अंदर बने वर्ग की भुजा वृत्त के व्यास के बराबर होती है।

(f) Area = (Side)^2 = $(a)^2$ = $\frac{(\text{diagonal})^2}{2} = \frac{d^2}{2}$

(g) Diagonal/विकर्ण = side $\sqrt{2}$ = $a\sqrt{2}$

(h) Perimeter/परिमाप = 4 × side = $4a$

(i) If P be a point inside a square ABCD, then $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

यदि P वर्ग के अंदर कोई बिंदु हो तो

$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

Rectangle/आयत

(a) Opposite sides are parallel and equal.

विपरीत भुजाएँ समांतर एवं बराबर होती हैं।

(b) Diagonals are equal and bisect each other but not at right angles.

विकर्ण बराबर तथा एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं परंतु समकोण पर नहीं।

(c) Perimeter = $2(l + b)$ where l = length and b = breadth

परिमाप = $2(l + b)$ जहाँ l = लंबाई और b = चौड़ाई है।

(d) Area/क्षेत्रफल = AB × BC = $l \times b$

(e) Diagonal/विकर्ण = $(l^2 + b^2)$

(f) Of all the rectangles of given perimeter the square will have the maximum area.

दिये हुए परिमाप वाले सभी आयतों में से वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

(g) Bisector of the four angles enclose a square

चारों कोणों के समद्विभाजक एक वर्ग बनाते हैं।

(h) When the rectangle is inscribed in a circle, it will have the maximum area when it is a square.

वृत्त के अंदर बने आयत का क्षेत्रफल अधिकतम होगा जब यह एक वर्ग होता है।

Maths by Aditya Ranjan sir

(i) If P is a any point inside the rectangle then, $AP^2 + PC^2, = BP^2 + PD^2$

यदि **P** आयत के अंदर कोई बिंदु हो तो

$AP^2 + PC^2, = BP^2 + PD^2$

(j) ABCD is any Rectangle or Square.
P is a point inside it,
W, X, Y, Z are areas, then
W + X = Y + Z.

Parallelogram/समांतर चतुर्भज

(a) Opposite sides are parallel and equal.
विपरीत भुजाएँ समांतर एवं बराबर होती है।

(b) Diagonals may or may not be equal.
विकर्ण बराबर हो भी सकते है या नहीं भी हो सकते है।

(c) Diagonals may or may not bisect each other at right angles.
विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद कर भी सकते हैं या नहीं भी कर सकते हैं।

(d) Sum of any two adjacent angles = 180°
किन्हीं दो संगत कोणों का योगफल 180° होता है।

(e) Bisectors of the four angles enclose a rectangle.
चारों कोणों के समद्विभाजक आयत बनाते हैं।

AS, BP, CQ and DR are angle bisectors therefore, PQRS is a rectangle.
AS, BP, CQ और **DR** कोण समद्विभाजक हैं। इसलिए **PQRS** एक आयत है।

(f) Each diagonal divides the parallelogram into two triangle of equal area.
प्रत्येक विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो बराबर क्षेत्रफल के त्रिभुजों में विभाजित करता है।

Area of ΔABC = Area of ΔADC.

(g) A parallelogram inscribed in a circle is always a rectangle.
वृत्त के अंतर बना हुआ समांतर चतुर्भुज हमेशा आयत होता है।

(h) A parallelogram circumscribed about a circle is always a rhombus.
वृत्त के परित: बना समांतर चतुर्भुज हमेशा सम चतुर्भुज होता है।

Maths by Aditya Ranjan sir

Therefore ABCD is a rhombus.

इसलिए **ABCD** एक समचतुर्भुज हैं।

(i) Area of PQRS = $\frac{1}{2}$ × Area of ABCD

(j) (a) Area of parallelogram = Base × Height

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = AB × h

(b) Area of parallelogram = AB × AD sinθ

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

(c) Area of Parallelogram

$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

Where, $s = \frac{a+b+d}{2}$

(d) Area of $b_1 \times h_1 = b_2 \times h_2$

Note : Height of parallelogram is inversely proportional to the base.

(e) In a parallelogram the sum of the square of the diagonals = 2 × (sum of the squares of the two adjacent sides.)

समांतर चतुर्भुज में, दोनों विकर्णों के वर्गों का योगफल = 2 × (दो संगत भुजाओं के वर्गों का योगफल)

$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

(f) P is any point inside parallelogram

$A_1 + A_2 = A_3 + A_4$

(g) If PQRS is a parallelogram

RO = a, OU = b, UT = c then,

$a^2 = b(b + c)$

(h) If AE is the angle bisector of ∠BAD and

EC = x

x = b – a

Maths by Aditya Ranjan sir

Rhombus/समचर्तुभुज

(a) Opposite sides are parallel and equal.
विपरीत भुजाएँ समांतर एवं बराबर होती है।

(b) Opposite angles are equal.
विपरीत कोण बराबर होते हैं।

(c) Diagonals bisect each other at right angle, but they are not necessarily equal.
विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं लेकिन आवश्यक नहीं कि वे बराबर हों।

(d) Diagonals bisect the vertex angles.
विकर्ण, शीर्ष को समद्विभाजित करते हैं।

(e) Sum of any two adjacent angles is 180°
$\angle A + \angle B = 180°$
किन्हीं दो संगत कोणों का योगफल 180° होता है।

(f) Figure formed by joining the mid-points of the adjacent sides of a rhombus is a rectangle.
समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति आयत होती हैं।

Therefore, PQRS is a rectangle.

(g) Area of a rhombus/सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल

(i) $= \frac{1}{2} \times$ product of diagonals (विकर्णों का गुणनफल)

$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

(ii) Area of ABCD/ABCD का क्षेत्रफल
$= a^2 \sin\theta$

(iii) $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

(iv) Heigh of rhombus (H) $= \frac{d_1 . d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$

Trapezium/समलम्ब चतुर्भुज

(a) A trapezium can be divided into smaller ones by drawing a line parallel to the parallel sides.
समांतर भुजाओं के समानांतर एक रेखा खींचकर छोटे समलम्ब चतुभुजों में विभाजित किया जा सकता है।

If the line divides the non-parallel sides in the ratio of $x : y$ then the length of the line
यदि कोई रेखा गैर-समानांतर भुजाओं को $x : y$ के अनुपात में विभाजित करती है तो रेखा की लंबाई

$$EF = \frac{ax + by}{x + y}$$

(b) The line joining the mid-points of the oblique (nonparallel) sides is half the sum of the parallel sides and is called the median. *i.e.* $x = y$
तिरछी (गैर-समानांतर) भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा समानांतर भुजाओं के योग की आधी होती है और माध्यिका कहलाती है। यानी $x = y$

$EF = \frac{1}{2} \times (AB + DC)$, $NM = \frac{1}{2}(AB - DC)$, M & N are midpoints of diagonals

(c) Diagonals intersect each other proportionally in the ratio of lengths of parallel sides.
विकर्ण एक दूसरे को समानांतर भुजाओं की लंबाई के अनुपात में समानुपाती रूप से काटते हैं।

$\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO} = \frac{AB}{CD}$ (by similarity property)/ समरूपता के गुण से

(d) Area of ΔAOD = Area of ΔBOC

(e) $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2(AB \times CD)$

(f) Area of trapezium/समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (sum of parallel sides × height)

$= \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times h$

Maths by Aditya Ranjan sir

Isosceles Trapezium/सम समलम्ब चतुर्भुज

(a) AD = BC
(b) ∠DAB = ∠CBA
(c) Diagonals are equal, AC = BD/विकर्ण बराबर होते है, AC = BD
(d) If a trapezium is inscribed in a circle it has to be one isosceles trapezium.
यदि समलम्ब चतुर्भुज को एक वृत्त के अंदर बनाया जाता है। तो यह एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज होता है।
(e) ∠ADC + ∠DAB = ∠ABC + ∠BCD = 180°
(f) The length in terms of a and b, of a parallel line segment (*i.e.* EF) through the intersection of diagonals of the isosceles trapezium is
समलम्ब चतुर्भुज के विकर्णो के प्रतिच्छेद से होकर गुजरने वाले समान्तर रेखा खंड (EF) की लम्बाई = $\frac{2ab}{a+b}$

Kite/पतंग

A quadrilateral is called a kite, it have two pairs of equal and adjacent.
एक चतुर्भुज को पतंग कहा जाता है, इसमें समान और आसन्न के दो युग्म होते हैं।

(a) Two pairs of adjacent sides are equal.
संगत भुजाओं के दो युग्म बराबर होते हैं।
(b) The diagonals intersect at right angles.
विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।
(c) The longer diagonal bisects the shorter diagonal.
लंबा विकर्ण छोटे विकर्ण को समद्विभाजित करता है।
(d) Area = $\frac{1}{2}$ × product of diagonals.
= $\frac{1}{2}$ × AC × BD

POLYGONS/बहुभुज

A polygon is a 'n' sided closed figure formed by line segments.
बहुभुज, रेखाखंडों द्वारा बना n भुजाओं द्वारा बनी बंद आकृति होती है।

(a) Sum of all internal angles of a polygon of n sides = $(n-2)\,180°$
n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों का योगफल = $(n-2)\,180°$
(b) Sum of all exterior angles of a polygon of n sides = 360°
n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी वाह्य कोणों का योगफल = 360°
(c) Each interior angle of a regular polygon of n sides = $\frac{(n-2)180}{n}$
n भुजाओं वाले बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण = $\frac{(n-2)180}{n}$
(d) Each exterior angle of a regular polygon of n sides = $\frac{360}{n}$
n भुजाओं वाले बहुभुज का प्रत्येक वाह्य कोण = $\frac{360}{n}$

Diagonal of a polygon/बहुभुज का विकर्ण

If you join any 2 (non-adjacent) vertex of a polygon then that is a diagonal.
यदि हम किसी बहुभुज के दो असंगत शीर्षों को मिलाएँ तो यह विकर्ण कहलाता है।

(e) No. of diagonals in a polygon of n sides
n भुजाओं वाले बहुभुज के विकर्णों की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$
(f) Area of a regular polygon of n sides where length of each side is a : $n\frac{a^2}{4}\cot\frac{180}{n}$
n भुजाओं वाले सम बहुभुज का क्षेत्रफल जहाँ प्रत्येक भुजा की लंबाई a है : $n\frac{a^2}{4}\cot\frac{180}{n}$
(g) Perimeter of regular polygon = $n \times a$
सम बहुभुज का परिमाप = $n \times a$
where a is the length of the side
जहाँ n भुजा की लंबाई है।

Maths by Aditya Ranjan sir

(h) No. of side in a regular polygon

सम बहुभुज में भुजाओं की संख्या

$$= \frac{360^\circ}{\text{exterior angle}} = 2(x+1)$$

$$\text{where } x = \frac{\textit{interior} \text{ angle}}{\text{exterior angle}}$$

(i) Ratio of the measure of an interior angle of a polygon of n-sides to the measure of its exterior angle is given by $\left(\frac{n}{2}-1\right):1$

n भुजा वाले सम बहुभुज के अंत: और वाह्य कोणों की माप का अनुपात = $\left(\frac{n}{2}-1\right):1$

02 MENSURATION 2D
(द्विविमीय क्षेत्रमिति)

Tirangle/त्रिभुज

General properties of a triangle/ त्रिभुज के सामान्य गुण

Let ABC be a triangle and a, b, c be its sides, then

माना, **ABC** एक त्रिभुज है और a, b, c इसकी भुजाएँ हैं, तो

(i) **Perimeter/ परिमाप = $a + b + c$**

(ii) **Semi-perimeter (s)/ अर्द्ध-परिमाप = $\frac{a+b+c}{2}$**

It is denoted by s.

(iii) **Area : The area of a triangle is denoted by the symbol Δ and can be calculated by the following three methods :**

क्षेत्रफल : त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है और निम्नलिखित तीन विधियों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

(a) **Area/क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$**

(b) **Area = $\frac{1}{2}$ × base × height = $\frac{1}{2} \times b \times h$**

or Area = $\frac{1}{2}$ × side × corresponding height

$= \frac{1}{2} \times b \times h$

(c) **Area = $\frac{1}{2} \times bc \sin A$**

$= \frac{1}{2} \times ca \sin B$

$= \frac{1}{2} \times ab \sin C$

☞ **If 2 sides of Δ are given then maximum area is always of a Right Angled Triangle.**

यदि त्रिभुज की दो भुजाएं दी गई हैं, तो अधिकतम क्षेत्रफल हमेशा एक समकोण त्रिभुज का होगा,

If a, b are two sides of a triangle

Max Area = $\frac{1}{2}ab$

Maths by Aditya Ranjan sir

Equilateral Triangle/समबाहु त्रिभुज

(i) Semi-perimeter/अर्द्धपरिमाप (s) = $\frac{3a}{2}$

(ii) Height/ऊंचाई (h) = $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

(iii) Area/क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$

(iv) (a) Inradius/अन्तः त्रिज्या (r) = $\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{h}{3}$

(b) Area of the incircle/अन्तः वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi a^2}{12}$

(v) (a) Circumradius/परित्रिज्या (R) = $\frac{a}{\sqrt{3}}$

(b) Area of circumcircle/परिवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi a^2}{3} = \frac{2h}{3}$

(vi) If the lengths of the perpendiculars drawn from a point inside an equilateral triangle to its sides are P_1, P_2 and P_3, then
यदि किसी समबाहु त्रिभुज के अंदर किसी बिन्दु से इसकी भुजाओं पर डाले गए लंबों की लंबाई P_1, P_2 और P_3 हो, तो

(a) $P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\sqrt{3}a}{2} = h$ (height)

(b) Area of the equilateral triangle
$= \frac{(P_1 + P_2 + P_3)^2}{\sqrt{3}}$

☞ In equilateral Δ,
If r = inradius (अंतःत्रिज्या)
R = circumradius (परित्रिज्या)
S = Side of equilateral triangle
(समबाहु त्रिभुज की भुजा)

then,

(i) $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{\text{Area of incircle}}{\text{Area of circumcircle}} = \frac{1}{4}$

(iii) The ratio of r : S : R = $1 : 2\sqrt{3} : 2$

☞ In equilateral triangle/समबाहु त्रिभुज में

$\frac{\text{Radius of smaller circle}}{\text{Radius of bigger circle}} = \frac{1}{3}$

☞ At each corner of a equilateral triangular field of side 'a' cm a cow is tethered by a rope of length r_1, r_2 and r_3 cm, then the area grazed by the cows is:

a सेमी. भुजा के समबाहु त्रिभुजाकार खेत के प्रत्येक कोने पर r_1, r_2 तथा r_3 सेमी. लम्बाई की रस्सियों से एक गाय को बांधा जाता है तो गाय द्वारा चरे गए खेत का क्षेत्रफल:

$= \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

Then the area ungrazed by the cows is:

गाय द्वारा नहीं चरे गए खेत का क्षेत्रफल:

$= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

Maths by Aditya Ranjan sir

Regular Hexagon/समषट्भुज

Area and Perimeter of Regular Hexagon

समषट्भुज का क्षेत्रफल एवं परिमाप

If side of Regular Hexagon is 'S'

(a) Perimeter of Regular Hexagon = 6S

(b) Area of Regular Hexagon = $\frac{3\sqrt{3}}{2}S^2$

(c) Area of Regular Hexagon = $\frac{\sqrt{3}}{2}d_1^2$, where d_1 is the smaller diagonal

(d) Area of Regular Hexagon $A = \frac{3\sqrt{3}}{8}d_2^2$, where d_2 is the larger diagonal

(e) Inradius of Regular Hexagon = $\frac{\sqrt{3}}{2}S$

समषट्भुज की अंत:त्रिज्या

(f) Circumradius of Regular Hexagon = S

समषट्भुज की परित्रिज्या

(g) Inradius/अंत:त्रिज्या : Circumradius/परित्रिज्या

$= \sqrt{3} : 2$

(h) Area of circumcircle/परिवृत्त का क्षेत्रफल : area of Hexagon/समषट्भुज का क्षेत्रफल : Area of incircle/अंत:वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi a^2 : \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 : \pi\frac{3a^2}{4}$

$= 4\pi : 6\sqrt{2} : 3\pi$

(i) Number of Diagonals in Regular Hexagon

समषट्भुज में विकर्णों की संख्या = 9

(j) Regular Hexagon from equilateral Δ:-

समबाहु त्रिभुज से समषट्भुज

= Area of hexagon : area of equilateral ΔABC

= 6 : 9 = 2 : 3

(k) Hexagonal form by a rectangle of 2a length and $\sqrt{3}a$ breadth

2a लम्बाई तथा $\sqrt{3}a$ चौड़ाई वाले आयत से समषट्भुज का बनना

Isosceles Triangle/समद्विबाहु त्रिभुज

If ABC be an isosceles triangle such that AB = AC = a and BC = b then,

यदि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हो कि AB = AC = a और BC = b है, तो

(i) AB = AC = a

(ii) ∠B = ∠C

(iii) Perimeter = $2a + b$

(iv) Area = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

or Area = $\frac{1}{2}a^2 \sin\alpha$

(v) $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

or $h = \frac{a^2}{2R}$

(vi) circumradius; $R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$

$b = \frac{a}{R}\sqrt{(2R + a)(2R - a)}$

Maths by Aditya Ranjan sir

(vii) Isosceles-right triangle/समद्विबाहु समकोण त्रिभुज

P = perimeter $= a(2+\sqrt{2})$

area $= \frac{1}{2}a^2$

$= \frac{P^2}{2(6+4\sqrt{2})} = \frac{p^2}{4}(3-2\sqrt{2})$

Right-Angled Triangle/समकोण त्रिभुज

(i) $AB^2 + BC^2 = AC^2$

or, $p^2 + b^2 = h^2$

$\Rightarrow p = \sqrt{h^2 - b^2}$, $b = \sqrt{h^2 - p^2}$ and

$h = \sqrt{p^2 + b^2}$

Note :

(i) Use pythagorean triplets

(ii) Perimeter = $p + b + h$

(iii) Area of the triangle $= \frac{1}{2} \times p \times b$

(iv) Inradius (r) $= \frac{p+b-h}{2}$

$\left[= \frac{\text{Perpendicular} + \text{Base} - \text{Hypotenuse}}{2}\right]$

(v) Circumradius (R) $= \frac{h}{2}\left[= \frac{\text{Hypotenuse}}{2}\right]$

(vi) If triangle is isosceles right angle, then two sides will be equal and hypotenuse

यदि त्रिभुज समद्विबाहु समकोण हो, तो दो भुजाएँ बराबर होंगी और कर्ण = $\sqrt{2}$ × equal side

(vii) Area of right angle triangle $= \frac{h^2}{4}\sin 2\theta$

Where, H → Hypotenuse (कर्ण) and, θ → one of the angle is acute of right angle triangle.

समकोण त्रिभुज का कोई एक कोण न्यूनकोण है।

Area of Largest Square inside a Triangle/त्रिभुज के अन्दर सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल

☞ Side of Largest Square inside a Triangle whose base is 'B' and height is 'H'

किसी त्रिभुज के अंदर सबसे बड़े वर्ग की भुजा, जिसका आधार B और ऊँचाई H हो $= \frac{B \times H}{B + H}$

☞ Side of Largest square inside a right angled triangle whose sides are : b, p, h Where, h is hypotenuse of the triangle

समकोण त्रिभुज के अंदर सबसे बड़े वर्ग की भुजा, जिसकी भुजाएँ *b, p, h* हों, जहाँ *h* त्रिभुज का कर्ण है

$= \frac{b.p.h}{b^2 + p^2 + bp}$

$x = \left(\frac{b.p}{b+p}\right)$

Maths by Aditya Ranjan sir

Circle/वृत्त

Basics of Circle (वृत्त के मूलभूत सिद्धांत)

1. Area of Circle (वृत्त का क्षेत्रफल) = πr^2
2. Circumference of Circle (वृत्त की परिधि) = $2\pi r$
3. Area of Semi-circle (वृत्त का क्षेत्रफल) = $\frac{\pi r^2}{2}$
4. Circumference of Semi-circle (वृत्त की परिधि) = $\pi r + 2r$

5. Area of quadrant of circle

   वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}\pi r^2$
6. Circumference of quadrant of circle

   वृत्त के चतुर्थांश का परिधि = $\frac{\pi r}{2} + 2r$

7. Area of sector/त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2\theta}{360°}$
8. Length of the Arc AB (l) = $\frac{2\pi r\theta}{360°}$

   चाप AB की लंबाई

9. Area of Sector/ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}lr$
10. Area of sector = Area of ΔAOB

    त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

    $= \frac{\pi r^2\theta}{360°} - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$

11. Area enclosed by two concentric circle

    (दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल)

If R and r are radii of two concentric circles, then

यदि R और r दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं, तो

(i) Area enclosed by two circle = $\pi R^2 - \pi r^2$

दो वृत्तों द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

= $\pi(R + r)(R - r)$

(ii) Width of path/रास्ते की चौड़ाई = R – r

$= \frac{\text{outer circumference} - \text{inner circumference}}{2\pi}$

12. Distance moved by a rotating wheel in one revolution is equal to the circumference of the wheel.

    एक घूमते हुए पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गयी दूरी वृत्त की परिधि के बराबर है।
13. The number of revolutions completed by a rotating wheel in one minute.

    एक घूमते हुए पहिये द्वारा एक मिनट में पूरे किये गये चक्करों की संख्या

    $\frac{\text{Distance moved in one minute}}{\text{Circumference}}$
14. $\boxed{\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}}$, where a, b, c are radii

15. $r = (\sqrt{2} - 1)R$

Maths by Aditya Ranjan sir

Quadrilateral/चतुर्भुज

(A) Quadrilateral/चतुर्भुज

General Properties of a quadrilateral

Let ABCD is a quadrilateral, then

यदि **ABCD** एक चतुर्भुज हो, तो

(a) Perimeter = AB + BC + CD + DA

(b) Area = $\frac{1}{2}$ × BD × (AL + CM)

= $\frac{1}{2}$ × One diagonal × (Sum of the perpendiculars drawn from other verties to that diagonal)

= $\frac{1}{2}$ × एक विकर्ण × (दूसरे शीर्षों से इस विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योगफल)

(c) Area of the quadrilateral formed by joining the mid-points of the adjacent sides will be the half of the original quadrilateral.

चतुर्भुज की संगत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाले चतुर्भुज का क्षेत्रफल मूल चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

(B) Square/वर्ग

(a) Perimeter/परिमाप = 4 × Side = $4a$

(b) Area = $(\text{Side})^2 = a^2$

(c) Area of ΔAOB = Area of ΔBOC = Area of ΔCOD

= Area of $\Delta DOA = \frac{a^2}{4}$

(d) (i) A circle of radius r is inscribed in the square, then radius

वर्ग के अंदर r त्रिज्या का कोई वृत्त बना हो, तो $r = \frac{Side}{2}$

(ii) A circle of radius R circumscribed the square, then

R त्रिज्या का कोई वृत्त वर्ग के परित: बना हो, तो

Diameter = Diagonal

$\Rightarrow 2R = \sqrt{2}a \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(e) If side of square = a

Radius of incircle (r) = $\frac{a}{2}$

Radius of circumcircle (R) = $\frac{a}{\sqrt{2}}$

$\frac{r}{R} = \frac{r}{\sqrt{2}}$

(f) $\frac{\text{Side of smaller square}}{\text{Side of bigger square}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(g) (i) Find the area of the largest square that can be drawn inside a circle of radius R.

