Chương 3

PHÉP ĐẾM VÀ HỆ THỨC ĐỆ QUY

lvluyen@hcmus.edu.vn

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼luyen/trr

FB: fb.com/trr2015

Nội dung

Chương 3.
PHÉP ĐẾM VÀ HỆ THỨC ĐỆ QUY

1. Các nguyên lý đếm cơ bản

2. Giải tích tổ hợp
3. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

4. Hệ thức đệ quy

3.1. Các nguyên lý đếm cơ bản

1. **Nguyên lý cộng**
2. **Nguyên lý nhân**
3. **Nguyên lý bù trừ**
4. **Nguyên lý Derichlet**

3.1.1. Nguyên lý cộng

Giả sử để làm công việc A ta có 2 phương pháp

- Phương pháp 1: có n cách làm
- Phương pháp 2: có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là $\boldsymbol{n+m}$.

Ví dụ. An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn một cái áo thì An có mấy cách?

Đáp án. 3+5 =8 cách.

Ví dụ. Nhà trường cần chọn một sinh viên khoa CNTT năm hai, năm ba hoặc năm tư đi tham gia hội nghị sinh viên thành phố. Biết rằng trường có 501 sinh viên năm hai, 402 sinh viên năm ba, 345 sinh viên năm tư. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Đáp án. $501 + 402 + 345 = 1248$ cách.

3.1.2. Nguyên lý nhân

Giả sử để làm công việc A cần thực hiện 2 bước

- Bước 1 có n cách làm
- Bước 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là $\boldsymbol{n \times m}$.

Ví dụ.

Hỏi có nhiêu cách đi từ A đến C?

Đáp án. $3 \times 2 = 6$ cách.

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8?

Giải. Mỗi bit có thể chọn 1 trong 2 cách: 0 hoặc 1. Theo nguyên lý nhân ta có số lượng chuỗi là $2^8 = 256$.

Ví dụ. Cho tập A gồm 6 phần tử và tập B gồm 10 phần tử. Hỏi

a) Có bao nhiêu ánh xạ từ A vào B?

b) Có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B?

Giải. a) Với mỗi phần tử x của A ta có 10 cách chọn ảnh của x (vì B có 10 phần tử). Theo nguyên lý nhân, ta có 10^6 ánh xạ.

b) Giải sử $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$. Ta chia bài toán thành 6 bước:

Bước 1. Chọn ảnh của x_1 có 10 cách.

Bước 2. Chọn ảnh của x_2 có $10 - 1 = 9$ cách.

....

Bước 6. Chọn ảnh của x_6 có $10 - 5 = 5$ cách.

Vậy số đơn ánh là: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$.

Ví dụ. Cho tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau mà chia hết cho 2?

Giải. Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$.

Trường hợp 1. $c = 0$. Khi đó

- c có 1 cách chọn
- a có 5 cách chọn ($a = X \setminus \{0\}$)
- b có 4 cách chọn ($b = X \setminus \{a, 0\}$)

Trường hợp 1 có $1 \times 4 \times 5 = 20$ số.

Trường hợp 2. $c \neq 0$. Khi đó

- c có 2 cách chọn
- a có 4 cách chọn ($a = X \setminus \{c, 0\}$)
- b có 4 cách chọn ($b = X \setminus \{a, c\}$)

Trường hợp 2 có $2 \times 4 \times 4 = 32$ số.

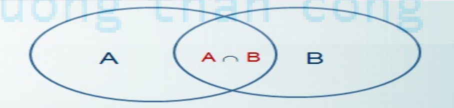
Như vậy có $20 + 32 = 52$ số.

3.1.3. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8 hoặc được bắt đầu bằng 1 hoặc kết thúc bằng 00?

Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Giải ví dụ trên.

- Số lượng chuỗi bit bắt đầu bằng 1 là $2^7 = 128$.
- Số lượng chuỗi bit kết thúc bằng 00 là $2^6 = 64$.
- Số lượng chuỗi bit bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 00 là $2^5 = 32$.

Số lượng chuỗi bit thỏa đề bài là $128 + 64 - 32 = 160$.

