

Redes neurais (Perceptrões e MLP)

V 1.4, V.Lobo, EN/NOVA-IMS, 2021

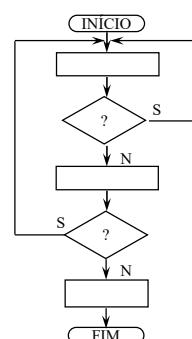
Redes Neuronais (Introdução, perceptrões, e MLP)

Victor Lobo

1

Origens de AI e Redes Neuronais

- Programação Imperativa
 - Explicita-se o algoritmo
 - Conjunto de instruções
- Inteligência Artificial
 - Usar o homem e a biologia como inspiração
 - Abordagem simbólica
 - Estudar os processos cognitivos -> Lógica, Sistemas Periciais
 - Abordagem sub-simbólica
 - Estudar os processos biológicos -> Redes Neuronais



2

1

Introdução histórica

- Anos 50 – primeira sugestão
 - Ideia de “programar” um computador simulando um conjunto de neurónios...
- Anos 60 – primeira “era”
 - Muito trabalho com neurónios simples, também chamados “máquinas lineares”.
- Final da década de 60 – primeiro “fim”
 - Publicação de “Perceptrons”, de Minsky
 - Demonstrada a limitação dos neurónios simples,
 - Dúvidas quanto à possibilidade de treinar redes complexas de neurónios.
 - Desilusão: a investigação nesta área quase parou.

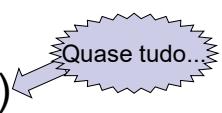
3

Introdução histórica

- 1986 – Rumelhart “re-inventa” o algoritmo de “Back-Propagation”
 - Descoberto em 1975 por Werbos, mas quase ignorado
 - Possibilita o treino de redes multi-camada
 - Euforia sobre redes neuronais
- Anos 80 – o “ressurgir”
 - Aparecem novas arquitecturas: os mapas auto-organizados (SOM), Redes de funções de base radial (RBF), redes de Hopfield, etc,
 - Várias aplicações práticas
- Anos 90 – a “consolidação”
 - Uso generalizado de redes neuronais
 - Pontes para outras áreas como a estatística, processamento de sinal, etc

4

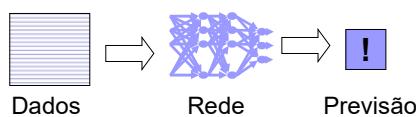
Principais tipos de redes neurais

- Perceptrões simples
- Perceptrões multicamada (MLP) 
- Redes de funções de base radial (RBF)
- Mapas auto-organizados (SOM)
- Support Vector Machines (SVM)
- Outros
 - Hopfield, Boltzman, ART, Spiking Networks, Neural Gas, LVQ, BPTT, BSB, etc.

5

Algumas vantagens das redes neurais MLP para SAD

- Em **problemas de previsão**, com **aprendizagem supervisionada** a partir de **bases de dados**
 - Aprendem “automaticamente”
 - Fazem interpolações não-lineares
 - São **aproximadores universais**



6

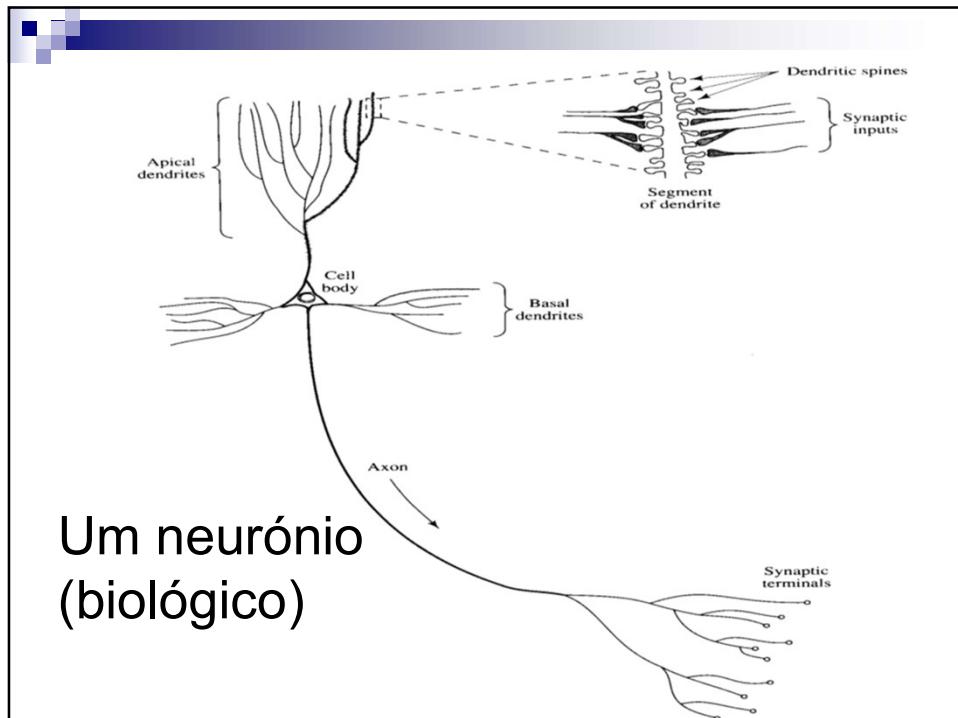
Redes neurais (Perceptrões e MLP)

V 1.4, V.Lobo, EN/NOVA-IMS, 2021

Inspiração e
formalização para
redes neurais

7

Um neurónio
(biológico)



8

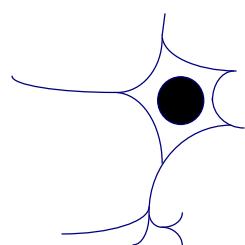
Funcionamento de um neurónio biológico

- Dendrites recebem iões através das sinapses
 - Esses iões são injectados por outros neurónios vizinhos. Quando mais excitados estiverem os vizinhos, mais iões são injectados
- O sinal eléctrico é propagado até ao núcleo
 - Se o neurónio fôr suficientemente estimulado, ele próprio entra em estado de excitação e começa a estimular os seus vizinhos
- Factores que condicionam a activação de um neurónio
 - As ligações que tem, ou seja os vizinhos que escolhe
 - A “força” da sua ligação a cada um desses esses vizinhos, *i.e.*, a eficiência das sinapses.
 - A sua sensibilidade, *i.e.*, o ponto a partir do qual ele dispara
- O cérebro humano tem MUITOS (10^{12}) neurónios...

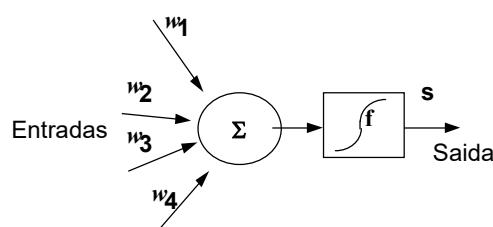
9

Modelo matemático de um neurónio biológico

- McCullor & Pitts (1943)



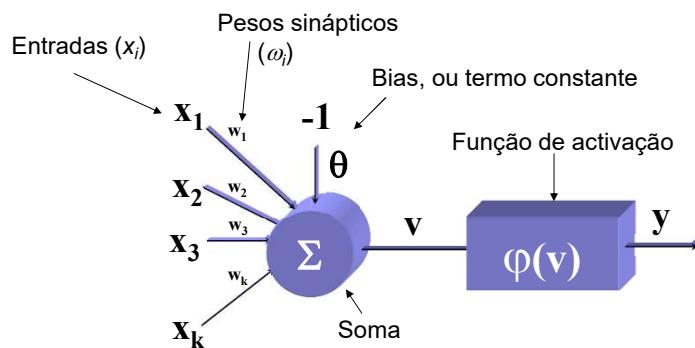
Neurónio biológico



Neurónio artificial

10

Modelo mais completo



$$v = \sum_{i=1}^k w_i x_i - \theta$$

$$y = \varphi(v) = \text{sign}(v)$$

11

Aprendizagem num neurónio

- Determinação dos pesos sinápticos
 - Como escolher os ω ?
- Ideia geral:
 - Sinapses que ajudam a obter bons resultados devem ser reforçadas
 - Sinapses que levam a maus resultados devem ser enfraquecidas

12

Problemas tipo

- Biologia

- Se os neurónios da ponta dos dedos indicam muito calor → Activar o neurónio que enconhe o músculo do braço
 - Se um pé indica peso e o outro não → Activar o neurónio responsável pelo equilíbrio

- Outros problemas

- Se os dados sobre uma casa (preço, área, anos, etc), são bons → Comprar a casa
 - Se os dados sobre um cliente (saldo médio, salário, idade, etc) são bons → Conceder crédito

- Sempre:

- Dadas umas entradas activar umas saídas

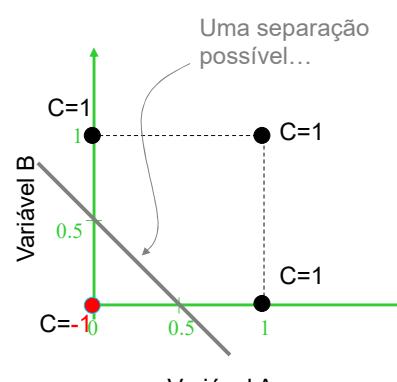
13

Exemplo muito simples

- Queremos prever se a classe é 1 ou 0.

Variáveis

A	B	Classe
0	0	-1
0	1	1
1	0	1
1	1	1



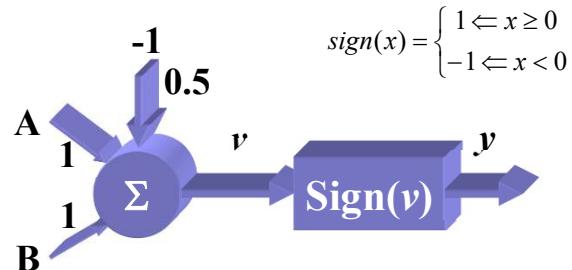
- Qual a rede neuronal que resolve este exemplo?

14

Redes neurais (Perceptrões e MLP)

V 1.4, V.Lobo, EN/NOVA-IMS, 2021

A solução



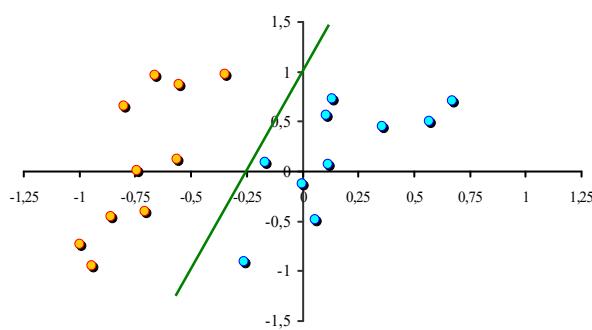
$$y = f_{\text{activação}} \left(\sum_i \omega_i x_i - \theta \right) = \text{sign}(A + B - 0.5)$$

- A separação entre os locais onde y é positivo e negativo será sempre um hiperplano!

$$\square v = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \theta = 0 \Rightarrow x_2 = w_1 / w_2 x_1 + \theta / w_2$$

15

Outro exemplo



16

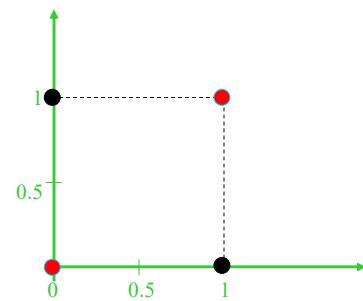
Mais outro exemplo...

...que corre mal

- Qual o classificador de

A	B	Classe
0	0	-1
0	1	1
1	0	1
1	1	-1

- Qual a rede neuronal que resolve este exemplo?



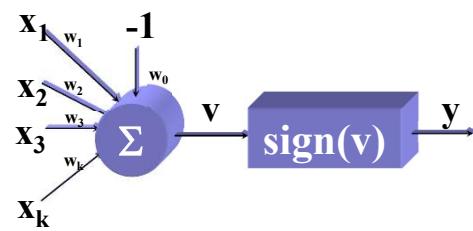
17

Perceptrão (um neurónio isolado)

18

Perceptrão simples

- O perceptron é o exemplo mais simples de uma rede neuronal
- Consiste num único neurónio
- Permite classificar sem erro duas classes **linearmente separáveis**



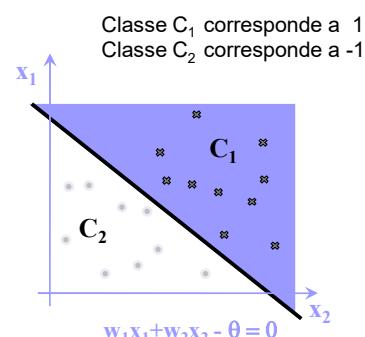
19

Regra de classificação

- Se

$$x(t) = [-1, x_1(t), \dots, x_n(t)]^T,$$

$$W(t) = [0, w_1(t), \dots, w_n(t)]^T$$
 então $v(t) = W(t)^T \cdot x(t)$
- A equação do hiperplano é dada por $v(t) = 0$
- A regra de classificação é
 - se $W(t)^T \cdot x(t) \geq 0$ então $x(t) \in C_1$
 - se $W(t)^T \cdot x(t) < 0$ então $x(t) \in C_2$



20

Algoritmo de aprendizagem

Dado um vector x

Se $(W(t)^T \cdot x \geq 0 \wedge x \in C_1) \vee (W(t)^T \cdot x < 0 \wedge x \in C_2)$

então $W(t+1) = W(t)$

senão

Se $(W(t)^T \cdot x \geq 0 \wedge x \in C_2)$

então

$W(t+1) = W(t) - \eta(t) x$

senão

$W(t+1) = W(t) + \eta(t) x$

Onde $\eta(t)$ é o ritmo de aprendizagem

Escolher outro x e repetir o processo

21

Algoritmo de aprendizagem (redes binárias)

■ Considerando:

- Uma série de vectores x como sendo uma série $x(t)$
- Uma função $d(t)$ que indica se o dado pertence a uma classe ou outra

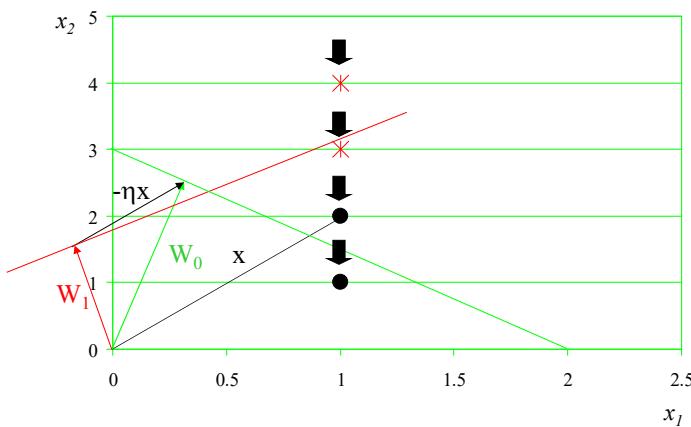
■ Obtém-se
uma forma
mais elegante:

Regra delta
(binária)

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = \text{sign}(W^T(t)x(t)) \\ \Delta W(t) = \eta(t) \overbrace{[d(t) - y(t)]x(t)}^{\text{erro}} \\ d(t) = \begin{cases} +1 & \text{se } x(t) \in C_1 \\ -1 & \text{se } x(t) \in C_2 \end{cases} \end{array} \right.$$

22

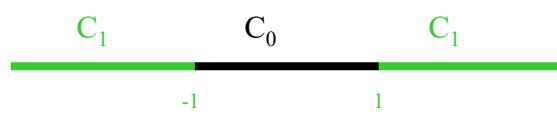
Exemplo



23

Questão

- Só é possível resolver problemas de classificação linearmente separáveis?
- Por exemplo, pode resolver-se o problema de duas classes com uma única variável, representado pela figura abaixo?



24

Nota

- Se o número de variáveis for **maior do que** o número de exemplos de treino o problema de classificação **é sempre linearmente separável**
- Consequência:
 - Dado um número suficientemente grande de características, SE houver poucos dados (e estes forem independentes), é SEMPRE possível usar um perceptron simples.
 - A superfície de separação tende para o discriminante linear de Fisher

25

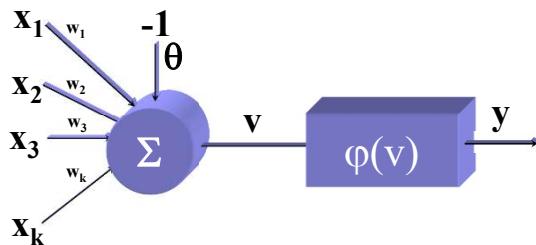
Multi-Layer Perceptrons (MLP)

Feed-Forward Networks with Error
Backpropagation

Redes Multicamada com Retropropagação
do erro

26

Modelo de cada neurónio



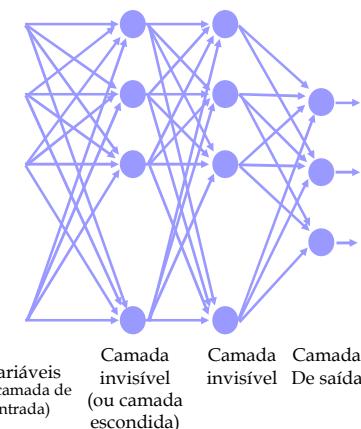
em que $\varphi(v)$ pode ser

- a função sinal
- a função sigmoide
- a função tangente hiperbólica

27

Modelo das ligações entre neurónios

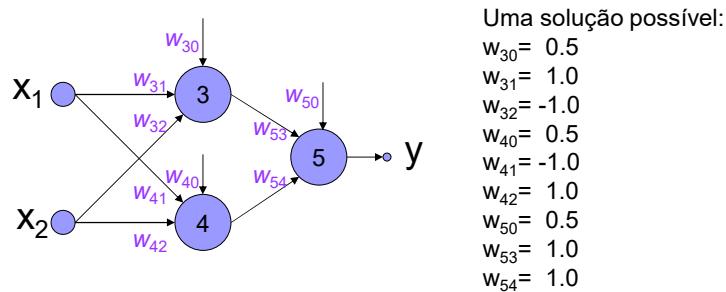
- Os valores de saída de uns neurónios são usados como entradas nos neurónios da camada seguinte
- Convém ter funções de avaliação diferenciáveis
- Aprendizagem Supervisionada
 - É necessário um algoritmo de aprendizagem para ajustar os pesos sinápticos
 - “Error Back-Propagation” (BP) é o mais comum (ou pelo menos mais simples...)



28

Exemplo XOR (1)

- Problema que não pode ser resolvido com uma só camada
- Funções de activação “step”
 - $H(x)=1 \Leftrightarrow x \geq 0$



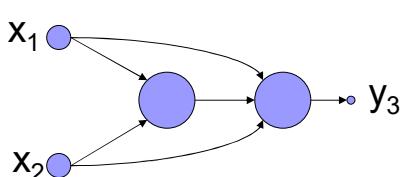
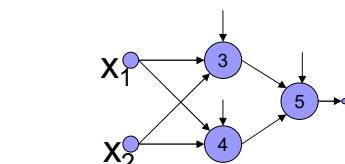
29

Exemplo XOR (2)

- Implementação em Excel

Entradas	A	0			
	B	1			
Neurónio	Bias	Peso 1	Peso 2	Soma	Saída
3	0,5	1	-1	-1,5	0
4	0,5	-1	1	0,5	1
5	0,5	1	1	0,5	1

- Outra arquitectura possível...



30

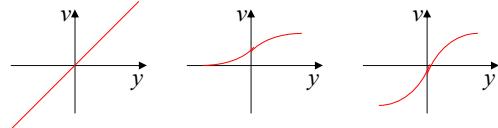
Funções de activação(1)

■ No neurónio de saída

- Problema de classificação \Rightarrow 2 valores de saída (p.ex. Heaviside)
- Problema de regressão \Rightarrow valores de saída de $-\infty$ a $+\infty$ (p.ex. recta)

■ Nos neurónio interiores

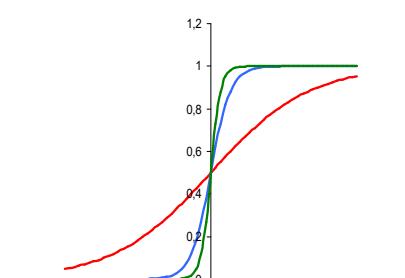
- Evitar saturação \Rightarrow Valores de saída limitados
- Monótonas
- Diferenciáveis
- Variações suaves



31

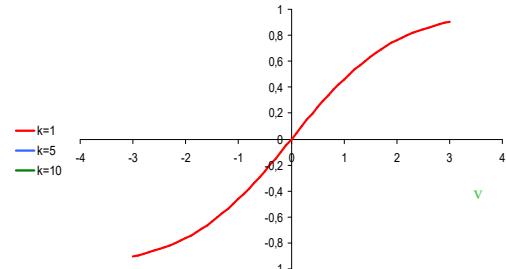
Funções de activação (2)

$$\varphi(v) = \frac{1}{1 + e^{-kv}}$$



Sigmoide

$$\varphi(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}$$



Tangente hiperbólica

32

Como encontrar os pesos mágicos ?

- Algoritmo de treino da rede

- Ajusta os pesos sinápticos de modo a que a rede, dadas umas entradas, produza o resultado pretendido
- Ideia base: tentativa e erro
 - Inicia-se com pesos aleatórios.
 - Se der o resultado certo (ganda'sorte)... não mexe !
 - Se der um resultado errado... faz um "ajustezinho"
 - Alternativa: resolver um sistema de m equações a n incógnitas
- Exemplo de função de saída de uma rede de 2 camadas:

$$y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i w_{Si} \frac{1}{1 + e^{-k(\sum_j w_{ij}x_j - \theta_i)}}$$

33

Conceito de *superfície de erro*

- Erro

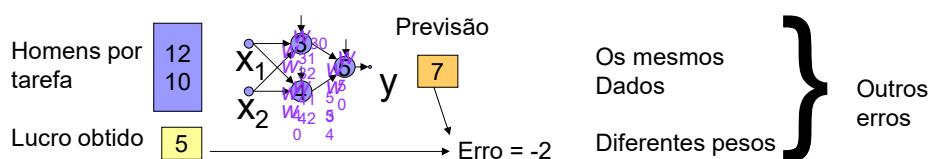
- Diferença entre o que a rede produz à saída, e o que ela devia produzir

- Erro médio

- Erro médio para um conjunto de dados

- Superfície de erro

- Variação do erro médio quando os pesos se alteram

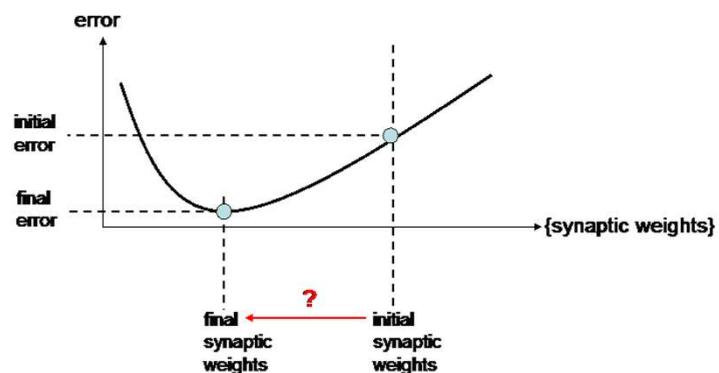


34

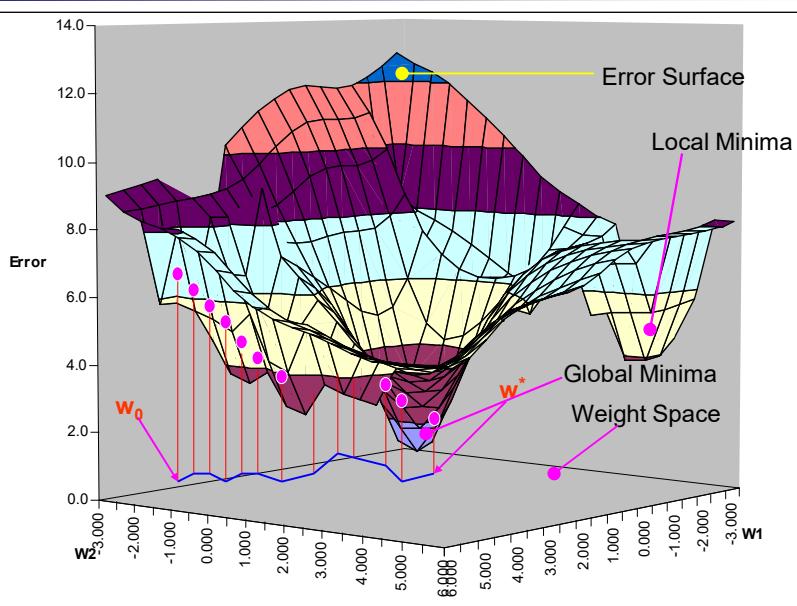
Consequências de ajustar os pesos

- Mudanças dos pesos
=> deslocações pela superfície de erro

- Exemplo a 1 dimensão (1 peso)



35



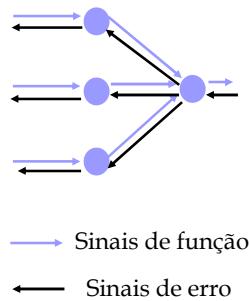
36

Author: Angshuman Saha <http://www.geocities.com/adotsaha/NNinExcel.html>

36

Sinais numa rede multicamada

- Sinais “de função” que se propagam desde os neurónios de entrada até às saídas.
- Sinais “de erro” que se propagam de uma saída para as entradas (camada a camada), através da rede.



37

Algoritmo de “backpropagation”

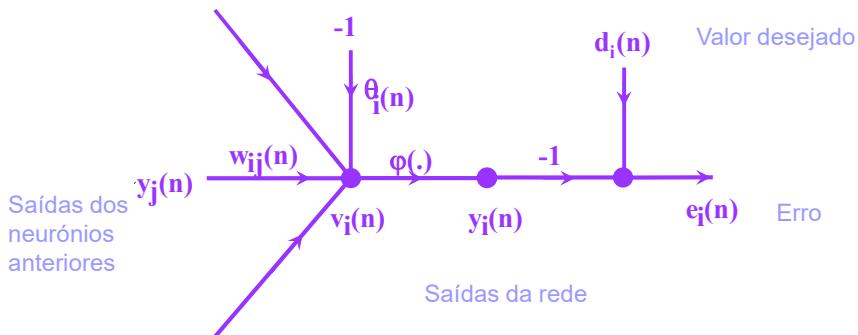
- Função de custo: erro médio da rede

$$\begin{cases} \xi(n) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in O} e_j^2(n) && \text{erro instantâneo} \\ \xi_{av} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi(n) && \text{erro médio} \end{cases}$$

em que O representa os neurónios de saída e N o número total de exemplos

38

Neurónio i da camada de saída



39

Aplicação do método do gradiente

$$\begin{aligned}\Delta w_{ij} &= -\eta \frac{\partial \xi(n)}{\partial w_{ij}} \xrightarrow{\text{e}_i \xrightarrow{-1} y_i} \\ &= -\eta \frac{\partial \xi(n)}{\partial e_i(n)} \frac{\partial e_i(n)}{\partial y_i(n)} \frac{\partial y_i(n)}{\partial v_i(n)} \frac{\partial v_i(n)}{\partial w_{ij}} \\ &= -\eta e_i(n) (-1) \frac{d\varphi(v)}{dv} \Big|_{v=v_i} y_j(n) \\ &= \eta \delta_i(n) y_j(n)\end{aligned}$$

← Regra delta

em que $\delta_i(n)$ é definido como produto do gradiente local pelo erro e é dado por

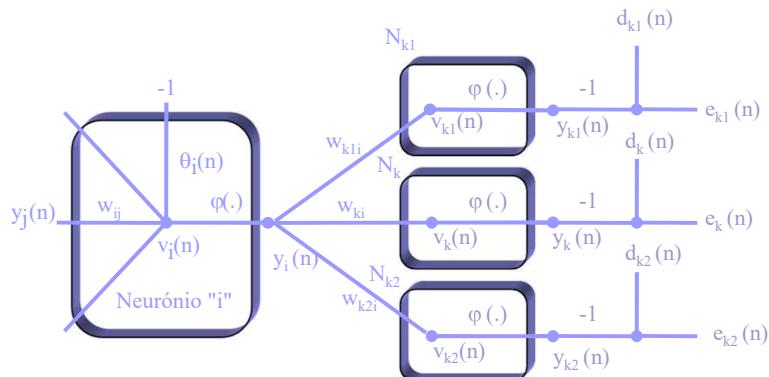
$$\delta_i(n) = e_i(n) \frac{d\varphi(v)}{dv} \Big|_{v=v_i}$$

40

Redes neurais (Perceptrões e MLP)

V 1.4, V.Lobo, EN/NOVA-IMS, 2021

Neurónio i de um nó da “camada escondida”



