

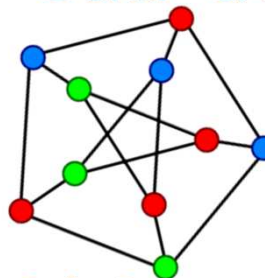
Tô Màu Đồ Thị

ThS.Lê Ngọc Thành
Khoa Công Nghệ Thông Tin
ĐH Khoa Học Tự Nhiên Tp.HCM
lnthanh@fit.hcmus.edu.vn

Định nghĩa

✚ Tô màu đồ thị (graph coloring) là một phép gán “màu sắc” đến các phần tử của đồ thị thỏa mãn ràng buộc cho trước.

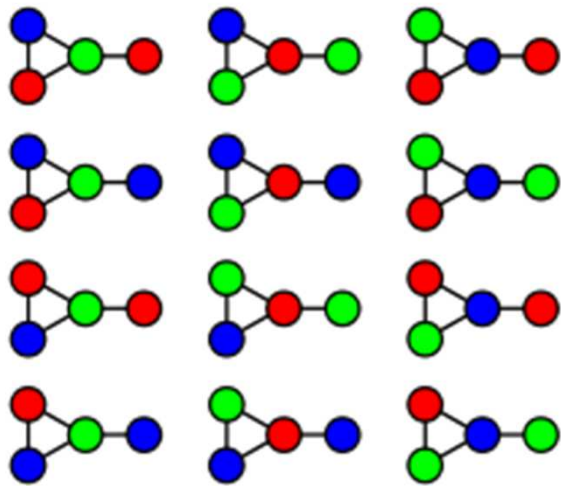
✚ Một số bài toán tô màu phổ biến:



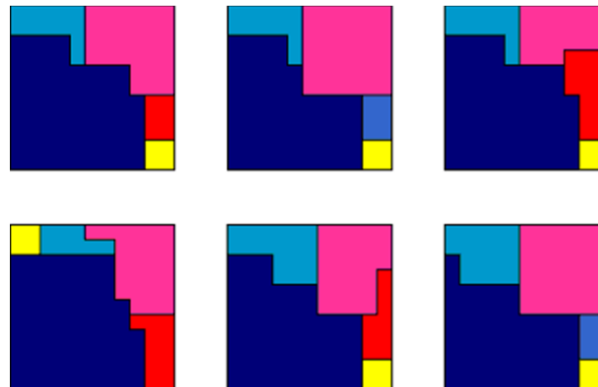
- ❖ Tô màu sao cho 2 đỉnh kề nhau không cùng màu gọi là tô màu đỉnh (vertex coloring).
- ❖ Tô màu sao cho 2 cạnh kề nhau không cùng màu gọi là tô màu cạnh (edge coloring).
- ❖ Tô màu bề mặt (face coloring) của một đồ thị phẳng là phép tô mỗi mặt hay miền sao cho hai mặt có cùng đường biên không có cùng màu.

Sắc số

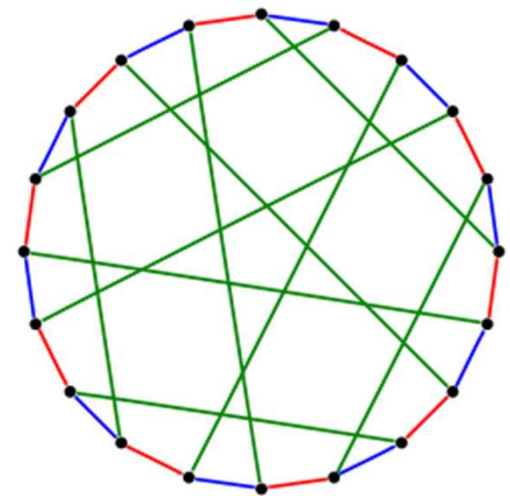
✚ Sắc số là số màu tối thiểu để tô màu cho đồ thị thỏa mãn ràng buộc.



