Chương 5

QUAN HỆ

lvluyen@hcmus.edu.vn

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼luyen/trr

FB: fb.com/trr2015

Trường Đại Học Khoa học Tự nhiên TP Hồ Chí Minh

Chương 5. QUAN HỆ

1. Quan hệ hai ngôi
2. Quan hệ tương đương
3. Quan hệ thứ tự

5.1. Quan hệ hai ngôi

1. Định nghĩa
2. Các tính chất của quan hệ

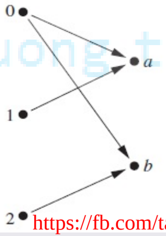
Định nghĩa. Một ***quan hệ hai ngôi*** từ tập A đến tập B là tập con $\mathcal{R}$ của tích Descartes $A \times B$.

Quan hệ từ A đến chính nó được gọi là quan hệ hai ngôi (hay ***quan hệ***) trên A.

Ví dụ. Cho $A = \{0, 1, 2\}$ và $B = \{a, b\}$. Khi đó

$$\mathcal{R} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$$

là một quan hệ từ A vào B. Quan hệ này được mô tả bằng



R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, và $\mathcal{R} = \{(a, b) \,|\, a \text{ là ước của } b\}$. Khi đó $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên A. Hãy tìm $\mathcal{R}$?

Giải. $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Hỏi ta có thể xây dựng được bao nhiêu qua hệ trên A?

Giải. Vì $|A| = 4$ nên $|A \times A| == 16$. Do mỗi quan hệ trên A là một tập con của $|A \times A|$ nên số quan hệ trên A là 2^16.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Hãy tìm số quan hệ hai ngôi trên A

a) chứa $(1, 1)$.

b) có đúng 5 phần tử.

c) có ít nhất 7 phần tử.

Định nghĩa. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên A và $x, y \in A$. Ta nói:

i) x quan hệ $\mathcal{R}$ với y nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$, ký hiệu $\boldsymbol{x\mathcal{R}y}$.

ii) x không quan hệ $\mathcal{R}$ với y nếu $(x, y) \notin \mathcal{R}$, ký hiệu $\boldsymbol{x\not{\mathcal{R}}y}$.

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ là một quan hệ trên A. Khi đó

$$1\mathcal{R}1,\ 1\mathcal{R}2,\ 2\mathcal{R}3,\ 1\mathcal{R}3,\ 2\not{\mathcal{R}}1,\ 2\not{\mathcal{R}}2, \ldots$$

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Một quan hệ $\mathcal{R}$ trên A được xác định như sau:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \text{ chia hết cho } 4.$$

Ta có:

$$1\mathcal{R}5,\ 5\mathcal{R}1,\ 7\mathcal{R}7,\ 1\not{\mathcal{R}}2,\ 3\not{\mathcal{R}}6, \ldots$$

5.1.2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên A. Ta nói

i) $\mathcal{R}$ ***phản xạ*** $\Leftrightarrow \forall x \in A, x\mathcal{R}x$.

ii) $\mathcal{R}$ ***đối xứng*** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \rightarrow y\mathcal{R}x$.

iii) $\mathcal{R}$ ***phản xứng*** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y$.

iv) $\mathcal{R}$ ***bắc cầu*** (hay còn gọi là ***truyền***) $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z.$$

Nhận xét. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên A. Khi đó:

i) $\mathcal{R}$ không phản xạ $\Leftrightarrow \exists x \in A, x \not\mathcal{R} x$.

ii) $\mathcal{R}$ không đối xứng $\Leftrightarrow \exists x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y \not\mathcal{R} x$.

iii) $\mathcal{R}$ không phản xứng $\Leftrightarrow \exists x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \wedge x \neq y$.

iv) $\mathcal{R}$ không bắc cầu $\Leftrightarrow \exists x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \wedge x \not\mathcal{R} z$.

Ví dụ. Trên tập hợp số nguyên, ta xét những quan hệ sau:

$$\mathcal{R}_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(a,b) \mid a > b\},$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ hay } a = -b\},$$
$$\mathcal{R}_4 = \{(a,b) \mid a = b + 1\},$$
$$\mathcal{R}_5 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}.$$

Hỏi những quan hệ trên có tính chất nào?

Ví dụ. Trên tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ta xét những quan hệ sau:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\},$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\},$$
$$\mathcal{R}_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\},$$
$$\mathcal{R}_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\},$$

Hỏi những quan hệ trên có tính chất nào?