उस सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसे R त्रिज्या के वृत्त के अन्दर बनाया जा सकता है।

Maths by Aditya Ranjan sir

(h) **If one of the diagonal or the perimeter become x times then the area will become x^2 times or increases by $(x^2 - 1)$ times.**

यदि एक विकर्ण या परिमाप x गुना हो जाए तो क्षेत्रफल x^2 गुना हो जाता है या $(x^2 - 1)$ गुना बढ़ जाता है।

(i) **For two squares/**दो वर्गों के लिए

(i) Ratio of sides = Ratio of diagonal
= Ratio of perimeter

(ii) Ratio of area = (Ratio of sides)^2
= (Ratio of diagonal)^2
= (Ratio of perimeter)^2

(j) **Find the area of the largest square that can be drawn inside a semi-circle of radius R.**

उस सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसे **R** त्रिज्या के अध ˊ-वृत्त के अन्दर बनाया जा सकता है।

Area of square = $\frac{4}{5}r^2$

(k) Find the area of the largest square that can be drawn inside a quadrant of radius R.

उस सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसे त त्रिज्या के चतुर्थ वृत्तखंड में बनाया जा सकता है।

Area of square = $\frac{r^2}{2}$

(l)

Area of square = $\frac{2}{5}r^2$

(m) **Side of square is given as 'a'**

वर्ग की भुजा 'a'

Ungrazed area = $\frac{3a^2}{14}$

(n) **Total area of three equilateral triangle inscribed in a semicircle of radus 'r' cm**

तीन समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल जो किसी '**r**' सेमी. त्रिज्या के अर्ध वृत्त में बने हुए है।

Area = $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$

(o)

If side of square = 'a'

Radius of yellow circle

= $\frac{a}{16}$

Radius of Blue circle

= $\frac{a}{6}$

Radius of Red circle

= $\frac{3a}{8}$

Maths by Aditya Ranjan sir

(p)

If side of square is 'a'.
Area of :

Blue Region = $\frac{\pi a^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Yellow Region = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi a^2}{12}$

Red Region = $a^2 - \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(q) Area of leaf = $a^2 - 2\left(\frac{3}{14}a^2\right) = \frac{4}{7}a^2$

(r) Area of shaded region = $\frac{a^2}{2}(\pi - 2) = \frac{4}{7}a^2$

(C) Regular Octagon/समअष्टभुज

☞ Area = $2a^2(1+\sqrt{2})$

Regular octagon form by square of side x.

(a) $x = a(1+\sqrt{2})$

(b) Side of octagon

$a = x(\sqrt{2}-1)$

(D) Parallelogram/समांतर चतुर्भुज

When the opposite sides are parallel, the quadrilateral is called a parallelogram.

यदि विपरीत भुजा समानांतर हो, तो चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

(a) In Parallelogram ABCD, let side AB = a cm and BC = b cm, then

समांतर चतुर्भुज ABCD में, यदि AB = a सेमी और BC = b सेमी है, तो

(i) AB = CD and BC = AD

(ii) Each diagonal AC or BD divides the parallelogram in the congruent triangles.

प्रत्येक विकर्ण AC अथवा BD समांतर चतुर्भुज को सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

(iii) $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$

$= 2(AB^2 + BC^2)$

$= 2(a^2 + b^2)$

(iv) Perimeter = $2(a + b)$

Maths by Aditya Ranjan Sir

(b) (i) Area = Base × Height
= a(side) × (distance between the side and its parallel side)
= $a \times h_1 = b \times h_2$

(ii) Area of all triangle of same base and between the parallel lines are the same.
समान आधार और समांतर भुजाओं के मध्य बने प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल समान होता है।

(iii) The length of one diagonal is d.

Then,

Area of parallelogram ABCD

$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

where $s = \dfrac{a+b+d}{2}$

(E) Rhombus/समचतुर्भुज

If each side of a parallelogram is equal, the parallelogram is called a rhombus.
यदि किसी समांतर चतुर्भुज की प्रत्येक भुजा बराबर हो, तो समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज कहलाता है।

In rhombus ABCD,

Let the side BC = a, AC = d_1 and BD = d_2, then

(a) AB= BC = CD = DA = a

(b) Diagonals bisect each other at right angle.
विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेदित करता है।

(c) Side = $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

or, $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$

(d) Perimeter = $4a$

(e) (i) Area = $\dfrac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

(ii) Area = Base × Height
Area of ΔAOB = Area of ΔBOC = Area of ΔCOD = Area of ΔAOD

(F) Rectangle/आयत

If each angle of a quadrilateral is 90° and length of the opposite sides are equal, then it is called a rectangle.
यदि किसी चतुर्भुज का प्रत्येक कोण 90° हो और विपरीत भुजाओं की लंबाई बराबर हो तो यह आयत कहलाता है।

Let ABCD is a rectangle such that AB = a and BC = b, then
यदि एक आयत ABCD इस प्रकार है कि AB = a और BC = b है, तो

(a) AB = CD = a and BC = AD = b

(b) The diagonals bisect each other,

(i) AC = BD = $\sqrt{a^2 + b^2}$

(ii) AO = OC = OB = $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

(c) Perimeter = 2(length + breadth)
= $2(a + b)$

(d) Area = Length × Breadth = ab

(e) Area of ΔAOB = Area of ΔBOC
= Area of ΔCOD = Area of ΔDOA = $\dfrac{ab}{4}$

(f) (i) Radius of the maximum possible circle
अधिकतम संभावित वृत्त की त्रिज्या
$= \dfrac{\text{Breadth}}{2} = \dfrac{b}{2}$

Maths by Aditya Ranjan sir

(ii) Radius of the circle circumscribed the rectangle ABCD be R, then

आयत ABCD के परितः बने वृत्त की त्रिज्या R हो, तो

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

(g) If the length of the rectangle will become x times and breadth will become y times, the area of the rectangle will become xy times.

यदि आयत की लंबाई x गुनी और चौड़ाई y गुनी हो जाए, तो आयत का क्षेत्रफल xy गुना हो जाएगा।

(h) Path around or in a rectangle/ आयत के परितः अथवा आयत के अंदर पथ

(i) Area of the path of uniform width d all around outside the rectangle ABCD

आयत ABCD के परितः एक समान चौड़ाई d वाले रास्ते का क्षेत्रफल = $2d(l + b + 2d)$

(ii) Area of the path of uniform width 'd' all around inside the rectangle ABCD

आयत ABCD के अंदर एक समान चौड़ाई d वाले रास्ते का क्षेत्रफल = $2d(l + b - 2d)$

(iii) Area of the path of uniform width d along the length and the breadth

लंबाई और चौड़ाई के अनुदिश एकसमान चौड़ाई d के पथ का क्षेत्रफल = $(l + b - d)d$

(i) (a) A carpet has fix width

जब कारपेट की चौड़ाई निश्चित हो

Let carpet of width w covers floor of dimension $l \times b$

माना w चौड़ाई का कारपेट $l \times b$ आयाम की फर्श को ढकता है।

∴ Area of carpet/कारपेट का क्षेत्रफल = Area of floor/ फर्श का क्षेत्रफल $\Rightarrow l_c \times w = l \times b$

Length of carpet required/आवश्यक कारपेट की लम्बाई

$$l_c = \frac{lb}{w}$$

(b) Let in rectangular tiles of dimension $(x \times y)$ cover the floor of dimonsion $(l \times b)$

माना $(x \times y)$ आयाम की आयताकार टाईल्स $(l \times b)$ आयाम की फर्श को ढकती है।

⇒ Area of n tiles/n टाईल्स का क्षेत्रफल = Area of floor/ फर्श का क्षेत्रफल

$$n \times x \times y = l \times b \Rightarrow n = \frac{lb}{xy}$$

(c) If floor covers by minimum number of square tiles exactly fit then side of square tile is HCF of length and breadth of floor.

यदि फर्श को न्यूनतम संख्या की वर्गाकार टाईल्स द्वारा पूरी तरह से ढका गया है तो वर्गाकार टाईल की भुजा फर्श की लम्बाई तथा चौड़ाई का म.स.प. होती है।

Maths by Aditya Ranjan sir

03 MENSURATION 3D
(त्रिविमीय क्षेत्रमिति)

A. Cuboid/घनाभ

1. **Curved Surface Area/Lateral Surface Area** (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल)
   = 2 (l + b) h
2. **Area of 4 walls** (चार दीवारों का क्षेत्रफल) = (Perimeter of Floor × Height)/(फर्श का परिमाप × ऊंचाई)
3. **Total Surface Area** (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल) = 2 (lb + bh + hl)
4. **Volume of Cuboid** (घनाभ का आयतन) = l x b x h
5. **Diagonal of Cuboid** (घनाभ का विकर्ण)
   $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$
   Length of longest rod that can be placed in the room. (किसी कमरे में रखी जा सकने वाली सबसे बड़ी छड़ की लम्बाई)
6. $(l+b+h)^2 = l^2+b^2+h^2+2\,(lb+bh+hl)$
   (sum of dimensions)^2 = (Diagonal)^2 + Total Surface Area./ (विमाओं का योगफल)^2 = (विकर्ण)^2 + (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)
7. **Volume of hollow cuboid** (खोखले घनाभ का आयतन)
   = lbh – (l–2x) (b–2x) (h–2x),
   where x is the thickness of walls of the cuboid.(जहाँ x घनाभ की दीवार की मोटाई है)
8. **Volume of water from cuboidal cross section pipe in t time.** (घनाभाकार क्रास सेक्शन पाइप से t समय में निकले पानी का आयतन)
   = area of base × (vt) = lbvt
   (If this fills a tank then put it equal to volume of tank) (यदि यह किसी टंकी को भरे तो इसे टंकी के आयतन के बराबर कर देते हैं)
9. Making box by rectangular sheet.(आयताकार शीट से खुला डिब्बा बनाना)
   we can make an open rectangular box by cutting off equal squares at four corners and the remainder is folded up. (चारों कोनों से बराबर वर्ग काटने के बाद शेष को मोड़कर हम एक खुला आयताकार डिब्बा बना सकते हैं)

   Volume of rectangular box (आयताकार डिब्बे का आयतन) = (l–2x) (b–2x)x
10. **In digging related questions** (खुदाई से सम्बन्धित प्रश्नों में)
    Volume of earth taken out (खोदी गई मिट्टी का आयतन) = Volume of cuboid (घनाभ का आयतन)
11. **In the Questions related to melting and recasting volume remains constant**
    (पिघलाने और दोबारा बनाने से सम्बन्धित प्रश्नों में आयतन नियत रहता है)
12. **Increase and decrease in water level** (जल स्तर में वृद्धि या कमी)

   Volume of extra cubiod (अतिरिक्त घनाभ का आयतन)
   = xlt
   = lbh = xlt
   = x × 100 cm^3
   $= \frac{x}{1000}\,m^3$

Maths by Aditya Ranjan sir

B. Cube/घन

A cuboid in which (ऐसा घनाभ जिसमें) $l = b = h$

(a) Curved Surface Area/Lateral Surface Area (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $4a^2$

(b) Total Surface Area/(कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $6a^2$

(c) Volume (आयतन) = a^3

(d) Diagonals (विकर्ण) = $\sqrt{3}a$

C. Cylinder/बेलन

(a) Curved Surface Area/Lateral Surface Area (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi rh$

(b) Total Surface Area/(कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(r+h)$

(c) Volume (आयतन) = $\pi r^2 h$

Hollow Cylinder/खोखला बेलन

(i) Curved Surface Area/Lateral Surface Area (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi rh + 2\pi Rh = 2\pi h(R+r)$

(ii) Total Surface Area (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi h(R+r) + 2\pi(R^2 - r^2)$

(iii) Volume of hollow cylinder (खोखले बेलन का आयतन) = $\pi r^2 h$

(iv) Volume of material of hollow Cylinder (खोखले बेलन में उपयोग किए गए पदार्थ का आयतन) = $\pi(R^2 - r^2)h$

(v) Mass (weight) of hollow cylinder (खोखले बेलन का द्रव्यमान (भार))

= density × volume of material. (घनत्व × पदार्थ का आयतन)

☞ Increasing/Decreasing water level of a cylindrical tank (बेलनाकार टंकी के जल स्तर में वृद्धि/कमी)

Concept: xlt = Volume of extra cylinder (अतिरिक्त बेलन का आयतन) = $\pi r^2 h$

In above xlt may by volume of any object and Cylindrical tank may any prism

- A sphere of R radius dropped into the cylindrical tank
- If n marbles of r' radius each. Dropped into the cylinder
- If tank is Cuboid

$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 h$ $\quad$ $n \times \frac{4}{3}\pi r'^3 = \pi r^2 h$

Maths by Aditya Ranjan sir

☞ **Fill an empty water tank by cylindrical pipe or empty a filled water tank by cylinder pump. Let t is time to empty/fill the tank**

(बेलनाकार पाइप द्वारा किसी खाली टंकी को भरना या बेलनाकार पाइप द्वारा किसी भरी हुई टंकी को खाली करना। माना टंकी को खाली/भरने में लगा समय t है।)

Concept:

Volume of water flowing throught pipe in 't' time (t समय में पाइप द्वारा बहते पानी का आयतन) = **Volume of the tank** (टंकी का आयतन)

$\pi r^2 (vt) = \pi R^2 H$

Let in 't' time water level decrease by H (माना, t समय में जल स्तर में कमी H है)

$\pi r^2 (vt) = \pi R^2 H$

NOTE:

Shape of pipe and tank may any other prism but concept remain same.

(पाइप तथा टंकी का आकार कोई और हो सकता है, परन्तु सिद्धांत यही होगा)

☞ **Digging a well and earth taken out** (कुएं की खुदाई और निकाली गई मिट्टी)

(i) Spread all around it to form an embankement (इसके चारों ओर चबूतरें के रूप में फैला देना)

(ii) Spread in a Cuboid (घनाभ के रूप में फैला देना)

(iii) Fill another well (एक दूसरे कुएं में भर देना)

(iv) Fill a hemispherical hole (एक अर्ध गोलाकार आकृति में भर देना)

Concept: Volume of well (कुएं का आयतन) = **Volume of ambankment** (चबूतरें का आयतन)

$\pi r^2 h$ = (i) $\pi[(r + w)^2 - r^2] \times x$

= (ii) $l_1 b_2 h_1$

= (iii) $\pi r^2{}_2 h_1$

= (iv) $\frac{2}{3}\pi r^3{}_3$

☞ **Folding and revolving a rectangular sheet** (आयताकार शीट को मोड़ना और घुमाना)

Maths by Aditya Ranjan sir

☞ **Concepts related to formula of cylinder** (बेलन के सूत्रों पर आभारी सिद्धांत)

(i) If curved surface area (C) and volume (V) are given then ratio of radius to height (यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा आयतन (v) दिए हो तो त्रिज्या का ऊंचाई से अनुपात)

$$\frac{r}{h}=\frac{8\pi V^2}{c^3}$$

(ii) If curved surface area (c) and height (h) are given the volume of cylinder. (यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा ऊंचाई (h) दिए हो तो बेलन का आयतन)

$$V=\frac{c^2}{4\pi h}$$

D. Cone/शंकु

(a) Curved surface area (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल) = πrl

(b) Total surface area (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $\pi r(r + l)$

(c) Volume/आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(d) Slant height/तिरछी ऊंचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

☞ All triangles formed by cutting cone are similar to each other. (शंकु को काटने से बने सभी त्रिभुज एक दूसरे के समरूप होते हैं।)

$\Delta OCD \sim \Delta OAB (\angle A = \angle C = 90°, \angle O = \angle O)$

(i) $\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{L}{l}$ or $\frac{H}{R} = \frac{h}{r}$

Let V is volume of larger cone and v is volume of smaller cone (माना, V बड़े शंकु का आयतन तथा v छोटे शंकु का आयतन है)

(ii) $$\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h}$$

(iii) $$\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{R^3}{r^3} = \frac{L^3}{l^3}$$

Example: 01

A right circular cone is cut by two plane parallel to the base into three parts with altitude ratio $a_1 : a_2 : a_3$ then ratio of their volume. (एक लम्बवृत्तीय शंकु को इसके आधार के समान्तर दो तलों द्वारा तीन भागों में ऊंचाईयों के अनुपात $a_1 : a_2 : a_3$ में काटा गया है, उनके आयतनों का अनुपात है:)

$V_1 : V_2 : V_3 = h_1^3 : h_2^3 : h_3^3$

$= a_1^3 : (a_1 + a_2)^3 : (a_1 + a_2 + a_3)^3$

Ratio of volume of three parts (तीन भागों के आयतन का अनुपात)

$V_1^1 : V_2^1 : V_3^1 = a_1^3 : (a_1 + a_2)^3 - a_1^3 : (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2)^3$

Note:

If ratio of their altitude is 1 : 1 : 1 (यदि उनकी ऊंचाईयों का अनुपात 1 : 1 : 1 हो तो)

then $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

$V_1^1 : V_2^1 : V_3^1 = 1 : 7 : 19$

Maths by Aditya Ranjan sir

Example: 02

In above question if ratio of volume of three parts is $b_1 : b_2 : b_3$ then ratio of their heights-

उपर्युक्त प्रश्न में यदि तीन भागों के आयतन का अनुपात $b_1 : b_2 : b_3$ हो तो उनकी ऊंचाईयों का अनुपात

$h_1^3 : h_2^3 : h_3^3 = V_1 : V_2 : V_3$

$= b_1 : (b_1 + b_2) : (b_1 + b_2 + b_3)$

$h_1 : h_2 : h_3 = b_1^{1/3} : (b_1 + b_2)^{1/3} : (b_1 + b_2 + b_3)^{1/3}$

$\Rightarrow h_1^1 : h_2^1 : h_3^1 = b_1^{1/3} : (b_1 + b_2)^{1/3} - b_1^{1/3} : (b_1 + b_2 + b_3)^{1/3} - (b_1 + b_2)^{1/3}$

Note:

If ratio of volume of all parts is 1 : 1 : 1 then ratio of heights $h_1^1 : h_2^1 : h_3^1$ (यदि उनके आयतनों का अनुपात 1 : 1 : 1 हो तो ऊंचाईयों $h_1^1 : h_2^1 : h_3^1$ का अनुपात) $= 1 : 2^{1/3} - 1 : 3^{1/3} - 2^{1/3}$

Frustrum/छिन्नक

When a cone cut parallel to base, lower portion is called frustum. (जब एक शंकु को इसके आधार के समान्तर काटा जाता है तो नीचे वाला भाग छिन्नक कहलाता है।)

Volume of frustum (छिन्नक का आयतन)

$$= \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)h$$

Curved surface area (पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= \pi (R + r)l$

Total surface area (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= \pi l (R + r) + \pi (R^2 + r^2)$

When $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

☞ **Rotation of a right anlged triangle.** (समकोण त्रिभुज के घुमाने पर बने शंकु)

For radius = rb = ac sum of volume of two cones

$$= \frac{1}{3}\pi\frac{a^2c^2}{b}$$

☞ **Rolling up a sector** (त्रिज्यखंड को घुमाने पर बना शंकु)

When a sector is rolled up in such a way that the two binding radii are joined together then a cone generates. (जब किसी त्रिज्यखंड को इस प्रकार घुमाया जाता है कि इसकी दो त्रिज्याएं जुड़ जाती है, तो एक शंकु का निर्माण होता है।)

☞ **A right angled sector of radius a cm is rolled up into a cone** (a सेमी त्रिज्या के एक समकोणीय त्रिज्यखंड को घुमाकर बना शंकु)

Maths by Aditya Ranjan sir

$\Rightarrow 2\pi r^1 = \frac{\pi r}{2} \Rightarrow r^1 = \frac{r}{4}$ & $l = r$

⇒ **Height of cone (शंकु की ऊंचाई) (h)**

$= \sqrt{l^2 - r^{1^2}}$

$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{16}} = \sqrt{\frac{15r}{4}}$

⇒ **Curved surface area of cone (शंकु का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल) = Area of sector त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल**

$= \frac{\pi r^2}{4}$

⇒ **Volume of cone शंकु का आयतन**

$= \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{r}{4}\right)^2 \times \sqrt{\frac{15r}{4}}$

$= \frac{\sqrt{15}\pi r^3}{192}$

☞ **A semicircular sector of radius r cm is rolled into a cone. (r सेमी त्रिज्या के किसी अर्धवृत्ताकार त्रिज्यखंड को घुमाने से बना शंकु)**

⇒ **Height of cone शंकु की ऊंचाई (h)**

$= \sqrt{l^2 - r^{1^2}}$

$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$

$= \frac{\sqrt{3}r}{2}$

⇒ **Curved surface area of cone (शंकु पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल)**

= Area of sector (त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल)

$= \frac{\pi r^2}{2}$

⇒ **Volume of cone (शंकु का आयतन)**

$= \frac{1}{2}\pi r^{1^2} h = \frac{1}{3}\pi \times \frac{r^2}{4} \times \frac{\sqrt{3}r}{2} = \frac{\pi r^3}{8\sqrt{3}}$

E. Sphere/गोला

(a) Surface area **(पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $4\pi r^2$**

(b) **Volume (आयतन) = $\frac{4}{3}\pi r^3$**

Let v_1 and v_2 be volume and S_1 and S_2 be area of two sphere then माना v_1 तथा v_2 और S_1 तथा S_2 दो गोले के आयतन और क्षेत्रफल हैं।

(c) $\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{3/2}$ **or** $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{2/3}$

F. Hemisphere/अर्द्धगोला

(a) **Curved surface area (पार्श्व पुष्ठीय क्षेत्रफल)**

= $2\pi r^2$

(b) **Total surface area (कुल पुष्ठीय क्षेत्रफल)**

= $3\pi r^2$

(c) **Volume (आयतन)**

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

☞ **Concepts related to volume (आयतन से सम्बन्धित सिद्धांत)**

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad V = \frac{2}{3}\pi r^3$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi\left[(r+x)^3 - r^3\right]$ $\quad V = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)^3$

Maths by Aditya Ranjan sir

Combination of 3-D Objects
त्रिविमीय आकृतियों का संयोजन

☞ **Melting and Recasting** (पिघलने तथा दोबारा बनने से सम्बन्धित)

⇒ **If a 3-D object melts and recasts into another 3-D object then volume remain constant.**

(यदि कोई त्रिविमीय आकृति को पिघलाकर दोबारा एक दूसरी त्रिविमीय आकृति बनाई जाती है तो आयतन नियत रहता है।)

☞ **A solid maximum 3-D object inside another 3-D object**

किसी त्रिविमीय आकृति के भीतर अधिकतम आयतन की दूसरी त्रिविमीय आकृति

(i) A maximum cone inside a cylinder

बेलन के भीतर अधिकतम आयतन का शंकु

Volume of cylinder/बेलन का आयतन **: Volume of cone/**शंकु का आयतन

$= \pi r^2 h : \frac{1}{3}\pi r^2 h = 3 : 1$

(ii) A cylinder just encloses a sphere then

बेलन के अन्दर गोला

Height of cylinder/बेलन की ऊँचाई

= Diameter of sphere/गोले का ब्यास **=2r**

Volume of Cylinder : Volume of Sphere

बेलन का आयतन : गोले का आयतन

$= \pi r^2(2r) : \frac{4}{3}\pi r^3 = 2 : \frac{4}{3} = 3 : 2$

(iii) A maximum cylinder inside cube then

घन के भीतर अधिकतम आयतन का बेलन

Radius of cylinder/बेलन की त्रिज्या

$= \frac{1}{2} \times$ **edge of cube** $= \frac{a}{2}$

Height of cylinder/बेलन की ऊँचाई

= edge of cube/घन की कोर **= a**

Volume of cube/घन का आयतन **: Volume of cylinder /**बेलन का आयतन $= a^3 : \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a$

$= 1 : \frac{22}{7} \times \frac{1}{4} = 14 : 11$

(iv) A maximum sphere inside a cube then

घन के भीतर अधिकतम आयतन का गोला

Diameter of sphere/गोले का व्यास **(2r) = edge of cube/**घन की कोर **= a**

Volume of cube/घन का आयतन **: Volume of sphere/**गोले का आयतन $= a^3 : \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$

= 21: 11

Maths by Aditya Ranjan sir

(v) A maximum cube inside a sphere

किसी गोले के भीतर अधिकतम आयतन का घन

Diagonal of cube/घन का विकर्ण = Diameter of sphere/गोले का व्यास

$\sqrt{3}\,a = 2r \Rightarrow a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

Volume of sphere/गोले का आयतन : Volume of cube/घन का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi r^3 : \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} : \frac{8}{3\sqrt{3}}$

$= 11\sqrt{3} : 7$

(vi) A maximum sphere inside a cone

किसी शंकु के भीतर अधिकतम आयतन का गोला

then $\Delta OCD \sim \Delta OBA$

$\therefore \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{BA}$

$\frac{l}{h-R} = \frac{r}{R}$

$\Rightarrow lR = hr - Rr$

$\boxed{R = \frac{hr}{l+r}}$

(vii) maximum cylinder inside a cone

किसी शंकु के भीतर अधिकतम आयतन का बेलन

$\Delta OCD \sim \Delta OAD$

(AA $\angle A = \angle C = 90°, \angle O$ common)

$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$

$\boxed{\frac{H}{H-h} = \frac{R}{r}}$

(viii) A maximum cube inside cone

शंकु के भीतर अधिकतम आयतन का घन

$\Delta OCD \sim OAD$ (AA)

$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$

$\boxed{\frac{H}{H-a} = \frac{R}{a/\sqrt{2}}}$

$[\therefore AB = \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}]$

Maths by Aditya Ranjan sir

G. Prism/प्रिज़्म

A prism is a solid that has two faces that are parallel and congruent and there faces (Polygon) join by vertex to vertex. A prism has a polygon as its base and vertical side perpendicular to the base.