Ví dụ. Có 2 bài toán kiểm tra. Trong lớp có 30 sinh viên làm được bài thứ nhất và 20 sinh viên làm được bài thứ hai và chỉ có 10 sinh viên làm được cả 2 bài. Biết rằng mỗi sinh viên đều làm ít nhất một bài, hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

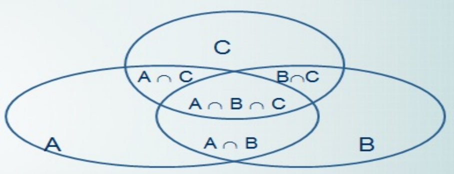
Giải. Ta gọi

- A là những sinh viên giải được bài 1
- B là những sinh viên giải được bài 2

Khi đó $A \cap B$ là những sinh viên giải được cả 2 bài toán. Bài toán đặt ra là tính số phần tử $A \cup B$. Ta có

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 30 + 20 - 10 = 40. \end{aligned}$$

Như vậy lớp có 40 sinh viên.



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ví dụ.(tự làm) Bài kiểm tra Toán Rời Rạc có 3 bài. Biết rằng, mỗi sinh viên làm được ít nhất 1 bài, trong đó có

- 20 sinh viên làm được bài 1.
- 14 sinh viên làm được bài 2.
- 10 sinh viên làm được bài 3.
- 6 sinh viên giải được bài 1 và 3.
- 5 sinh viên giải được bài 2 và bài 3.
- 2 sinh viên giải được bài 1 và 2.
- 1 sinh viên giải được cả 3 bài.

Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

3.1.4. Nguyên lý Derichlet (chuồng bồ câu)

Ví dụ.

- Trong 1 nhóm có 367 người thì ít nhất có 2 người sinh cùng ngày.
- Có 20 chim bồ câu ở trong 7 cái chuồng. Khi đó sẽ có ít nhất 1 chuồng có 3 con bồ câu trở lên.

Định nghĩa. ***Giá trị trần*** của x, ký hiệu là $\lceil x \rceil$, là số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng x.

Ví dụ. $\lceil 2.1 \rceil = 3$; $\lceil 1.9 \rceil = 2$; $\lceil 4 \rceil = 4$;
$\lceil -1.1 \rceil = -1$. $\lceil -2.9 \rceil = -2$; $\lceil -4 \rceil = -4$.

Nguyên lý Derichlet

Giả sử có n chim bồ câu ở trong k chuồng. Khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ $\left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$ bồ câu trở lên.

Ví dụ. Trong 100 người thì có ít nhất $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ cùng tháng sinh.

Ví dụ. Chứng minh rằng trong 10 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 9.

Giải. Khi chia 10 số bất kỳ cho 9 ta sẽ có mỗi số có một số dư trong 9 số dư: $0, 1, 2, \ldots, 7, 8$. Do đó theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư. Hiệu của hai số đó sẽ chia hết cho 9.

Ví dụ. Trong một lớp học phải có ít nhất bao nhiêu học sinh để cho có ít nhất 6 học sinh có cùng thứ bậc học tập, biết rằng có 5 loại thứ bậc A, B, C, D và E?

Giải. Gọi số học sinh của lớp là N. Theo nguyên lý Derichlet ta có $\lceil \frac{N}{5} \rceil = 6$. Khi đó

$$25 < N \leq 30.$$

Do đó ta có thể chọn $N = 26$. Vậy lớp phải có ít nhất 26 học sinh.

1. **Hoán vị**
2. **Chỉnh hợp**
3. **Tổ hợp**

3.2.1. Hoán vị

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một ***hoán vị của*** n phần tử.

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Khi đó A có các hoán vị sau:

$$123, \ 132, \ 213, \ 231, \ 312, \ 321$$

Định nghĩa. Số các hoán vị của n phần tử, ký hiệu là $\boldsymbol{P_n}$

$$\boldsymbol{P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1}$$

Quy ước $0! = 1$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập X?

Ví dụ. Cần sắp xếp 5 học sinh A, B, C, D, E thành một dãy hàng dọc

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai học sinh A và B luôn đứng ở hai đầu hàng ?

Giải. a) Để xếp 5 học sinh theo một dãy hàng dọc ta chỉ cần xếp 5 học sinh theo thứ tự. Vậy có $P_5 = 5! = 120$ cách.

b) Do 2 bạn A, B đứng đầu hàng nên có $2! = 2$ cách xếp 2 bạn đứng đầu. Ba vị trí còn lại ta chọn 3 học sinh còn lại và xếp theo thứ tự nên có $3! = 6$ cách. Vậy theo nguyên lý nhân ta có: $2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$ cách.