Tô màu đỉnh bởi 3 màu theo 12 cách



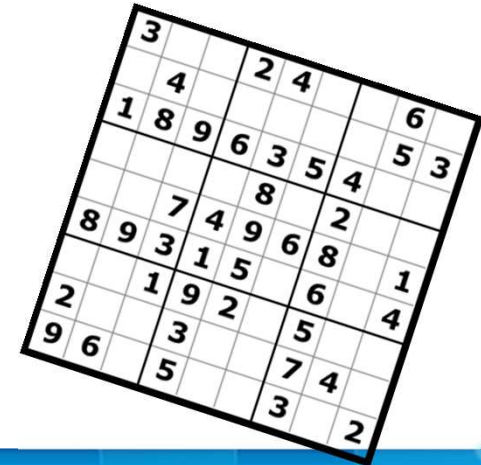
Tô màu bề mặt



Tô màu cạnh bởi 3 màu

Một số ứng dụng

- ✚ Lập lịch: một tập các công việc cần được gán khoảng thời gian. Một số công việc không được làm trong cùng thời điểm.
- ✚ Cấp phát thanh ghi: những chương trình thường xuyên sử dụng được giữ trong thanh ghi xử lý nhanh.
- ✚ Giải Sudoku với 9-màu và 81 đỉnh.



Thuật toán tô màu “tối ưu”

- ✚ B1: [Tô màu] Tô màu i ($i = 1, 2, \dots, n$) cho đỉnh có bậc lớn nhất.
- ✚ B2: [Hạ bậc và cấm tô]
 - ❖ B2.1: Hạ bậc đỉnh vừa được tô $= 0$.
 - ❖ B2.2: Hạ bậc 1 đơn vị và cấm tô màu i cho tất cả các đỉnh có quan hệ với đỉnh được tô màu i .
- ✚ B3: Lặp lại B1 cho đến khi tất cả các đỉnh đều được tô màu.

Ví dụ 1

- Một công ty có 8 đài phát A, B, C, D, E, F, G, H có khoảng cách (km) được cho trong ma trận sau:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	100	50	30	200	150	40	120
B		0	30	80	120	50	200	150
C			0	120	100	30	80	50
D				0	50	120	150	30
E					0	200	120	120
F						0	180	150
G							0	50
H								0

- Các đài có khoảng cách ≥ 100 km không được dùng chung 1 trạm phát sóng. Hãy lắp đặt các trạm phát sóng sao cho số trạm ít nhất.

Ví dụ 1 (tt)

+ Đồ thị

❖Đỉnh: các đài phát thanh.

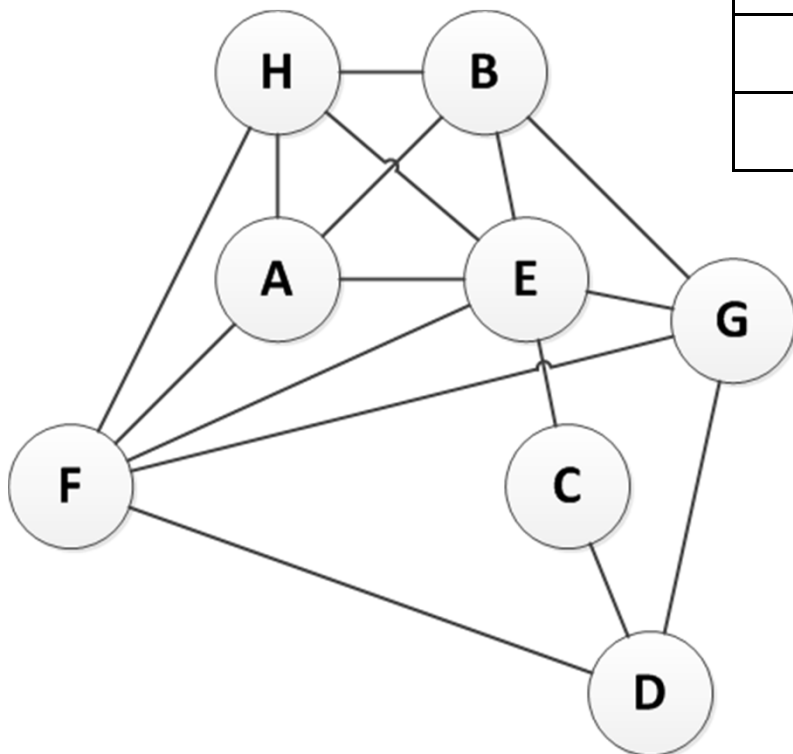
❖Cung: nối giữa 2 đài có khoảng cách ≥ 100 km.