Ví dụ.(tự làm) Cho $S = \{1, 2, 3\}$ và quan hệ hai ngôi

$$\mathcal{R} = \{(2, 2), (1, 3), (3, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 1)\}$$

trên S. Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và bắc cầu của quan hệ $\mathcal{R}$?

Ví dụ.(tự làm) Cho $S = \{1, 2, 3\}$ và

$$\mathcal{R} = \{(1, 1); (1, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3)\}$$

là một quan hệ hai ngôi trên S. Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và bắc cầu của $\mathcal{R}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $S = \{1, 2, 3\}$. Đặt

$$\forall x, y \in S, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3(x + y) = xy + 9.$$

Liệt kê tất cả $(x, y) \in S^2$ thỏa $x\mathcal{R}y$ và xét 4 tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và bắc cầu của $\mathcal{R}$.

Ví dụ. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên $\mathbb{Z}$, được xác định bởi

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ chẵn.}$$

Xác định các tính chất của $\mathcal{R}$.

Giải.

(i) $\forall x \in \mathbb{Z}$, vì $x + x = 2x$ chẵn nên $x\mathcal{R}x$. Do đó $\mathcal{R}$ phản xạ.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, nếu $x\mathcal{R}y$ thì $x + y$ chẵn nên $y + x$ cũng chẵn, nghĩa là $y\mathcal{R}x$. Do đó $\mathcal{R}$ đối xứng.

(iii) Ta có $1\mathcal{R}3$ và $3\mathcal{R}1$, nhưng $1 \neq 3$. Do đó $\mathcal{R}$ không phản xứng.

(iv) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì $x + y$ và $y + z$ chẵn. Mà

$$x + z = (x + y) + (y + z) - 2y,$$

nên $x + z$ cũng là số chẵn, nghĩa là $x\mathcal{R}z$. Do đó $\mathcal{R}$ bắc cầu.

Vậy $\mathcal{R}$ thỏa mãn các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu, nhưng không phản xứng.

5.2. Biểu diễn quan hệ bằng ma trận

Ví dụ. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ đến $B = \{u, v, w\}$,

$$\mathcal{R} = \{(1, u), (1, v), (2, w), (3, w), (4, u)\}.$$

Khi đó $\mathcal{R}$ có thể biễu diễn như sau

	u	v	w
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	1	0	0

Dòng và cột tiêu đề có thể bỏ qua nếu không gây hiểu nhầm.

Định nghĩa. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. ***Ma trận biểu diễn*** của $\mathcal{R}$ là ma trận cấp $m \times n$ $M_R = (m_{ij})$ xác định bởi

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } (a_i, b_j) \notin \mathcal{R} \\ 1 \text{ nếu } (a_i, b_j) \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Ví dụ. Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3\}$ đến $B = \{1, 2\}$ sao cho

$$a\mathcal{R}b \text{ nếu } a > b.$$

Khi đó ma trận biểu diễn của $\mathcal{R}$ là

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ đến $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ được biễu diễn bởi ma trận

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm quan hệ $\mathcal{R}$?

Đáp án.

$$\mathcal{R} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$$

Ví dụ.(tự làm) Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, cho quan hệ $\mathcal{R}$ được định nghĩa như sau

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ chia hết cho } y.$$

Tìm ma trận biểu diễn $\mathcal{R}$?

Ví dụ.(tự làm) Trên tập hợp $A = \{a, b, c\}$, quan hệ $\mathcal{R}$ có ma trận biểu diễn là:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm $\mathcal{R}$?

Hỏi. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên tập hữu hạn A. Ta có thể nhận xét gì về ma trận biểu diễn của $\mathcal{R}$ nếu

- $\mathcal{R}$ có tính phản xạ
- $\mathcal{R}$ có tính đối xứng
- $\mathcal{R}$ có tính phản xứng

5.2. Quan hệ tương đương

1. Định nghĩa
2. Lớp tương đương
3. Quan hệ đồng dư modulo trên $\mathbb{Z}$

5.3.1. Định nghĩa

Ví dụ. Cho Ω = tập hợp sinh viên của lớp này, gọi

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \text{ cùng họ với } b\}.$$

Hỏi $\mathcal{R}$ có những tính chất nào?