प्रिज़्म एक ठोस होता है जिसके दो फलक समानांतर और सर्वांगसम होते हैं और उनके फलक (बहुभुज) शीर्ष से शीर्ष से जुड़ते हैं। प्रिज़्म में आधार के रूप में एक बहुभुज होता है और ऊर्ध्वाधर भुजा आधार के लम्बवत होती है।

(a) Curved surface area of a prism = Perimeter of base × height

प्रिज़्म का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊँचाई

(b) Total surface area of a prism = curved surface area + 2 × area of base

प्रिज़्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

(c) Volume of a prism = area of base × height

प्रिज़्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

(i) Equilateral triangular prism:

समबाहु त्रिभुजाकार प्रिज़्म:

C. S. A = 3ah, T. S. A = $3ah + 2\times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$

(ii) Square Prism:/वर्गाकार प्रिज़्म

C. S. A = 4ah, T. S. A = $4ah + 2a^2$

$V = a^2h$

(iii) Hexagonal Prism :/ षट्कोणीय प्रिज़्म

C. S. A = 6ah, T. S. A. = $6ah + 2\times\left(\frac{6\times\sqrt{3}}{4}a^2\right)$

$V = \frac{6\times\sqrt{3}}{4}a^2h$

H. Pyramid/पिरामिड

Triangular Pyramid/त्रिभुजाकार पिरामिड

(a) Curved surface area of Pyramid/पिरामिड का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\times$ Perimeter of base × slant height/

$\frac{1}{2}\times$ आधार का परिमाप × तिरछी ऊँचाई

(b) Total surface area of Pyramid/पिरामिड का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= Curved surface area + area of base/वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

(c) Volume of a Pyramid/पिरामिड का आयतन

$= \frac{1}{3}\times$ area of base × height / $\frac{1}{3}\times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

Maths by Aditya Ranjan sir

(i) Equilateral triangular Pyramid
समबाहु त्रिभुजाकार पिरामिड

$$C.S.A = \frac{1}{2} \times 3a \times l$$

$$T.S.A = \frac{1}{2} \times 3al + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times h$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{(2\sqrt{3})}\right)^2}$$

S.E (Slant edge)

$$= \sqrt{h^2 + R^2}$$

$$= \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

(ii) Square Pyramid/वर्गाकार पिरामिड

$$C.S.A = \frac{1}{2} \times 4a \times l$$

$$T.S.A = \frac{1}{2} \times 4al + a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times a^2 \times h$$

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$(\text{Slant edge}) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

(iii) Rectangular Pyramid/आयताकार पिरामिड

There are two slant height/दो तिरछी ऊँचाई होती है।

First slant height/पहली तिरछी ऊँचाई

$$(l_1) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Second slant height/दूसरी तिरछी ऊँचाई

$$(l_2) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$C.S.A = 2 \times \frac{1}{2} l \times l_1 + 2 \times \frac{1}{2} \times b \times l_2$$

$$T.S.A = C.S.A + lb \;\&\; V = \frac{1}{2} \times lb \times h$$

(iv) Hexagonal pyramid/षट्कोणीय पिरामिड

$$C.S.A = \frac{1}{2} \times 6al$$

T. S. A = C. S. A + Area of base/आधार का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} 6al + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{6\sqrt{3}}{4} a^2 \times h$$

Slant height/तिरछी ऊँचाई $(l) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2}$

Slant edge/तिरछी कोर $= \sqrt{h^2 + a^2}$

Maths by Aditya Ranjan sir

I. Tetrahedron/समचतुष्फलक

: There are four equilateral faces.

चार समबाहु फलक हैं।

: All edge are equal in length i.e.

सभी किनारे लंबाई में बराबर हैं अर्थात्,

: slant edge is same as side of base

तिरछी कोर आधार की भुजा के बराबर है।

(a) C. S. A. = Area of 3 equilateral triangle

तीन समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

(b) T. S. A = Area of 4 equilateral triangle

चार समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3}\, a^2$$

(c) Height/ऊँचाई (h) $= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a$

(d) Volume/आयतन (V)

$= \frac{1}{3} \times$ Area of base/आधार का क्षेत्रफल $\times$ height/ऊँचाई

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \sqrt{\frac{2}{3}}\, a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

	Volume	Total Surface Area	Lateral / Curved Surface Area
Cube	$Side^3$	$6 \times Side^2$	$4 \times Side^2$
Cuboid	$L \times B \times H$	$2(LB + LH + BH)$	$2(LH + BH)$
Cylinder	$\pi r^2 h$	$2\pi r(r + h)$	$2\pi rh$
Cone	$(1/3)\pi r^2 h$	$\pi r(r + L)$	πrl {where $L = \sqrt{r^2 + h^2}$}
Sphere	$(4/3)\pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
Hemisphere	$(2/3)\pi r^3$	$3\pi r^2$	$2\pi r^2$

04 Co-Ordinate Geometry
निर्देशांक ज्यामिति

☞ **Rectangular coordinate system- There are two mutually perpendicular lines, called coordinate axes./**आयताकार निर्देशांक प्रणाली- दो परस्पर लंबवत रेखाएँ होती हैं, जिन्हें निर्देशांक अक्ष कहा जाता है।

Distance formula/दूरी का सूत्र

(a) **Distance of point (x, y) from origin/**मूल बिंदु से बिंदु **(x, y)** की दूरी = $\sqrt{x^2 + y^2}$

(b) **Distance between two points (x_1, x_1) and (x_2, y_2)/** दो बिंदुओं (x_1, x_1) तथा (x_2, y_2) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Section formula/सेक्शन फॉर्मूला

(a) **The coordinate of a point which internally divides the line joined by the point $(x_1\ y_1)$ and (x_2, y_2) in the ratio m : n is then,**

उस बिंदु का निर्देशांक जो बिंदु $(x_1\ y_1)$ तथा (x_2, y_2) से जुड़ने वाली रेखा को **m : n** के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है, तब है,

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

(b) **If R (x,y) divides the line segment externally in the ratio m:n**
यदि **R (x,y)** रेखाखंड को **m : n** के अनुपात में बाह्य रूप से विभाजित करता है

$$\text{then},\ x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n},\ y = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}$$

Note: **If point is mid point then m = n = 1**
यदि बिंदु मध्यबिंदु हो तो **m = n = 1**

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2},\ y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Mirror Image/दर्पण प्रतिबिम्ब

(a) **Mirror Image of (x, y) with respect to x – Axis is (x, – y)**
x – अक्ष के परित: **(x, y)** का दर्पण प्रतिबिम्ब **(x, –y)** है।

(b) **Mirror Image of (x, y) with respect to y – Axis is (– x, y)**
y – अक्ष के परित: **(x, y)** का दर्पण प्रतिबिम्ब **(–x, y)** है।

(c) **Mirror Image of (x, y) with respect to origion is (–x, – y)**
मूल बिंदु के परित: **(x, y)** का दर्पण प्रतिबिम्ब **(–x, –y)** है।

Note: **Mirror Image of a point with respect to a straight line/**किसी सीधी रेखा के परित: किसी बिंदु का दर्पण प्रतिबिम्ब

use concept that perpendicular distance from point to mirror equal to perpendicular distance from image to mirror and both tare in same straight line.
अवधारणा का उपयोग करें कि बिंदु से दर्पण तक लंबवत दूरी प्रतिबिम्ब से दर्पण तक लंबवत दूरी के बराबर है और दोनों एक ही सीधी रेखा में हैं।

Maths by Aditya Ranjan sir

Angle between tow lines of slope m_1 and m_2 is θ than

$$\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$

If line are parallel then θ= 0°

$$\therefore \tan 0^\circ = 0 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow m_1 = m_2$$

If lines are perpendicular then θ= 90°

$$\therefore 90^\circ = \infty = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 . m_2 = -1$$

Point of intersection of two lines $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ and $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

If $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ → lines are overlapping each other → ∞ Solution

If $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ → lines are parallel → No Solution

If $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ → lines are intersecting → One Solution

Slope of line (m)/रेखा की प्रणवता

Tangent (tan) of angle between line and +ve x –axis

रेखा और +ve x –अक्ष के बीच के कोण की स्पर्श ज्या (tan)

(a) Slope of line/रेखा की प्रवर्णता in general from ax + by + c = 0

$$\text{then } m = -\left(\frac{\text{Coefficient of } x}{\text{Coefficient of } y}\right) = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

(b) Slope of line passing through (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is /(x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा की प्रवर्णता

$$m = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Triangle/त्रिभुज

☞ Area of ΔABC / ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$$

☞ Coordinates of its centroid/केन्द्रक के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

☞ Coordinates of its incentre/अन्त: केन्द्र के निर्देशांक

$$= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right)$$

Maths Aditya Ranjan

☞ **Coordinates of its circumcentre/परिकेन्द्र के निर्देशांक**

$$= \left(\frac{x_1 \operatorname{Sin} 2A + x_2 \operatorname{Sin} 2B + x_3 \operatorname{Sin} 2C}{\operatorname{Sin} 2A + \operatorname{Sin} 2B + \operatorname{Sin} 2C}, \frac{y_1 \operatorname{Sin} 2A + y_2 \operatorname{Sin} 2B + y_3 \operatorname{Sin} 2C}{\operatorname{Sin} 2A + \operatorname{Sin} 2B + \operatorname{Sin} 2C} \right)$$

☞ **Coordinates of its orthcentre/लम्बकेन्द्र के निर्देशांक**

$$\left(\frac{x_1 \tan A + x_2 \tan B + x_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{y_1 \tan A + y_2 \tan B + y_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} \right)$$

☞ **The equation of a line passing through points (x_1, y_1) and (x_2, y_2)**

बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से होकर गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)(x - x_1)$$

☞ **The coordinate of point of intersection of two lines $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ is**

दो रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x = b_2y + c_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का निर्देशांक

$$\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

☞ **Perpendicular distance of a line $ax + by + c=0$ from a point (x, y) is**

रेखा $ax + by + c = 0$ की बिन्दु (x, y) से लम्बवत दूरी

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

☞ **The perpendicular distance between parallel line $ax + by + c_1 = 0$ and $ax + by + c_2 = 0$ is:**

समांतर रेखा $ax + by + c_1 = 0$ तथा $ax + by + c_2 = 0$ के बीच लम्बवत दूरी

$$= \left| \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Maths by Aditya Ranjan sir

05 ALGEBRA/बीज़गणित

❖ Square Formula:-

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ or $(a-b)^2 + 4ab$
2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ or $(a+b)^2 - 4ab$
3. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
4. $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
5. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
6. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
7. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
8. $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
9. $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$
10. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
11. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
12. $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$
13. $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$
14. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$
15. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (b - c)(c - a)(a - b)$
16. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
    $= -(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)$

❖ Cube Formula:-

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
2. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
3. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
5. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
6. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
7. $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
   $= (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

Special Case 1: If $a^2 - ab + b^2 = 0$ then $a^3 + b^3 = 0$

Special Case 2: If $a^2 + a + 1 = 0$ then $a^3 - 1 = 0$ or $a^3 = 1$

Special Case 3: If $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$ then $a^3 + b^3 = 0$

Special Case 4: If $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$ then $a^3 + b^3 = 0$

Special Case 5: If $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -1$ then $a^3 - b^3 = 0$

Special Case 6: If $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{1}{a+b}$ then $a^3 - b^3 = 0$

Special Case 7: If $ab(a + b) = 1$ then $\frac{1}{a^3b^3} - a^3 - b^3 = 3$

❖ Factor Formula

1. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
2. $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$
3. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Special Case 1: If $a = b = c$

then $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

thus $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

Remember

If $a = b = c$ then $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Special Case 2: If $a + b + c = 0$ then

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

Remember

If $a + b + c = 0$ then $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Special Case 3: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

What if two number are equal and third number is one more than the numbers than.

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c$

Special Case 4:

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= 1/2\,[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 3d^2$

Where a,b,c are in A.P and common difference is d.

Special Case 5:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= 1/2\,(a+b+c)\,[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 9bd^2$

Where a,b,c are in A.P. and common difference is d and middle term is b.

Maths by Aditya Ranjan sir

❖ Function and invers function

☞ Square formula:-

If $x+\frac{1}{x}=a$ & $x-\frac{1}{x}=b$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

Remember

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2=b^2+2$

$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2-2$

$\Rightarrow x^8+\frac{1}{x^8}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2-2$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-2$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$

$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

Remember

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{b^2+4}$

$x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{a^2-4}$

First equation may be given by following type-

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$ or $x^2-3x+1=0$

or $\frac{x^2+1}{x}=3$

Special case 1 : If $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ then $x^2+\frac{1}{x^2}=0$

or $x^4+1=0$ or $x^4=-1$

Remember $\Rightarrow$ If $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ then $x^4+1=0$

Special case 2 : $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{b^2+4}$ & $x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{a^2-4}$

$x^n+\frac{1}{x^n}=a$ then $x^n-\frac{1}{x^n}=\pm\sqrt{a^2-4}$

If $x^n-\frac{1}{x^n}=b$ then $x^n+\frac{1}{x^n}=\pm\sqrt{b^2+4}$

☞ Cube Formula:-

If $x+\frac{1}{x}=a$ & $x-\frac{1}{x}=b$

$\rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$\rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Remember

$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=a^3-3a$

$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}=b^3-3a$

Special case 1: If $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ then

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(\sqrt{3}\right)^3-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0$

Remember

$\Rightarrow$ If $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ then $x^3+\frac{1}{x^3}=0$ or $x^6=-1$

If $x+\frac{1}{x}=2$ then $x=1$,

If $x+\frac{1}{x}=-2$ then $x=-1$

☞ $x+\frac{1}{X}=a\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

☞ $x-\frac{1}{x}=a\Rightarrow x^5-\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)$

☞ $x+\frac{1}{x}=a\Rightarrow x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2$

☞ $x+\frac{1}{x}=a\Rightarrow x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

☞ $x+\frac{1}{x}=a\Rightarrow x^7-\frac{1}{x^7}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)$

☞ $x+\frac{1}{x}=k\Rightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=\pm k\sqrt{k^2-4}$

☞ $x-\frac{1}{x}=k\Rightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=\pm k\sqrt{k^2+4}$

Maths by Aditya Ranjan sir

☞ $ax + \frac{b}{x} = k \Rightarrow a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = k^2 - 2ab$

☞ $ax - \frac{b}{x} = k \Rightarrow a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = k^2 + 2ab$

☞ $ax + \frac{b}{x} = k$ then $ax - \frac{b}{x} = \pm\sqrt{k^2 - 4ab}$

☞ $ax - \frac{b}{x} = k \Rightarrow ax + \frac{b}{x} = \pm\sqrt{k^2 + 4ab}$

☞ $ax + \frac{b}{x} = k \Rightarrow a^3x^3 + \frac{b^3}{x^3} = k^3 - 3kab$

☞ $ax - \frac{b}{x} = k \Rightarrow a^3x^3 - \frac{b^3}{x^3} = k^3 + 3kab$

❖ Componendo & Dividendo

If $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ then

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{x+y}{x-y}$$

Special case:

If $x = \frac{2ab}{a+b}$ then

$$\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$$

☞ $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ Or

If $x + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ then $x + \frac{1}{x} = \frac{2(a+b)}{(a-b)}$

☞ $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1\right)} = A\sqrt[3]{a^2} + B\sqrt[3]{a} + C$

$A = 0$; $B = \frac{1}{a+1}$; $C = \frac{1}{a+1}$

☞ $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1} = A\sqrt[3]{a^2} + B\sqrt[3]{a} + C$

☞ $A = 0$; $B = \frac{1}{a-1}$; $C = \frac{-1}{a+1}$

❖ Quadratic Equation/द्विघात समीकरण

1. An equation of the form $ax^2 + bx + c=0$, is called quadratic equation.

   कोई $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का समीकरण द्विघात समीकरण कहलाता है।

2. Roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are

   समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

   given by $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

   and $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3. If α and β are the roots of the equation $ax^2 + bx + c=0$

   यदि α और β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हो तो

   (i) Sum of roots/मूलों का योगफल

   $$(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-\text{Coefficient of } x}{\text{Coefficient of } x^2}$$

   (ii) Product of roots/मूलों का गुणनफल

   $$(\alpha . \beta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{Constant term}}{\text{Coefficient of } x^2}$$

4. If the roots α and β are known then the equation is given by $x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha . \beta) = 0$

   यदि मूल α तथा β ज्ञात हों तो समीकरण

   $x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha . \beta) = 0$ होगा।

5. Maximum and Minimum value of a quardratic equation/द्विघात समीकरण के अधिकतम तथा न्यूनतम मान

   $F(x) = ax^2 + bx + c$

   $F(x)_{min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ When $a < 0$;

   $F(x)_{max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ When $a > 0$

Maths by Aditya Ranjan sir

Nature of Roots

- If $b^2-4ac = 0$ (Roots are real & equal)
- If $b^2-4ac > 0$ & a perfect square (Roots are real, unequal & rational)
- If $b^2-4ac > 0$ & not a perfect square (Roots are real, unequal & irrational)
- If $b^2-4ac<0$ (Root are imaginary)

❖ Sum of Series/श्रेणी का योगफल

1. Sum of first 'n' natural numbers

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n$ का योगफल $= \frac{n(n+1)}{2}$

2. Sum of the squares of first 'n' natural numbers.

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योगफल

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Sum of the squares of 'n' natural numbers.

n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योगफल

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

4. Sum of the cubes of first 'n' natural numbers.

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योगफल

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = \left\{n\frac{(n+1)}{2}\right\}^2$$

5. Sum of even integers/सम पूर्णांकों का योगफल

$$2 + 4 + 6 \ldots\ldots\ldots + 2n = n(n+1)$$

6. Sum of odd integers/विषम पूर्णांकों का योगफल

$$1 + 3 + 5 + + \ldots\ldots\ldots (2n-1) = n^2$$

❖ Division Algorithm/विभाजन एल्गोरिथ्म

1. Dividend/भाज्य = Divisor/भाजक × Quotient/भागफल + Remember/शेषफल
2. Divisor/भाजक = $\frac{\text{Dividend} - \text{Remainder}}{\text{Quotient}}$
3. Remainder/शेषफल = Dividend/भाज्य – (Divisor/भाजक × Quotient/भागफल)

Maths by Aditya Ranjan sir

SURDS AND INDICES/करणी और घातांक

❖ Indices/घातांक

= Power is greater than 1/घात हमेशा 1 से अधिक होती है

❖ Surds/करणी

= Power is less than 1/घात हमेशा 1 से कम होती है

Ex. $5^{7/3}$, Hence 7 is indices and 1/3 is surds/ $5^{7/3}$ में 7 घातांक हैं तथा 1/3 करणी है

☞ **Laws of Indices/घात के नियम**

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \div b^n$
7. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$
5. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$
7. $a^0 = 1\ (a \neq o)$
8. $a^1 = a$
9. $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$
10. $a^x = a^y \Rightarrow x = y$
11. $a^x = b^y \Rightarrow a = b$

❖ Series/श्रेणी

(a) Infinite series in product type/गुणा वाले प्रश्नों में अपरिमित श्रेणी

Ex. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a....\infty}}}$

Solution of this question is a/इस प्रश्न का उत्तर हमेशा a होता है

Ex. $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b....\infty}}}}$

Solution: let $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b....\infty}}}} = x$

Then $\sqrt{a\sqrt{bx}} = x$

Squaring both side a $\sqrt{bx} = x^2$

Again squaring both side $a^2\ bx = x^4$

$\therefore$ $x^3 = a^2\ b \Rightarrow x = (a^2b)^{1/3}$

(b) Finite series in product type/गुणा वाले प्रश्नों में परिमित श्रेणी

Ex. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

Solution: count square root = 4

$2^4 = 16$

$\therefore$ Ans is $a^{15/16}$

Ex $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}}}$

$= 7^{63/64}\ (\because 2^6 = 64)$

(c) Infinite series in addition or subtraction from/ जोड़ अथवा घटाव के रूप में अपरिमित श्रेणी

$\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm ....\infty}}}$

There are two type of questions/इसमें दो प्रकार के प्रश्न होते हैं

(i): Factorise 'a' into two successive integers

a को दो क्रमागत पूर्णांक के रूप में गुणनखंडित करें

If it is addition series then answer is greater one and/यदि श्रेणी जोड़ की है तो बड़ा वाला पूर्णांक उत्तर होगा तथा

If it is subtraction series then answer is smaller one./यदि श्रेणी घटाव की है तो छोटा वाला पूर्णांक उत्तर होगा।

Ex. $\sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+....\infty}}} = 8$ [56 = 8×7, larger is ans]

Ex. $\sqrt{90-\sqrt{90-\sqrt{90....\infty}}} = 9$ [90 = 10×9, smaller is ans]

(ii) If 'a' can not factorise into two succesive integers/यदि a को दो क्रमागत पूर्णांक के रूप में गुणनखंडित नहीं किया जा सकता है तो

then $\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm ....\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4a} \pm 1}{2}$

Ex. $\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+....\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4\times5}+1}{2} = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$

Ex. $\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-....\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4\times1}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Maths by Aditya Ranjan sir

☞ **Square root expression inside square root./वर्ग मूल के अंदर वर्ग मूल का प्रसार**

In this type question try to make a square of expression inside square root./इस प्रकार के प्रश्नों में वर्ग मूल के भीतर के व्यंजक का वर्ग बनाने की कोशिश करें।

Ex. $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

☞ **If square root in denominator./यदि हर में वर्ग मूल हो।**

In this type questions rationalise terms by multiply and divide by conjugate terms/इस प्रकार के प्रश्नों में पदों का परमेयीकरण संयुग्मी पदों से गुणा तथा भाग करके करें।

Remember this short formula:

इस लघु सूत्र को याद रखें:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 2\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$

☞ **Smallest and greatest value/न्यूनतम तथा अधिकतम मान**

There are three type questions/इसमें तीन प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं

(i) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{6}$

When number and power of number are same.

जब संख्या तथा संख्या की घात समान हो।

∴ We compare $(\text{number})^{\text{LCM of 2, 3, 4 \& 6}}$

हम (संख्या)$^{2, 3, 4 \& 6 \text{ का ल. स.}}$ से तुलना करेगें

[∴ Here LCM of surds 2, 3, 4, 6 is 12]

$(2^{1/2})^{12}, (3^{1/3})^{12}, (4^{1/4})^{12}, (6^{1/6})^{12},$

$= 2^6, 3^4, 6^2$

$= 64, 81, 64, 36$

∴ Smallest is $\sqrt[6]{6}$ and greatest is $\sqrt[3]{3}$

(ii) $\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

If difference of number same (Here 7 – 5 = 9 – 7 = 5 – 3 = 11 – 9) then smallest of product of numbers will be greatest and greatest of product of number will be smallest

यदि संख्याओं का अंतर समान हो (यहां 7 – 5 = 9 – 7 = 5 – 3 = 11 – 9) तो जिन दो संख्याओं का गुणनफल सबसे छोटा होगा वह सबसे बड़ी तथा जिन दो का गुणनफल सबसे बड़ा होगा वह सबसे छोटी होगी।

7×5 = 35, 9×7 = 63, 5×3 = 15, 11×9 = 99

∴ Greatest is $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ and smallest is $\sqrt{11}-\sqrt{9}$

(iii) $\sqrt{8}+\sqrt{3}, \sqrt{9}+\sqrt{2}, \sqrt{7}+\sqrt{4}, \sqrt{6}+\sqrt{5}$

Here sum of numbers are equal (8+3 = 9+2 = 7+4 = 6+5 = 11) then greatest of product of number terms will be greatest and smallest will be smallest.

यहां संख्याओं के योगफल बराबर होते हैं (8+3 = 9+2 = 7+4 = 6+5 = 11) तो जिन दो संख्याओं का गुणनफल सबसे छोटा होगा वह सबसे छोटी तथा जिन दो का गुणनफल सबसे बड़ा होगा वह सबसे बड़ी होगी।

⇒ 8×3 = 24, 9×2 = 18, 7×4 = 28, 6×5 = 30

Greatest is $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ and smallest is $\sqrt{9}+\sqrt{2}$

☞ **Irrational equation/अपरिमेय समीकरण**

There are two type of questions

इसमें दो प्रकार के प्रश्नों होते हैं

(i) $a+\sqrt{b} = 3+2\sqrt{5}$

then convert both side in same manner and the compare

दोनों पक्षों को एक समान करने और फिर तुलना करें।

⇒ $a + \sqrt{b} = 3 + \sqrt{20} \Rightarrow a = 3$ and $b = 20$

(ii) If there are different irrational terms

यदि अपरिमेय पद भिन्न हो तो

$a\sqrt{5}+b\sqrt{3}+c\sqrt{2}+d = 3\sqrt{5}-7\sqrt{2}+5$

Compare LHS and RHS,

a = 3, b = 0, c = – 7, d = 5

Maths by Aditya Ranjan sir

❖ Arithmetic & Geometric Progresion
समांतर और गुणोत्तर श्रेणी

☞ Arithmetic Progresion/समांतर श्रेणी

Sequence/अनुक्रम = a + (a + d) + (a + 2d)+.....

Where a be the first term and d is the common difference of the sequence of an A.P, then-

जहां किसी समान्तर श्रेणी के अनुक्रम का a प्रथम पद तथा d सार्वन्तर है तो

(i) n^{th} term of an A.P.

समांतर श्रेणी का n वां पद

$t_n = a + (n-1)d$

(ii) The sum of the first n terms of an A.P.

समांतर श्रेणी प्रथम n पदों का योगफल

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

(iii) Three consecutive terms/तीन क्रमागत पद

$= a - d, a, a + d$

(iv) Four consecutive terms/चार क्रमागत पद

$= a-3d, a-d, a+d, a+3d$

☞ Geometric Progresion/गुणोत्तर श्रेणी

Sequence/अनुक्रम = $a + ar + ar^2 + ...$

Where a be the first term and r is the common ratio of the sequence of a G.P. then-

जहां किसी गुणोत्तर श्रेणी के अनुक्रम का a प्रथम पद तथा सार्वानुपात r है तो

(i) n^{th} term of a G.P.

गुणोत्तर श्रेणी का n वां पद $a_n = ar^{(n-1)}$

(ii) The sum of the first n terms of a G.P.

गुणोत्तर श्रेणी प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}; r \neq 1 \text{ and } r < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}; r \neq 1 \text{ and } r > 1$$

If the common ratio is equal to 1, then the sum of the first n term of the GP is given by/यदि सार्वानुपात एक के बराबर हो तो गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल $S_n = na$

(iii) Three consecutive terms/तीन क्रमागत पद

$= a, ar, ar^2$ or $\frac{a}{r}, a, ar$

(iv) Four consecutive terms/चार क्रमागत पद

$= a, ar, ar^2, ar^3$ or $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, ar, ar^2$

Maths by Aditya Ranjan sir

06 TRIGONOMETRY/त्रिकोणमिति

1. Trigonometric Ratios/त्रिकोणमिति अनुपात

Consider an acute angle $\angle YAX = \theta$ with initial side AX and terminal side AY. Let P be any point on the terminal side AY. PM perpendicular from P on AX to get the right angled trianlge AMP in which $\angle PAM = \theta$.

माना एक न्यूनकोण $\angle YAX = \theta$ है। जिसमें प्रारम्भिक AX तथा अन्तिम भुजा AY है। भुजा AY पर कोई बिन्दु P है। PM बिन्दु P से भुजा AX पर लम्ब इस प्रकार है कि कोण AMP समकोण है जिसमें $\angle PAM = \theta$ है।

(i) $\text{Sin}\theta = \dfrac{\text{Perpendicular / लम्ब}}{\text{Hypotenuse / कर्ण}} = \dfrac{p}{h}$

(ii) $\text{Cos}\theta = \dfrac{\text{Base / आधार}}{\text{Hypotenuse / कर्ण}} = \dfrac{b}{h}$

(iii) $\text{Tan}\theta = \dfrac{\text{Perpendicular / लम्ब}}{\text{Base / आधार}} = \dfrac{p}{b}$

(iv) $\text{Cosec}\theta = \dfrac{\text{Hypotenuse / कर्ण}}{\text{Perpendicular / लम्ब}} = \dfrac{h}{p}$

(v) $\text{Sec}\theta = \dfrac{\text{Hypotenuse / कर्ण}}{\text{Base / आधार}} = \dfrac{h}{b}$

(vi) $\text{Cot}\theta = \dfrac{\text{Base / आधार}}{\text{Perpendicular / लम्ब}} = \dfrac{b}{p}$

2. Relations Between Trigonometric Ratios

त्रिकोणमिति अनुपात के बीच सम्बन्ध

(i) (a) $\sin\theta = \dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta}$

(b) $\text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

(c) $\sin\theta \,.\, \text{cosec}\theta = 1$

(ii) (a) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

(b) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

(c) $\cos\theta \,.\, \sec\theta = 1$

(iii) (a) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

(b) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

(c) $\tan\theta \,.\, \cot\theta = 1$

(iv) (a) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(b) $\sin\theta = \tan\theta \,.\, \cos\theta$

(c) $\cos\theta = \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}$

(v) (a) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(b) $\cos\theta = \cot\theta \,.\, \sin\theta$

(c) $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta}$

Maths by Aditya Ranjan sir

3. Trigonometric Ratios of Some Special Angles/कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात

Values of the trigonometric ratios for some special angles are given below:

कुछ विशेष कोणों के लिए त्रिकोणमिति अनुपातों के मान नीचे दिए गए हैं

Ratio \ Angle θ	$0°$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	$\frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$	$\frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sin 45}{\cos 45} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sin 60}{\cos 60} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{3}$	$\frac{\sin 90}{\cos 90} = \frac{1}{0}$ $= \infty$ (not defined)
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{0} = \infty$ (not defined)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞ (not defined)
$\cot\theta$	∞ (notdefined)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4. Trigonometric Ratios of Some Special Angles/कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात

(i) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

(ii) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

(iii) $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$

(iv) $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

(v) $\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

(vi) $\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$

5. Trigonometric Identities/त्रिकोणमिति सर्वसमिकाएं

A. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$

B. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$(\sec\theta + \tan\theta) = k$, then $(\sec\theta - \tan\theta) = 1/k$

C. $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta) = 1$

If $(\operatorname{cosec}\theta\cot\theta) = p$,

then $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta) = \frac{1}{p}$

Maths by Aditya Ranjan

6. Trigonometric Ratios in Terms of other Trigonometric Ratios
त्रिकोणमिति अनुपात दूसरे त्रिकोणमिति के रूप में

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}^2\theta-1$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\operatorname{cosec}^2\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2-1}}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}\theta$

7. Sign of Trigonometric Ratios
त्रिकोणमिति अनुपातों के चिन्ह

(i) First Quadrant/प्रथम चतुर्थांश

All trigonometric ratios are positive/ सभी त्रिकोणमिति अनुपात धनात्मक होते हैं।

(ii) Second Quadrant/द्वितीय चतुर्थांश

$\sin\theta$ and $\operatorname{cosec}\theta$ are positive./$\sin\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$ धनात्मक होते हैं।

(iii) Third Quadrant/तृतीय चतुर्थांश

$\tan\theta$ and $\cot\theta$ are positive.$\tan\theta$ और $\cot\theta$ धनात्मक होते हैं।

(iv) Fourth Quadrant/चतुर्थ चतुर्थांश

$\cos\theta$ and $\sec\theta$ are positive./$\cos\theta$ और $\sec\theta$ धनात्मक होते हैं।

Remember:	I	II	III	IV
	All	sin	tan	cos

Note:-

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$,
$\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$,
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

9. Trigonometric Ratios of Some Special Angles/कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात

(i) $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75^\circ$

(ii) $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^\circ$

(iii) $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$

(iv) $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^\circ$

(v) $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^\circ$

(vi) $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^\circ$

(vii) $\sin 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(viii) $\cos 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

10. When sum or Difference Between the Angles are Given/जब कोणों के मध्य अंतर या उनका योग ज्ञात हो:

A. If A + B = 90°, then

$\tan A \tan B = 1$

$\sin A \sec B = 1$

$\cos A \operatorname{cosec} B = 1$

$\cot A \cot B = 1$

$\sin^2 A + \sin^2 B = 1$

$\cos^2 A + \cos^2 B = 1$

B. If A + B = 45° = 225°

$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ or

$(1 - \cot A).(1 - \cot B) = 2$

C. If A + B = 135°, then

$(1 - \tan A)(1 - \tan B) = 2$ or

$(1 + \cot A).(1 + \cot B) = 2$

11. Max/Min Values of Trigonometric Functions/त्रिकोणमिति फलनों के अधिकतम/न्यूनतम मान

A. $m \sin\theta \pm n \cos\theta$

(i) Maximum value/अधिकतम मान $= \sqrt{m^2 + n^2}$

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान $= -\sqrt{m^2 + n^2}$

B. $a\sin^2\theta + b\cos^2\theta$

(i) Maximum value/अधिकतम मान = Max [a,b]

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान = Min [a,b]

C. $a\sin^2\theta + b\operatorname{cosec}^2\theta$

$a\tan^2\theta + b\cot^2\theta$

$a\cos^2\theta + b\sec^2\theta$

(i) Minimum value/न्यूनतम मान $= 2\sqrt{ab}$, when $a \geq b$

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान $= (a + b)$, when $a \leq b$

D. $\sin^n\theta \,.\, \cos^n\theta$

When, n is odd/जब n विषम हो,

(i) Maximum value/अधिकतम मान $= +\frac{1}{2^n}$

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान $= -\frac{1}{2^n}$

When, n is even/जब n सम हो,

(i) Maximum value/अधिकतम मान $= +\frac{1}{2^n}$

(ii) Minimum value/न्यूनतम मान = 0

12. (a) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(b) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(c) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(d) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(e) $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(f) $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

(g) $\cot(A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$

(h) $\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

Maths by Aditya Ranjan sir

13. (a) $\sin 2A = 2\sin A.\cos A = \left(\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}\right)$

(b) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(c) $\tan 2A = \left(\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\right)$

(d) $\cot 2A = \left(\frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}\right)$

14. (a) $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

(b) $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

$= \frac{1-\tan^2 A/2}{1+\tan^2 A/2}$

(c) $\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

(d) $1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$ and $1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$

15. (a) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(b) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(c) $\tan 3A = \left(\frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\right)$

(d) $\cot 3A = \left(\frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}\right)$

16. (a) $\sin(A+B).\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$

(b) $\cos(A+B).\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

17. (a) $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

(b) $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

(c) $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

(d) $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

18. (a) $\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

(b) $\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

(c) $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

(d) $\cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$

If $4\theta < 60°$

19. (a) $\sin\theta.\sin 2\theta.\sin 4\theta = \frac{1}{4}\sin 3\theta$

(b) $\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 4\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta$

(c) $\tan\theta.\tan 2\theta.\tan 4\theta = \tan 3\theta$

For all values of A.

20. (a) $\sin(60°-A)\sin A\sin(60°+A) = \frac{1}{4}\sin 3A$

(b) $\cos(60°-A)\cos A\cos(60°+A) = \frac{1}{4}\cos 3A$

(c) $\tan(60°-A)\tan A\tan(60°+A) = \tan 3A$

21. $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1-(\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A)}$

At $A + B + C = 180° = \pi$,

(i) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

(ii) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

(iii) $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

At $A + B + C = 90° = \pi/2$

$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A\cot B\cot C$.

Maths by Aditya Ranjan sir

Important Facts Useful for Solving Question on Trigonometry/त्रिकोणमिति के प्रश्नों को हल करने में मदद करने वाले महत्वपूर्ण तथ्य

1. $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

2. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

3. If $\text{Cos}\theta + \text{Cos}^2\theta + \text{Cos}^3\theta = 1$
then $\text{Sin}^6\theta - 4\text{Sin}^4\theta + 8\text{Sin}^2\theta = 4$

4. If $\text{Sin}\theta + \text{Sin}^2\theta + \text{Sin}^3\theta = 1$
then $\text{Cos}^6\theta - 4\,\text{Cos}^4\theta + 8\text{Cos}^2\theta = 4$

5. $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta) = 2$

6. $(1 + \cot\theta + \sec\theta)(1 + \tan\theta - \text{cos}\,ec\,\theta) = 2$

7. $(\sin\theta + \cos\theta + 1)(\sin\theta + \cos\theta - 1) = 2\sin\theta\cos\theta$

8. $\dfrac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \sec\theta + \tan\theta = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$

9. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

10. $\dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = 2\sec\theta$

11. $\dfrac{\text{Sin}\theta}{1 + \text{Cos}\theta} = \dfrac{1 - \text{Cos}\theta}{\text{Sin}\theta}$

12. $\dfrac{\text{Cot}\theta}{\text{Cosec}\,\theta - 1} = \dfrac{\text{Cosec} - 1}{\text{Cot}\theta}$

13. $\text{Sec}\theta - \tan\theta = k$ i.e., $\text{Sec}\theta + \tan\theta = \dfrac{1}{k}$

$\Rightarrow \text{Coces}\theta + \text{Cot}\theta = \dfrac{1 + k}{1 - k}$

14. $(\text{Cosec} - \text{Cot}\,\theta)^2 = \dfrac{1 - \text{Cos}\,\theta}{1 + \text{Cos}\,\theta}$, $0° \angle \theta \angle 90°$

15 $\dfrac{\tan\theta_1 + \cot\theta_2}{\tan(90 - \theta_1) + \cot(90 - \theta_2)} = \tan\theta_1 . \cot\theta_2$

16. $\tan\theta\,(1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 4\theta)(1 + \sec 8\theta) = \tan 8\theta$

17. $\sec^4\theta - \tan^4\theta = \sec^2\theta + \tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\theta$
$= 2\sec^2\theta - 1$

18. $\cos ec^4\theta - \cot^4\theta$
$= \cos ec^2\theta + \cot^2\theta$
$= 1 + 2\cot^2\theta = 2\text{cosec}^2\theta - 1$

19. $\dfrac{\text{Cos}\,\theta + \text{Sin}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta - \text{Sin}\,\theta} = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$

20. $a\,\text{Cos}\theta - b\,\text{Sin}\theta = x$
$a\,\text{Sin}\theta + b\,\text{Cos}\theta = c$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

21. $a\,\text{Sec}\theta + b\tan\theta = c$
$a\tan\theta + b\,\text{Sec}\theta = x$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{c^2 + b^2 - a^2}$

22. $a\,\text{Sec}\theta - b\tan\theta = c$
$a\tan\theta - b\,\text{Sec}\theta = x$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{c^2 + b^2 - a^2}$

23. $\text{Sec}\theta + \tan\theta = \dfrac{a}{b}$

$\text{Cosec}\theta + \text{Cot}\theta = \dfrac{a + b}{a - b}$

24. (i) (a) $\sin 1°.\sin 2°.\sin 3°.\sin 4°.....\sin 180° = 0$
(b) $\sin 1°.\sin 2°.\sin 3°.\sin 4°.....$to (greater than $\sin 180°$) $= 0$
(ii) (a) $\cos 1°.\cos 2°.....\cos 90° = 0$
(b) $\cos 1°.\cos 2°.....$to (greater than $\cos 90°$) $= 0$
(iii) (a) $\tan 1°.\tan 2°.....\tan 89° = 1$
(iv) $\text{Sin}^2\theta + \text{Sin}^2(\theta + x) + ...$
$+ \text{Sin}^2[90 - (\theta + x)] + \text{Sin}^2(90 - \theta) = \dfrac{\text{Total terms}}{2}$

Ex.

1. $\text{Sin}^2 5° + \text{Sin}^2 10° + \text{Sin}^2 15° + ...+ \text{Sin}^2 85° + \text{Sin}^2 90°$
$= \dfrac{\text{Total terms}}{2} = \dfrac{17}{2} + 1 = 9\dfrac{1}{2}$

2. $\text{Sin}^2 5° + \text{Sin}^2 6° + ...+ \text{Sin}^2 84° + \text{Sin}^2 85°$
$= \dfrac{\text{Total terms}}{2} = \dfrac{85 - 5 + 1}{2} = \dfrac{81}{2} = 40\dfrac{1}{2}$

(v) If $\sec\theta \pm \tan\theta = x$, then $\sec\theta = \dfrac{x^2 + 1}{2x}$

(vi) If $\sin\theta + \cos\theta = x$, then $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2 - x^2}$

(vii) If $\sin\theta + \text{cosec}\theta = x$, then $\sin^n\theta + \text{cosec}^n\theta = x$

(viii) If $\tan\theta + \cot\theta = x$, then $\tan^n\theta + \cot^n\theta = x$

(viv) It should be noted that/याद रखें।
$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$, $\sin^3\theta = (\sin\theta)^3$, $\cos^3\theta = (\cos\theta)^3$, etc.

Maths by Aditya Ranjan sir

07 Height and Distance
उँचाई और दूरी

☞ **The height and distance problems are solved with the help of trigonometric ratios of angle of elevation in a right-angled triangle.**

ऊँचाई एवं दूरी के प्रश्न समकोण त्रिभुज के उन्नयन कोण के त्रिकोणमिति अनुपात की मदद से हल किये जाते हैं।

Trigonometric ratios are

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$, $\sec\theta = \frac{AC}{BC}$

$\text{cosec}\theta = \frac{AC}{AB}$, $\cot\theta = \frac{BC}{AB}$

☞ **In most of the problems of height and distance, we come across the two special right-angled traingles as follow :**

ऊंचाई और दूरी की अधिकांश प्रश्नों में, हमें दो विशेष समकोण त्रिभुज मिलते हैं जो इस प्रकार हैं:

(i) Angle of elevation is 30° or 60°.

ऐसे त्रिभुज जिसमें उन्नयन कोण 30° या 60° होता है।

(ii) Angle of elevation is 45°

ऐसे त्रिभुज जिसमें उन्नयन कोण 45° होता है।

If one of the angle of a right-angled triangle is 30°, the other acute angle must be 60° and the ratio of the sides will be shown as follows :

यदि किसी समकोण त्रिभुज का एक कोण 30° है, तो दूसरा न्यून कोण 60° होगा और भुजाओं का अनुपात इस प्रकार दिखाया जाएगा:

If one of the angle of a right-angled triangle is 45°, then the other acute angle will also be 45° and the ratio of the sides will be as shown below :

यदि किसी समकोण त्रिभुज का एक कोण 45° है, तो दूसरा न्यून कोण भी 45° होगा और भुजाओं का अनुपात इस प्रकार दिखाया जाएगा:

☞ 30°-60° Relation

In more than 50% of height and distance problems in which two right-angled triangles are formed, angles of elevation or angles of depression will be 30° and 60°.

ऊँचाई और दूरी की 50 प्रतिशत से अधिक प्रश्नों में जिसमें दो समकोण त्रिभुज बनते हैं, उन्नयन कोण या अवनमन कोण 30° और 60° होंगे।

In these height and distance problems in which two angles of elevation or angles of depression are 30° or 60°. In these problems two right-angled triangles will be formed. If one of the side of these two right angled triangle is common or of equal length, the other side will be in the ratio 1 : 3.

ऊँचाई और दूरी के ऐसे प्रश्न जिनमें दो उन्नयन कोण या अवनमन कोण 30° या 60° होते हैं। ऐसे प्रश्नों में दो समकोण त्रिभुज बनते हैं। यदि इन दो समकोण त्रिभुज की एक भुजा उभयनिष्ठ या समान लंबाई की हो, तो दूसरी भुजा 1: 3 के अनुपात में होगी।

(a)

Maths by Aditya Ranjan sir

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

☞ **In most of the problems, of this type**
इस प्रकार के अधिकांश प्रश्नों में,

(i) **If AB will be given, then CD is asked**
यदि **AB** दिया हो, तो **CD** की लंबाई पूछी जाती है।

(ii) **If CD will be given, then AB is asked.**
यदि **CD** दिया हो, तो **AB** की लंबाई पूछी जाती है।

$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$

OR

For this we will see the relation between AB and CD in different cases.
इसके लिए हम **AB** और **CD** के मध्य विभिन्न स्थितियों में संबंध देखते हैं।

(a)

(b)

(c)

(d)

☞

$h^2 = y^2 - x^2$

Maths by Aditya Ranjan sir

☞ **If both angles of elevation are complementary**

यदि दोनों उन्नयन कोण सम्पूरक हों तो

$h^2 = xy$ or $h = \sqrt{xy}$

☞

$a = h(\cot\theta_2 + \cot\theta_1)$

☞

$$h = \frac{a\cot\theta_2}{\cot\theta_2 - \cot\theta_2}$$

☞ **In this type, we will study the question in which the figure will be formed as shown below :**

इस प्रकार में हम ऐसे प्रश्नों का अध्ययन करेंगे जिसमें चित्र निम्नलिखित प्रकार से बनते हैं।

(i) $\theta + \alpha = 90°$ **or both the angle of elevation are complementary.**

$\theta + \alpha = 90°$ या दोनों उन्नयन कोण सम्पूरक होते हैं।

$x^2 = H_1H_2$ or $x = \sqrt{H_1H_2}$

(ii) **Height of the point of intersection of the lines joining from foot of one to top of the other from horizontal line is h.**

एक के पाद को दूसरे के शीर्ष से मिलाने वाली रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु की क्षैतिज रेखा से ऊँचाई h हो तो

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}$$

(iii) **If both angles of elevation are not complementary, then we will solve these problem by using the right-angled triangles ABC and BCD.**

यदि दोनों उन्नयन कोण सम्पूरक न हो तो हम ऐसे प्रश्नों को दो समकोण त्रिभुजों **ABC** और **BCD** का प्रयोग करते हुए हल करते हैं।

☞ **To solve this type of question, we can use following methods.**

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए हम निम्नलिखित विधियों का प्रयोग कर सकते हैं –

First Methods : In this method we use the two right-angled triangles separately.

प्रथम विधि : इसमें हम दो समकोण त्रिभुज अलग-अलग मानते हैं।

Aditya Ranjan Maths by sir

Second Method : Given $\angle ADB = \theta_1$, and $\angle ADC = \theta_2$

In most of the problems of this type

इस प्रकार के अधिकांश प्रश्नों में –

(i) If h will be given, x is asked

यदि h दिया गया होगा तो x पूछा जाएगा

(ii) If x will be given, h is asked

यदि x दिया गया होगा तो h पूछा जाएगा

$$\frac{a}{h} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} \text{ and}$$

$$h = x(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

☞ **The angle of elevation of a cloud at height h above the level of water in a lake is θ and the angle of the depression of its image in the lake is ϕ. Then the height of the cloud above the surface of the lake is:**

एक झील में पानी के स्तर से h ऊँचाई पर बादल का उन्नयन कोण θ है और झील में उसकी छवि का अवनमन कोण ϕ है। तब झील की सतह के ऊपर बादल की ऊंचाई है:

$$H = h\left(\frac{\cot\theta + \cot\phi}{\cot\theta - \cot\phi}\right)$$

Maths by Ranjan sir

Join telegram for daily FREE pdf
Maths by Aditya ranjan

08 NUMBER SYSTEM/संख्या पद्धति

A. Factor/गुणनखंड

$N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times .....$

Where, a, b, c, and d are prime number.

जहां a, b, c, और d अभाज्य संख्या हैं।

(i) Total number of factors of a number

किसी संख्या के कुल गुणनखंडों की सख्ंया

$(p+1)(q+1)(r+1)(s+1).....$

For example : Total number of factors of

उदाहरण: 300 के कुल गुणनखंडों की सख्ंया

$300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2 = (2+1)(1+1)(2+1)$

$= 3\times2\times3 = 18$

(ii) Total number of odd factors

कुल विषम गुणनखंडों की संख्या

$(q+1)(r+1)(s+1).....$ where a = 2

Ex. $240 = 2^4\times3^1\times5^1$

odd factors of 240 = $(1+1)(1+1) = 2\times2 = 4$

(iii) Total number of even factors

कुल सम गंणनखंडों की संख्या

$p(q+1)(r+1)(s+1).....$ = Total factor–odd factors

Ex. $1200 = 2^4\times3^1\times5^2$

Even factors = $4(1+1)(2+1) = 4\times2\times3 = 24$

[or even factors = $5\times2\times3 - 2\times3 = 24$]

Maths by Aditya Ranjan sir

(iv) Sum of factors of a given number

किसी दी हुई संख्या के गुणनखंडों का योगफल

$= (a^0+a^1+...+a^p)\ (b^0+b^1+...+b^q)\ (c^0+c^1+...+c^r).....$

$$\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{r+1}-1}{c-1}$$

Ex. $7056 = 2^4\times3^2\times7^2$

Sum of factors of 7056

$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)\ (3^0 + 3^1 + 3^2)\ (7^0 + 7^1 + 7^2)$

$$= \frac{2^5-1}{2-1}\times\frac{3^3-1}{3-1}\times\frac{7^3-1}{7-1}$$

$$= \frac{31}{1}\times\frac{26}{2}\times\frac{342}{6}$$

(v) Sum of even and odd factors of a number

किसी संख्या के सम और विषम गुणनखंडों का योगफल

(a) Sum of even factors/सम गुणनखंडों का योगफल

$= (a^1+a^2+...+a^p)\ (b^0+b^1+..b^q)\ (c^0+c^1+...+c^r)$

$$=\left(\frac{a^{q+1}-1}{a\times1}-1\right)\times\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{r+1}-1}{c-1}$$

$$=\frac{a^{p+1}-a}{a-1}\times\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{r+1}-1}{c-1}$$

Ex. Sum of even factors of 270 = ?

270 के समगुणनखंडों का योगफल

$270 = 2^1 \times 3^3 \times 5^1$

Sum of even factors

$= (2^1)\ (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)\ (5^0 + 5^1)$

$= 2 \times 40 \times 6 = 480$

or

$$=\left(\frac{2^{1+1}-1}{2-1}-1\right)\left(\frac{3^{3+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right)$$

$$= 2\times\frac{80}{2}\times\frac{24}{4} = 480$$

(b) Sum of odd factors/विषम गुणनखंडों का योगफल

$= a^0\ (b^0+b^1+...b^q)\ (c^0+c^1+....+c^r)$

where a = 2

$$=\frac{b^{q+1}}{b-1}\times\frac{c^{r+1}-1}{c-1}$$

Ex. Sum of odd factors of 360 = ?

360 के विषम गुणनखंडों का योगफल

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

Sum of odd factors

$= 2^0\ (3^0 + 3^1 + 3^2)\ (5^0 + 5^1)$

$= 1 \times 13 \times 6 = 78$

or

$$= \frac{3^{2+1}-1}{3-1}\times\frac{5^{1+1}-1}{5-1} = \frac{26}{2}\times\frac{24}{4} = 78$$

(vi) Sum and number of factors satisfying other conditions

ऐसे गुणनखंडों की संख्या तथा योगफल जो दूसरी दशाओं को सतुष्ट करते हैं।

(a) Sum of factors of a number which are divisible by $(b^1\times c^1)$

$(b^1 \times c^1)$ से विभाज्य संख्या के गुणनखडों का योगफल

$= (a^0+a^1+.....+a^p)\ (b^1+b^2+...b^q)\ (c^1+b^2+...c^r)$

(b) Sum of factors of a number which are divisible by $(a^2\times b^3)$.

$(a^2 \times b^3)$ से विभाज्य संख्या के गुणनखडों का योगफल

$= (a^2+a^3+...+a^b)\ (b^3+b^4+...+b^q)\ (c^1+c^2+...+c^r)$

So that every individual term of the expansion, there is a minimum of $a^2\times b^3$.

(d) Sum of perfect square factors of a number

किसी संख्या के पूर्ण वर्ग गुणनखंडों का योगफल

$= (a^0+a^2+a^4+....)\ (b^0+b^2+....)\ (c^0+c^2+....)$

= Every power only

Ex. Find the sum and the number of factors of 2400 such that the factors are divisible by 15.

2400 के ऐसे गुणनखंडों की संख्या तथा योगफल ज्ञात कीजिए जो 15 से विभाज्य हो।

$2400 = 2^5 \times 5^2 \times 3^1$

Factors which are divisible by 15 should compulsorily have 3^1 an 5^1 in it.

$\therefore$ Sum of factors divisible by 15

$= (2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4 + 2^5)\ (3^1) \times (5^1 \times 5^2)$

$= 63 \times 3 \times 30$

$= 5670$

and consequently the number of factors which are divisible by 15

$= 6 \times 1 \times 2 = 12$

Ex. Find the number of factors of 1080 which are perfect squares.

1080 के ऐसे गुणनखंडों की संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग हो।

$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5^1$

The number of perfect square factors of 1080 are the terms in expansion = 4

Maths by Aditya Ranjan sir

B. Remainder/शेषफल

The remainder is the integer left over after dividing one integer by another to produce an integer quotient

एक पूर्णांक को किसी दूसरे पूर्णांक से भाग देने पर पूर्णांक भागफल प्राप्त करने के बाद शेष बचे पूर्णांक को शेषफल कहते हैं।

Divisor भाजक) Dividend भाज्य (Quotient भागफल
×××
Remainder
शेषफल

Concept of Negative Remainders/नकारात्मक शेषफल की अवधारणा

Remainder by definition are always non-negative but we use negative remainder in calculation for avoid long calculations.

परिभाषा के अनुसार शेषफल हमेशा गैर नकारात्मक होता है। परन्तु लम्बी गणना से बचने के लिए हम नकारात्मक शेषफल का प्रयोग करते हैं।

Ex. 29 % 9 = + 2 because 29 is 2 surplus

29 को 9 से भाग देने पर शेषफल + 2 बचता है। क्योंकि यह 27 से दो अधिक है।

(29 = 9 × 3 +2)

= –7 because 29 is 7 deficient

अथवा, 29 को 9 से भाग देने पर शेषफल –7 बचता है। क्योंकि यह 36 से 7 कम है।

(29 = 9 × 4 – 7)

Special Case:

(i) If two numbers are each divided by the same divisor, the remainder are respectively 'r_1' and 'r_2'. If the sum of the two number be divided by the same divisor, the remainder is 'r_3'. Then

यदि दो संख्याओं में से प्रत्येक को समान भाजक से भाग दिया जाए तो शेषफल क्रमशः r_1 तथा r_2 प्राप्त होते हैं। यदि दोनों संख्याओं के योगफल को भी उसी भाजक से भाग दिया जाए और शेषफल r_3 प्राप्त हो तो,

Divisor/भाजक = $r_1 + r_2 - r_3$

(ii) Remainder of Factor/गुणनखंडों के शेषफल

A dividend is divided by a divisor and there is a remainder. If factor of divisor divides same dividend then assume dividend as the remainder.

किसी भाज्य को किसी भाजक द्वारा भाग दिया जाता है तो कुछ शेषफल प्राप्त होता है। यदि भाजक का गुणनखंड उसी भाज्य को विभाजित करे तो भाज्य को शेषफल मान लें।

Ex. On dividing a certain number by 72 we get 11 as remainder what will be the remainder.

किसी निश्चित संख्या को 72 से भाग देने पर शेषफल 11 प्राप्त होता है, शेषफल क्या होगा यदि–

(i) If the same number is divided by 8

उसी संख्या को 8 से विभाजित किया जाए

(ii) If double of the number is divided by 6

संख्या के दोगुने को 6 से विभाजित किया जाए

(iii) If square of the number is divided by 9

उसी संख्या के वर्ग को 9 से विभाजित किया जाए

(iii) Successive Division/क्रमागत विभाजन

When a number N is divided successively by a and b, remainder obtained are c and d respectively. Which mean first we divide N by a and then the quotient obtained is divided by b.

जब किसी संख्या N को a तथा b द्वारा क्रमागत रूप से भाग दिया जाता है तो शेषफल क्रमशः c तथा d प्राप्त होता है। इसका अर्थ होता है कि पहले हम N को a से भाग देते है और फिर प्राप्त भागफल को b से विभाजित करते हैं।

a) N (x
×
c
d) x (y
×
d

Maths by Aditya Ranjan sir

Ex. A number on being divided by 3 and 4 successively leaves the remainder 1 and 2 respectively. Find the remainder when the same number is divided by 10.

किसी संख्या को 3 तथा 4 द्वारा क्रमागत रूप से भाग दिए जाने पर शेषफल क्रमशः 1 तथा 2 प्राप्त होते हैं। उसी संख्या को 10 भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

Reverse the position of remainder and quotient and start question backward.

शेषफल तथा भागफल की स्थिति को उलटा कर दें और प्रश्न को पीछे से हल करना शुरू करें।

Quotient Remainder

3	1
4	2
0	← For smallest number

3	7	1
4	2	2
	0	

3×2+1

4×0+2

3	19	1
4	6	2
	1	

3×6+1

4×1+2

For second smallest number

Some important rules for remainder/शेषफल के कुछ महत्वपूर्ण नियम

(a) Remainder $\frac{(a^n + b^n)}{(a+b)} = 0$ when n is odd

Ex. $Re\left(\frac{8^{371} + 5^{371}}{13}\right) = 0$ [Here $13 = 8 + 5$]

(b) Remainder $\frac{(a^n + b^n + c^n)}{(a+b+c)} = 0$ when n is odd

Ex. $Re\left(\frac{3^{61} + 2^{61} + 4^{61}}{9}\right) = 0$

(c) Remainder $= \left[\frac{a^n + b^n + c^n + ...}{(a+b+c)}\right] = 0$ if $(a + b + c + ...)$ are in Arithmetic progression and n is odd

Ex. $Re = \left(\frac{16^{73} + 17^{73} + 18^{73} + 19^{73}}{9}\right)$

$\because$ n = 73 (odd), 16+17+18+19 = 70 and 16, 17, 18 and 19 are in A.P.

(d) Remainder $\left[\frac{a^n - b^n}{(a-b)}\right] = 0$ for all value of n

Ex. $Re\left(\frac{8^{36} - 2^{36}}{6}\right) = 0$

(e) Remainder $\left[\frac{a^n - b^n}{(a+b)}\right] = 0$ when n is even.

Ex. $Re\left(\frac{7^{24} - 4^{24}}{11}\right) = 0$

(f) Remainder $\frac{(a+1)^n}{a} = 1$ for all value of n

Ex. $\frac{74^{25}}{73} \Rightarrow \frac{74 \times 74 \times ....}{73} \Rightarrow \frac{1 \times 1 \times 1 \times ....}{73} \Rightarrow 1$

(g) Remainder $[(a-1)^n/a] = 1$ when n is even.
$= (a - 1)$ or -1 when n is odd

Ex. 34^{282} % 35 = $(-1)^{282}$ % 35 = 1 % 35 = 1
34^{281} % 35 = $(-1)^{281}$ % 35 = – 1 % 35 = 35 –1 = 34

C. Rules of divisibility/विभाज्यता के नियम

(i) Divisibility by 2: A number is divisible by 2 if the last digit of the number is 0, 2, 4, 6, or 8.
2 से विभाज्यता: कोई संख्या 2 से विभाज्य होगी यदि संख्या का इकाई अंक 0, 2, 4, 6 अथवा 8 हो।

(ii) Divisibility by 3: A number is divisible by 3 if the sum of the digits of the number is divisible by 3.
3 से विभाज्यता: कोई संख्या 3 ये विभाज्य होगी यदि संख्या के अंकों का योग 3 से विभाज्य हो।

(iii) Divisibility by 4: A number is divisible by 4 if the last two digits of the number are divisible by 4.
4 से विभाज्यता: कोई संख्या 4 विभाज्य होगी यदि संख्या के अन्तिम दो अंक 4 से विभाज्य हो।

(iv) Divisibility by 5: A number is divisible by 5 if the last digit of the number is 0 or 5.
5 से विभाज्यता: कोई संख्या 5 से विभाज्य होगी यदि संख्या का इकाई अंक 0 अथवा 5 हो।

(v) Divisibility by 6: A number is divisible by 6 if the number is divisible by both 2 and 3.
6 से विभाज्यता: कोई संख्या 6 से विभाज्य होगी यदि संख्या 2 तथा 3 दोनों से विभाज्य हो।

(vi) Divisibility by 7: Multiply last digit by 2 and subtract from remaining number. Repeat this process until number become less then check divisibility of 7.
7 से विभाज्यता: संख्या के अन्तिम अंक को 2 से गुणा करें और शेष संख्या से घटा दें। यह प्रक्रिया तब तक दोहराएं जब तक कि संख्या छोटी ना हो जाए और फिर सात की विभाज्यता जांचें।

Maths by Aditya Ranjan Sir

(vii) Divisibility by 8: A number is divisible by 8 if the last 3 digits of the number are divisible by 8.

8 से विभाज्यता: कोई संख्या 8 विभाज्य होगी यदि संख्या के अन्तिम 3 अंक 8 से विभाज्य हो।

(viii) Divisibility by 9: A number is divisible by 9 if the sum of the digits is divisible by 9.

9 से विभाज्यता: कोई संख्या 9 से विभाज्य होगी यदि संख्या के अंकों को योग 9 से विभाज्य

(viv) Divisibility by 11: If the difference between the sum of the digits at odd place and sum of the digits at even places is equal to zero or multiple of 11.

11 से विभाज्यता: यदि संख्या के विषम स्थानों के अंकों के योग का संख्या के सम स्थानों के अंकों के योग से अंतर शून्य या 11 का गुणज हो तो संख्या 11 से विभाज्य होगी।

(ix) Divisibility by 12: A number is divisible by 12 if the number is divisible by both 3 and 4.

12 से विभाज्यता: कोई संख्या 12 से विभाज्य होगी यदि संख्या 3 तथा 4 दोनों से विभाज्य हो।

D. Unit Digit/इकाई अंक

The unit's digit of an expression can be calculated by getting the remainder while the expression is divided by 4.

किसी व्यजंक के इकाई अंक की गणना उसको चार से भाग देने के बाद प्राप्त शेषफल से करते हैं।

Ex. What will be the unit's digit of $(382)^{575}$?

$(382)^{575}$ का इकाई अंक क्या होगा?

Step/चरण 1:

Divide last 2 digits of power by 4 and find out remainder.

घात के अन्तिम 2 अकों को 4 से भाग देकर शेषफल प्राप्त करते हैं।

$$4\overline{)75}\,(18$$
$$\underline{4}$$
$$35$$
$$\underline{32}$$
$$3$$

Step/चरण 2:

Put remainder as a power of unit place number and find out answer.

शेषफल को इकाई अंक की संख्या के घात के रूप में रखकर उत्तर प्राप्त करते हैं।

$2^3 = 8$

Note: In Step 1, if remainder is 0 is then put power equal to 4.

चरण 1 में यदि शेषफल 0 हो तो घात को 4 रखते हैं।

Ex. Find the units digit in each of the following cases.

निम्नलिखित प्रत्येक दशा में इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

(i) $(187)^{282} \times (529)^{321} \times (343)^{236}$

(ii) $(789)^{315} + (232)^{644} + (528)^{253}$

(iii) $(982)^{481} - (219)^{241}$

(i) Divide last 2 digits of power by 4 and put remainder as a power of unit place digit.

घात के अंतिम 2 अंकों को 4 से विभाजित करके प्राप्त शेषफल को इकाई अंक की संख्या की घात के रूप में रखते हैं।

$7^2 \times 9^1 \times 3^4 \Rightarrow 9 \times 9 \times 1 \Rightarrow 1$

(ii) $9^3 + 2^4 + 8^1 \Rightarrow 9 + 6 + 8 \Rightarrow 3$

(iii) $2^1 - 9^1 \Rightarrow 12 - 9 \Rightarrow 3$

[If first number is less than add 10 in it]

[यदि प्रथम संख्या छोटी हो तो इसमें 10 जोड़ दें]

E. LCM and HCF/ल.स.प. और म.स.प

☞ Product of two numbers/दो संख्याओं का गुणनफल = LCM × HCF

☞ Product of "n" numbers/"n" संख्याओं का गुणनफल = $HCF^{(n-1)} \times LCM$

(1) L.C.M. of Fractions/भिन्नों का ल.स.प.

$$= \frac{\text{L.C.M. of Numbnerators}}{\text{H.C.F. of Denominators}}$$

(2) H.C.F. of Fractions/भिन्नों का म.स.प.

$$= \frac{\text{H.C.F. of Numberators}}{\text{L.C.M. of Denominators}}$$

(3) H.C.F. and L.C.M. of polynomials.

बहुपदों का म.स.प. तथा ल.स.प.

(a) H.C.F. of two or more polynomials is the "Common factor of highest degree".

दो या दो से अधिक बहुपदों का म.स.प. "अधिकतम घात का उभयनिष्ठ गुणनखंड"

(b) L.C.M. of two or more polynomials is the "Common multiple of least degree".

दो या दो से अधिक बहुपदों का ल.स.प. "न्यूनतम घात का उभयनिष्ठ गुणज"

(c) $\text{L.C.M.} = \dfrac{1^{st}\text{ polynomial} \times 2^{nd}\text{ polynomial}}{\text{H.C.F.}}$

(d) $\text{H.C.F.} = \dfrac{1^{st}\text{ polynomial} \times 2^{nd}\text{ polynomial}}{\text{L.C.M.}}$

(e) L.C.M. × H.C.F. = Product of two polynomial

Maths by Aditya Ranjan sir

LCM : ल.स.प.

(I)	Find the smallest no. Which is exactly divisible by x, y, z. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x,y,z से पूर्णत: विभक्त हो।	LCM of (x,y,z)
(II)	Find the smallest no. Which when divided by x, y, z leaves remainder "r" in each case. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x,y,z से पूर्णत: भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष r प्राप्त हो।	LCM (x,y,z) + r
(III)	Find the smallest no. Which when divided by x, y, z leaves remainder a,b,c, respectively. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x,y,z से पूर्णत: भाग देने पर शेषफल क्रमश: a,b,c प्राप्त हो।	LCM (x,y,z) – k Where, k = (x–a) = (y–b) = (z – c)

HCF : म.स.प.

(I)	Find the largest no. Which is exactly divisible by x, y, z. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x,y,z से पूर्णत: विभक्त हो।	HCF of (x,y,z)
(II)	Find the largest no. Which when divided by x, y, z leaves remainder "r" in each case. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x,y,z से भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेषफल r प्राप्त होता हो।	HCF [(x–r),(y-r),(z-r)] or HCF [x-y),(y-z),(z-x)]
(III)	Find the largest no. Which when divided by x, y, z leaves remainder a, b, c respectively. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जो x,y,z से भाग देने पर शेषफल क्रमश: a,b,c प्राप्त होता हो।	HCF [(x-a),(y-b),(z-c)]

F. Counting of Numbers/संख्याओं की गिनती

(1) Counting a Digit/अंकों की गिनती

Ex. How many times 5 will come from 350 to 600.
350 से 600 के बीच 5 कितनी बार आएगा।

Sol.

	I Place	II Place	III Place
350 – 400	5	10	×
400 – 500	10	10	1
500 – 600	10	10	99
			(500 alread count)

Ans.155

(2) Digits required to write counting.
गिनती को लिखने के लिए आवश्यक अंक।

Ex. How many digits required to write counting from 1 to 400?
1 से 400 तक की गिनती को लिखने के लिए आवश्यक अंकों की संख्या कितनी है?

