Logic mệnh đề

Tô Hoài Việt
Khoa Công nghệ Thông tin
Đại học Khoa học Tự nhiên TPHCM
thviet@fit.hcmuns.edu.vn

Tổng quan

- Giới thiệu về logic
- Logic mệnh đề
- Cú pháp logic mệnh đề
- Ngữ nghĩa logic mệnh đề
- Suy dẫn trong logic mệnh đề
- Chứng minh trong logic mệnh đề

Logic

- Cần một công cụ để biểu diễn và sử dụng tri thức của con người
- Logic: “khoa học về lập luận, chứng minh, suy nghĩ hay suy diễn”
- Sử dụng logic làm một công cụ để biểu diễn và xử lý tri thức

Logic là gì?

- Một ngôn ngữ hình thức
  - Cú pháp: Biểu thức nào là hợp lệ
  - Ngữ nghĩa: Biểu thức hợp lệ có ý nghĩa gì
  - Hệ chứng minh: một cách xử lý các biểu thức có cú pháp để có được các biểu thức có cú pháp khác (cho ta biết được thông tin mới)
- Chứng minh để làm gì:
  - Từ các quan sát => kết luận về thế giới
  - Trạng thái hiện tại & hành động => thuộc tính của trạng thái kế tiếp
- Hai loại logic : logic mệnh đề (đơn giản) và logic vị từ (phức tạp hơn).

Cú pháp Logic Mệnh đề

- Cú pháp: Là những gì được cho phép viết
  - (C++): for (int i=0; i< n; i++)…
  - (Tiếng Việt): Cơm ăn tôi rất ngon.
- Câu (sentence) trong logic mệnh đề:
  - <u>true</u> và <u>false</u> là các câu
  - Các biến mệnh đề là các câu: P, Q, R, Z
  - Nếu α, β là các câu thì

    $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$

    cũng là các câu
  - Ngoài ra, không có một câu nào nữa

Độ ưu tiên

$\neg$	Cao nhất
$\wedge$	
$\vee$	
$\Rightarrow$	
$\Leftrightarrow$	Thấp nhất

$A \vee B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
$A \wedge B \Rightarrow C \vee D$	$(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$
$A \Rightarrow B \vee C \Leftrightarrow D$	$(A \Rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow D$

- Luật ưu tiên cho phép các dạng viết tắt của các câu, nhưng chính thức chỉ có dạng đầy đủ dấu ngoặc mới hợp lệ.
- Các dạng nhập nhằng về cú pháp được cho phép viết tắt chỉ khi chúng tương đương ngữ nghĩa:

$A \wedge B \wedge C$ tương đương với $(A \wedge B) \wedge C$ và $A \wedge (B \wedge C)$

Ngữ nghĩa

- Nghĩa của một câu là một chân trị {t, f}
- Thể hiện là việc gán một các chân trị cho các biến mệnh đề
  - *holds*(α,i) [câu α là **t** trong thể hiện i]
    [câu α đúng trong thể hiện i]
  - *fails*(α,i) [câu α là **f** trong thể hiện i]
    [câu α sai trong thể hiện i]

Các luật ngữ nghĩa

- holds(<u>true</u>, i) với mọi i
- fails(<u>false</u>, i) với mọi i
- holds($\neg\alpha$, i) nếu và chỉ nếu (*iff*) fails(α,i)
- holds($\alpha\wedge\beta$,i) *iff* holds(α,i) và holds(β,i)
  nối liền
- holds($\alpha\vee\beta$,i) *iff* holds(α,i) hay holds(β,i)
  nối rời

Thể hiện i dưới dạng bảng tra, P là biến mệnh đề:

- holds(P,i) *iff* i(P) = t
- fails(P,i) *iff* i(P) = f

Một số dạng viết tắt quan trọng

- $\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ (điều kiện, kéo theo)

  tiền đề $\Rightarrow$ kết luận

- $\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$ (tương đương)

Bảng chân trị

P	Q	¬P	P∧Q	P∨Q	P⇒Q	Q⇒P	P⇔Q
f	f	t	f	f	t	t	t
f	t	t	f	t	t	f	f
t	f	f	f	t	f	t	f
t	t	f	t	t	t	t	t

Tính hợp lệ và thỏa mãn được

- Một câu là hợp lệ nếu và chỉ nếu chân trị của nó là **t** trong tất cả thể hiện