Giải. Phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Định nghĩa. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên tập hợp A. Ta nói $\mathcal{R}$ là ***quan hệ tương đương*** trên A nếu $\mathcal{R}$ thỏa mãn các tính chất **phản xạ, đối xứng và bắc cầu**.

Ví dụ. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên $\mathbb{Z}$, được xác định bởi

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ chẵn}.$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên các chuỗi ký tự xác định bởi $a\mathcal{R}b$ nếu a và b có cùng độ dài. Khi đó $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Cho $\mathcal{S}$ là quan hệ trên tập số thực sao cho $a\mathcal{S}b$ nếu $a-b$ là số nguyên. Khi đó $\mathcal{S}$ là quan hệ tương đương.

Ví dụ.(tự làm) Trên tập hợp số thực, ta xét quan hệ S được định nghĩa như sau:

$$xSy \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y.$$

Chứng minh S là quan hệ tương đương.

Ví dụ.(tự làm) Cho m là một số nguyên dương và quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}$ xác định bởi:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \text{ chia hết cho } m.$$

Chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.

5.3.2. Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A và x thuộc A. Khi đó, tập hợp tất cả các phần tử trong A có quan hệ với x được gọi là ***lớp tương đương*** của x, ký hiệu bởi $\overline{x}$ hoặc $[x]$. Vậy

$$\overline{x} = \{y \in A \mid y\mathcal{R}x\}.$$

Ví dụ.(tự làm) Trên tập hợp $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ta xét quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ như sau:

$$x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x + 3y \text{ chẵn}.$$

a) Chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.

b) Tìm các lớp tương đương [1], [2] và [4].

Mệnh đề. *Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên tập hợp A. Khi đó:*

i) $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

ii) $\forall x, y \in A$, *nếu* $\overline{x} \neq \overline{y}$ *thì* $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

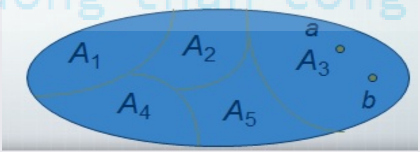
Nhận xét. Dựa vào Mệnh đề trên ta có nếu $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên tập hợp A thì ta có thể phân tích A thành hợp của các lớp tương đương rời nhau theo quan hệ $\mathcal{R}$.

Sự phân tích đó được gọi là ***sự phân hoạch*** tập hợp A thành các lớp tương đương.

Ví dụ. Cho $\Omega =$ tập hợp sinh viên của lớp này, gọi

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \text{ cùng họ với } b\}.$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương và khi đó Ω được phân hoạch thành các lớp tương đương, mỗi lớp tương đương là tập hợp những bạn sinh viên cùng họ.



5.3.3. Quan hệ đồng dư trên $\mathbb{Z}$

Định nghĩa. Cho n là một số nguyên dương và quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}$ xác định bởi:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod n$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$. Quan hệ này được gọi là ***quan hệ đồng dư theo modulo** n*.

Với mỗi $x \in \mathbb{Z}$, ta có

$$\overline{x} = \{x + kn \,|\, k \in \mathbb{Z}\} = \{x,\ x \pm n,\ x \pm 2n,\ x \pm 3n, \ldots\}.$$

Ta đặt

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Ví dụ. Trong $\mathbb{Z}_{12}$, ta có $\overline{-7} = \overline{5}$; $\overline{28} = \overline{4}$.

Định nghĩa. Trên $\mathbb{Z}_n$ ta định nghĩa phép toán $+, -, \times$ như sau:

- $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$.
- $\overline{x} - \overline{y} = \overline{x - y}$.
- $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{x \times y}$.

Ví dụ. Trên $\mathbb{Z}_8$, ta có

$$\overline{-3} = \overline{5}; \quad \overline{7} + \overline{6} = \overline{5}; \quad \overline{7} \times \overline{6} = \overline{2}; \quad \overline{5} \times \overline{7} + \overline{6} = \overline{1}$$

Ví dụ. Trong $\mathbb{Z}_{10}$, tìm nghiệm của phương trình $\overline{x} + \overline{9} = \overline{5}$

Đáp án. Ta có $\overline{x} = \overline{6}$. Như vậy $x = 10k + 6$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét. Với mọi $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ và với mọi m nguyên, ta có $m.\overline{x} = \overline{mx}$.

Ví dụ. Tìm x biết $x - 8 \equiv 11 \pmod{14}$?

