



Độ đo tương quan

NHẬP MÔN THỊ GIÁC MÁY TÍNH

Trình bày: TS Trần Thái Sơn; Email: ttson@fit.hcmus.edu.vn

Độ đo khoảng cách

- Heuristic
 - Minkowski-form
 - Weighted-Mean-Variance (WMV)
- Thống kê phi tham số
 - χ^2
 - Kolmogorov-Smirnov (KS)
 - Cramer/von Mises (CvM)
- Lý thuyết thông tin
 - Kullback-Liebler (KL)
 - Jeffrey-divergence (JD)
- Các độ đo khoảng cách nền:
 - Histogram intersection
 - Quadratic form (QF)
 - Earth Movers Distance (EMD)
- Khoảng cách Mahalanobis
- Khoảng cách Hausdoff



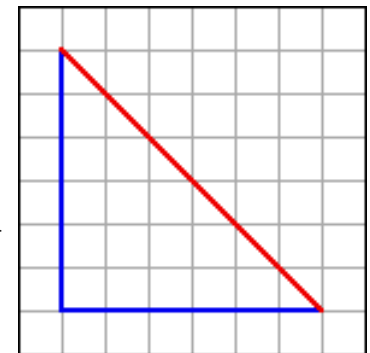
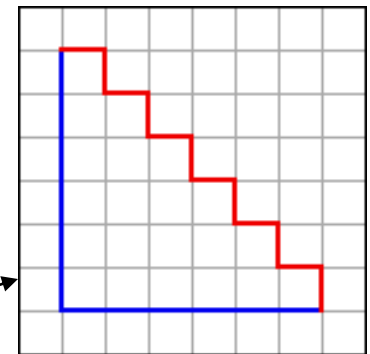
Khoảng cách Heuristic

- Công thức khoảng cách Minkowski L_p

$$D(I, J) = \left(\sum_i |f(i, I) - f(i, J)|^p \right)^{1/p}$$

- Trường hợp đặc biệt:

- L_1 : giá trị tuyệt đối, khoảng cách cityblock hay Manhattan.
- L_2 : khoảng cách Euclidian.



Khoảng cách Heuristic

- Độ lệch trung bình trọng số (Weighted-Mean-Variance):
 - Chỉ chứa một phần rất ít thông tin về phân phối (distribution).

$$D^r(I, J) = \frac{|\mu_r(I) - \mu_r(J)|}{|\sigma(\mu_r)|} + \frac{|\sigma_r(I) - \sigma_r(J)|}{|\sigma(\sigma_r)|}$$



Thống kê phi tham số

- Nonparametric Test Statistics:
- Phương pháp χ^2
- Độ đo dựa trên độ tương đồng của 2 mẫu:

$$D(I, J) = \sum_i \frac{\left(f(i; I) - \hat{f}(i)\right)^2}{\hat{f}(i)},$$

$$\text{where } \hat{f}(i) = \left[f(i; I) + f(i; J)\right] / 2$$



Thống kê phi tham số

- Khoảng cách Kolmogorov-Smirnov:
 - Độ đo dựa trên độ tương đồng của 2 mẫu:

$$D^r(X, Y) = \max_i |F^r(i; X) - F^r(i; Y)|$$

- Kramer/von Mises

$$D^r(X, Y) = \sum_i (F^r(i; X) - F^r(i; Y))^2.$$



Lý thuyết thông tin

- Kullback-Liebler:
 - Chi phí để mã hóa một phân phối thành phân phối khác.

$$D(X, Y) = \sum_i f(i; X) \log \frac{f(i; X)}{f(i; Y)},$$

- Jeffrey divergence:
 - Như KL nhưng tính toán số học nhiều hơn.

$$D(X, Y) = \sum_i f(i; X) \log \frac{f(i; X)}{\hat{f}(i)} + f(i; Y) \log \frac{f(i; Y)}{\hat{f}(i)}.$$



Khoảng cách nền

- Ground Distance:
- Phép giao 2 histogram:
 - Tốt cho so khớp từng phần:

$$d_{\cap}(H, K) = 1 - \frac{\sum_i \min(h_i, k_i)}{\sum_i k_i}$$

- Dạng bình phương:
 - Ký hiệu A là ma trận dương ($A \geq 0$) là ma trận tương quan giữa I và J . f_I và f_J là vector của I và J .

$$D(I, J) = \sqrt{(f_I - f_J)^t A (f_I - f_J)}$$



Khoảng cách nền

- Khoảng cách Earth Mover

Let $P = \{(p_1, w_1), \dots, (p_n, w_n)\}$

$Q = \{(q_1, w_1), \dots, (q_m, w_m)\}$

$D(i, j) = \text{dist}(p_i, q_j)$

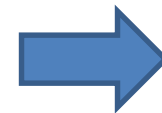
$$\min_{f_{ij}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} d_{ij}$$

$$\text{s.t } f_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} \leq w_{p_i}$$

$$\sum_{i=1}^m f_{ij} \leq w_{q_j}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} = \min\left(\sum_{i=1}^m w_{p_i}, \sum_{j=1}^n w_{q_j}\right)$$

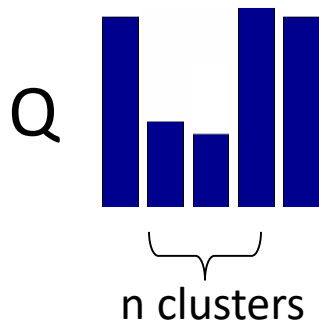
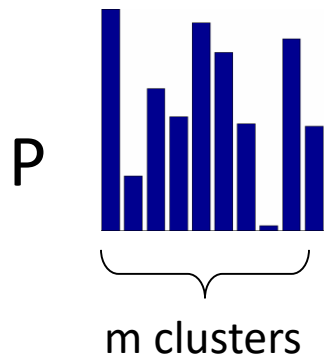


$$EMD(P, Q) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} d_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}}$$



Khoảng cách nền

- Earth Mover Distance



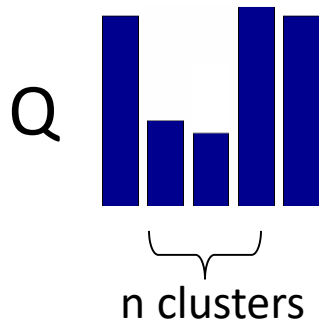
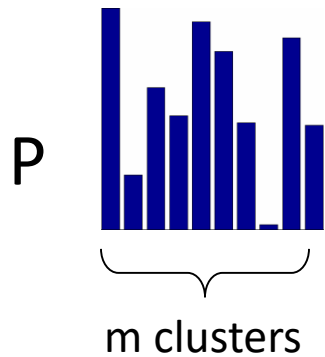
All movements

(distance moved) * (amount moved)



Khoảng cách nền

- Earth Mover Distance

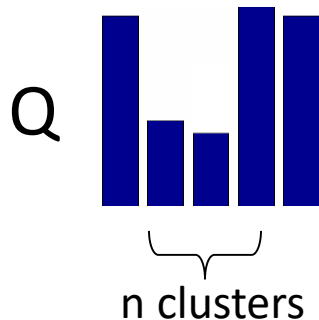
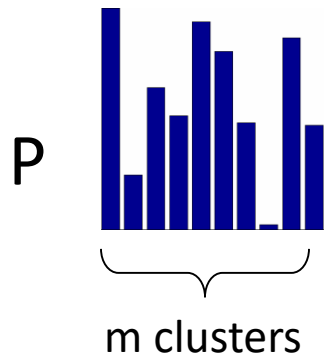


$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\text{distance moved}) * (\text{amount moved})$$



Khoảng cách nền

- Earth Mover Distance

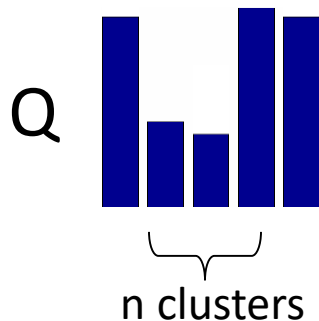
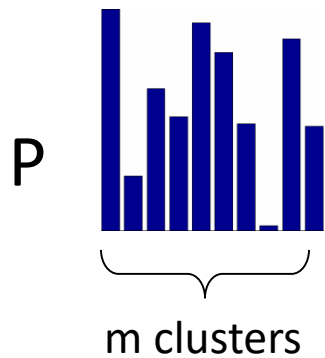


$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} * (\text{amount moved})$$



Khoảng cách nền

- Earth Mover Distance – Linear programming.

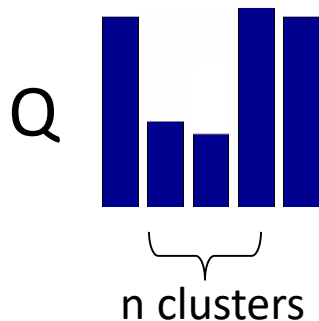
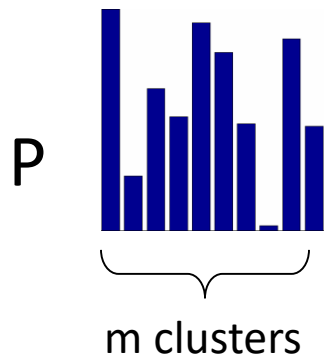


$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} f_{ij} = \text{WORK}$$

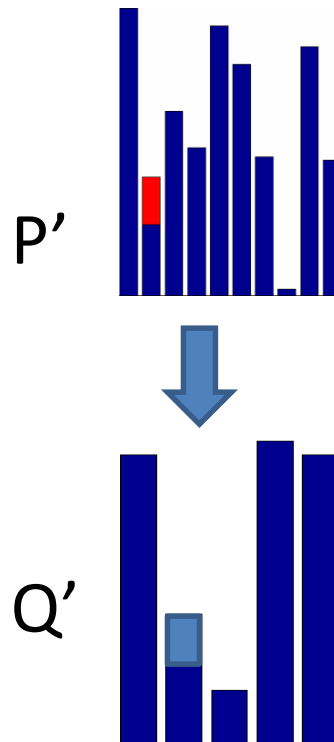


Khoảng cách nền

- Earth Mover Distance – Điều kiện.



- Chỉ có thể di chuyển “earth” từ P sang Q

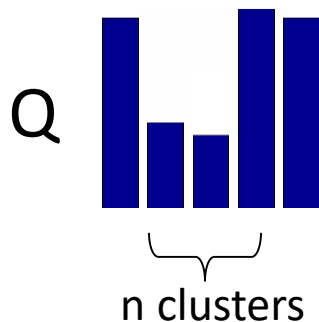
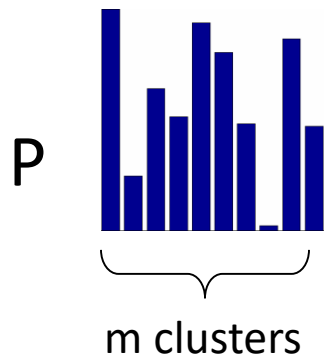


$$f_{ij} \geq 0$$

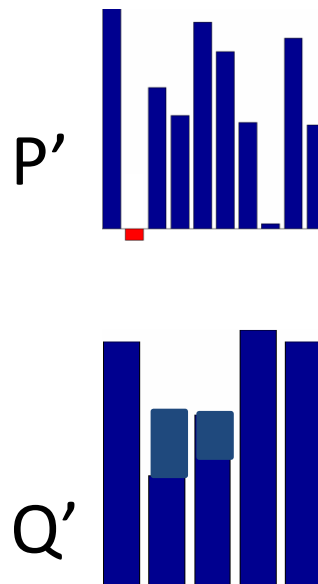


Khoảng cách nền

- Earth Mover Distance – Điều kiện.



2. Không thể chuyển nhiều “earth” hơn vốn có.

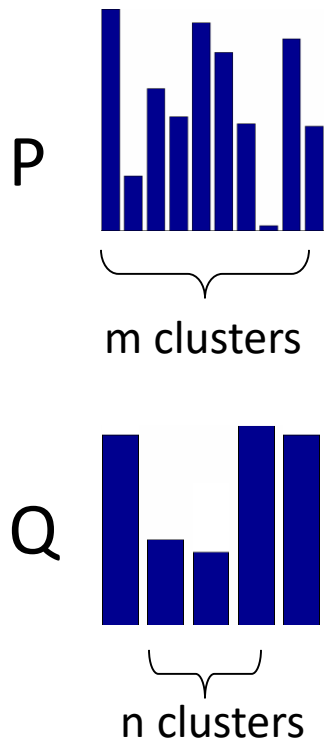


$$\sum_{j=1}^n f_{ij} \leq w_{p_i}$$

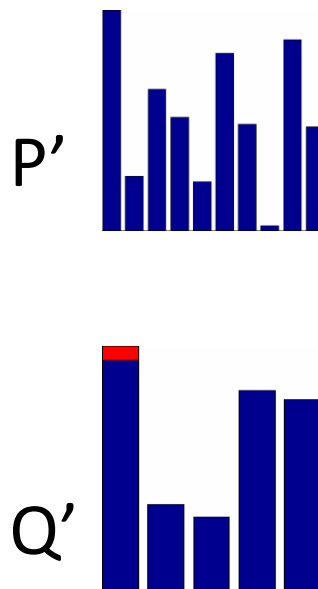


Khoảng cách nền

- Earth Mover Distance – Điều kiện.



3. Q không thể nhận nhiều “earth” hơn nó có thể giữ.

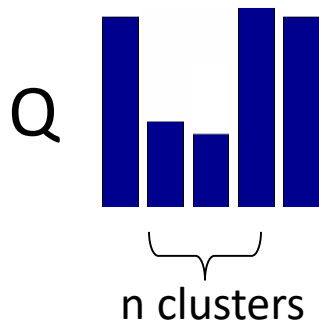
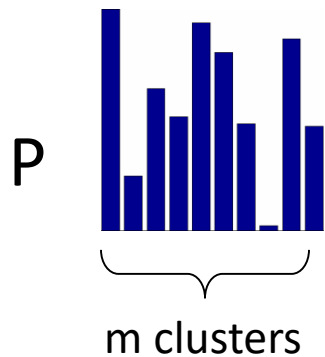


$$\sum_{i=1}^m f_{ij} \leq w_{q_j}$$

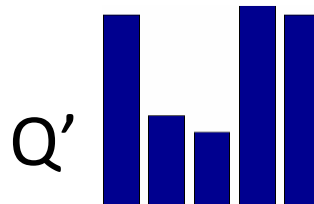
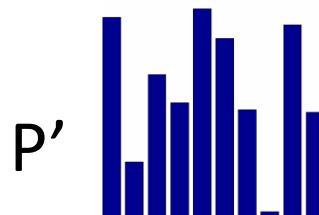


Khoảng cách nền

- Earth Mover Distance – Điều kiện.



4. Phải di chuyển nhiều “earth” nhất có thể

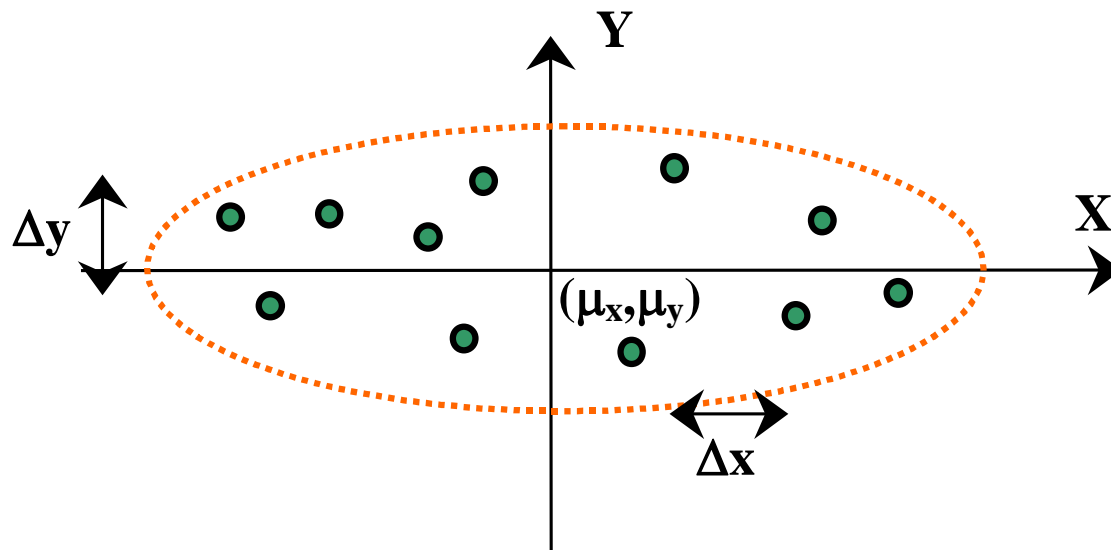


$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} = \min \left(\sum_{i=1}^m w_{p_i}, \sum_{j=1}^n w_{q_j} \right)$$



Khoảng cách Mahalanobis

- Khoảng cách Euclidian có trọng số trên tất cả các chiều như nhau, tuy nhiên trong thống kê không phải lúc nào cũng vậy.

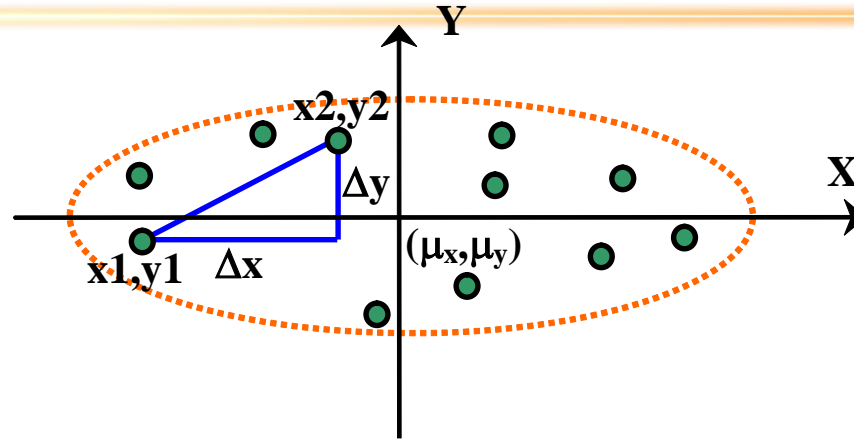


Euclidian distance $\Delta x = \Delta y$

However statistically $\Delta x < \Delta y$



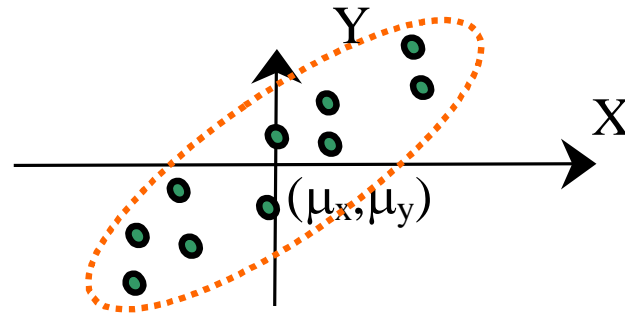
Khoảng cách Mahalanobis



- Với hiệp phương sai nhỏ hay $= 0$ ta có thể chuẩn hóa khoảng cách bằng cách chia cho phương sai.
- $\Delta'x = (x_2 - x_1) / \sqrt{\sigma_{xx}}$ $\Delta'y = (y_2 - y_1) / \sqrt{\sigma_{yy}}$
- $\text{Dist} = \sqrt{(\Delta'x)^2 + (\Delta'y)^2}$
- Ma trận hiệp phương sai là ma trận đường chéo và khoảng cách giữa 2 điểm có thể viết lại:
- $\sqrt{(x_2 - x_1, y_2 - y_1)^T \Sigma^{-1} (x_2 - x_1, y_2 - y_1)} = \text{khoảng cách Mahalanobis}.$



Khoảng cách Mahalanobis



- Khoảng cách Mahalanobis = $\sqrt{(x_2 - x_1, y_2 - y_1)^T \Sigma^{-1} (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$ cũng tốt cho trường hợp hiệp phương sai lớn.
- Giá trị độ đo thay đổi như cách hiệp phương sai tăng.
- Σ là ma trận hiệp phương sai.



Khoảng cách Mahalanobis

- Mahalanobis là phiên bản đa chiều của z-score. Độ đo của khoảng cách từ trọng tâm (giá trị trung bình đa chiều) của phân phối, với hiệp phương sai (phương sai đa chiều) của phân phối.
- Trường hợp điểm ngoài lề (outlier) nếu xác suất của nó < 0.0001 hay bé hơn. Giá trị này tuân theo phân phối chi-square với độ tự do của biến bằng số lượng biến trong phép tính.
- Mahalanobis yêu cầu các biến là metric, ví dụ biến khoảng và biến thứ tự được xem là metric.



Tham khảo

[1] Chapter 2, Shape Analysis and Classification: Theory and Practice, L.D.F. Costa, R.M. Cesar Jr , CRC. Press, 2000.