  Câu hợp lệ: <u>true</u>, $\neg$<u>false</u>, $P \lor \neg P$

- Một câu là thỏa mãn được nếu và chỉ nếu chân trị của nó là **t** trong ít nhất một thể hiện

  Câu thỏa mãn được: P, <u>true</u>, $\neg P$

- Một câu là không thỏa mãn được nếu và chỉ nếu chân trị của nó là **f** trong tất cả thể hiện

  Câu không thỏa mãn được: $P \land \neg P$, <u>false</u>, $\neg$<u>true</u>

Ví dụ

Câu	Hợp lệ?	Thể hiện làm cho chân trị của câu = f
khói $\Rightarrow$ khói khói $\lor$ $\neg$khói	hợp lệ	
khói $\Rightarrow$ lửa	thỏa mãn được, nhưng không hợp lệ	khói = t, lửa = f
k $\Rightarrow$ l $\Rightarrow$ ($\neg$k $\Rightarrow$ $\neg$l)	thỏa mãn được, nhưng không hợp lệ	k= f, l= t k $\Rightarrow$ l = t, $\neg$k $\Rightarrow$ $\neg$l = f
phản chứng k $\Rightarrow$ l $\Rightarrow$ ($\neg$l $\Rightarrow$ $\neg$k)	hợp lệ	

Tính thỏa mãn được

- Cho trước một câu S, cố gắng tìm một thể hiện i sao cho *holds*(S, i)
- Tương tự việc tìm một phép gán các giá trị cho các biến sao cho các ràng buộc thỏa
- Các phương pháp vét cạn: liệt kê tất cả các thể hiện và kiểm tra
- Các phương pháp tốt hơn:
  - tìm kiếm heuristic
  - lan truyền ràng buộc
  - tìm kiếm ngẫu nhiên

Một ví dụ: Bài giảng tốt?

Giả sử ta biết rằng:

- Nếu hôm nay trời nắng, thì Tomas sẽ vui vẻ

  ($S \Rightarrow H$)
- Nếu Tomas vui vẻ, bài giảng sẽ tốt

  ($H \Rightarrow G$)
- Hôm nay trời nắng (S)

Ta có thể kết luận rằng bài giảng sẽ tốt?

Kiểm tra các Thể hiện

S	H	G
t	t	t
t	t	f
t	f	t
t	f	f
f	t	t
f	t	f
f	f	t
f	f	f

Với 3 biến, ta có tất cả 8 thể hiện có thể

Kiểm tra các Thể hiện

S	H	G	$S \Rightarrow H$	$H \Rightarrow G$	S
t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	f	t
t	f	t	f	t	t
t	f	f	f	t	f
f	t	t	t	t	f
f	t	f	t	f	f
f	f	t	t	t	f
f	f	f	t	t	f

Trong đó, chỉ có 1 thể hiện thỏa tất cả các câu trong cơ sở tri thức: S=true, H=true, G=true

Kiểm tra các Thể hiện

S	H	G	$S \Rightarrow H$	$H \Rightarrow G$	S	G
t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	f	t	f
t	f	t	f	t	t	t
t	f	f	f	t	f	f
f	t	t	t	t	f	t
f	t	f	t	f	f	f
f	f	t	t	t	f	t
f	f	f	t	t	f	f

Và G cũng đúng trong thể hiện đó

Bài giảng là tốt!

Thêm một biến

L	S	H	G	$S \Rightarrow H$	$H \Rightarrow G$	S	G
t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	t	f	t	f	t	f
t	t	f	t	f	t	t	t
t	t	f	f	f	t	f	f
t	f	t	t	t	t	f	t
t	f	t	f	t	f	f	f
t	f	f	t	t	t	f	t
t	f	f	f	t	t	f	f
f	t	t	t	t	t	t	t
f	t	t	f	t	f	t	f
…	…	…	…				

Giả sử ta thêm một biến:
Leslie vui vẻ (L)

Có 2 thể hiện thỏa KB

Và chúng cũng thỏa G

Thêm một biến

L	S	H	G	S ⇒ H	H ⇒ G	S	G
t	t	t	t	t	t	[illegible]	t
t	t	t	f	t	[illegible]	[illegible]	[illegible]
t	t	f	t	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
t	t	f	f	f	[illegible]	[illegible]	[illegible]
t	f	t	t	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
t	f	t	f	t	[illegible]	f	[illegible]
t	f	f	t	t	t	f	t
t	f	f	f	t	t	f	f
f	t	t	t	t	t	t	t
f	t	t	f	t	f	t	f
…	…	…	…				

Bài toán tổng quát:
Suy dẫn

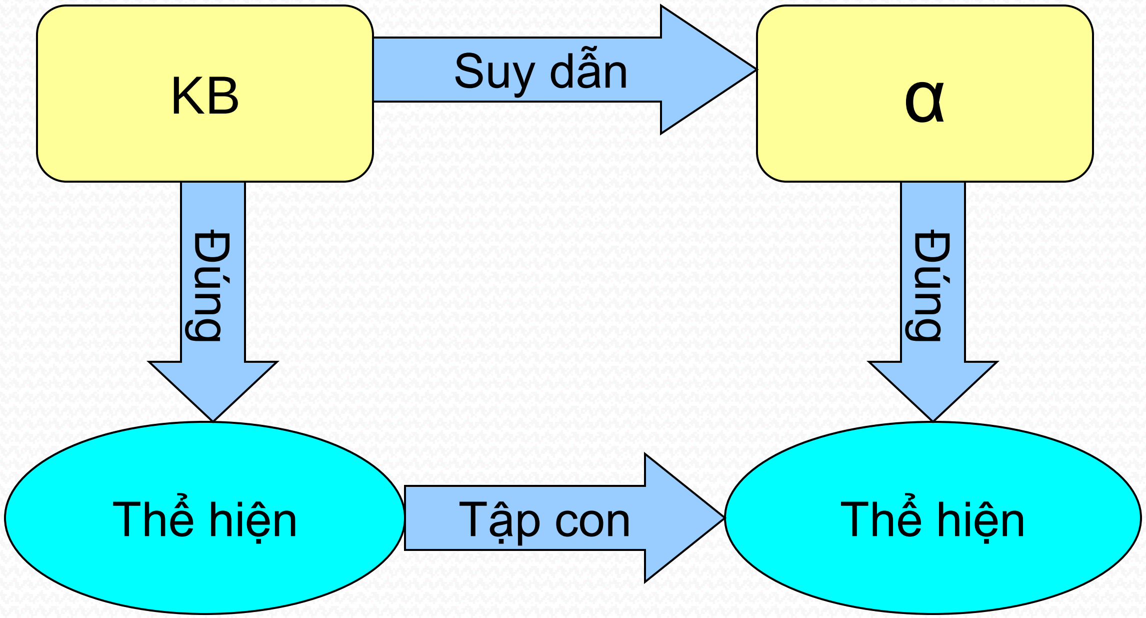
Giả sử ta thêm một biến:
Leslie vui vẻ (L)

Có 2 thể hiện thỏa KB

[illegible] chúng cũng thỏa G

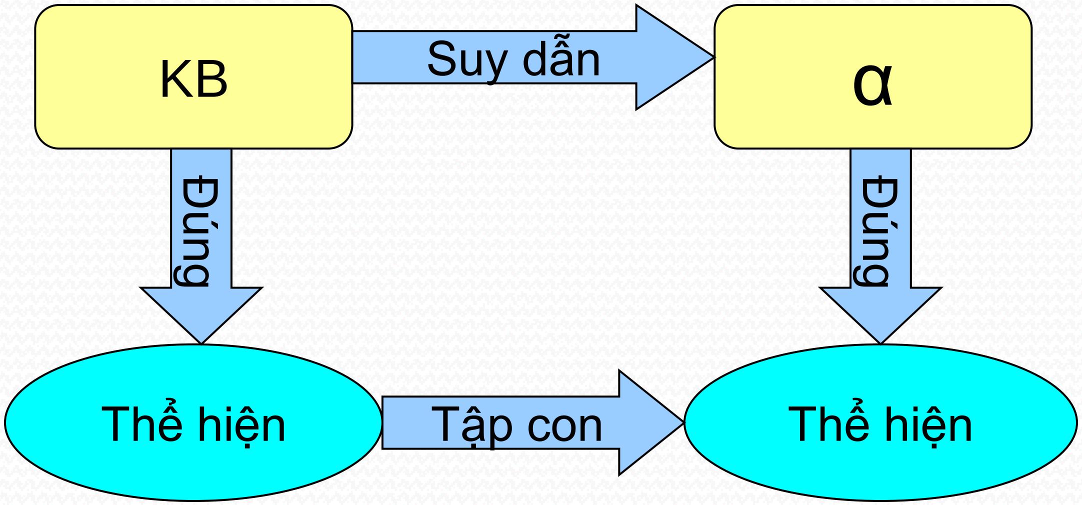
Suy dẫn (Entailment)

- Một cơ sở tri thức (KB) suy dẫn (entails) một câu α nếu và chỉ nếu mọi thể hiện làm cho KB đúng cũng làm cho α đúng. Ký hiệu: KB ╞ α



Tính toán Suy dẫn

- liệt kê tất cả thể hiện
- chọn những thể hiện mà tất cả thành phần của KB là đúng
- kiểm tra xem α có đúng trong tất cả các thể hiện này không



Suy dẫn bằng cách Liệt kê

- Thuật toán liệt kê theo chiều sâu tất cả các thể hiện

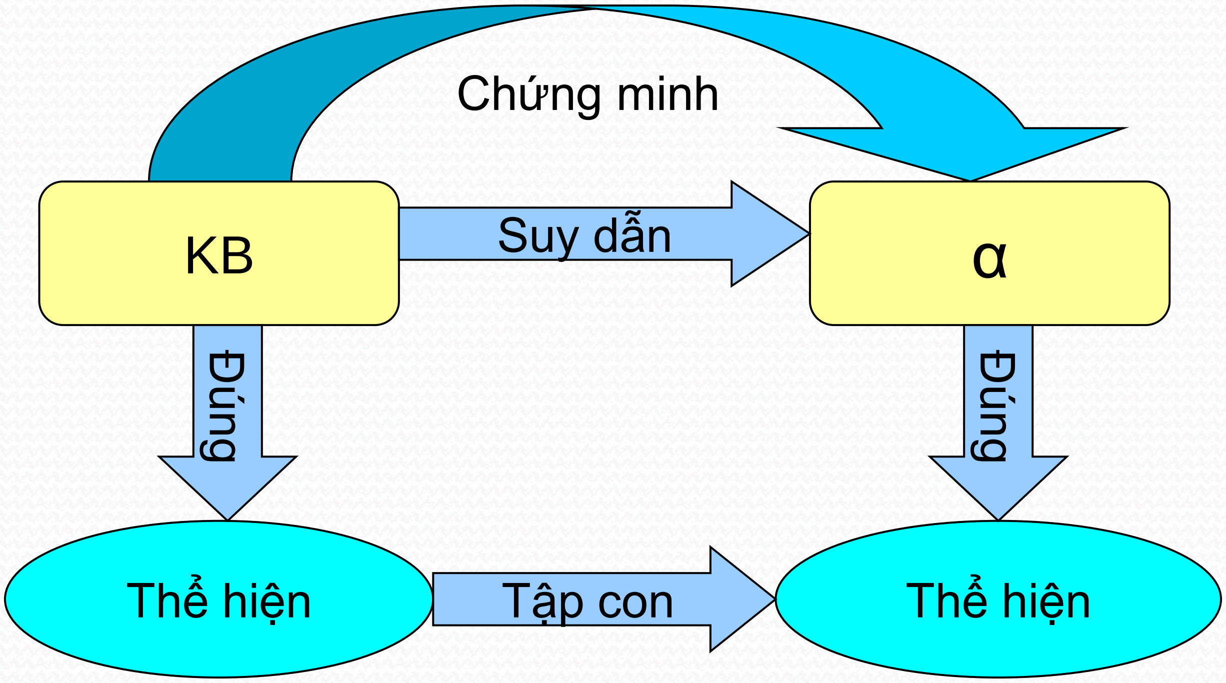
```
function TT-ENTAILS?(KB, α) returns true or false
    symbols ← a list of the proposition symbols in KB and α
    return TT-CHECK-ALL(KB, α, symbols, [])
```

```
function TT-CHECK-ALL(KB, α, symbols, model) returns true or false
    if EMPTY?(symbols) then
        if PL-TRUE?(KB, model) then return PL-TRUE?(α, model)
        else return true
    else do
        P ← FIRST(symbols); rest ← REST(symbols)
        return TT-CHECK-ALL(KB, α, rest, EXTEND(P, true, model)) and
               TT-CHECK-ALL(KB, α, rest, EXTEND(P, false, model))
```

- Với n biến, độ phức tạp thời gian là $O(2^n)$, độ phức tạp không gian là $O(n)$

Suy dẫn và chứng minh

- Chứng minh là cách kiểm tra xem một KB có suy dẫn một câu α hay không mà không cần liệt kê tất cả các thể hiện có thể



Chứng minh

- Một chứng minh là một chuỗi các câu
- Câu đầu tiên là các tiền đề (KB)
- Sau đó, ta có thể viết được dòng kế tiếp là kết quả của việc áp dụng một luật suy dẫn lên dòng trước
- Khi α xuất hiện trên dòng, ta đã chứng minh α từ KB

- Nếu các luật suy dẫn là đúng, thì bất kỳ α có thể chứng minh từ KB cũng suy dẫn được bởi KB
- Nếu các luật suy dẫn là đủ, thì bất kỳ α nào có thể được suy dẫn bởi KB cũng có thể được chứng minh từ KB

Suy diễn tự nhiên

- Một số luật suy diễn

Modus ponens	Modus tolens	And-Introduction	And-Elimination
$\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha}$	$\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$

Ví dụ suy diễn tự nhiên

Chứng minh S

Bước	Công thức	Nguồn gốc
1	$P \wedge Q$	Cho trước
2	$P \Rightarrow R$	Cho trước
3	$Q \wedge R \Rightarrow S$	Cho trước

Ví dụ suy diễn tự nhiên

Chứng minh S

Bước	Công thức	Nguồn gốc
1	$P \wedge Q$	Cho trước
2	$P \Rightarrow R$	Cho trước
3	$Q \wedge R \Rightarrow S$	Cho trước
4	P	1 And-Elim

Ví dụ suy diễn tự nhiên

Chứng minh S

Bước	Công thức	Nguồn gốc
1	$P \wedge Q$	Cho trước
2	$P \Rightarrow R$	Cho trước
3	$Q \wedge R \Rightarrow S$	Cho trước
4	P	1 And-Elim
5	R	4,2 Modus Ponens

Ví dụ suy diễn tự nhiên

Chứng minh S

Bước	Công thức	Nguồn gốc
1	$P \wedge Q$	Cho trước
2	$P \Rightarrow R$	Cho trước
3	$Q \wedge R \Rightarrow S$	Cho trước
4	P	1 And-Elim
5	R	4,2 Modus Ponens
6	Q	1 And-Elim

Ví dụ suy diễn tự nhiên

Chứng minh S

Bước	Công thức	Nguồn gốc
1	$P \wedge Q$	Cho trước
2	$P \Rightarrow R$	Cho trước
3	$Q \wedge R \Rightarrow S$	Cho trước
4	P	1 And-Elim
5	R	4,2 Modus Ponens
6	Q	1 And-Elim
7	$Q \wedge R$	5,6 And-Intro

Ví dụ suy diễn tự nhiên

Chứng minh S

Bước	Công thức	Nguồn gốc
1	$P \wedge Q$	Cho trước
2	$P \Rightarrow R$	Cho trước
3	$Q \wedge R \Rightarrow S$	Cho trước
4	P	1 And-Elim
5	R	4,2 Modus Ponens
6	Q	1 And-Elim
7	$Q \wedge R$	5,6 And-Intro
8	S	3,7 Modus Ponens

Các hệ thống chứng minh

- Có nhiều hệ thống suy diễn tự nhiên; chúng thường là các "chương trình kiểm tra chứng minh", đúng nhưng không đủ
- Suy diễn tự nhiên dùng nhiều luật suy diễn gây nên một hệ số phân nhánh lớn trong việc tìm một chứng minh.
- Thông thường, ta cần dùng "chứng minh theo trường hợp" thậm chí còn phân nhánh nhiều hơn

  VD: cần chứng minh R từ $(P \vee Q)$, $(P \Rightarrow R)$ và $(Q \Rightarrow R)$.

Hợp giải mệnh đề

- Luật hợp giải:

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma}$$

- Luật hợp giải đơn lẻ là một hệ chứng minh đúng và đủ
- Đòi hỏi tất cả các câu được chuyển sang dạng chuẩn hội

Các hệ thống logic

- Hệ thống suy diễn tiến
- Hệ thống suy diễn lùi
- Hệ thống dựa trên hợp giải

sẽ tiếp tục trong bài sau…