Đáp án. Ta có $x \equiv 5 \pmod{14}$. Suy ra $x = 14k + 5$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Phần tử khả nghịch trong $\mathbb{Z}_n$

Định nghĩa. Phần tử $\overline{x}$ trong $\mathbb{Z}_n$ được gọi là ***khả nghịch*** nếu

$$\text{tồn tại } \overline{y} \in \mathbb{Z}_n \text{ sao cho } \overline{x} \times \overline{y} = \overline{1}.$$

Khi đó $\overline{y}$ được gọi là nghịch đảo của $\overline{x}$, ký hiệu $\boldsymbol{\overline{y} = \overline{x}^{-1}}$.

Ví dụ. Trong $\mathbb{Z}_9$ ta có:

- $\overline{3}$ không khả nghịch, vì $\overline{3} \times \overline{3} = \overline{0}$.
- $\overline{4}$ khả nghịch và $\overline{4}^{-1} = \overline{7}$, vì $\overline{4} \times \overline{7} = \overline{1}$.

Mệnh đề. *Cho $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$, ta có $\overline{x}$ khả nghịch khi và chỉ khi $(x; n) = 1$.*

Ví dụ. Trong $\mathbb{Z}_{10}$, ta có

- $\overline{7}$ khả nghịch vì $(7; 10) = 1$
- $\overline{5}$ khả nghịch vì $(5; 10) = 2$

Kiểm tra tính khả nghịch và tìm nghịch đảo của $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$

Tìm d là ước số chung lớn nhất của x và n.

- Nếu $d = 1$ thì dùng thuật chia Euclide để biểu diễn

$$1 = xp + nq.$$

  Khi đó $\overline{x} \times \overline{p} = \overline{1}$ nên $\overline{x}$ khả nghịch và $\overline{x}^{-1} = \overline{p}$.

- Nếu $d > 1$ thì $\overline{x}$ không khả nghịch.

Ví dụ.(tự làm) Trong $\mathbb{Z}_9$, tìm tất cả các phần tử khả nghịch và tìm phần tử nghịch đảo tương ứng.

Ví dụ. Trong $\mathbb{Z}_8$, tìm nghiệm của phương trình $\overline{3} \times \overline{x} + \overline{7} = \overline{4} \quad (*)$

Giải. Phương trình $(*)$ tương đương

$$\overline{\mathbf{3}} \times \overline{\boldsymbol{x}} = \overline{4} - \overline{7} = \overline{-3} = \overline{\mathbf{5}}.$$

Vì $(3;8) = 1$ nên $\overline{3}$ khả nghịch. Bằng thuật chia Euclide ta tìm được $\overline{3}^{-1} = \overline{3}$. Suy ra

$$\overline{x} = \overline{3}^{-1} \times \overline{5} = \overline{3} \times \overline{5} = \overline{15} = \overline{7}.$$

Ví dụ. Giải phương trình $5x - 9 \equiv 7 \pmod{12} \quad (**)$

Giải. Phương trình $(**)$ tương đương với phương trình

$$\begin{aligned} & \overline{5x - 9} = \overline{7} \quad \text{trong } \mathbb{Z}_{12} \\ \Leftrightarrow \quad & \overline{5} \times \overline{x} = \overline{4} \end{aligned}$$

Ta có $\overline{5}^{-1} = \overline{5}$. Suy ra $\overline{x} = \overline{5}^{-1} \times \overline{4} = \overline{5} \times \overline{4} = \overline{20} = \overline{8}$. Như vậy

$$x = 12k + 8 \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

5.3. Quan hệ thứ tự

1. Định nghĩa
2. Phần tử trội
3. Biểu đồ Hasse
4. Phần tử cực trị
5. Sắp xếp tôpô

3.3.1. Định nghĩa

Ví dụ. Trên tập hợp $\mathbb{N}^*$, ta xét quan hệ

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \ x \text{ chia hết cho } y$$

Hỏi $\mathcal{R}$ có những tính chất nào?

Đáp án. Phản xa, phản xứng, bắc cầu.

Định nghĩa. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập hợp A được gọi là ***quan hệ thứ tự*** nếu nó thỏa mãn các tính chất **phản xạ, phản xứng và bắc cầu**. Khi đó $(A, \mathcal{R})$ được gọi là ***một tập thứ tự.***

Nếu $\mathcal{R}$ là một thứ tự trên tập hợp A thì ta ký hiệu $\boldsymbol{a \preceq b}$ thay cho $a\mathcal{R}b$, và ký hiệu $a \prec b$ thay cho $\boldsymbol{a \preceq b}$ nhưng $a \neq b$.