+ Ma trận quan hệ (hay đồ thị quan hệ như sau):

	A	B	C	D	E	F	G	H	Bậc
A	0	1	0	0	1	1	0	1	4
B	1	0	0	0	1	0	1	1	4
C	0	0	0	1	1	0	0	0	2
D	0	0	1	0	0	1	1	0	3
E	1	1	1	0	0	1	1	1	6
F	1	0	0	1	1	0	1	1	5
G	0	1	0	1	1	1	0	0	4
H	1	1	0	0	1	1	0	0	4

Giải quyết (tt)

Màu	1,2,3	1,2	1,2	2,1	1	1,2	1,2,3	1,2,3,4
	A	B	C	D	E	F	G	H
Bậc	4	4	2	3	6	5	4	4
	3	3	1	3	0	4	3	3
	2	3	1	2	-	0	2	2
	1	0	1	2	-	-	1	1
	1	-	0	0	-	-	0	1
	0	-	0	-	-	-	0	0



Màu 1: D, E.
 Màu 2: B, C, F.
 Màu 3: A, G.
 Màu 4: H.

Ví dụ 2

- ✚ Có 6 đội bóng A, B, C, D, E, F thi đấu vòng tròn (1 lượt) biết rằng các trận đấu sau đã xảy ra:
 - ❖ A đã đấu với B, E.
 - ❖ B đã đấu với A, F.
 - ❖ C đã đấu với D, F.
- ✚ Mỗi đội chỉ được thi đấu 1 trận trong 1 tuần. Hãy sắp xếp các trận đấu vào các tuần sao cho số tuần diễn ra là ít nhất.

Ví dụ 2 (tt)

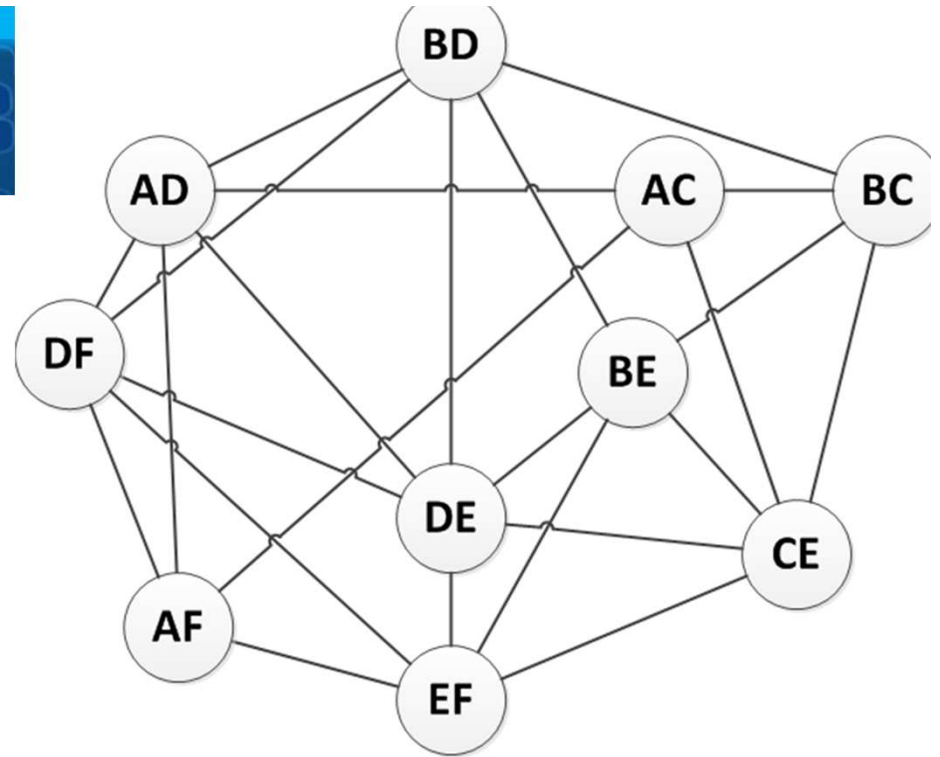
+ Đồ thị

- ❖ Đỉnh: các trận đấu.
- ❖ Cung: nối giữa hai trận đấu có cùng một đội bóng tham gia.

+ 10 đỉnh: AC, AD, AF, BC, BD, BE, CE, DE, DF, EF.