Ví dụ. Từ 6 chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ? bao nhiêu số không chia hết cho 5?

Giải. Để có số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau ta chọn sắp xếp 6 chữ số đã cho theo thứ tự. Nên có $P_6 = 6! = 720$ số.

Gọi $x = \overline{abcdef}$ là số có 6 chữ số khác nhau.

- Nếu x là số lẻ thì $f \in \{1, 3, 5\}$ nên f có 3 cách chọn. Năm số còn lại $a\,b\,c\,d\,e$ là hoán vị của 5 chữ số còn lại (vì đã loại đi số f). Nên có $5!$ cách chọn. Vậy theo qui tắc nhân ta có $3 \times 5! = 360$ số lẻ
- Tương tự như lý luận trên, ta có $5!$ số chia hết cho 5. Như vậy số không chia hết cho 5 là $6! - 5! = 600$.

Ví dụ.(tự làm) Cần sắp xếp 3 sinh viên nữ và 5 sinh viên nam thành một hàng dọc.

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu 3 sinh viên nữ luôn đứng liền nhau ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu sinh viên đứng đầu hàng là sinh viên nữ và sinh viên cuối hàng là sinh viên nam ?

Đáp án. a) $5! \times 6 \times 3! = 4320$ cách b) $3 \times 5 \times 6! = 10800$ cách

3.2.2. Chỉnh hợp

Định nghĩa. Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử $(1 \leq k \leq n)$ sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một ***chỉnh hợp chập** k **của** n* phần tử.

Ví dụ. Cho $X = \{a, b, c\}$. Khi đó X có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là:

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bc,\ cb$$

Định nghĩa. Số các chỉnh hợp chập k của n, ký hiệu là A_n^k, và

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau ngồm 3 chữ số được tạo thành từ $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Đáp án. A_6^3 số.

Ví dụ.(tự làm) Một lớp có 15 học sinh nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam.

c) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ.

Đáp án. $a)\ A_{35}^3$

$b)\ 15 \times A_{34}^2$

$c)\ A_{35}^3 - A_{15}^3$

3.2.3. Tổ hợp

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một ***tổ hợp chập k của n*** phần tử.

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X là

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

Định nghĩa. Số tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là $\binom{n}{k}$ hay C_n^k,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ví dụ. Một lớp có 30 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn?

Đáp án. C_{30}^{10} cách.

Ví dụ.(tự làm) Cho 20 điểm khác nhau nằm trên mặt phẳng. Không có bất cứ 3 điểm nào trong số đó thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác, tứ giác có đỉnh là một trong các điểm đã cho.

Đáp án. C_{20}^3 tam giác C_{20}^4 tứ giác

Ví dụ.(tự làm) Một lớp có 40 sinh viên gồm 25 nam và 15 nữ. Ta cần chọn ra 6 sinh viên tham gia hội nghị của trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) Không phân biệt nam nữ ?

b) Có 4 nam và 2 nữ ?

c) Có ít nhất là 4 sinh viên nam ?

Đáp án. a) C_{40}^6 b) $C_{25}^4 \times C_{15}^2$

c) $C_{25}^4 \times C_{15}^2 + C_{25}^5 \times C_{15}^1 + C_{25}^6 \times C_{15}^0$

3.3. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

1. **Hoán vị lặp**
2. **Tổ hợp lặp**
3. **Khai triển lũy thừa của đa thức**

3.3.1. Hoán vị lặp

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ AAABB?

Đáp án. 10

Định nghĩa. Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i $(1 < i \leq k)$ giống hệt nhau, nghĩa là

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là ***một hoán vị lặp*** của n.

Số hoán vị lăp của n trong trường hợp này là

$$\mathbf{\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

Giải. Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{7!}{3! \times 1! \times 2! \times 1!} = 420$$

Ví dụ.(tự làm) Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3.

Hướng dẫn. Số tự nhiên đó có 10 chữ số, trong đó có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3. Do đó ta sẽ lập được

$$\frac{10!}{5! \times 2! \times 3!} = 2520 \text{ số}$$

3.3.2. Tổ hợp lặp

Ví dụ. Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

Đáp án. An có 6 cách chọn là AA, AB, AC, BB, BC, CC.

Định nghĩa. Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là ***tổ hợp lặp*** chập k của n.
Số các tổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là $\boldsymbol{K_n^k}$ và

$$\boldsymbol{K_n^k = C_{n+k-1}^k}.$$

Hệ quả. *Số nghiệm nguyên không âm* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0)$ *của phương trình*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

là $K_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Ví dụ. Tìm số nhiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

Giải. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình là: $K_3^{10} = C_{12}^{10}$.

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (*)$$

thỏa điều kiện $x_1 \geq 4; x_2 > 2; x_3 > 5; x_4 \geq -2$

Giải. Ta viết điều kiện đã cho thành

$$x_1 \geq 4; x_2 \geq 3; x_3 \geq 6; x_4 \geq -2.$$

Đặt

$$y_1 = x_1 - 4;\ y_2 = x_2 - 3;\ y_3 = x_3 - 6;\ y_4 = x_4 + 2.$$

Khi đó $y_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq 4)$. Phương trình $(*)$ trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9 \qquad (**)$$

Ta có số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số nghiệm của phương trình $(**)$. Do đó số nghiệm của phương trình $(*)$ là $K_4^9 = C_{12}^9$.

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

thỏa điều kiện $x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 > 4. \quad (*)$

Giải. Ta viết điều kiện đã cho thành

$$0 \leq x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5; x_4 \geq 0.$$

Xét các điều kiện sau:

- $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5;\ x_4 \geq 0 \qquad (**)$
- $x_1 > 3;\ x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5;\ x_4 \geq 0 \qquad (***)$

Gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình thỏa các điều kiện $(*), (**), (***)$. Ta có $\boldsymbol{p = q - r}$.

Trước hết ta tìm q. Đặt

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2 - 2; y_3 = x_3 - 5; y_4 = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \qquad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

Số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$. Vậy $q = C_{16}^{13}$.

Lý luận tương tự ta có $r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$. Như vậy

$$p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^9 = 560 - 220 = 340.$$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện $(*)$ là 340.

Hệ quả. *Số cách chia k vật đồng chất nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n.*

Ví dụ.(tự làm) Tìm số cách chia 15 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ.

Đáp án. $K_4^{15} = C_{18}^{15}$.

Ví dụ. Tìm số nghiêm nguyên không âm của bất phương trình sau:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11.$$

Giải. Thêm ẩn phụ $x_4 \geq 0$ vào bất phương trình, ta có bất phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

với x_1, x_2, x_3, x_4 là các số nguyên không âm. Do đó số nghiệm của bất phương trình là: $K_4^{11} = C_{14}^{11} = 364$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$x + y + z \leq 20,$$

biết $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x+y+z \leq 15$ thỏa điều kiện $2 \leq x \leq 6, y \geq 2, z \geq 3$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x+y+z+t = 16$ thỏa điều kiện $2 \leq x \leq 5, y \geq 1, z \geq 2, t \geq 3$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$ biết $x_1 \geq 1$ hay $x_2 \geq 2$.

Ví dụ.(tự làm) Có bao nhiêu cách chia 18 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ đều có bi và đứa lớn nhất được ít nhất 6 viên bi.

3.3.3. Khai triển lũy thừa của đa thức

Định lý. *Cho x, y là biến và n là số tự nhiên. Khi đó*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \\ &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n.\end{aligned}$$

Ví dụ. Khai triển $(x+y)^4$

Giải.
$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{k=0}^{4} C_4^k x^{4-k} y^k \\ &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4. \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Khai triển $(2x-3y)^5$

Ví dụ. Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(2x-3y)^{25}$?

Giải. Dựa vào Định lý, ta có

$$\Big[2x+(-3y)\Big]^{25} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^{k}(2x)^{25-k}(-3y)^{k}.$$

Do đó hệ số của $x^{12}y^{13}$ có được khi $k=13$. Suy ra hệ số cần tìm là:

$$C_{25}^{13}\,2^{12}(-3)^{13} = -33959763545702400.$$

Định lý. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các biến và n là số nguyên dương. Khi đó*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

Ví dụ. Tìm hệ số của x^3y^5z trong khai triển $(x+2y-3z+t)^9$

Giải. Áp dụng Định lý trên, ta có số hạng chứa x^3y^5z là

$$\frac{9!}{3!\,5!\,1!\,0!}x^3(2y)^5(-3z)^1t^0 = -48384\,x^3y^5z.$$

Vậy hệ số của x^3y^5z là -48384.

Ví dụ.(tự làm) Cho khai triển của $(-x+y-2z+t)^{10}$

a) Tìm hệ số của x^5y^4t.

b) Có bao nhiêu số hạng khác nhau trong phép khai triển trên?

Hướng dẫn. b) Mỗi số hạng có dạng $Mx^ay^bz^ct^d$. Suy ra các số hạng khác nhau của khai triển là số nghiệm của phương trình

$$a+b+c+d=10,$$

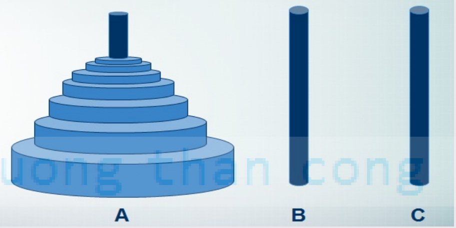
với a,b,c,d là các số nguyên không âm. **Đáp án.** $K_4^{10} = C_{13}^{10}$.

3.4. Hệ thức đệ quy

1. Giới thiệu
2. Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng
3. Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất
4. Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

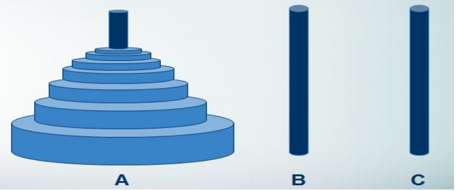
3.4.1. Giới thiệu

Ví dụ. Tháp Hà Nội



Có 3 cọc A, B, C và n đĩa với đường kính đôi một khác nhau. Nguyên tắc đặt đĩa vào cọc là: mỗi đĩa chỉ được chồng lên đĩa lớn hơn nó.

Ban đầu, cả n đĩa được đặt chồng lên nhau ở cọc A, hai cọc B và C để trống. Vấn đề đặt ra là chuyển cả n đĩa ở cọc A sang cọc C (có thể qua trung gian cọc B), mỗi lần chỉ chuyển một đĩa. Gọi x_n là số lần chuyển đĩa. Tìm x_n?



Giải. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$.

Với $n > 1$, trước hết ta chuyển $n - 1$ đĩa bên trên sang cọc B qua trung gian cọc C (giữ nguyên đĩa thứ n dưới cùng ở cọc A). Số lần chuyển $n - 1$ đĩa đó là x_{n-1}. Sau đó ta chuyển đĩa thứ n từ cọc A sang cọc C. Cuối cùng ta chuyển $n - 1$ đĩa từ cọc B sang cọc C. Số lần chuyển $n - 1$ đĩa đó lại là x_{n-1}.

Như vậy số lần chuyển toàn bộ n đĩa từ A sang C là:

$$x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1.$$

Nghĩa là

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_n & = & 2x_{n-1} + 1 \quad \text{với } n > 1 \end{cases}$$

Ví dụ. Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm x_n?

Giải. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$. Với $n = 2$, ta có $x_2 = 2$.

Với $n > 2$, để khảo sát x_n ta chia thành hai trường hợp loại trừ lẫn nhau:

- **Trường hợp 1.** Bước đầu tiên gồm 1 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n-1$ bậc nên số cách đi hết cầu thang là x_{n-1}.
- **Trường hợp 2.** Bước đầu tiên gồm 2 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n-2$ bậc nên số cách đi hết cầu thang trong là x_{n-2}.

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là $x_{n-1} + x_{n-2}$. Do đó ta có:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Như vậy

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2; \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{với } n > 2. \end{cases}$$

3.4.2. Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng

Định nghĩa. Một ***hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k với hệ số hằng*** là một hệ thức có dạng:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

trong đó

- $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ là các hệ số thực;
- $\{f_n\}$ là một dãy số thực cho trước và
- $\{x_n\}$ là dãy ẩn nhận các giá trị thực.

Trường hợp dãy $f_n = 0$ với mọi n thì (1) trở thành

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Ta nói (2) là một ***hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất cấp k với hệ số hằng***.

Ví dụ.

- $2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3 \longrightarrow$ tuyến tính cấp 2.
- $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-3} = 20 + n2^{n-2} + 3^n \longrightarrow$ tuyến tính cấp 3.
- $2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n \longrightarrow$ tuyến tính cấp 2.
- $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \longrightarrow$ tuyến tính thuần nhất cấp 2.

Định nghĩa. Xét hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

Mỗi dãy $\{x_n\}$ thỏa **(1)** được gọi là một ***nghiệm*** của **(1)**.

Nhận xét rằng mỗi nghiệm $\{x_n\}$ của **(1)** được hoàn toàn xác định bởi k giá trị ban đầu $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Họ dãy số $\{x_n = x_n(C_1, C_2, \ldots, C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ được gọi là ***nghiệm tổng quát*** của **(1)** nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của **(1)**.

Với k giá trị ban đầu $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa

$$x_0 = y_0,\ x_1 = y_1,\ \ldots\ , x_{k-1} = y_{k-1} \qquad (*)$$

Khi đó, nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng được gọi ***nghiệm riêng*** ứng với điều kiện ban đầu $(*)$.

Giải một hệ thức đệ quy là đi **tìm nghiệm tổng quát** của nó; nhưng nếu hệ thức đệ quy có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải **tìm nghiệm riêng** thỏa điều kiện ban đầu đó.

Ví dụ.

- $2x_n - 3x_{n-1} = 0$ có nghiêm tổng quát là $x_n = C\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$
- $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ có nghiệm riêng là $x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n$.

Lưu ý. Trong phạm vi của chương trình ta chỉ xét các hệ thức đệ quy tuyến tính (cấp 1 và 2) với hệ số hằng.

3.4.3. Nghiệm của HTĐQTT thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng của (1) là phương trình bậc k định bởi:

$$\boldsymbol{a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0} \qquad (*)$$

Trường hợp $k = 1$. Phương trình đặc trưng $(*)$ trở thành

$$\boldsymbol{a_0\lambda + a_1 = 0}$$

nên có nghiệm là

$$\lambda_0 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Khi đó, (1) có nghiệm tổng quát là: $\boldsymbol{x_n = C\lambda_0^n}$.

Trường hợp $k = 2$. Phương trình đặc trưng $(*)$ trở thành

$$\boldsymbol{a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0} \qquad (*)$$

Người ta chứng minh được kết quả sau:

- Nếu (∗) có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì **(1)** có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = C_1\,\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n$$

- Nếu (∗) có nghiệm kép thực λ_0 thì **(1)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = (C_1 + nC_2)\lambda_0^n$$

- Nếu (∗) có hai nghiệm phức liên hợp được viết dưới dạng

$$\lambda = r(\cos\varphi \pm i\,\sin\varphi)$$

thì **(1)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)$$

Ví dụ. Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 5. \end{cases}$ **(1)**

Giải. Phương trình đặc trưng là $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm là $\lambda = 2$. Suy ra **(1)** có nghiệm tổng quát là $x_n = C2^n$.

Từ điều kiện $x_0 = 5$ ta có $C = 5$. Suy ra nghiệm của (∗) là $x_n = 5 \cdot 2^n$.

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ **(2)**

Giải.

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$$
$$\Leftrightarrow \; x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0$$

Phương trình đặc trưng

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0}$$

có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$. Suy ra **(2)** có nghiệm tổng quát là

$$\boldsymbol{x_n = C_1\, 2^n + C_2\, 3^n}.$$

Vì $x_0 = 4$; $x_1 = 9$ nên $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 2C_1 + 3C_2 = 9. \end{cases}$ Suy ra $C_1 = 3, C_2 = 1$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$\boldsymbol{x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n}.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ **(3)**

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\mathbf{4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0}$$

có 1 nghiệm thực kép là $\lambda_0 = 3/2$ và $\lambda_2 = 3$. Suy ra **(3)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = (C_1 + nC_2)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Vì $x_0 = 2; x_1 = 9$ nên $\begin{cases} C_1 = 2 \\ \frac{3}{2}(C_1 + C_2) = 9. \end{cases}$ Suy ra $C_1 = 2, C_2 = 4$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$x_n = (2 + 4n)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 4. \end{cases}$ **(4)**

Giải. Phương trình đặc trưng $\boldsymbol{\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0}$ có 2 nghiệm phức liên hợp là

$$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Suy ra (4) có nghiệm tổng quát là

$$x_n = 2^n\left(A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Vì $x_0 = 1; x_1 = 4$ nên $\begin{cases} A = 1 \\ 2\left(\dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B\right) = 4. \end{cases}$ Suy ra $A = 1, B = \sqrt{3}$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$x_n = 2^n\left(A\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0 \qquad (*)$$

Khi đó

Nghiệm tổng quát của (1) = Nghiệm tổng quát của (2) + Nghiệm riêng của (1)

Để tìm một nghiệm riêng của (1), ta xem xét các dạng đặc biệt của vế trái f_n như sau:

- Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$, trong đó $P_r(n)$ là một đa thức bậc r theo n; β là một hằng số.
- Dạng 2. $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + \ldots + f_{n_s}$, trong đó các $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_s}$ thuộc dạng 1.

Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$. Có ba trường hợp xảy ra:

- **TH 1.** Nếu β không là nghiệm của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = \beta^n Q_r(n)$$

- **TH 2.** Nếu β là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n\beta^n Q_r(n)$$

- **TH 3.** Nếu β là nghiệm kép của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n^2\beta^n Q_r(n)$$

Chú ý $\boldsymbol{Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_0}$ là đa thức có cùng bậc r với $P_r(n)$, trong đó $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_0$ là $r+1$ hệ số cần xác định.

Để xác định các hệ số trên ta cần thế $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$ vào **(1)** và cho n nhận $r+1$ giá trị nguyên nào đó hoặc đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế để được một hệ phương trình. Các hệ số trên là nghiệm của hệ phương trình này.

Dạng 2. $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + \ldots + f_{n_s}$. Bằng cách như trên ta tìm được nghiệm riêng $x_{n_i} (1 \leq i \leq s)$ của hệ thức đệ quy

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f_{n_i}$$

Khi đó

$$x_n = x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots + x_{n_s}$$

là một nghiệm riêng của **(1)**.

Ví dụ. Cho hệ thức đệ quy

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = f_n \qquad \mathbf{(1)}.$$

Khi đó hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$.

- Nếu $f_n = 2n + 1$ thì **(1)** có nghiệm riêng dạng $x_n^{(p)} = An + B$.
- Nếu $f_n = 5^n(3n^2 + 2n + 1)$ thì $x_n^{(p)} = 5^n(An^2 + Bn + C)$.
- Nếu $f_n = 5^n$, thì $x_n^{(p)} = 5^n A$.
- Nếu $f_n = 3^n$ thì $x_n^{(p)} = n3^n A$.
- Nếu $f_n = 2^n(3n + 1)$ thì $x_n^{(p)} = n2^n(An + B)$.

Ví dụ. Cho hệ thức đệ quy

$$x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = f_n \qquad \mathbf{(1)}.$$

Khi đó hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0} \qquad (*)$$

có nghiệm kép là $\lambda_0 = 3$.

- Nếu $f_n = 3^n$ thì **(1)** có nghiệm riêng dạng $x_n^{(p)} = n^2 3^n A$.
- Nếu $f_n = 3^n(5n+1)$ thì $x_n^{(p)} = n^2 3^n (An + B)$.
- Nếu $f_n = 2^n(5n+1)$ thì $x_n^{(p)} = 2^n(An + B)$.

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n+1; \\ x_0 = 1;\ x_1 = 3. \end{cases}$

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1\, 2^n + C_2\, 3^n} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 2n+1$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 1$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{x_n = an + b} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$(an+b)-5[a(n-1)+b]+6[a(n-2)+b]=2n+1.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n=0; n=1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} -7a+2b=1; \\ -5a+2b=3. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a=1; b=4$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n+4} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = C_1\,2^n + C_2\,3^n + n + 4$$

Thay điều kiện $x_0=1$ và $x_1=3$ vào (6) ta được

$$\begin{cases} C_1+C_2=-3 \\ 2C_1+3C_2=-2. \end{cases}$$

Từ đó ta có $C_1=-7$ và $C_2=4$. Thế vào (6) ta được

$$\boldsymbol{x_n = -7\cdot 2^n + 4\cdot 3^n + n + 4}.$$

Ví dụ. Giải hệ thức đệ quy

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1. \qquad \mathbf{(1)}$$

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 4n + 1$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 1$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{x_n = n(an + b)} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$2n(an+b) - 3(n-1)[a(n-1)+b] + (n-2)[a(n-2)+b] = 4n+1.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n = 0; n = 1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} a + b = 1; \\ 3a + b = 5. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 2; b = -1$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n(2n-1)} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + n(2n-1)$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$ **(1)**