Ví dụ.

a) $(\mathbb{N}, \leq)$ là tập thứ tự. Ta có $1 \preceq 2$, $\ 4 \npreceq 3$, $\ 5 \preceq 5, \ldots,$

b) Xét $(\mathbb{N}^*, \mid)$. Ta có $2 \preceq 6$, $\ 2 \npreceq 3$, $\ 3 \npreceq 2, \ldots$

Ví dụ.(tự làm) $\forall x, y \in S = \mathbb{R}$, đặt $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x = y^3 - y^2 - y$.

a) Chứng minh $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên S.

b) Tìm tất cả $u, v, w \in S$ sao cho $u\mathcal{R}0, v\mathcal{R}(-1)$ và $w\mathcal{R}2$.
$\mathcal{R}$ có phải là một quan hệ thứ tự trên S không ?

Ví dụ.(tự làm) $\forall x, y \in T = \{-8, -7, -3, -2, 2, 5, 6, 9\}$, đặt

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \,|\, y \text{ (nghĩa là } x \text{ là một ước số của } y).$$

a) Tìm tất cả $x, y \in T$ sao cho $x\mathcal{R}y$.

b) Tại sao $\mathcal{R}$ không phải là một quan hệ tương đương và cũng không phải là một quan hệ thứ tự trên T?

5.3.2. Phần tử trội

Định nghĩa. Cho $(A, \preceq)$ là một tập thứ tự và $x, y \in A$. Khi đó:

1. Nếu $x \preceq y$ thì ta nói y là ***trội*** của x hoặc x ***được trội bởi*** y.
2. Nếu $x \prec y$ thì ta nói y là ***trội thật sự*** của x.
3. Nếu $x \prec y$ và không tồn tại $z \in A$ sao cho $x \prec z \prec y$ thì ta nói y là ***trội trực tiếp*** của x.

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Khi đó:

a) Với $(A, \leq)$, ta có các trội của 2 là 2, 3, 4, 5, 6;
trội trực tiếp của 2 là 3.

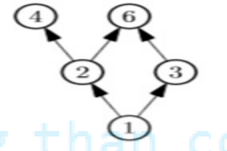
b) Với $(A, \mid)$, ta có các trội của 2 là 2, 4, 6;
trội trực tiếp của 2 là 4 và 6.

Biểu đồ Hasse

Định nghĩa. ***Biểu đồ Hasse*** của tập thứ tự $(A, \preceq)$ là một đồ thị có hướng

- Các đỉnh tương ứng với các phần tử của A.
- Các cung có hướng nối từ x đến y nếu y là trội trực tiếp của x.

Ví dụ. Ta có biểu đồ Hasse cho tập thứ tự $(\{1, 2, 3, 4, 6\}, |\,)$ là



Ví dụ.(tự làm) Cho tập hợp $A = \{2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Vẽ biểu đồ Hasse của tập thứ tự $(A, |\,)$ và $(A, \vdots\,)$

Thứ tự toàn phần

Định nghĩa. Các phần tử a và b của tập thứ tự $(S, \preceq)$ gọi là ***so sánh được*** nếu $a \preceq b$ hay $b \preceq a$.

Nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là ***tập thứ tự toàn phần.*** Ta cũng nói rằng $\preceq$ là ***thứ tự toàn phần*** trên S.
Ngược lại, nó được gọi là ***tập thứ tự bộ phận***

Ví dụ.

- Quan hệ "$\leq$" trên tập số nguyên dương là thứ tự toàn phần.
- Quan hệ ước số "$|$" trên tập hợp số nguyên dương không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được

5.3.3. Phần tử cực trị

Định nghĩa. Cho $(A, \preceq)$ là một tập thứ tự và $m \in A$. Ta nói

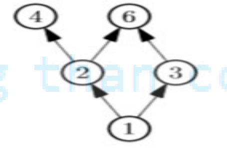
i) m là phần tử ***tối đại*** của A nếu $\forall x \in A, m \preceq x \to m = x$.

ii) m là phần tử ***tối tiểu*** của A nếu $\forall x \in A, x \preceq m \to x = m$.

iii) m là phần tử ***lớn nhất*** của A nếu $\forall x \in A, x \preceq m$.

iv) m là phần tử ***nhỏ nhất*** của A nếu $\forall x \in A, m \preceq x$.