Single digits 1 to 9 ⇒ 9 number × 1 digit per number = 9
Double digits 10 to 99 ⇒ 90 number × 2 digits per number = 180
Three digits 100 to 400 ⇒ 301 number × 3 digits per number = 903
Ans: 9+180+903 = 1092 Digits

(3) Sum of digits/अंकों का योगफल

Ex. Find out sum of all digits from 1 to 100.
1 से 100 तक की संख्या में प्रयुक्त सभी अंकों का योगफल ज्ञात कीजिए।

Unit place digit/इकाई अंक ⇒ 10 (1 + 2 +.....+9) = 450
Second place digit/दहाई अंक ⇒ 10 (1 + 2 +.....+ 9) = 450
Third place digit/सैकड़ा ⇒ 1
Total = 450 + 450 + 1 = 901

☞ **Least number to be added or subtracted to given number so it becomes divisible of a divisor.**
किसी दी हुई संख्या में सबसे छोटी संख्या इस प्रकार जोड़ना/घटाना कि यह किसी भाजक से विभाजित हो जाए।

Ex. What is least number to be added to 42072 to get a number which is divisible by 93?
42072 में वह कौन-सी न्यूनतम संख्या जोड़ी जाए कि प्राप्त संख्या 93 से विभाजित हो जाए?

```
93)42072(452
   372
    487
    465
     222
     186
      36
```

So least number to be added is/इसलिए, सबसे छोटी जोड़ी जा सकने वाली संख्या 93 – 36 = 57

☞ **Prime Number/अभाज्य संख्या**

Except 1 each natural number which is divisible by only 1 and itself is called a prime number.
1 को छोड़कर प्रत्येक प्राकृतिक संख्या जो सिर्फ 1 तथा खुद से ही विभाज्य हो, अभाज्य संख्या कहलाती है।

To check whether a number is prime number or not, first take the square root of the number. Round of the square root to the immediately lower integer. Then check divisibility of number by all prime below it. If number is not divisible by any prime number then number is prime number.
कोई संख्या अभाज्य है या नहीं, यह ज्ञात करने के लिए, सबसे पहले संख्या का वर्ग मूल लें, वर्ग मूल को उससे छोटे पूर्णांक के रूप में लिख लें। उसके बाद संख्या की विभाज्यता की जांच उससे छोटी सभी अभाज्य संख्याओं द्वारा करें। यदि किसी भी अभाज्य संख्या से विभाज्य नहीं होती तो यह अभाज्य संख्या है।

Aditya Ranjan Sir

Ex. 137 is prime number or not?

137 अभाज्य संख्या है या नहीं?

$\sqrt{137} \simeq 11 \Rightarrow$ prime number less than or equal to 11 are 2, 3, 5, 7 and 11, 137 is not divisible by any of there. Hence it is prime numbers.

11 से छोटी या बराबर अभाज्य संख्याएं 2, 3, 5, 7 तथा 11 है, 137 इनमें से किसी के भी द्वारा विभाज्य नहीं है इसलिए यह एक अभाज्य संख्या है।

Ex. What is average of prime number from 80 to 100?

80 से 100 तक की अभाज्य संख्याओं का औसत क्या है?

$\sqrt{100} = 10 \Rightarrow$ Prime number less than 10 are 2, 3, 5, 7 Hence, even number and ending with 5 will not prime numbers so only check divisibility of 3 and 7.

10 से कम की अभाज्य संख्याएं 2, 3, 5, 7 हैं, इस प्रकार सम संख्या और 5 इकाई अंक वाली संख्याएं अभाज्य संख्याएं नहीं होगीं। इसलिए सिर्फ 3 और 7 की विभाज्यता जाचें।

Prime number are 83, 89 and 97.

अभाज्य संख्याएं 83, 89, 97 हैं।

Ans: $\frac{83+89+97}{3} = \frac{269}{3} = 89.67$

☞ **Some points about prime numbers.**

अभाज्य संख्याएं से सम्बन्धित कुछ महत्वूपर्ण बिन्दु।

(i) Prime number between 1 to 100 are

1 से 100 के बीच की अभाज्य संख्याएं

(1 to 50 $\Rightarrow$ 15, 50 to 100 $\Rightarrow$ 10)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

(ii) If a and b are any two odd primes then $a^2 + b^2$ and $a^2 - b^2$ is composite numbers.

यदि a तथा b दो विषम अभाज्य संख्याएं हैं तो $a^2 + b^2$ तथा $a^2 - b^2$ भाज्य संख्याएं होगीं।

Co-Prime Numbers/सह-अभाज्य संख्याएं

Two natural numbers are called co-prime (relatively prime) number if they have no common factor other than 1.

दो प्राकृतिक संख्याएं सहअभाज्य या सापेक्ष अभाज्य कहलाती है यदि 1 के सिवाए उनके कोई और उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।

Ex. (3,8), (9,10),(12,17)

☞ **Comparison of Fraction./भिन्नों की तुलना**

It is advisable to compare two fraction by cross multiplication.

भिन्नों की तुलना तिरछे गुणनखंड विधि द्वारा करने की सलाह ली जाती है।

Ex. The greatest value among the fractions.

निम्नलिखित में से सबसे बड़ी भिन्न कौन-सी है।

$\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}$ is :

$\frac{2}{7} \times \frac{1}{3} \Rightarrow 6 < 7$

$\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \Rightarrow 6 < 15$

$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \Rightarrow 20 > 18,$

So $\frac{5}{6}$ is greatest fraction.

☞ **Special case of $a\frac{b}{c}$ numbers**

$a\frac{b}{c}$ प्रकार की संख्याओं पर आधारित विशेष स्थिति

(a) If denominator of a number same as multiplier

यदि किसी संख्या का हर उसके गुणज के समान हो तो

Ex. $999\frac{994}{999} \times 999$ (Same)

Add 5 in 994 so it becomes 999

994 में 5 जोड़ने से यह 999 हो जाती है

$999\frac{(994+5)}{999} \times 999$

$= (999 + 1) \times 999$

$= 999000$

Now substrate 5

$= 999000 - 5 = 998995$

(b) If difference between numerated and denominator is 1.

यदि अंश और हर के बीच का अंतर 1 हो तो

Ex. $\frac{1}{8} + 999\frac{791}{792} \times 99$

Here $792 - 791 = 1$ so we can write $\frac{791}{792} = 1 - \frac{1}{792}$

$= \frac{1}{8} + \left(999 + 1 - \frac{1}{792}\right) \times 99$

$= \frac{1}{8} + 99000 - \frac{99}{792} = 99000$

Maths by Aditya Ranjan sir

(c) Series Type/श्रेणी प्रकार

Ex. $999\frac{1}{5}+999\frac{2}{5}+.....+999\frac{4}{5}$

$999\times4+\frac{1+2+3+4}{5}$

$=(400-4)+\frac{(4\times5)/2}{5}$

$=3996+2=3998$

Ex. $99\frac{1}{11}+99\frac{2}{11}+.....+99\frac{10}{11}$

$=99\times10+\frac{10}{2}=995$

☞ Bar Type Questions/बार वाले प्रश्न

Ex. $0.7777.....\infty=0.\overline{7}$

Let $x=0.777.....\infty$

$10x=7.777.....\infty$

Subtract (1) from (2)

$9x=7\Rightarrow x=\frac{7}{9}$

Ex. $0.535353.....\infty$

$=\frac{53}{99}$

Ex. $0.28383.....\infty=0.2\overline{83}$

Let $x=0.2838383.....\infty$

$10x=2.838383.....\infty$ .....(1)

$1000x=283.838383.....\infty$ .....(2)

Subtract (1) from (2)

$990x=281$

$x=\frac{281}{990}$

Ex. $0.5\overline{73}$

$=\frac{573-5}{990}=\frac{568}{990}$

Ex. $0.38\overline{7}$

$=\frac{387-38}{900}$

$=\frac{349}{900}$

Ex. $0.00\overline{3}$

$=\frac{3}{900}=\frac{1}{300}$.

ARITHMETIC

- TIME & DISTANCE
- RACES & CIRCULAR MOTION
- BOAT & STREAM
- RATIO, PROPORTION & PARTNERSHIP
- MIXTURE & ALLIGATION
- AVERAGE
- TIME & WORK
- PERCENTAGE
- PROFIT, LOSS & DISCOUNT
- SIMPLE & COMPOUND INTEREST

09 TIME AND DISTANCE/समय और दूरी

SPEED, TIME AND DISTANCE

Definition : The speed of a body is defined as the distance covered by it in unit time.

परिभाषा : इकाई समय में तय की गई दूरी को चाल कहते हैं।

Basic Formulae

$$\text{Speed} = \frac{\text{Distance}}{\text{Time}} \text{/चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\text{Time} = \frac{\text{Distance}}{\text{Speed}} \text{/समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

Distance = Speed × Time

दूरी = चाल × समय

Two frineds left Delhi for Goa at 5 a.m. One friend who went by train reached Goa in 24 hours and other friends who went by Aeroplane reached in 3 hours.

दो मित्र दिल्ली से गोवा के लिए पूर्वाह्न 5 बजे निकलते हैं। एक मित्र रेलगाड़ी से 24 घंटे में और दूसरा हवाई जहाज से 3 घंटे में गोवा पहुँचता है।

We know that speed of aeroplane is more than train so time taken by train is more than that of aeroplane.

हम जानते हैं कि हवाई जहाज की चाल रेलगाड़ी से अधिक होती है। इसलिए रेलगाड़ी द्वारा हवाई जहाज से अधिक समय लिया गया।

It can be infer from above explanation that

$$\text{Speed} \propto \frac{1}{\text{Time}} \text{ (When distance is constant)}$$

उपर्युक्त से यह स्पष्ट है कि चाल $\propto \frac{1}{\text{समय}}$ (जहाँ दूरी नियत है)

If two athlete run for constant time then distance covered by the athlete whose speed is more would be more.

यदि दो धावक नियतम समय के लिए दौड़े तो जिसकी चाल अधिक होगी वह अधिक दूरी तय करेगा।

It can be infer from above explanation that distance ∝ time taken (when speed is constant)

उपर्युक्त विवरण से स्पष्ट है कि

दूरी ∝ लिये गये समय (जब चाल नियत हो)

Units of Measurement/माप के मात्रक

- **Time is usually measured in second (sec), minutes (min) or hours (hr).**

  समय को सामान्यत: सेकंड, मिनट अथवा घंटे में मापते हैं।

- **Distance is usually measured in meters (m), kilometer (km) or mile, yards or feet.**

  दूरी को सामान्यत: मीटर, किलोमीटर, मील अथवा यार्ड में मापते हैं।

- **Speed is usually measured in km/h, mile/hr or m/sec.**

  चाल को सामान्यत: किमी/घंटा, मील/घंटा अथवा मी/सेकंड में मापते हैं।

Conversion of Units/मात्रकों का रूपांतरण

1. 1 h = 60 min = 60 × 60 = 3600 sec.
2. 1 km = 1000 m
3. 1 mile = 1.606 km or 1 km = 0.6214 mile of 5 mile = 8 km
4. 1 yard = 3 ft
5. $a \text{ km/hr} = a \times \frac{1000}{60 \times 60} \text{ m/sec}$

$$= a \times \frac{5}{18} \text{ m/sec}$$

$$a \text{ m/sec} = a \times \frac{60 \times 60}{1000} \text{ km/hr}$$

$$= a \times \frac{18}{5} \text{ km/hr}$$

Ex. A man go a certain distance with x km/hr and comes back with a speed of y km/hr. If he takes t hour to go and come back. Find the distance?

एक आदमी x किमी/घंटा के साथ एक निश्चित दूरी तय करता है और y किमी/घंटा की गति से वापस आता है। यदि उसे जाने और वापस आने में t घंटा लगता है। दूरी ज्ञात कीजिए?

$$\text{Then distance/दूरी} = \left(\frac{xy}{x+y}\right) \times t$$

Ex. A man go a certain distance with x km/hr and he comes back with a speed of y km/hr. If he takes t hours more to come back than go. Find the distance.

एक आदमी x किमी/घंटा के साथ एक निश्चित दूरी तय करता है और वह y किमी/घंटा की गति से वापस आता है। यदि वह जाने से वापस आने में t घंटे अधिक लेता है। दूरी का पता लगाएं।

Then distance/दूरी

$$= \left(\frac{xy}{x-y}\right) \times \text{(difference between time)}$$

Maths by Aditya Ranjan sir

➲ **The difference between time can be solved by the following tricks**

➲ समय के अंतर को निम्नलिखित तरकीबों से हल किया जा सकता है

Same important cases in speed
Early, early case '–' (subtraction)
Late, Late case '–' (subtraction)
Early, Late case '+' (Addition)

Late, Early case '+' (Addition)

Average Speed

Amar went to Gaziabad from Delhi by 60 km/hr and then he went to Dadri by 80 km/hr. What is his average speed?
अमर दिल्ली से गाजियाबाद 60 किमी/घंटे और फिर वह दादरी 80 किमी/घंटा की चाल से जाता है। उसकी औसत चाल क्या है?

Basically

$$\text{Average speed} = \frac{\text{Total covered distance}}{\text{Total taken time}}$$

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल तय की गई दूरी}}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

There are three variables viz speed, time and distance. Any two out of three should have been given to solve the question.
यहाँ तीन चर-चाल, समय और दूरी होते हैं। प्रश्न को हल करने के लिए तीन में से कोई दो चर दिये होने चाहिए।

In above question only speed is given so it is not possible to solve question.
उपर्युक्त प्रश्न में सिर्फ चाल दी गई है इसलिए इसको हल करना संभव नहीं है।

Cases for Average Speed
औसत चाल की स्थितियाँ

1. **When distance is constant**
   जब दूरी नियत हो
2. **When time is constant**
   जब समय नियत हो

Case-I/स्थिति-I
When distance is constant
जब दूरी नियत हो

$t_1 = \frac{D}{S_1}$ $\qquad$ $t_2 = \frac{D}{S_2}$

Average speed/औसत चाल =

$$\frac{D+D}{\frac{D}{S_1}+\frac{D}{S_2}} = \frac{2D}{D\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)} = \frac{2S_1S_2}{S_1+S_2}$$

From above explanation, it is clear that when distance is constant, average speed is free from distance. It means three is no need of distance or question can be solved through any supposed distance.
उपर्युक्त विवरण से यह स्पष्ट है कि जब दूरी नियत हो तो औसत चाल दूरी से स्वतंत्र होती है। अर्थात् दूरी की कोई आवश्यकता नहीं होती है अथवा प्रश्न को हल करने के लिए दूरी को कुछ मान लिया जाता है।

Note : In such type of question we can take any value of distance but the ratio of distance which we will take while solving the question must be in the same ratio as given in the question.
ऐसे सवालों में आप कोई भी दूरी ले सकते हैं लेकिन वास्तविक दूरी का जो अनुपात होना चाहिए वही अनुपात हमें सवाल हल करते वक्त लेना पड़ेगा।

Case-II/स्थिति-II
When time is constant
जब समय नियत हो

$D_1 = S_1 \times t$ $\qquad$ $D_2 = S_2 \times t$

Average speed/औसत चाल =

$$\frac{D_1+D_2}{t+t} = \frac{S_1t+S_2t}{t+t} = \frac{t(S_1+S_2)}{2t} = \frac{S_1+S_2}{2}$$

When time is constant, average speed is free from time. It means when time is constant
जब समय नियत हो, तो औसत चाल समय से स्वतंत्र होती है। अर्थात जब समय नियत हो

Average speed/ औसत चाल

$$= \frac{\text{Sum of the speed}}{\text{Number of speeds / observations}}$$

$$\frac{\text{चालों का योग}}{\text{चालों/ पर्यवेक्षणों की संख्या}}$$

Note : In such type of question we can take any value of time but the ratio of time which we will take while solving the question must be in the same ratio as given in the question.

ऐसे सवालों में आप कोई भी समय ले सकते हैं लेकिन वास्तविक समय का जो अनुपात होना चाहिए वही अनुपात हमें सवाल हल करते वक्त लेना पड़ेगा।

➲ Question based on Average Speed with Stoppage

ठहराव के साथ औसत चाल पर आधारित प्रश्न

When stoppage time is taken into consideration while calculating average speed, it is said average speed with stoppage.
जब औसत चाल की गणना करते हुए ठहराव के समय को भी शामिल करते हैं तो इसे ठहराव के साथ औसत चाल के कहते हैं।

Maths by Aditya Ranjan sir

Here,

$S_1 \rightarrow$ Speed of train starting from A
(A से शुरू होने वाले ट्रेन की गति)

$S_2 \rightarrow$ Speed of train starting from B
(B से शुरू होने वाले ट्रेन की गति)

$T \rightarrow$ Time after which they meet each other.
(समय जिसके बाद वे एक-दूसरे से मिलती है)

$T_1 \rightarrow$ Time taken by the train 1 to reach at its destination after crossing each other.
(ट्रेन 1 द्वारा एक-दूसरे को पार करने के बाद अपने गंतव्य तक पहुँचने में लिया गया समय)

$T_2 \rightarrow$ Time taken by the train 2 to reach at its destination after crossing each other.
(ट्रेन 2 द्वारा एक-दूसरे को पार करने के बाद अपने गंतव्य तक पहुँचने में लिया गया समय)

$D \rightarrow$ Total distance form A to B.
(A से B तक की कुल दूरी)

On this concept three types of questions are asked in the exams and they are based on the given formula below :
इस अवधारणा पर परीक्षा में तीन प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं जो नीचे दिये गये सूत्रों पर आधारित होते हैं।

(a) $T = \sqrt{T_1 \times T_2}$

(b) $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

(c) $D = S_1T_1 + S_2T_2$

Buses are leaving bus terminal after every 10 minutes (T_1) But, a person who is moving towards the terminal meets the bus after every 8 minutes (T_2).
प्रत्येक 10 मिनट (T_1) बाद बसें बस टर्मिनल से निकलती हैं लेकिन, एक व्यक्ति जो टर्मिनल की ओर बढ़ रहा है वह हर 8 मिनट (T_2) के बाद बस से मिलता है।

$$\frac{\text{Speed of man}}{\text{Speed of bus}} = \frac{|T_1 - T_2|}{T_2}$$

$$\frac{\text{Speed of Train}}{\text{Speed of Sound}} = \frac{|T_1 - T_2|}{T_2}$$

Here,/यहां,

T_1 = Time after which buses leaves the terminal.
T_1 = समय जिसके बाद बसें टर्मिनल से निकलती हैं।

T_2 = Time after which it meets with the person.
T_1 = समय जिसके बाद बसें व्यक्ति से मिलती हैं।

Basic Concept of Trains
रेलगाड़ी संबंधी प्रश्नों की मूलभूत संकल्पना

- Distance = Speed × Time
  दूरी = चाल × समय
- Difference between Meeting and Crossing
  मिलने और पार करने के बीच अंतर
- Speed/चाल → Relative Speed/सापेक्ष चाल
  $S = (S_A - S_B)$ [Same Direction] (समान दिशा)
  $S = (S_A + S_B)$ [Opposite Direction] (विपरीत दिशा)

$$\text{Time} = \frac{\text{Distance}}{\text{Speed}}, \text{ समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

Generally, Length of the train is given in m and Speed is given in km/hr.
So, always focus on the units.
अतः सदैव इकाई पर ध्यान दें।

Basic points which will help in solving questions

1. When a train crosses a man (stationary), crosses a man walking @ 2km/hr or crosses a man walking @ 10 km/hr.
   जब एक रेलगाड़ी एक व्यक्ति (स्थिर) को पार करती है, 2 किमी/ घंटा की चाल से चलने वाले एक व्यक्ति को पार करती है या 10 किमी/घंटा की चाल से चलने वाले एक व्यक्ति को पार करती है।
   In every case : $D = L_T$ (Length of the train)
   (रेलगाड़ी की लंबाई)
   Here, D refers to the distance which the train has covers extra with respect to the man.
   यहां D रेलगाड़ी की दूरी से संदर्भित है जो रेलगाड़ी व्यक्ति के संदर्भ में अतिरिक्त तय करती है।
2. Distance covered by the train when the train crosses an object:
   किसी वस्तु को पार करने में रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी
   $$D = L_T + L_O$$
   Where:
   L_T = Length of Train
   L_O = Length of Object
   जहाँ
   L_T = रेलगाड़ी की लंबाई
   L_O = वस्तु की लंबाई
3. Train 1 crosses Train 2
   $D = L_1 + L_2$
   $S = S_1 - S_2$ (Same Direction)
   $S_1 + S_2$ (Opposite Direction)
4. Train 1 — Train 2
   L_1 — L_2
   S_1 — S_2
   A person sitting in Train 1 crosses Train 2.
   $D = L_2$
   $S = S_1 - S_2$
   Train 1 crosses a person sitting in Train 2.
   $D = L_1$
   $S = S_1 - S_2$

Aditya Ranjan Maths by

COMMON STATEMENTS USED IN RACE BASED QUESTIONS
दौड़ आधारित प्रश्नों में प्रयुक्त सामान्य कथन

- **In a race of 1 km, A beats B by 100 metre.**
  1 किमी की दौड़ में **A, B** को 100 मीटर के अंतर से हराता है।

A	B	A : B
1000 m	900 m	Speed 10 : 9
T T		

- **In a race of 1 km, A beats B by 10 sec.**
  1 किमी की दौड़ में **A, B** को 10 सेकंड के अंतर से हराता है।

A	B	A : B
1000 m	1000 m	
T	(T + 10) sec.	

- **In a race of 1 km, A can give B a start of 100 metre.**
- 1 किमी की दौड़ में **A, B** को 100 मीटर की शुरूआत देता है।

A	B
1000 m	900 m
T sec	T sec

- **A can give B a start of t minutes :** This statement implies that A will start t minutes after B starts from the starting point.
  A, B को **t** मिनट की शुरूआत देता है : इस कथन का अर्थ है कि शुरूआती बिन्दु से **B** के **t** मिनट बाद **A** शुरू करता है।
- **In a race of 1 km, A gives B a start of 150 metre and still wins by 10 sec.**
  1 किमी की दौड़ में **A, B** को 150 मीटर की शुरूआत देता है और फिर भी 10 सेकंड के अंतर से जीत जाता है।

A	B
1000 m	850 m
T sec	(T + 10) sec

- **Dead Heat :** A dead heat situation is when all participants reach the finishing point at the same instant of time.
  डेड हीट एक ऐसी स्थिति है जिसमें सभी प्रतिभागी अंत बिन्दु पर एक ही समय पर पहुँचते हैं।

Circular track/वृत्तीय पथ

CASE 1:
Same direction and opposite direction
जब दौड़ने की दिशा समान तथा विपरीत हो

- **Meet first time each other at any point on the track in opposite direction /**विपरीत दिशा में दौड़ते हुए पथ के किसी बिंदु पर पहली बार मिलने के लिए लिया गया समय

$$= \frac{L}{(x+y)} \text{ sec.}$$

Where x m/s, y m/s are speeds of A and B resptectively. L = length of the track in meter
जहाँ **A** तथा **B** की चाल क्रमशः **x** मीटर/सेकंड तथा **y** मीटर/सेकंड है। **L** पथ की लम्बाई मीटर में है।

- **Meet first time each other at any point on the track in same direction /**समान दिशा में दौड़ते हुए पथ के किसी बिंदु पर पहली बार मिलने के लिए लिया गया समय

$$= \frac{L}{(X-Y)} \text{ sec}$$

- **Meet each other exactly at the starting point in same or opposite direction/**समान अथवा विपरीत दिशा में दौड़ते हुए पथ के प्रारम्भिक बिंदु पर मिलने के लिए लिया गया समय

$$= \text{LCM}\left(\frac{L}{x}, \frac{L}{y}\right) \text{ sec}$$

CASE 2: When three persons A, B and C are running around a circular track of length L mts with speeds of x, y and z m/s in the same direction,
जब तीन व्यक्ति **A, B** तथा **C** किसी **L** मीटर लम्बाई कें वृत्ताकार पथ पर **x** मीटर/सेकंड, **y** मीटर/सेकंड तथा **z** मीटर/सेकंड की चाल से दौड़ते है।
Meet each other at any point on the track
पथ के किसी बिंदु पर मिलने में लिया गया समय

$$= \text{LCM}\left(\frac{L}{(x-y)}, \frac{L}{y-z}\right) \text{ sec}$$

Maths by Aditya Ranjan sir

10 BOAT AND STREAM/नाव और धारा

Definition & Formulae/परिभाषा तथा सूत्र

There are a variety of subconcepts that are related to answering questions based on boat and streams concept. Given below are the four terms which are important for a candidate to know to understand the concept of streams.