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad (*)$$

có nghiệm kép là $\lambda_0 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)3^n \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = (18n+12)3^n$ có dạng $\beta^n P_r(n)$ với $\beta = 3$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 3$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n^2 3^n(an + b) \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$(n+1)^2 3^{n+1}[a(n+1)+b] - 6n^2 3^n(an+b)+ \\ 9(n-1)^2 3^{n-1}[a(n-1)+b] = (18n+12)3^n.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n=0; n=1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} 6b = 12; \\ 54a + 18b = 90. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 1; b = 2$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n^2(n+2)3^n} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)3^n + n^2(n+2)3^n \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 2$ và $x_1 = 0$ vào (6) ta được

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ 3C_1 + 3C_2 + 9 = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có $C_1 = 2$ và $C_2 = -5$. Thế vào (6) ta được

$$x_n = (2-5n)3^n + n^2(n+2)3^n = \boldsymbol{3^n(n^3 + 2n^2 - 5n + 2)}$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3 \cdot 4^n \qquad \mathbf{(1)}$$

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1 + C_2\, 3^n} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3 \cdot 4^n$ thuộc **Dạng 2**. Ta xét các hệ thức đệ quy sau:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 \quad (1a)$$
$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = (2-n)2^{n-2} \quad (1b)$$
$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3 \cdot 4^n \quad (1c)$$

Bằng cách giải tương tự như **Dạng 1**, ta có các nghiệm riêng của

- $(1a)$ là $x_{n_1} = -10n$
- $(1b)$ là $x_{n_2} = n2^n$
- $(1c)$ là $x_{n_3} = 4^{n+2}$

Như vậy, **(1)** có nghiệm riêng là:

$$\boldsymbol{x_n = -10n + n2^n + 4^{n+2}} \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là

$$\boldsymbol{x_n = C_1 + C_2\, 3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}}$$

Ví dụ. Với $n \geq 1$, đặt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)2^k.$$

Tính tổng s_n theo n bằng cách thiết lập một hệ thức đệ quy có điều kiện đầu và tìm nghiệm của hệ thức đệ quy đó.

Đáp án. $\begin{cases} s_n - s_{n-1} = 2^n(n^2+n) \\ s_1 = 4. \end{cases}$; $s_n = -4 + 2^n(2n^2 - 2n + 4)$

Ví dụ. Cho $x_0 = 1$ và $x_1 = 2$. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1} = n$, với $n \geq 1$.

Đáp án. $x_n = 3 \cdot 2^n - \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{3}{2}n - 2$

Ví dụ.(tự làm) Gọi x_n là số chuỗi bit có chiều dài n mà không có 2 bit 0 đứng liền nhau. Hãy lập hệ thức đệ quy của x_n và tìm x_n.

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}.$$

b) Tìm một nghiệm riêng của hệ thức đệ quy sau

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (18n - 6)3^{n-1}.$$

c) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu: $a_0 = 2, a_1 = 9$ của hệ thức đệ quy:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n3^{n+1}.$$

Đáp án. a) $x_n = 3^n(C_1 + C_2 \cdot n)$ b) $x_n = n^2 3^n(n+2)$

c) $x_n = 3^n\left(\frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - n + 2\right)$

Ví dụ.(tự làm) Cho $x_0 = 1$ và $x_1 = 6$. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $x_n - 4x_{n-1} + 8x_{n-2} = 0$, với $n \geq 2$.

Đáp án. $x_n = (2\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + 2\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy: $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$

b) Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy: $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = (6n-5)2^{n-1}$ thỏa điều kiện đầu $x_0 = 7, x_1 = 4$.

Đáp án. a) $x_n = C_1(-1)^n + C_2 2^n$ b) $x_n = 4\cdot(-1)^n + 2^n(n^2+3)$

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$.

b) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu $a_0 = 8, a_1 = 5$ của hệ thức đệ quy: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1}$

Đáp án. a) $a_n = C_1\cdot(-2)n + C_2\cdot 3^n$

b) $a_n = 7\cdot 3^n + (-2)^n(2n^2+5n+1)$

Bài tập. Giải các hệ thức đệ quy sau

a) $\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128 \cdot 8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2 \cdot 5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$

Xem đáp án ở slide kế tiếp

Đáp án.

a) $x_n = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}(-5)^n + n^2 + 4n$

b) $x_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + (-2)^n + 3^n n$

c) $x_n = n^2 - 2n + 1$

d) $x_n = -3 \cdot 2^n + n^2 + 4n + 4$

e) $x_n = 8^n(n^2 + n + 2)$

f) $x_n = 3^n + 5^n(n - 2)$