Ví dụ. Từ biểu đồ Hasse của tập thứ tự $(\{1, 2, 3, 4, 6\}, |\,)$



Ta có

- 4 và 6 là các phần tử tối đại
- 1 là phần tử tối tiểu và cũng là phần tử nhỏ nhất
- không tồn tại phần tử lớn nhất.

Ví dụ. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của tập thứ tự $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$

Giải.

- Phần tử tối đại: 12, 20, 25
- Phần tử tối tiểu: 2, 5
- Không có phần tử lớn nhất và nhỏ nhất

Ví dụ.(tự làm) Cho $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 14, 15, 30, 45\}$. Đặt

$$\forall x, y \in S, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\, k \text{ nguyên lẻ}, x = ky.$$

Chứng minh $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trên S. Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \mathcal{R})$ và tìm các phần tử tối tiểu, tối đại.

Ví dụ.(tự làm) Cho $S = \{2, 4, 5, 10, 12, 15, 20, 30, 90, 180\}$ và quan hệ thứ tự $\mathcal{R}$ trên S như sau :

$$\forall x, y \in S, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y \quad (x \text{ là ước số của } y).$$

Vẽ sơ đồ Hasse và tìm các phần tử nhỏ nhất, lớn nhất, tối tiểu, tối đại của $(S, \mathcal{R})$, nếu có.

5.3.4. Thứ tự từ điển

Định nghĩa. Cho Σ là một tập hữu hạn (ta gọi là ***bảng chữ cái***). Tập hợp các chuỗi trên Σ, ký hiệu là Σ^*, xác định bởi

- $\lambda \in \Sigma^*$, trong đó λ là chuỗi rỗng.
- Nếu $x \in \Sigma$, và $w \in \Sigma^*$, thì $wx \in \Sigma^*$, trong đó wx là kết nối w với x.

Ví dụ. Cho $\Sigma = \{a, b, c\}$, khi đó

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \ldots\}$$

Ví dụ. Cho $\Sigma = \{0, 1\}$, khi đó

$$\Sigma^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, \ldots\}$$

Định nghĩa. Giả sử $\preceq$ là thứ tự toàn phần trên Σ, khi đó ta có thể định nghĩa thứ tự toàn phần $\preceq$ trên Σ^* như sau:

Cho $s = a_1a_2\ldots a_m$ và $t = b_1b_2\ldots b_n$ là hai chuỗi trên Σ^*. Khi đó $s \prec t$ nếu

- $m < n$ và $a_i = b_i$ đối với $1 \leq i \leq m$, tức là

$$t = a_1a_2\ldots a_m b_{m+1}b_{m+2}\ldots b_n$$

- hoặc tồn tại $k < m$ sao cho $a_i = b_i$ với $1 \leq i \leq k$ và $a_{k+1} \prec b_{k+1}$, nghĩa là

$$s = a_1a_2\ldots a_k a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_m$$
$$t = a_1a_2\ldots akb_{k+1}b_{k+2}\ldots b_n$$

Chúng ta có thể kiểm tra $\preceq$ là thứ tự toàn phần trên Σ^*. Ta gọi nó là ***thứ tự từ điển*** trên Σ^*.

Ví dụ. Nếu Σ là bảng chữ cái tiếng Anh với thứ tự: $a \prec b \prec \ldots \prec z$, thì thứ tự nói trên là thứ tự thông thường giữa các từ trong từ điển. Ví dụ

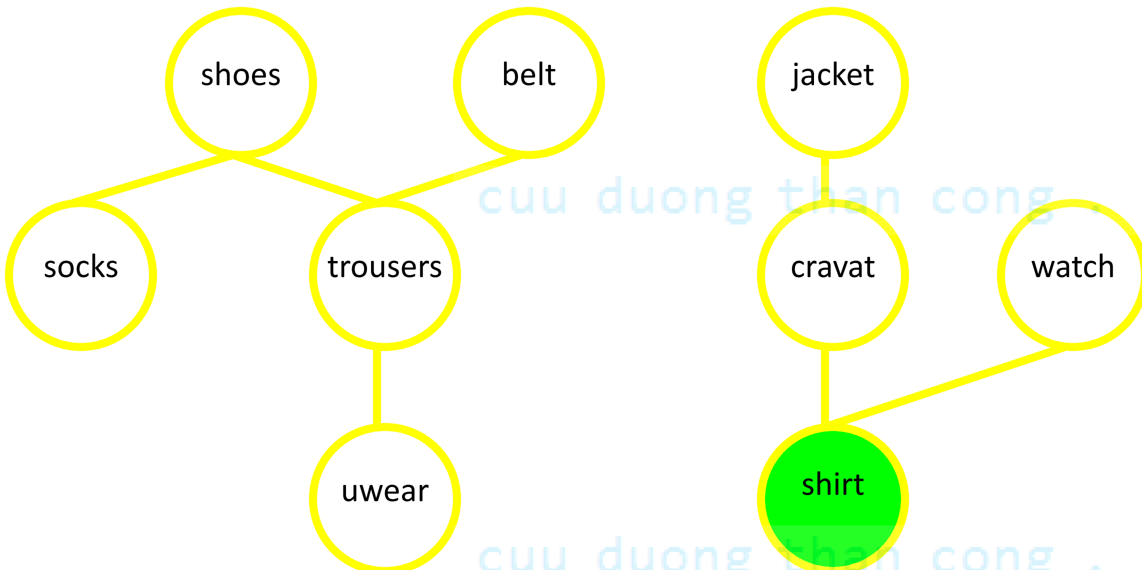
$$\text{love} \prec \text{lovely}; \qquad \text{castle} \prec \text{cat}$$

Ví dụ. Nếu $\Sigma = \{0, 1\}$ với $0 \prec 1$ thì thì $\preceq$ là thứ tự toàn phần trên tập tất cả các chuỗi bit. Ví dụ

$$10101 \prec 10101000; \qquad 10101 \prec 11$$

5.3.5. Sắp xếp tôpô

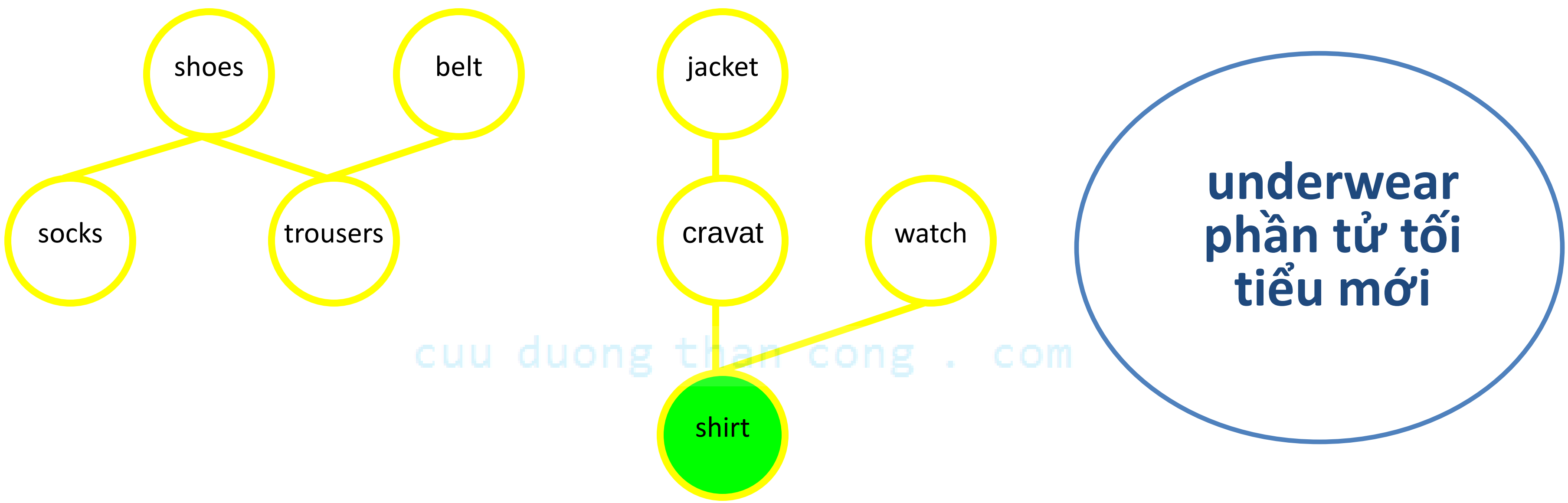
Chú ý. Mọi tập thứ tự hữu hạn đều có phần tử tối tiểu



Ví dụ shirt là phần tử tối tiểu

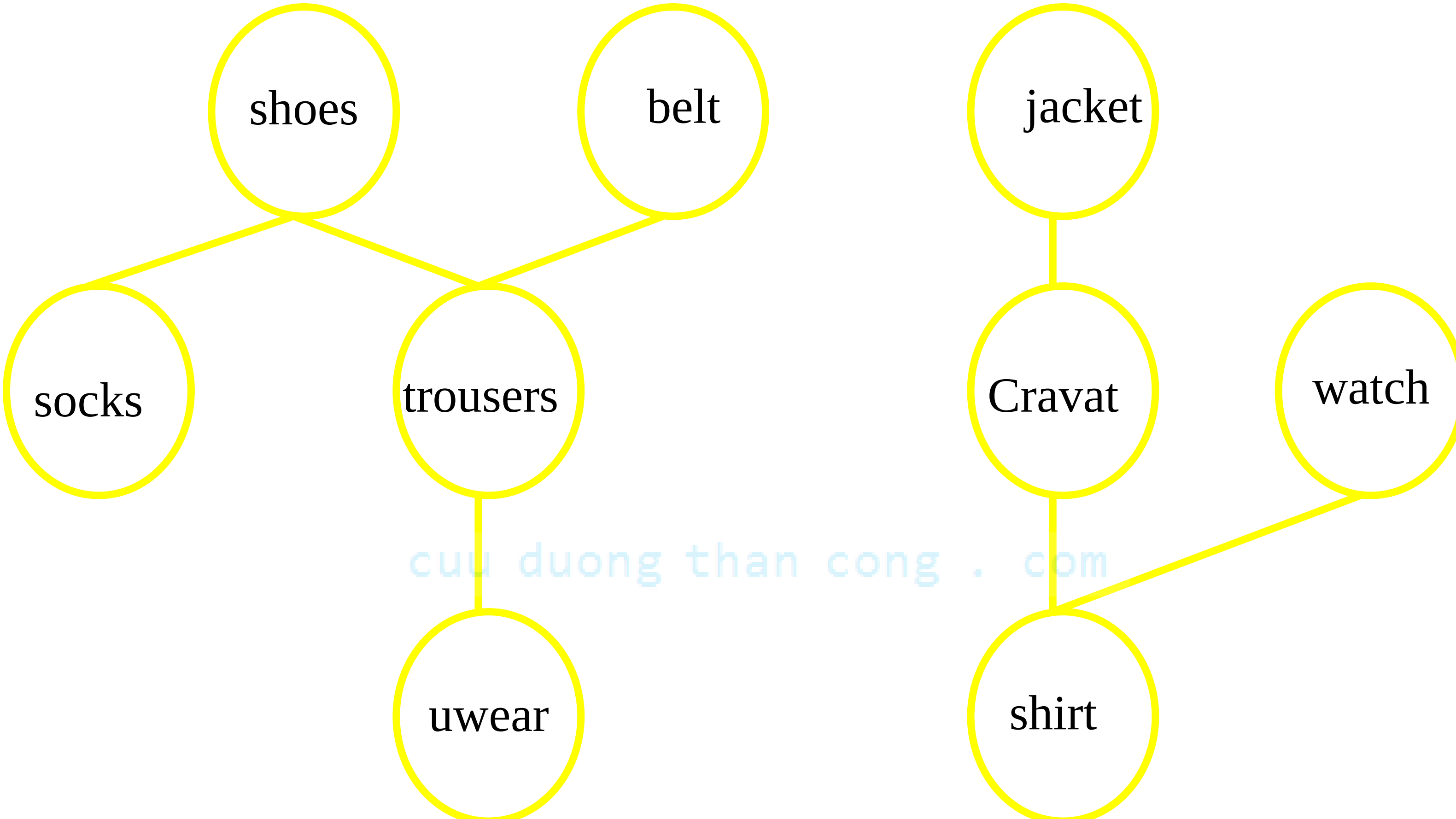
Sau khi loại bỏ phần tử ***shirt*** (**a_1**) tập còn lại vẫn là tập thứ tự

Gọi a_2 là phần tử tối tiểu của tập thứ tự mới.



Tiếp tục quá trình này cho đến khi không còn phần tử nào nữa. Và cuối cùng chúng ta sẽ có một sự sắp xếp

$$a_1, a_2, a_3 \ldots, a_m$$



Đây được gọi là sắp xếp tôpô