Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEInf

Cálculo para Engenharia

folha 3 — 2022'23

Limites e Continuidades.

1. Para cada um dos seguintes conjuntos, determine a existência de majorantes e minorantes, supremos e ínfimos e máximos e mínimos. Defina, ainda, o respetivo conjunto derivado.

(a) $\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\{1\}\cup]\sqrt{5},9[$ (e) $[\sqrt{5},9]\cap\mathbb{Q}$

2. Considere as funções f, g e h, reais de variável real, definidas respetivamente por

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases} \qquad h(x)=x+1$$

Para cada uma das funções,

(a) defina os correspondentes domínio e seu derivado.

(b) conjeture sobre a existência do limite, quando x tende para 1.

(c) verifique, por definição, a conjetura apresentada, na alínea anterior.

3. Sabendo que $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-1}=2$, encontre um $\varepsilon>0$, que, na definição de Cauchy, funcione quando $\delta=1$; ou seja, procure $\varepsilon>0$ tal que

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1, \quad \text{sempre que} \quad 0<|x-5|<\varepsilon.$$

Sugestão: Organize a sua resolução em duas etapas: 1.ª Resolva a inequação $\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$, de modo a encontrar um intervalo que contenha $x=5$, no qual a inequação se verifica para qualquer $x\neq 5$. 2.ª Encontre um $\varepsilon>0$, que situe o intervalo centrado $5-\varepsilon<x<5+\varepsilon$ (centrado em $x=5$) 'dentro' do intervalo encontrado no passo anterior.

4. Considere a função h, real de variável real, definida em D e seja $a\in D'$. Prove (por definição de limite, segundo Cauchy) que

(a) se $h(x)=K$ (com $K\in\mathbb{R}$), então $\lim\limits_{x\to a}h(x)=K$.

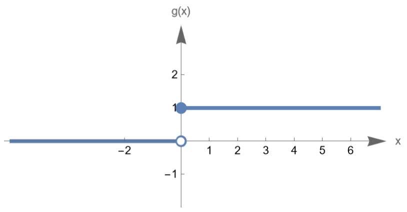
(b) se h é a função identidade, então $\lim\limits_{x\to a}h(x)=a$.

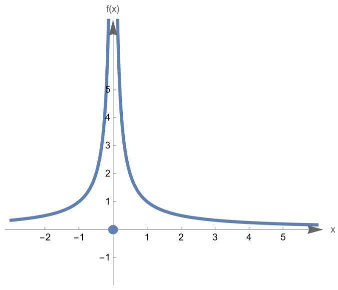
(c) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$

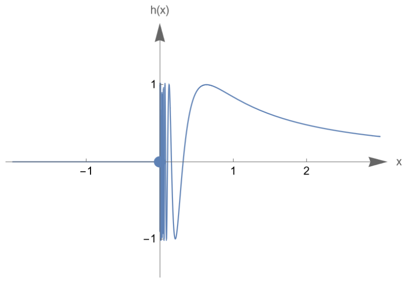
5. Usando a definição de limites infinitos e a de limites no infinito, mostre que

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\infty$

6. Representam-se, nas figuras, alguns dos casos em que uma função, real de variável real, não tem limite, em um ponto particular (neste caso, quando $x=0$) do seu domínio







Sabendo que

(a) $g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, (b) $f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{1}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, (c) $h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$;

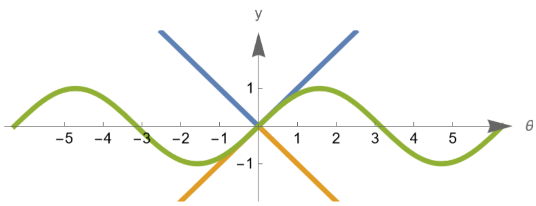
discuta o comportamento das respetivas funções, explicando a razão pela qual o limite, quando $x \to 0$, não existe.

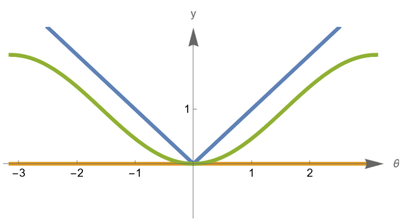
7. Se $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, calcule $\displaystyle\lim_{x \to 4} f(x)$.

8. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} u(x)$, sabendo que, para $x \neq 0$, a função u, real de variável real, satisfaz a seguinte condição

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

9. Atente nas representações gráficas e, usando o teorema do enquadramento, estabeleça os seguintes resultados





(a) $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0.$

(b) $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \cos \alpha = 1.$

10. Sabendo que f, g e h são funções reais de variável real tais que $\forall x \neq 5$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e que $\displaystyle\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} h(x) = -5$,

(a) poderíamos concluir algo sobre os valores de g e h para $x = 2$?

(b) poderia $f(2)$ ser zero?

(c) poderia $\displaystyle\lim_{x \to 2} f(x)$ ser zero?

11. Usando os resultados demonstrados nas alíneas (a) e (b) do exercício **3.**, bem como as propriedades dos limites, calcule se existir ou prove que não existe

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{3}{x + 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}$

(f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{2x + 1}$

(g) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3+2x^2+1}{4x^3-x^2+x+2}$

(h) $\lim_{x\to 3} \sqrt{|x-3|}$

(i) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

(j) $\lim_{x\to 4} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 4 \\ x, & x = 4 \end{cases}$

(k) $\lim_{x\to 1} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ é racional} \\ 2, & x \text{ é irracional} \end{cases}$

12. Encontre as assíntotas verticais e horizontais da função definida por $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$, sabendo que, por definição,

- uma reta definida por $x = a$ se diz assíntota vertical do gráfico de uma função f, real de variável real, quando ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$; e que
- uma reta definida por $y = b$ se diz assíntota horizontal do gráfico de uma função f, real de variável real, quando ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$;

13. Sabendo que $f(x) = x^2 - 4x$, calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-3}$

(b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

(d) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

14. Em que pontos (se existirem) são contínuas as funções que a seguir se definem

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ é racional} \\ 0, & x \text{ é irracional} \end{cases}$ (b) $h(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ é inteiro} \\ x^2, & x \text{ nos outros casos} \end{cases}$ (c) $f(x) = \lceil x \rceil$.

15. Seja f uma função, real de variável real, definida por $f(x) = \dfrac{x^5-1}{x-1}$. Defina uma extensão de f, contínua para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

16. Segundo o Teorema do Valor Intermédio, para funções contínuas:

> Se f é uma função real de variável real definida e contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a) \leq y_0 \leq b$, então $y_0 = f(c)$, para $c \in [a, b]$.

Baseando-se neste resultado, mostre que a equação $x^3 - x - 1 = 0$ tem necessariamente uma solução no intervalo $[1, 2]$.

17. Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas

(a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua

(b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua

(c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta?

18. Considere a função $f : [0, 1[\cup[2, 3] \longrightarrow [1, 3]$, contínua e definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

(a) A função f é bijectiva. Justifique.

(b) Determine a função inversa de f.

(c) f^{-1} é contínua?

(d) O teorema da continuidade da função inversa foi posto em causa?