नाव और धाराओं की अवधारणा पर आधारित प्रश्नों के उत्तर देने से संबंधित विभिन्न उप-अवधारणाएं हैं। नीचे चार शब्द दिए गए हैं जो एक परीक्षार्थी के लिए धाराओं की अवधारणा को समझने के लिए महत्वपूर्ण हैं।

- **Stream : The moving water in a river is called a stream.**
  धारा : नदी में बहते जल को धारा कहते हैं।
- **Upstream : If the boat is flowing in the opposite direction to the stream, it is called upstream. In this case, the net speed of boat is called upstream speed.**
  ऊर्ध्वप्रवाह : यदि नाव धारा के विपरीत दिशा में बह रही है, तो इसे ऊर्ध्वप्रवाह कहा जाता है। इस स्थिति में नाव की कुल गति को ऊर्ध्वप्रवाह गति कहते हैं।
- **Downstream : If the boat is flowing along the direction of the stream, it is called downstream. In this case, the net speed of boat is called downtream speed.**
  अनुप्रवाह : यदि नाव धारा के दिशा में बह रही है, तो इसे अनुप्रवाह कहा जाता है। इस स्थिति में नाव की कुल गति को अनुप्रवाह गति कहते हैं।
- **Still Water : Under this circumstance the water is considered to be stationary and the speed of the water is zero.**
  शांत जल : ऐसी स्थिति में जल को स्थिर माना जाता है और जल की गति शून्य होती है।

The questions from this topic may seem to be confusing until a candidate is aware of the above-mentioned terms and how they may be used for answering the questions.

इस विषय के प्रश्न तब तक भ्रमित करने वाले प्रतीत हो सकते हैं जब तक कि कोई उम्मीदवार उपर्युक्त शर्तों से अवगत न हो और प्रश्नों का उत्तर देने के लिए उनका उपयोग कैसे किया जा सकता है।

This topic basically deals with calculating the speed of anything in the water when it flows along with the flow of water or in the opposite direction.

यह विषय मूल रूप से पानी के प्रवाह के साथ या विपरीत दिशा में बहने पर पानी में किसी भी चीज की गति की गणना करने से संबंधित है।

Important Formulae : महत्वपूर्ण सूत्र

Given below are a few important formulas with the help of which you can solve the questions based on boat and streams.

नीचे कुछ महत्वपूर्ण सूत्र दिए गए हैं जिनकी सहायता से आप नाव और जलधारा पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

Candidates must learn these formulas by heart to ensure they are able to answer the simple formula based questions correctly and do not end up losing marks for direct questions.

उम्मीदवारों को इन सूत्रों को दिल से सीखना चाहिए ताकि यह सुनिश्चित हो सके कि वे सरल सूत्र आधारित प्रश्नों का सही उत्तर देने में सक्षम हैं और सीधे प्रश्नों के लिए अंक नहीं गंवाते हैं।

Speed of boat in still water = B
शांत जल में नाव की चाल

Speed of the stream = S
धारा की चाल

1. **Downstream Speed of boat = (B + S)**
   नाव की अनुप्रवाह चाल
2. **Upstream Speed of boat = (B – S)**
   नाव की ऊर्ध्वप्रवाह चाल
3. **Speed of boat in still water**
   शांत जल में नाव की चाल
   $= \frac{1}{2}$ (Downstream speed + Upstream speed)
4. **Speed of the stream/धारा की चाल**
   $= \frac{1}{2}$ (Downstream speed – Upstream speed)

Points to Remember/स्मरणीय तथ्य

1. **If the total time taken by the boat to row a distance of D and reach back to its initial position is T then,**
   यदि नाव द्वारा D की दूरी तय करने और अपनी प्रारंभिक स्थिति में वापस आने में लिया गया कुल समय T है, तो

(a) **Distance between the two places is**
दो स्थानों के बीच की दूरी

$$D = \frac{T(B^2 - S^2)}{2B}$$

(b) **Average speed of the boat** $= \frac{(B^2 - S^2)}{2B}$
नाव की औसत चाल

Maths by Aditya Ranjan sir

2. If it takes T hours more to go to a point upstream than downstream for the same distance. Then,

यदि समान दूरी के लिए धारा के प्रतिकूल किसी बिंदु पर जाने में धारा के अनुकूल जाने की तुलना में T घंटे अधिक लगते हैं, तो

Distance/दूरी = $\frac{T(B^2 - S^2)}{2S}$

3. If a boat travels a distance downstream in T_1 hours and returns the same distance upstream in T_2 hours.

यदि एक नाव धारा के अनुकूल एक दूरी T_1 घंटे में तय करती है और समान दूरी धारा के प्रतिकूल T_2 घंटे में वापस आती है

Then, speed of man in Still water

तो, स्थिर जल में मनुष्य की गति

$= \frac{S(T_2 + T_1)}{(T_2 - T_1)}$

4. If the time taken by the boat to row same distance in downstream is T_1 and in upstream is T_2.

यदि नाव द्वारा अनुप्रवाह में समान दूरी को पार करने में लिया गया समय T_1 है और धारा के प्रतिकूल में T_2 है।

Then, the ratio of speed of the boat to the speed of stream

तो, नाव की गति का धारा की गति से अनुपात

$= \frac{B}{S} = \frac{(T_2 + T_1)}{(T_2 - T_1)}$

Maths by Aditya Ranjan sir

11 RATIO, PROPORTION & PARTNERSHIP

अनुपात, समानुपात तथा साझेदारी

Ratio/अनुपात

$\frac{a}{b}$ is the ratio of a to b is written as a:b and read "a is to b". Where 'a' is called the 'antecedent' and 'b' is called the 'consequent'.

a तथा b का अनुपात $\frac{a}{b}$ है जिसे a : b लिखते है तथा a अनुपात b पढ़ते है जहाँ a को पूर्ववर्ती तथा b को परिणामी कहा जाता है।

Condition:/शर्त

1. (i) If ad = bc then $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

   (ii) If ad > bc then $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

   (iii) ad < bc If $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

2. If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then

   (a) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

   (b) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

   (c) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

   (d) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

   (e) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-a}$

   (f) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

   $\therefore a = bk, c = dk$ (k method)

   (g) For continued proportion $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

   $\therefore b = ck$ & $a = bk$ $\quad \therefore a = (ck)\,k = ck^2$

Proportion/समानुपात

When two ratio are equal, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, then a, b, c, d are said to be in proportion and a, b, c and d are said to be first, 2nd, 3rd and 4th proportion respectively. /जब दो अनुपात बराबर, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ हो तो a, b, c, d समानुपात में होते है तथा a, b, c और d को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ अनुपात कहते है।

Case-1: When 3 numbers are given/जब तीन संख्याए दी गई है।

x : a : : b : c

First proportion/प्रथम अनुपात $x = \frac{ab}{c}$

a : x : : b : c

Second proportion /द्वितीय अनुपात $x = \frac{ac}{b}$

a : b : : x : c

Third proportion/तृतीय अनुपात $x = \frac{ac}{b}$

a : b : : c : x

4th proportion/चतुर्थ अनुपात $x = \frac{bc}{a}$

Case-2: When 2 numbers are given./जब 2 संख्याए दी गई है।

a : b : : b : c

First proportion/प्रथम अनुपात $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\Rightarrow a = \frac{b^2}{c}$

mean proportion/मध्य अनुपात $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\Rightarrow b = \sqrt{ac}$

3rd proportion/तृतीय अनुपात $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\Rightarrow c = \frac{b^2}{a}$

Maths by Aditya Ranjan sir

❖ **Proportion After addition/कुछ जोड़ने के बाद अनुपात**

Let x be a number which is added to a, b, c and d to make them proportional then/यदि x वह संख्या है जिसे a, b, c तथा d में जोड़ने से वे समानुपाती हो जाते है तो

$$x = \frac{bc - ad}{(a + d) - (b + c)}$$

❖ **Proportion After Subtraction/कुछ घटाने के बाद अनुपात**

Let x be a number which is subtracted to a, b, c and d to make them proportional then

यदि x वह संख्या है जिसे a, b, c तथा d में घटाने से वे समानुपाती हो जाते है तो

$$x = \frac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}$$

Partnership/साझेदारी

(A) Different Investments, Same Time Period Of Investing/जब निवेश की धनराशि अलग-अलग हो तथा निवेश का समयान्तराल समान हो तो

If the amount invested by the partners are I_1, I_2, I_3 then the profit is distributed in the ratio $I_1 : I_2 : I_3$.

यदि साझेदारों द्वारा निवेशित धनराशि I_1, I_2, I_3 हो तो उनके लाभ $I_1 : I_2 : I_3$ अनुपात में वितरित होगें

(B) When the investment and the time period is different/जब निवेश की धनराशि तथा समय अन्तराल अलग-अलग हो तो

Let there be three partners, one invests I_1 for t_1 time, second invests I_2 for t_2 time and third invests I_3 for t_3 time. The profit is shared in the ratio

माना तीन साझेदार है, पहला I_1 धनराशि t_1 समय, दूसरा I_2 धनराशि t_2 समय तथा तीसरा I_3 धनराशि t_3 समय के लिए निवेशित करता है। उनके लाभ निम्नलिखित अनुपात में वितरित होगें

$I_1 \times t_1 : I_2 \times t_2 : I_3 \times t_3$.

(C) Different Amounts Invested In Different Time Periods/जब अलग-अलग धनराशि अलग-अलग समय अवधि के लिए निवेशित किये जाये

Let's say in a partnership between A and B, A invests Rs. I_a for a time period of t_a.

But B invests Rs. I_{b1} for a period of t_{b1} time and Rs. I_{b2} for a period of t_{b2} time. In this case the profit will be divided between A and B in the ratio

माना A तथा B के बीच किसी साझेदारी में A द्वारा I_a रूपये t_a समयावधि के लिए निवेशित किया जाता है। परंतु, B द्वारा I_{b1} रूपये t_{b1} समयावधि के लिए तथा I_{b2} रूपये t_{b2} समयावधि के लिए निवेशित किया जाता है। इस दशा में A तथा B के बीच लाभ का वितरण निम्नलिखित अनुपात में होगा।

$I_a \times t_a : (I_{b1} \times t_{b1} + I_{b2} \times t_{b2})$

12 ALLIGATION/एलिगेशन

MIXTURE

In this type of questions, the ratio of the ingredients in the first vessel and the ratio of the ingredients in the second vessel are given. After that, the ratio of the ingredients is also given in the new mixture made by pouring or mixing the mixture of both the vessels in a third vessel. The ratio of the ingredients in the first vessel is written on the left side, the ratio of the same ingredient in the second vessel is written on the right and the ratio of the same ingredient in the third vessel is written in the middle. After using the alligation method, we get the ratio in which the first and the second mixture were mixed or the ratio of the amount of the same ingredient in the first and second vessel.

इस प्रकार के प्रश्नों में पहले पात्र में अवयव के अनुपात तथा दूसरे पात्र में अवयव के अनुपात दिए होते हैं। तत्पश्चात् दोनों पात्रों के मिश्रण को एक तीसरे पात्र में डालने अथवा मिलाने से बने नये मिश्रण में भी अवयव का अनुपात दिया होता है। पहले पात्र में अवयव के अनुपात को बाई ओर, उसी अवयव के दूसरे पात्र में अनुपात को दाई ओर तथा तीसरे पात्र में उसी अवयव के अनुपात को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन विधि का प्रयोग करते ही हमें पहले तथा दूसरे मिश्रण को किस अनुपात में मिलाया गया था अथवा पहले तथा दूसरे में उसी अवयव की मात्रा का अनुपात प्राप्त होता है।

1ST MIXTURE 2ND MIXTURE

OVERALL MIXTURE

Quantity-1 Quantity-2

PERCENTAGE

In this type of questions, the total population of a place, the percentage rate of increase/decrease in the population of males and that of females are given. And the increase/decrease or increase/decrease percentage in the total population of the place is also given. The increase/decrease percentage in the population of males is written on the left, the increase/decrease percentage in the population of females is written on the right and the increase/decrease percentage in the total population is written in the middle. With the help of allegation, we find out the ratio of the initial population of males and females.

इस प्रकार के प्रश्नों में किसी स्थान की कुल जनसंख्या, पुरुषों तथा महिलाओं की जनसंख्या में वृद्धि/कमी की प्रतिशत दर दी गई होती है। तथा स्थान की कुल जनसंख्या में वृद्धि/कमी अथवा प्रतिशत वृद्धि/कमी भी दी गई होती है। पुरुषों की जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि/कमी को बाई ओर, महिलाओं की जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि/कमी को दाई ओर तथा कुल जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि/कमी को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से प्रारम्भ में पुरुषों तथा महिलाओं की जनसंख्या का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।

% inc./dec. (Male) % inc./dec. (Female)

% inc./dec. in Overall Population

Initial number of male : Initial number of female

In this type of questions, the increase/decrease percentage in the expenditure, savings and income of a family/person is given. Increase/decrease percentage in expenditure is written on the left, increase/decrease percentage in savings is written on the right and increase/decrease percentage in income is written in the middle. With the help of allegation, we find out the ratio of expenditure and savings in the beginning.

इस प्रकार के प्रश्नों में किसी परिवार/व्यक्ति के खर्च, बचत तथा आय में प्रतिशत वृद्धि/कमी दी गई होती है। खर्च में प्रतिशत वृद्धि/कमी को बाई ओर, बचत में प्रतिशत वृद्धि/कमी को दाई ओर तथा आय में प्रतिशत वृद्धि/कमी को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से प्रारम्भ में खर्च और बचत का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।

% inc./dec. in Expenditure % inc./dec. in Saving%

% inc./dec. in Income

Expenditure : Saving

Maths by Aditya Ranjan sir

SIMPLE INTEREST

In this type of question the given principal is invested in two different schemes/banks/individuals at two different rates of interest. After a certain time the total amount is received. How much amount was invested in both the schemes/banks/individuals, it is to be found. With the help of given principal, time and amount received, calculate the gross interest rate. The rate of interest on the amount invested in the first scheme / bank / individual is written on the left side, the rate of interest on the amount invested in the second scheme / bank / individual is written on the right and the gross interest rate is written in the middle. With the help of allegation, we find out the ratio of the distributed principal.

इस प्रकार के प्रश्न में दिए गए मूलधन का दो अलग-अलग योजनाओं/बैंकों/व्यक्तियों में निवेश दो अलग अलग ब्याज की दरों पर किया जाता है। कुछ निश्चित समय के पश्चात् कुल धनराशि प्राप्त होती है। दोनों योजनाओं/बैंकों/व्यक्तियों में कितनी धनराशि निवेशित की गई, यह ज्ञात करना होता है। दिए गए मूलधन, समय तथा प्राप्त मिश्रधन की सहायता से सकल ब्याज दर ज्ञात कर लेते हैं। पहली योजना/बैंक/व्यक्ति में निवेशित धनराशि पर ब्याज की दर को बाई ओर, दूसरी योजना/बैंक/व्यक्ति में निवेशित धनराशि पर ब्याज की दर को दाई ओर तथा सकल ब्याज दर को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से वितरित मूलधन का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।

Rate of Interest (1) % — **Rate of Interest (2) %**

Gross Rate of Interest

Principal 1 : Principal 2

PROFIT AND LOSS

In this type of questions, the cost price of two different quantities of an ingredient is given and it is asked, in what ratio we should mixed both the quantities so that by selling the mixture at certain price there would be profit or loss of certain percentage. Find out the cost price of the mixture with the help of given profit/loss percentage. After that, by writing the first cost price on the left side, second cost price on the right side and cost price of the mixture in the middle, find the ratio in which the first and second mixture were mixed.

इस प्रकार के प्रश्नों में किसी अवयव की दो अलग अलग मात्राओं का क्रय मूल्य दिया होता है तथा यह पूछा जाता है कि इनको किस अनुपात में मिलाकर किसी निश्चित मूल्य पर बेचने से कुछ निश्चित प्रतिशत लाभ/हानि होती है। दिए गए प्रतिशत लाभ/हानि की मदद से मिश्रण का क्रय मूल्य ज्ञात कर लेते हैं। तत्पश्चात् पहले क्रय मूल्य को बाई ओर, दूसरे क्रय मूल्य को दाई ओर तथा मिश्रण के क्रय मूल्य को मध्य में लिखकर पहले तथा दूसरे मिश्रण को किस अनुपात में मिलाया गया था, ज्ञात कर लेते हैं।

Cost Price 1 — **Cost Price 2**

Cost Price of Mixture

Quantity (1) : Quantity (2)

In the second type of question, cost price or the quantity of either two different components or two types of any one component is given. The first component or type is sold at a certain profit/loss percentage and the second component or type is sold at a certain profit/loss percentage. Overall there is a profit/loss of a certain amount or percentage. While using allegation, the profit/loss percentage on the first element or type is written on the left side, the profit/loss percentage on the second element or type is written on the right side and the total profit/loss percentage in the middle. From which the ratio of the cast price/quantity of the first and second components or types is obtained.

दूसरे प्रकार के प्रश्न में या तो दो अलग-अलग अवयव अथवा किसी एक अवयव के दो प्रकारों की मात्रा अथवा क्रय मूल्य दिया होता है। पहले अवयव अथवा प्रकार को किसी निश्चित प्रतिशत लाभ/हानि तथा दूसरे अवयव अथवा प्रकार को किसी निश्चित प्रतिशत लाभ/हानि पर बेचा जाता है। कुल मिलाकर कुछ निश्चित धनराशि अथवा प्रतिशत का लाभ/हानि होती है। एलिगेशन का प्रयोग करते समय पहले अवयव अथवा प्रकार पर प्रतिशत लाभ/हानि को बाई ओर, दूसरे अवयव अथवा प्रकार पर प्रतिशत लाभ/हानि को दाई ओर तथा कुल प्रतिशत लाभ/हानि को मध्य में लिखते हैं। जिससे पहले तथा दूसरे अवयव अथवा प्रकारों के क्रय मूल्य/मात्राओं के अनुपात प्राप्त हो जाते हैं।

Profit/Loss (1)% — **Profit/Loss (2)%**

Over all Profit/Loss %

Cost Price (1) : Cost Price (2)
Or Or
Quantity (1) : Quantity (2)

Maths by Aditya Ranjan sir

DISCOUNT

In this type of question, the marked price of the total quantity of an article and the discount percentage on the first and second part of the total quantity is given. The total discount percentage is also given. The first discount percentage is written on the left side, the second discount percentage is on the right and the total discount percentage is written in the middle. The ratio of the marked price of the first and the second part is found by using alligation.

इस प्रकार के प्रश्न में किसी वस्तु की कुल मात्रा का अंकित मूल्य तथा कुल मात्रा के पहले तथा दूसरे भाग पर छूट प्रतिशत दी गई होती है। पहली तथा दूसरी छूट को मिलाकर कुल छूट प्रतिशत भी दी गई होती है। पहली छूट प्रतिशत को बाईं ओर, दूसरी छूट प्रतिशत को दाईं ओर तथा कुल छूट प्रतिशत को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन का प्रयोग से पहले तथा दूसरे भाग के अंकित मूल्य का अनुपात ज्ञात हो जाता है।

DISCOUNT(1)% **DISCOUNT(2)%**

OVERALL DISCOUNT %

Marked Price 1 : Marked Price 2

AVERAGE

In this type of questions separate averages of two groups of fixed number of member/person/element are given. And the total gross average is also given. The number of members/individuals/elements in the first and second group is to be found. Write the average of the first group on the left, the average of the second group on the right and the gross average in the middle. With the help of allegation, the ratio of the number of members/individuals/elements in the first and second group is found.

इस प्रकार के प्रश्नों में निश्चित सदस्य/व्यक्ति/अवयव संख्या के दो समूहों के अलग-अलग औसत दिए होते हैं। तथा कुल सकल औसत भी दिया होता है। पहले तथा दूसरे समूह में सदस्यों/व्यक्तियों/अवयवों की संख्या ज्ञात करनी होती है। पहले समूह के औसत को बाईं ओर, दूसरे समूह के औसत को दाईं ओर तथा सकल औसत को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से पहले तथा दूसरे समूह में सदस्यों/व्यक्तियों/अवयवों की संख्या का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।

Average 1 **Average 2**

Total Average

1st Number : 2nd Number

In these types of questions, how many runs a bowler gives for each wicket (bowling average), is given. Gets a certain number of wickets by giving a certain number of runs in the 'next innings'. Due to which his bowling average becomes slightly lower/higher. We have to find the number of wickets taken by the bowler before or after 'this innings'. First of all, find the bowling average of 'the next innings'. Also find the bowling average after 'this innings' with the help of given increase/decrease. The bowling average before the 'given innings' is written on the left side, the bowling average of 'this innings' on the right side and the bowling average after 'this innings' on the middle. With the help of allegation, find the ratio of the number of wickets before 'this innings' and after 'this innings'.

इस प्रकार के प्रश्नों में कोई गेंदबाज प्रत्येक विकेट के लिए कितने रन देता है (गेंदबाजी औसत), दिया गया होता है। 'अगली पारी' में कुछ निश्चित रन देकर कुछ निश्चित विकेट प्राप्त करता है। जिससे उसका गेंदबाजी औसत कुछ कम/अधिक हो जाता है। 'इस पारी' से पहले अथवा बाद में गेंदबाज द्वारा लिए गए विकेटों की संख्या ज्ञात करनी होती है। सबसे पहले 'अगली पारी' का गेंदबाजी औसत ज्ञात करते हैं। दी गई कमी/वृद्धि की सहायता से 'इस पारी' के बाद का गेंदबाजी औसत भी ज्ञात करते हैं। 'दी गई पारी' के पहले के गेंदबाजी औसत को बाईं ओर, 'इस पारी' के गेंदबाजी औसत को दाईं ओर तथा 'इस पारी' के बाद के गेंदबाजी औसत को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से 'इस पारी' से पहले तथा इसके बाद के विकेटों की संख्या का अनुपात ज्ञात कर लेते हैं।

Bowling Average 1 **Bowling Average 2**

Total Average

Wicket 1 : Wicket 2

Aditya Ranjan Maths by

TIME & DISTANCE

In this type of questions, a certain distance is covered in two parts or by two mediums with different speeds. The average speed of the total distance or the total time taken to cover the total distance is given. The time taken to cover both the different distances is to be found. The speed with which the first distance is covered is written on the left side, the speed with which the second distance is covered on the right and the total average speed is written in the middle. With the help of alligation, the ratio of the time taken to cover both the distances is known.

इस प्रकार के प्रश्नों में किसी निश्चित दूरी दो भागों में अथवा दो माध्यमों द्वारा अलग-अलग चालों से तय किया जाता है। कुल दूरी की औसत चाल अथवा कुल दूरी के साथ कुल समय दिया गया होता है। दोनों अलग-अलग दूरियों को तय करने में लिए गए समय को ज्ञात करना होता है। पहली दूरी को जिस चाल से तय किया गया उसे बाई ओर, दूसरी दूरी को जिस चाल से तय किया गया उसे दाई ओर तथा कुल औसत चाल को मध्य में लिखते हैं। एलिगेशन की सहायता से दोनों दूरियों को तय करने में लिए गए समय का अनुपात ज्ञात हो जाता है।

Average Speed (1) — **Average Speed (2)**

Average Speed

Time 1 : Time 2

❖ **An improtant formula in mixture**

मिश्रण के लिए एक महत्वपूर्ण सूत्र

$$\frac{\text{Left quantity / शेष मात्रा}}{\text{Total quantity / कुल मात्रा}} = \left(1 - \frac{\text{Replaced quantity / प्रतिस्थापित मात्रा}}{\text{Total quantity / कुल मात्रा}}\right)^n$$

Maths by Aditya Ranjan sir

13 AVERAGE/औसत

Average/औसत

Average Formula/औसत का सूत्र

$$= \frac{\text{Total Sum of All Number}}{\text{Number of Item in the Set}}$$

☞ For consecutive Natural Numbers:/क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के लिए

- Average of first n natural no./प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का औसत = $\frac{(n+1)}{2}$
- Average of Square of first n natural no./प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$
- Average of cube of first n natural no./प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का औसत = $\frac{n(n+1)^2}{4}$

☞ For Consecutive Even Numbers:/क्रमागत सम संख्याओं के लिए

- Average of first n even no./प्रथम n सम संख्याओं का औसत = (n + 1)
- Average of Square of first n even no./प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{2(n+1(2n+1))}{3}$
- Average of Cube of first n even no./प्रथम n सम संख्याओं के घनों का औसत = $2n(n+1)^2$

☞ For Consecutive Odd Numbers:/क्रमागत विषम संख्याओं के लिए

- Average of first n odd no./प्रथम n विषम संख्याओं का औसत = n
- Average of Square of first n odd no./प्रथम n विषम संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{(2n+1)(2n-1)}{3}$
- Average of Cube of first n odd no./प्रथम n विषम संख्याओं के घनों का औसत = $n(2n^2-1)$
- Average of consecuitive numbers/क्रमागत संख्याओं का औसत

$$= \frac{\text{First number + Last number}}{2}$$

☞ Important Points:/महत्त्वपूर्ण बिंदु

- If in any series having common difference "d" and Average "k", "x" numbers are added in forward or backward, then
  यदि किसी श्रेणी जिसका सार्वन्तर d तथा औसत k हो और इसमें आगे से अथवा पीछे से x संख्याए जोड़े तो

  $$\text{New Avg.} = k \pm \frac{xd}{2}$$

- In series of even or odd having Avg. "k", when we add "x" no. in forward or backward, Then
  सम अथवा विषम संख्याओं की श्रेणी जिसका औसत k है, उसमें यदि हम आगे से अथवा पीछे से x संख्याएं जोड़े तो

  $$\text{New Avg.} = k \pm x$$

- In series of natural no. having Avg. "k", when we odd "x" no. in forward or backward, Then
  k औसत वाली प्राकृतिक संख्याओं किसी श्रेणी में यदि आगे से अथवा पीछे से x संख्याए जोड़ी जाए तो

  $$\text{New Avg.} = k \pm x / 2$$

- If there are 3 natural numbers and avg. of any two number when added with third no. gives a, b, c. Then natural numbers.
  यदि 3 प्राकृतिक संख्याएं हो और किसी दो संख्याओं के औसत को यदि तीसरी संख्या में जोड़ा जाए तो प्राप्त संख्याए क्रमशः a, b तथा c हो तो

  $$\text{Sum of no} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = k$$

  First no. = 2a – k

  Second no. = 2b – k

  Third no. = 2c – k

- If the average of n_1 observations is a_1, the average of n_2 observations is a_2 and so on, then
  n_1 प्रेक्षणों का औसत a_1, n_2 प्रेक्षणों का औसत a_2, तथा आगे भी इसी प्रकार हों तो

  Average of all the observations/सभी प्रेक्षणों का औसत = $\frac{n_1a_1 + n_2a_2 + ...}{n_1 + n_2 + ...}$

Maths by Aditya Ranjan sir

- **If average of n observations is a but the average becomes b when one observation is eliminated, then value of eliminated observation = n (a – b) + b**

  यदि **n** प्रेक्षणों का औसत **a** हो परन्तु यदि एक प्रेक्षण को विस्थापित कर दिया जाए तो औसत **b** हो जाता है। विस्थापित प्रेक्षण का मान = **n (a – b) + b**

- **If average of n observations is a but the average becomes b when a new observation is added, then value of added observation = n (b–a) + b**

  यदि **n** प्रेक्षणों का औसत **a** हो परन्तु यदि एक प्रेक्षण को और शामिल कर दिया जाए तो औसत **b** हो जाता है। तो शामिल किए गए प्रेक्षण का मान

  = n (b – a) + b

- **If the average of n students in a class is a, where average of passed students is x and average of failed students is y, then**

  यदि किसी कक्षा में **n** विद्यार्थियों का औसत **a** हो, जहां उत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत **x** और अनुत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत **y** हो तो

  Number of students passed/उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या $= \frac{n(a-y)}{(x-y)}$

- **We have n observations out of which some observations (a_1, a_2, a_3....) are replaced by some other new observations and in this way, if the average increase or decreases by b, then Value of new observations**

  यदि हमारे पास **n** प्रेक्षण हों जिसमें से कुछ प्रेक्षणों (a_1, a_2, a_3....) को कुछ नए प्रेक्षणों द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाए तथा इस प्रक्रिया में यदि औसत में **b** की वृद्धि अथवा कमी हो जाए तो नए प्रेक्षणों का मान

  = a±nb

  Where/जहां **, a = $a_1 + a_2 + a_3$ +.....**

  Note: In this formula, the signs of '+' and '–' depend upon the increment or decrement in the average

  इस सूत्र में '+' अथवा '–' का चिन्ह औसत में वृद्धि अथवा कमी पर निर्भर करता है।

- **Bowling Average** $= \frac{\text{Total runs given}}{\text{Total wickets taken}}$

- **Batting Average**

  $= \frac{\text{Total runs scored}}{\text{Total number of innings played}}$

Maths by Aditya Ranjan sir

14 TIME & WORK/समय तथा कार्य

Important Formulae/महत्वपूर्ण सूत्र

- **Efficiency/कार्यक्षमता × Time/समय = Total Work/कुल कार्य**
- **If A can do a piece of work is x days and B can do a piece of work is y days, then both of them working together will do the same work in**

  A किसी काम को **x** दिनों में कर सकता है, जबकि **B** उसी काम को **y** दिनों में कर सकता है। यदि वे एक साथ मिलकर काम करते हैं, तो वह काम कितने दिनों में पूरा होगा?

  $$\frac{xy}{(x+y)} \text{ days}$$

- **If A, B & C are working alone, can complete a work in x, y and z days, respectively, then they will together complete the work in**

  A, B तथा **C** किसी कार्य को क्रमशः **x, y** तथा **z** दिनों में कर सकते हैं। एक साथ कार्य करते हुए वे कार्य को कितने दिनों में समाप्त करेंगे?

  $$\frac{xy}{(xy+yz+zx)} \text{ days}$$

- **If A & B working together, can finish a piece of work is x days, B & C in y days, C & A in z days. The, A + B + C working together will finish the job in**

  A और **B** मिलकर एक काम को **x** दिनों में कर सकते हैं। **B** और **C** मिलकर उसी काम को **y** दिनों में पूरा कर सकते हैं, जबकि **A** और **C** मिलकर उसी काम को **z** दिनों में पूरा कर सकते हैं। एक साथ कार्य करते हुए वे कार्य को कितने दिनों में समाप्त करेंगे?

  $$\frac{2xyz}{(xy+yz+zx)} \text{ days}$$

- **If a working Alone takes "a" days more than A & B, and B working Alone takes "b" days more than A & B. Then, Number of days, taken by A & B working together to finish a job in**

  A और **B** की तुलना में **A** को एक काम पूरा करने में **a** घंटे अधिक लगेंगे तथा **A** और **B** की तुलना में **B** को एक काम पूरा करने में **b** घंटे अधिक लगेंगे। एक साथ कार्य करते हुए वे कार्य को कितने दिनों में समाप्त करेंगे?

  $$\sqrt{ab} \text{ days}$$

- **If M_1 men can do W_1 work in D_1 days working H_1 hours per day and M_2 men can do W_2 work in D_2 days working H_2 hours per day, then**

  M_1 व्यक्ति W_1 कार्य को प्रतिदिन H_1 घंटे करते हुए D_1 दिनों में समाप्त कर सकते हैं। तथा M_2 व्यक्ति W_2 कार्य को प्रतिदिन H_2 घंटे करते हुए D_2 दिनों में समाप्त कर सकते हैं। तो

  $$\frac{M_1 \times D_1 \times H_1}{W_1} = \frac{M_2 \times D_2 \times H_2}{W_2}$$

15 PERCENTAGE /प्रतिशत

Percentage Value/प्रतिशत मान

$\frac{1}{2} = 50\%$	$\frac{1}{11} = 9\frac{1}{11}\%$	$\frac{4}{25} = 16\%$
$\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$	$\frac{1}{12} = 8\frac{1}{3}\%$	$\frac{3}{20} = 15\%$
$\frac{1}{4} = 25\%$	$\frac{1}{13} = 7\frac{9}{13}\%$	$\frac{3}{8} = 37\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{5} = 20\%$	$\frac{1}{14} = 7\frac{1}{7}\%$	$\frac{5}{8} = 62\frac{5}{8}\%$
$\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$	$\frac{1}{15} = 6\frac{2}{3}\%$	$\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$	$\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$	$\frac{7}{8} = 87\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{8} = 12\frac{1}{2}\%$	$\frac{1}{17} = 5\frac{15}{17}\%$	$\frac{2}{25} = 8\%$
$\frac{1}{9} = 11\frac{1}{9}\%$	$\frac{1}{18} = 5\frac{5}{9}\%$	$\frac{2}{5} = 40\%$
$\frac{1}{10} = 10\%$	$\frac{1}{19} = 5\frac{5}{19}\%$	$\frac{1}{20} = 5\%$

Formula to Calculate Percent
प्रतिशत की गणना हेतु सूत्र

☞ **If we have to find y% of x, then**
यदि हमें x के y% का मान ज्ञात करना हो तो

$$y\%\text{of } x = x \times \frac{y}{100}$$

☞ **Conversion of Per cent into Fraction**
प्रतिशत का भिन्न में परिवर्तन

Expressing Per cent (x%) into fraction.
(x%) का भिन्न में परिवर्तन

Required fraction/आवश्यक प्रतिशत $= \frac{x}{100}$

☞ **If two subsequent increase/decrease of X% and Y%. Then/**यदि X% तथा Y% की दो क्रमागत वृद्धि/कमी हो तो

$$\text{Net Change} = \left(\pm X \pm Y \pm \frac{XY}{100}\right)\%$$

Maths by Aditya Ranjan sir

16 PROFIT & LOSS AND DISCOUNT
लाभ और हानि तथा बट्टा

1. Gain/लाभ = Selling price/विक्रय मूल्य (S.P.) – Cost price/क्रय मूल्य (C.P.)
2. Loss/हानि = Cost price/क्रय मूल्य (C.P.) – Selling price/विक्रय मूल्य (S.P.)
3. If the rate of gain or loss are given then
यदि लाभ अथवा हानि की दर दी गई हो तो

(a) Selling price/विक्रय मूल्य

$$= \text{C.P.}\left(1-\frac{\text{loss\%}}{100}\right) \text{or} \left(1+\frac{\text{gain\%}}{100}\right)$$

(b) Cost Price/क्रय मूल्य

$$= \frac{\text{S.P.}}{\left(1+\frac{\text{gain \%}}{100}\right)} \text{ or } \frac{\text{S.P.}}{\left(1-\frac{\text{loss \%}}{100}\right)}$$

(c) The gain or loss is always calculated from the cost price.
लाभ अथवा हानि की गणना हमेशा क्रय मूल्य पर की जाती है।

4. If/यदि SP > CP then Gain/लाभ = S.P. – C.P.

$$\%\,\text{Gain} = \frac{\text{Gain} \times 100}{\text{C.P.}}$$

5. If/यदि SP < CP then Loss/हानि = S.P. – C.P.

$$\%\,\text{Loss} = \frac{\text{Loss} \times 100}{\text{C.P.}}$$

6. In % Gain Condition/प्रतिशत लाभ की स्थिति में

$$\text{SP} = \text{CP}\left(1+\frac{\%\,\text{Gain}}{100}\right)$$

7. If % Loss Condition/प्रतिशत हानि की स्थिति में

$$\text{SP} = \text{CP}\left(1-\frac{\%\,\text{Loss}}{100}\right)$$

8. $$\frac{\text{CP}}{\text{MP}} = \frac{(100-\text{Discount\%})}{(100 \pm \text{Profit/ Loss\%})}$$

9. If two items are sold at same price, each at Rs. x one at a profit of P% and other at a loss of P%, Then
यदि दो वस्तुए समान मूल्य x रुपये तथा एक को लाभ P% और दूसरी को हानि P% पर बेची जाए तो

$$\text{Loss} = \frac{P^2}{100}\%$$

11. If CP is same, Then/यदि क्रय मूल्य समान हो तो
Change is SP % = Change in Profit/Loss %
विक्रय मूल्य में प्रतिशत परिवर्तन = लाभ/हानि में प्रतिशत परिवर्तन

12. If mp of two articles is same, then
यदि दो वस्तुओं के अंकित मूल्य समान हो तो
Difference between SP = Difference between discount
विक्रय मूल्य में अंतर = छूट में अंतर

Maths by Aditya Ranjan sir

17 SIMPLE & COMPOUND INTEREST
साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज

Simple Interest/साधारण ब्याज

S.I. = Simple Interest/साधारण ब्याज

P = Principal/मूलधन

R = Rate/दर

T = Time/समय

$$S.I. = \frac{P \times R \times T}{100} \qquad P = \frac{S.I. \times 100}{R \times T}$$

$$R = \frac{S.I. \times 100}{P \times T} \qquad T = \frac{S.I. \times 100}{P \times R}$$

Instalment for simple interest/साधारण ब्याज के लिए किश्त

$$A = \left[x + \left(x + \frac{x \times R \times 1}{100}\right) + \left(x + \frac{x \times R \times 2}{100}\right) + \ldots\ldots\right]$$

Where, A = Total amount paid/कुल भुगतान किया गया मिश्रधन

x = Value of each instalment/प्रत्येक किश्त का मान

$$\text{Also } A = P + \frac{P \times n \times R}{100}$$

Where, P is the principal/जहाँ P मूलधन है

n is the number of instalments R is the rate of interest.

n किश्तों की संख्या तथा R ब्याज दर है।

Compounded interest/चक्रवृद्धि ब्याज

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

A = Amount/मिश्रधन P = Principle/मूलधन r = rate/दर t= time/समय

Table for direct calculation in CI:

Rate	CI of 2 Years	CI of 3 years	CI of 4 years
5%	10.25%	15.7625%	–21.5%
10%	21%	33.1%	46.41%
15%	32.25%	52.0875%	69.35%
20%	44%	72.8%	107.36%

❖ Important Points/महत्वपूर्ण बिन्दु

- In CI Amount will double in "N" years then,
  यदि चक्रवृद्धि ब्याज पर मिश्रधन "N" वर्षों में दोगुना हो जाए तो

$$N = \frac{69}{r} + 0.35$$

- Difference between CI and SI for two years
  चक्रवृद्धि तथा साधारण ब्याज के बीच दो वर्षों के लिए अन्तर

$$(CI - SI)_{2\,year} = P\left(\frac{R}{100}\right)^2$$

- Difference between CI and SI for three years
  चक्रवृद्धि तथा साधारण ब्याज के बीच तीन वर्षों के लिए अन्तर

$$(CI - SI)_{3\,year} = 3P\left(\frac{R}{100}\right)^2 + P\left(\frac{R}{100}\right)^3$$

Instalment for compound interest/चक्रवृद्धि ब्याज के लिए किश्त

$$P = \left[\frac{x}{\left(1 + \frac{R}{100}\right)} + \frac{x}{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2} + \ldots\ldots \frac{x}{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n}\right]$$

x = value of each instalment/प्रत्येक किश्त का मान

Total amount paid in instalments/किश्त के रूप में भुगतान किया गया कुल मिश्रधन

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

n = Number of instalments/किश्तों की संख्या

Maths by Aditya Ranjan

18 STATISTICS/सांख्यिकी

Mean/माध्य

The arithmetic mean of a given data is the sum of all observations divided by the number of observations. For example, a cricketer's scores in five ODI matches are as follows: 12, 34, 45, 50, 24. To find his average score we calculate the arithmetic mean of data using the mean formula:

किसी दिए गए डेटा का माध्य प्रेक्षणों के योगफल को प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करने पर प्राप्त होता है उदाहरण के लिए, पांच एकदिवसीय मैचों में एक क्रिकेटर के स्कोर 12, 34, 45, 50, 24 हैं। उसका औसत स्कोर ज्ञात करने के लिए हम माध्य सूत्र की सहायता से डेटा का समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं।

Mean/माध्य

$$= \frac{\text{Sum of all observations / सभी प्रेक्षणों का योगफल}}{\text{Number of observations / प्रेक्षणों की संख्या}}$$

Mean/माध्य = (12 + 34 + 45 + 50 + 24)/5

Mean/माध्य = 165/5 = 33

Mean is denoted by $\bar{x}$ (pronounced as x bar).

माध्य को $\bar{x}$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

Types of Data/डेटा के प्रकार

Data can be present in raw form or tabular form. Let's find the mean in both cases.

डेटा को raw डेटा तथा tabular के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं। दोनों स्थितियों में माध्य ज्ञात करें

Raw Data/रॉ डेटा

Let $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ be n observations.

माना $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ कोई n प्रेक्षण हैं।

We can find the arithmetic mean using the mean formula.

हम निम्नलिखित माध्य सूत्र का उपयोग करके समान्तर माध्य ज्ञात कर सकते हैं।

$$\text{Mean, } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Frequency Distribution (Tabular) Form

बारंबारता वितरण (सारणी) डेटा

When the data is present in tabular form, we use the following formula:

जब डेटा सारणी के रूप में दिया गया होता है, तो हम निम्न सूत्र का उपयोग करते हैं:

$$\text{Mean, } \bar{x} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + \ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n}$$

Median/माध्यिका

The value of the middlemost observation, obtained after arranging the data in ascending or descending order, is called the median of the data.

डेटा को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद मध्यतम प्रेक्षण को माधिका कहते हैं।

For example, consider the data: 4, 4, 6, 3, 2. Let's arrange this data in ascending order: 2, 3, 4, 4, 6. There are 5 observations. Thus, median = middle value i.e. 4.

उदाहरण के लिए माना 4, 4, 6, 3, 2 कोई डेटा है इसे सबसे पहले आरोही क्रम 2, 3, 4, 4, 6 में व्यवस्थित करते हैं। कुल 5 प्रेक्षण हैं। इस लिए माध्यिका = मध्यतम मान अर्थात् 4 है।

Case 1: Ungrouped Data/अवर्गीकृत डेटा

Step 1/चरण 1: Arrange the data in ascending or descending order.

डेटा को आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

Step 2/चरण 2: Let the total number of observations be n.

माना प्रेक्षणों की कुल संख्या n है।

To find the median, we need to consider if n is even or odd. If n is odd, then use the formula:

माध्यिका ज्ञात करने के लिए, हमें यह देखना होगा कि n सम है या विषम यदि n विषम है, तो सूत्र का प्रयोग करें:

$$\text{Median/माध्यिका} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} \text{ observation/प्रेक्षण}$$

Case 2: Grouped Data/वर्गीकृत डेटा

When the data is continuous and in the form of a frequency distribution, the median is found as shown below:

जब डेटा निरंतर और बारंबारता वितरण के रूप में होता है, तो माध्यिका निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात की जाती है।

Step 1: Find the median class./माध्यिका वर्ग ज्ञात करें।

Let n = total number of observations i.e. $\sum f_i$

माना n = कुल प्रेक्षण की संख्या अर्थात् $\sum f_i$

Note: Median Class is the class where (n/2) lies.

माध्यिका वर्ग वह वर्ग है जहां (n/2) स्थित होता है

Maths by Aditya Ranjan sir

Step 2: Use the following formula to find the median.

माध्यिका ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करें।

$$\text{Median/माध्यिका} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - c}{f}\right] \times h$$

where/जहां

l = lower limit of median class/माध्यिका वर्ग की निचली सीमा

c = cumulative frequency of the class preceding the median class/संचयी आवृत्ति

f = frequency of the median class/आवृत्ति/बारंबारता

h = class size/वर्ग की माप

Mode/बहुलक

The value which appears most often in the given data i.e. the observation with the highest frequency is called a mode of data.

वह मान जो दिए गए डेटा में सबसे अधिक बार दिखाई देता है यानी उच्चतम आवृत्ति वाले डेटा बहुलक कहलाता है।

Case 1: Ungrouped Data/अवर्गीकृत डेटा

For ungrouped data, we just need to identify the observation which occurs maximum times.

अवर्गीकृत डेटा के लिए, हमें केवल उस प्रेक्षण की पहचान करने की आवश्यकता है जो अधिकतम बार होता है।

Mode/बहुलक = Observation with maximum frequency/अधिकतम आवृत्ति वाला प्रेक्षण

For example in the data: 6, 8, 9, 3, 4, 6, 7, 6, 3, the value 6 appears the most number of times. Thus, mode = 6.

उदाहरण के लिए डेटा 6, 8, 9, 3, 4, 6, 7, 6, 3 में 6 सबसे अधिक बार दिखाई देता है। इसलिए बहुलक = 6

Note: A data may have no mode, 1 mode, or more than 1 mode. Depending upon the number of modes the data has, it can be called unimodal, bimodal, trimodal, or multimodal.

कोई डेटा बिना किसी बहुलक के, एक बहुलक अथवा एक से अधिक बहुलक वाला हो सकता है। डेटा में कितने बहुलक हैं इसके आधार पर ही हम इसे एकल बहुलक, द्वि-बहुलक, त्रि-बहुलक अथवा बहु-बहुलक कहते हैं।

The example discussed above has only 1 mode, so it is unimodal.

ऊपर के उदाहरण में सिर्फ एक बहुलक है इसलिए यह एकल बहुलक है।

Case 2: Grouped Data/वर्गीकृत डेटा

When the data is continuous, the mode can be found using the following steps:

जब डेटा निरंतर होता है, तो निम्न चरणों का उपयोग करके बहुलक को ज्ञात किया जा सकता है।

Step 1: Find modal class i.e. the class with maximum frequency.

बहुलक वर्ग अर्थात् अधिकतम बारंबारता वाला वर्ग ज्ञात कीजिए।

Step 2: Find mode using the following formula:

निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके बहुलक ज्ञात कीजिए:

$$\text{Mode/बहुलक} = l + \left[\frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2}\right] \times h$$

where,/ जहाँ

l = lower limit of modal class,/बहुलक वर्ग की निचली सीमा

f_m = frequency of modal class,/बहुलक वर्ग की बारंबारता

f_1 = frequency of class preceding modal class,/ बहुलक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की बारंबारता

f_2 = frequency of class succeeding modal class,/ बहुलक वर्ग के उत्तरवर्ती वर्ग की बारंबारता

h = class width/वर्ग की चौड़ाई

Maths by Aditya Ranjan sir

Books Published

E- BOOK

NOTE : To get these E- Books free download **RG Vikaramjeet** App from Play Store.

Coming Soon...

Follow us : Rankers Gurukul | Maths by Aditya Ranjan

DOWNLOAD NOW RG VIKARAMJEET APP FOR MATHS SPECIAL BATCH 8506003399