	AC	AD	AF	BC	BD	BE	CE	DE	DF	EF	Bậc
AC	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	4
AD	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	5
AF	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	4
BC	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	4
BD	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	5
BE	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	5
CE	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	5
DE	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	6
DF	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	5
EF	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	5

Ví dụ 2 (tt)



	AC	AD	AF	BC	BD	BE	CE	DE	DF	EF
Bậc	4	5	4	4	5	5	5	6	5	5
	4	4	4	4	4	4	4	0	4	4
	0	3	3	3	4	4	3	-	4	4
	-	2	3	2	0	3	3	-	3	4

Thuật giải tham lam (Greedy)

✚ B1: $i=0$

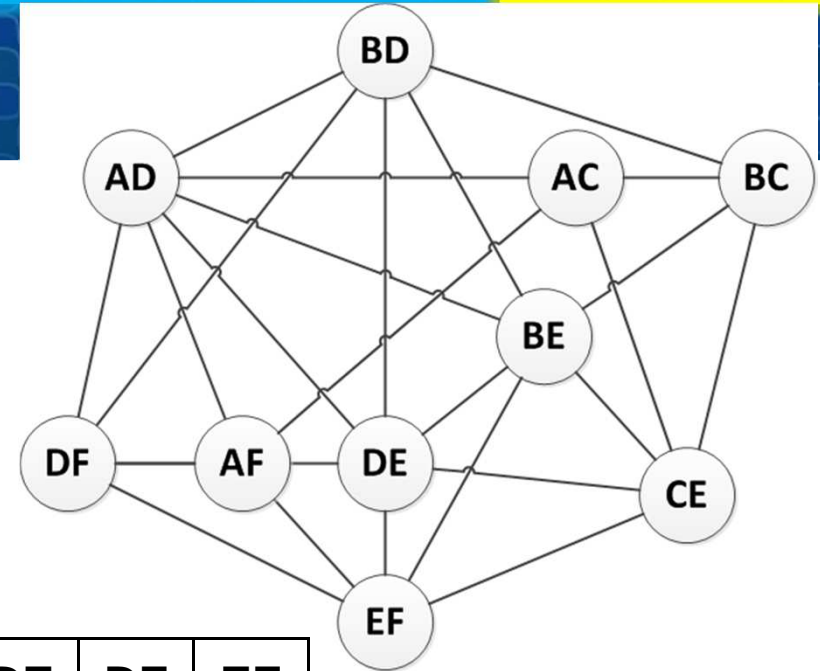
✚ B2: $i=i+1$

❖ Tô màu i cho tất cả các đỉnh có thể tô được.

✚ B3:

❖ Lặp lại B2 cho đến khi tất cả các đỉnh đều được tô màu.

Ví dụ 2 với Greedy(tt)



	AC	AD	AF	BC	BD	BE	CE	DE	DF	EF
i=1	1	x	x	x	1	x	x	x	x	1
i=2	-	2	x	2	-	x	x	x	x	-
i=3	-	-	3	-	-	3	x	x	x	-
i=4	-	-	-	-	-	-	4	x	4	-
i=5	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-

Thuật giải sắp thứ tự + tham lam

✚ B1:

❖ *Sắp xếp các đỉnh theo chiều giảm dần của bậc.*

❖ $i = 0$

✚ B2: $i = i + 1$

❖ Tô màu i cho tất cả các đỉnh có thể tô được (xét từ trái sang).

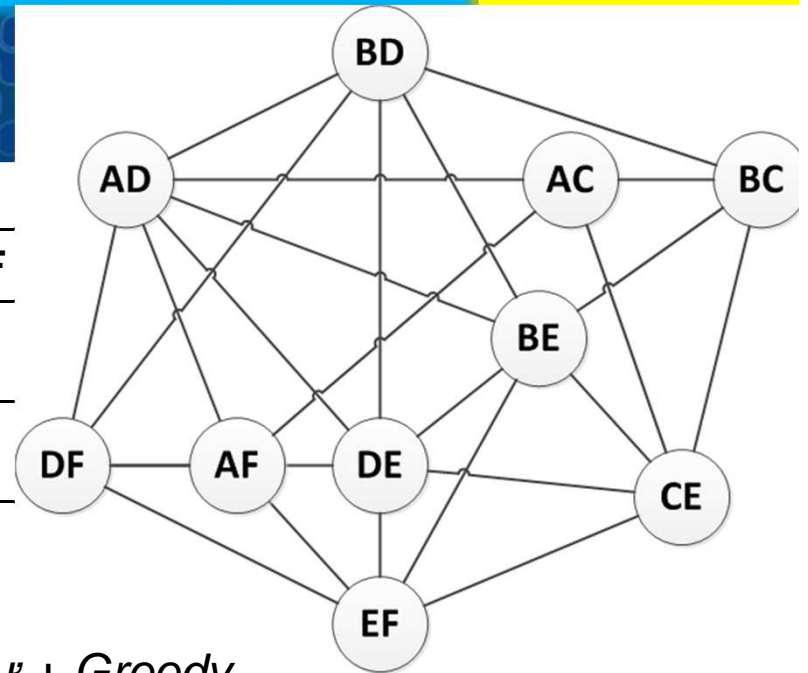
✚ B3:

❖ Lặp lại B2 cho đến khi tất cả các đỉnh đều được tô màu.

Ví dụ 2 với sắp xếp và Greedy(tt)

	AC	AD	AF	BC	BD	BE	CE	DE	DF	EF
i=1	1	x	x	x	1	x	x	x	x	1
...

Greedy



↓ Sắp xếp thứ tự + Greedy

	DE	AD	BD	BE	CE	DF	EF	AC	AF	BC
i=1	1	x	x	x	x	x	x	1	x	x
i=2	-	2	x	2	x	x	x	-	x	x
i=3	-	-	3	-	3	x	x	-	3	x
i=4	-	-	-	-	-	4	x	-	-	4
i=5	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-

Ví dụ 3

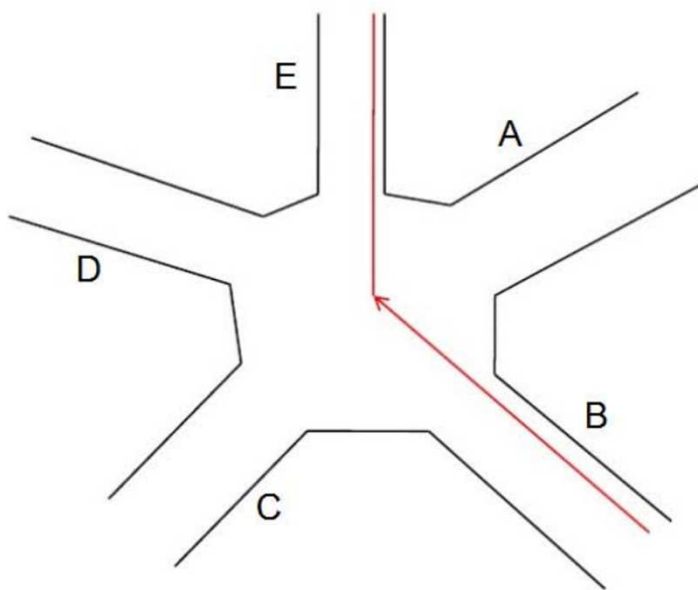
- ✚ Một cuộc hội thảo có 9 chủ đề a, b, c, d, e, f, g, h, i biết rằng các chủ đề sau không được phép diễn ra trong cùng một buổi: ac, bde, adg, cdf, dfg, egh, ghi.
- ✚ Hãy sắp xếp các chủ đề vào các buổi sao cho số buổi diễn ra là ít nhất.
- ✚ Đồ thị:

Ma trận quan hệ:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	Bậc
a	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3
b	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2
c	1	0	0	1	0	1	0	0	0	3
d	1	1	1	0	1	1	1	0	0	6
e	0	1	0	1	0	0	1	1	0	4
f	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3
g	1	0	0	1	1	1	0	1	1	6
h	0	0	0	0	1	0	1	0	1	3
i	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2

Ví dụ 4

- ✚ Cho ngã năm giao thông như sau trong đó BE là đường 1 chiều:



- ✚ Điều phối các tuyến giao thông sao cho trong mỗi thời điểm các tuyến không giao nhau.

Tài liệu tham khảo

- ✚ Slide Tô Màu Đồ Thị, Võ Đình Bảy,
<http://www.scribd.com/doc/27911677/cAc-Thu%E1%BA%ACt-Gi%E1%BA%A2i-%E1%BB%8A-tO-mAu-%C4%90%E1%BB%92>
- ✚ Graph Coloring, Wikipedia, 24/20/2010,
http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring