

# *Árvore-B*

## *Remoção, Redistribuição e Concatenação*

6897/1 e 5187/31 – Organização e Recuperação de Dados

Profa. Valéria D. Feltrim

UEM – CTC – DIN

## Relembrado...

- Propriedades de uma árvore-B de ordem  $m$ :
  - Toda página tem um máximo de  $m$  descendentes
  - **Toda página, exceto a raiz e as folhas, tem no mínimo  $\lceil m/2 \rceil$  descendentes**
  - A raiz tem pelo menos dois descendentes (a menos que também seja uma folha)
  - Todas as folhas estão no mesmo nível
  - Uma página não-folha com  $k$  descendentes contém  $k - 1$  chaves
  - **Uma página folha contém no mínimo  $\lceil m/2 \rceil - 1$  chaves e no máximo  $m - 1$  chaves**

# Remoção em árvore-B

## ❑ Manutenção das propriedades da árvore-B

- Na inserção → inserção sempre nas folhas + divisão + promoção
- Na remoção → **remoção sempre nas folhas + redistribuição + concatenação**

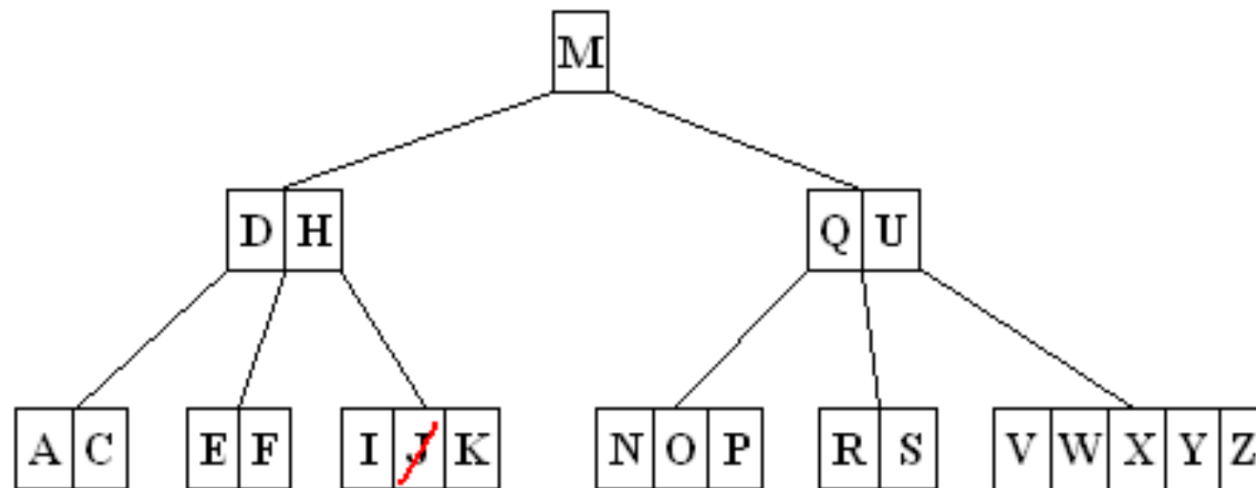
## ❑ Exemplo: diferentes situações resultantes de remoção

- Para uma árvore-B de ordem 6 ( $m = 6$ )
  - Máximo de chaves por página = 5 ( $m - 1$ )
  - Mínimo de chaves por página = 2 ( $\lceil m/2 \rceil - 1$ )
    - A única exceção é a raiz, que pode conter apenas uma chave

# Remoção em árvore-B

## ❑ Caso 1: Caso mais simples

- Remoção de uma chave em uma página folha, sendo que o número mínimo de chaves na página é respeitado
- **Solução:** A chave é retirada e os registros internos à página são reorganizados
- Exemplo: Remoção da chave J



# Remoção em árvore-B

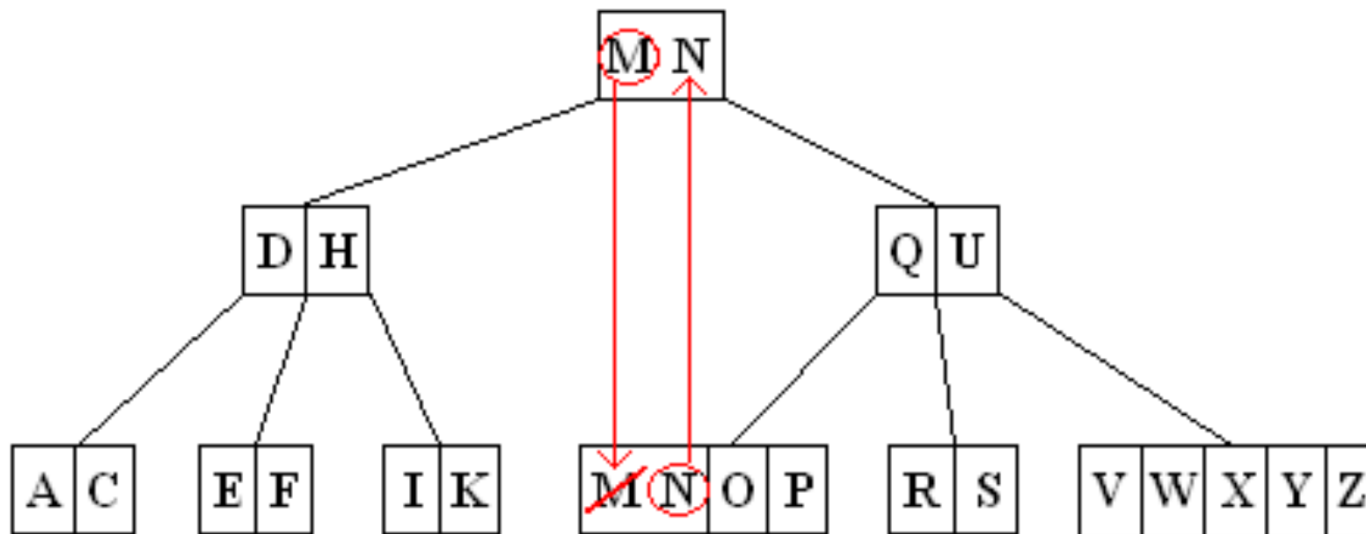
## ❑ Caso 2

- Remoção de uma chave que não está em um nó folha
- **Solução:**
  - Sempre removemos de páginas folha
  - Se uma chave deve ser eliminada de uma página que não é folha, trocamos a chave com sua sucessora imediata, que com certeza está em uma folha
  - A seguir, eliminamos a chave da folha

# Remoção em árvore-B

## ❑ Caso 2

- Exemplo: Remoção da chave M – primeiro M é trocado com N e depois é feita a remoção



# Remoção em árvore-B

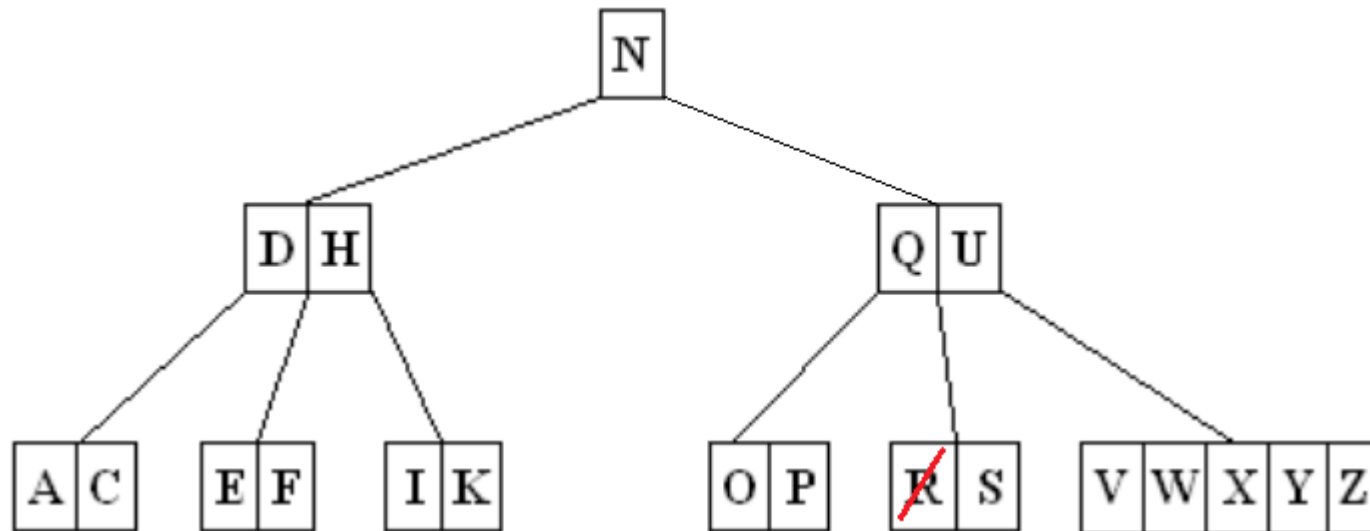
## ❑ Caso 3

- A remoção causa *underflow* na página (a página fica com menos elementos do que a taxa mínima de ocupação)
- **Solução:** Redistribuição de chaves
  - Procura-se uma página irmã imediata (mesmo pai e imediatamente à direita ou à esquerda) que contenha mais chaves que o mínimo: se existir, redistribui-se as chaves entre essas páginas
  - A redistribuição provoca uma alteração na chave separadora que está no nó pai

# Remoção em árvore-B

## ❑ Caso 3

- Exemplo: Remoção da chave R – *underflow* no filho esquerdo de U

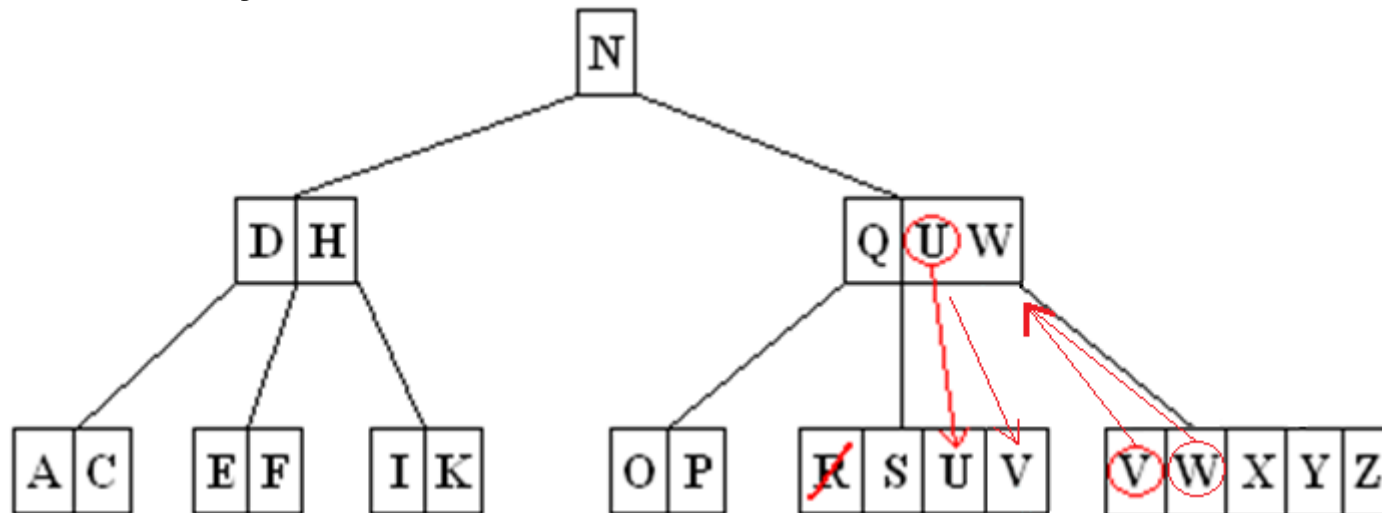




# Remoção em árvore-B

## ❑ Caso 3

- Exemplo: Remoção da chave R – A página irmã à direita “empresta” o V e o W, que é promovido para o nó pai, enquanto as chaves U e V descem do nó pai para a página com *underflow*



# Remoção em árvore-B

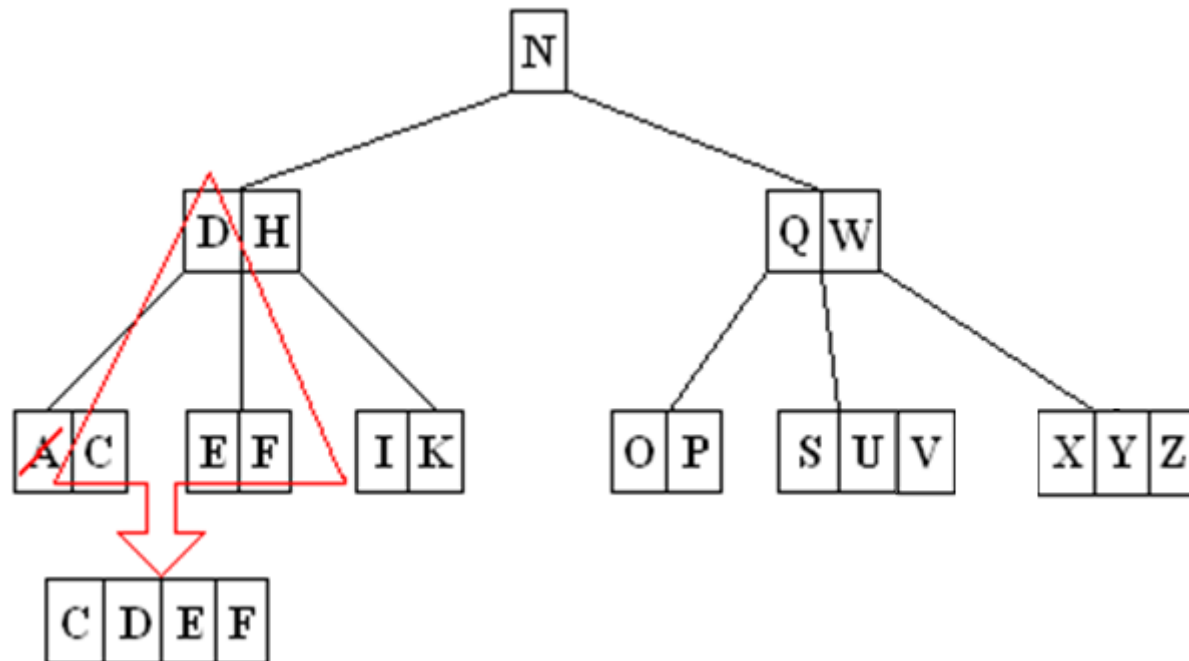
## ❑ Caso 4

- Ocorre *underflow* nas páginas envolvidas e a redistribuição não pode ser aplicada
- Não existem chaves suficientes para dividir entre as duas páginas irmãs
- **Solução:** Concatenação de páginas
  - Combina-se o conteúdo de duas páginas irmãs, juntamente com a chave da página pai, para formar uma única página
  - A concatenação é o inverso da divisão. Como consequência, pode ocorrer o *underflow* da página pai

# Remoção em árvore-B

## ❑ Caso 4

- Exemplo: Remoção da chave A – A página irmã não tem chaves “extras” para emprestar, então ocorre a concatenação das duas páginas, juntamente com a chave separadora que está na página pai



# Remoção em árvore-B

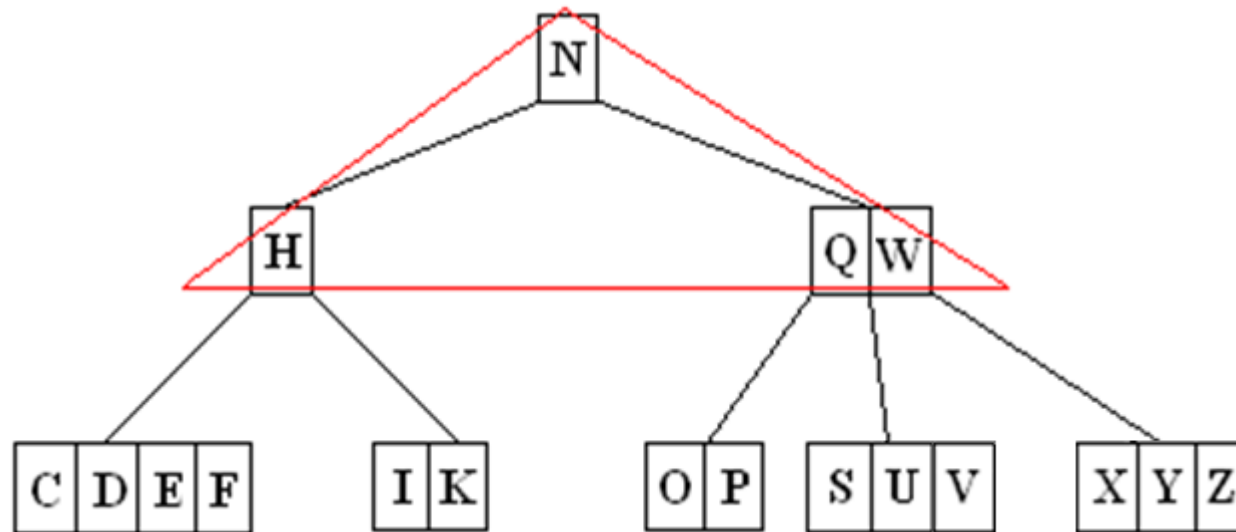
## ❑ Caso 5

- *Underflow* se propaga para a página pai
- **Solução:** Dependendo da ocupação das páginas relacionadas, pode haver redistribuição ou nova concatenação

# Remoção em árvore-B

## ❑ Caso 5

- Exemplo: A remoção e concatenação no caso 4 causou *underflow* na página pai, que ficou apenas com a chave H. Será necessária uma nova concatenação, já que a página irmã de H não tem chaves “extras” para emprestar



# Remoção em árvore-B

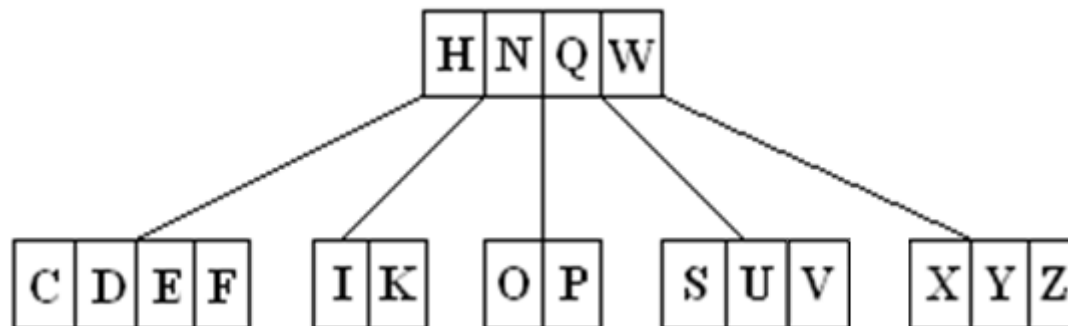
## ❑ Caso 6

- Diminuição da altura da árvore
- **Solução:** A concatenação dos filhos da raiz absorve a única chave da raiz
  - Esse caso mostra o que ocorre quando a concatenação se propaga até a raiz
  - Note que esse nem sempre é o caso: se as páginas filhas da raiz tiverem chaves além do limite mínimo, seria possível aplicar a redistribuição em vez da concatenação e a altura da árvore seria mantida

# Remoção em árvore-B

## ❑ Caso 6

- Exemplo: Árvore-B resultante após as remoções dos casos anteriores, concatenando as chaves na página raiz



# Remoção em árvore-B

## ❑ Passos para a remoção de uma chave em árvores-B

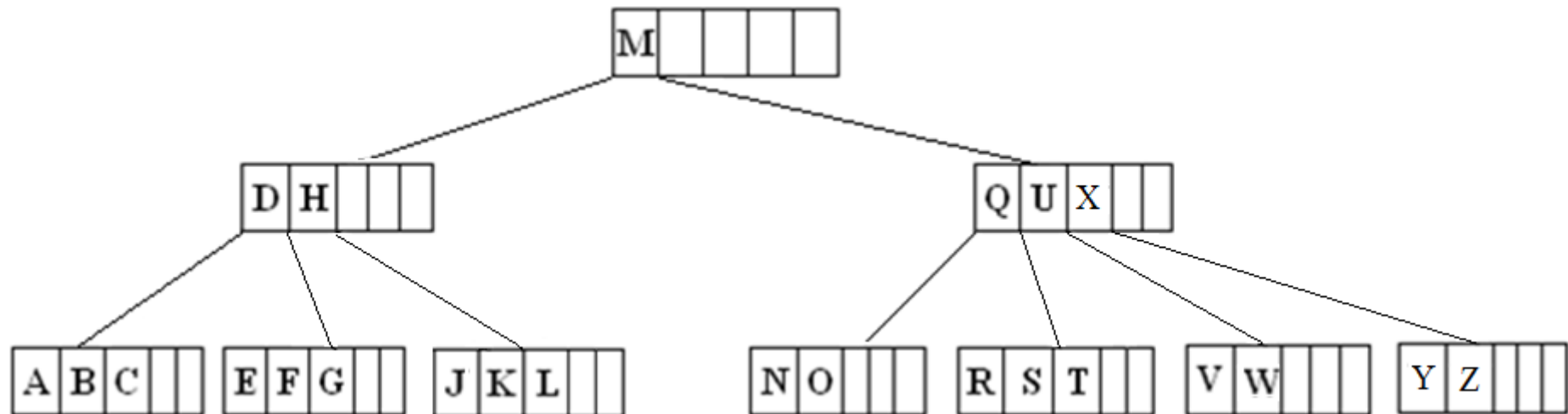
1. Se a chave não estiver em uma folha, troque-a com sua sucessora imediata
2. Remova a chave da folha
3. Se a folha continuar com o número mínimo de chaves, fim
4. Se a folha tem uma chave a menos que o mínimo, verifique as páginas irmãs imediatas à esquerda e à direita
  - a) Se uma delas tem mais que o número mínimo de chaves, redistribua
  - b) Senão concatene a página com uma das irmãs, mais a chave separadora que está no pai
5. Se ocorreu concatenação, aplique os passos de 3 a 6 para a página pai
6. Se a última chave da raiz foi removida, então a raiz passa a ser a página concatenada e a árvore diminui sua altura um nível



## Exercício

- A partir da árvore-B de **ordem 6** dada abaixo, represente graficamente as árvores resultantes após a remoção de cada uma das seguintes chaves (nesta ordem):

**L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V**



- Obs.: na redistribuição e na concatenação, vamos dar preferência à página irmã direita **quando for possível usar qualquer uma das duas irmãs**.

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