41

Aplicação do método do gradiente

$$\begin{aligned}
 \Delta w_{ij} &= -\eta \frac{\partial \xi(n)}{\partial w_{ij}} \\
 &= -\eta \frac{\partial \xi(n)}{\partial y_i(n)} \frac{\partial y_i(n)}{\partial v_i(n)} \frac{\partial v_i(n)}{\partial w_{ij}} \\
 &= -\eta \left(\sum_k \frac{\partial \xi(n)}{\partial e_k(n)} \frac{\partial e_k(n)}{\partial y_k(n)} \frac{\partial y_k(n)}{\partial v_k(n)} \frac{\partial v_k(n)}{\partial y_i(n)} \right) \cdot \frac{d\phi(v)}{dv} \Big|_{v=v_i} y_j(n) \\
 &= -\eta \left(\sum_k e_k(n) (-1) \frac{d\phi(v)}{dv} \Big|_{v=v_k} w_{ki} \right) \cdot \frac{d\phi(v)}{dv} \Big|_{v=v_i} y_j(n) \\
 &= -\eta \left(\sum_k \delta_k(n) w_{ki} \right) \cdot \frac{d\phi(v)}{dv} \Big|_{v=v_i} y_j(n) \\
 &= \eta \delta_i(n) y_j(n)
 \end{aligned}$$

42

Regra delta

- A regra de aprendizagem pode ser descrita por

$$\Delta w_{ij} = \eta \delta_i(n) y_j(n)$$

- em que $\delta_i(n)$ é o gradiente local dado por

$$\begin{cases} \delta_i(n) = e_i(n) \cdot \frac{d\varphi(v)}{dv} \Big|_{v=v_i} & \text{para os neurónios de saída} \\ \delta_i(n) = \frac{d\varphi(v)}{dv} \Big|_{v=v_i} \sum_k \delta_k(n) w_{ki} & \text{para os neurónios invisíveis} \end{cases}$$

43

Função de avaliação: Sigmoide

- Para a camada de saída

Derivada da sigmoide:
 $Y(1-Y)$

$$\delta_i(n) = [d_i(n) - o_i(n)] o_i(n) [1 - o_i(n)]$$

- Para as camadas invisíveis

$$\delta_i(n) = y_i(n) [1 - y_i(n)] \sum_k \delta_k(n) w_{ki}$$

44

Generalização da regra delta

Rumelhart (1986) propôs a regra

$$\Delta w_{ij}(n) = \alpha \Delta w_{ij}(n-1) + \eta \delta_i(n) y_j(n)$$

incluindo um termo de **momento** em que α é a constante de momento e é positiva.

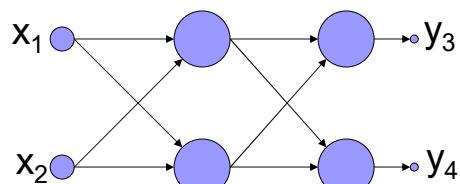
45

Exemplo

- Sejam as funções

● A Rede Neuronal

x_1	x_2	y_3	y_4
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

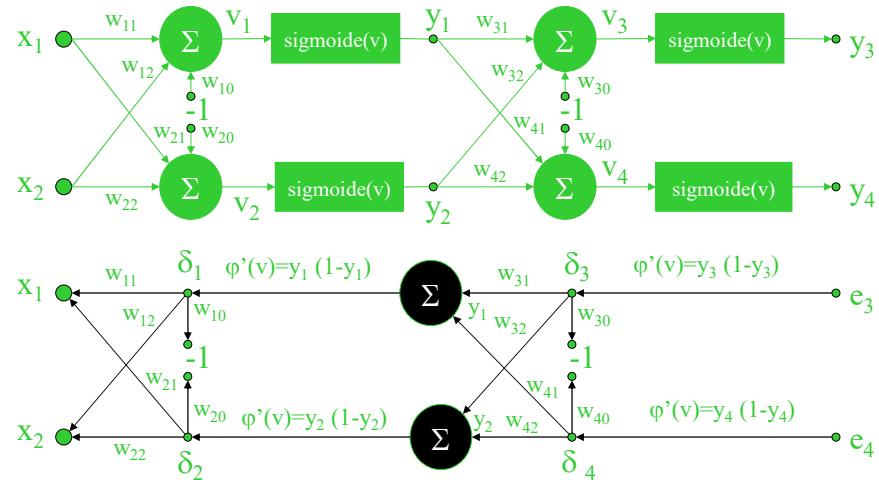


46

Redes neurais (Perceptrões e MLP)

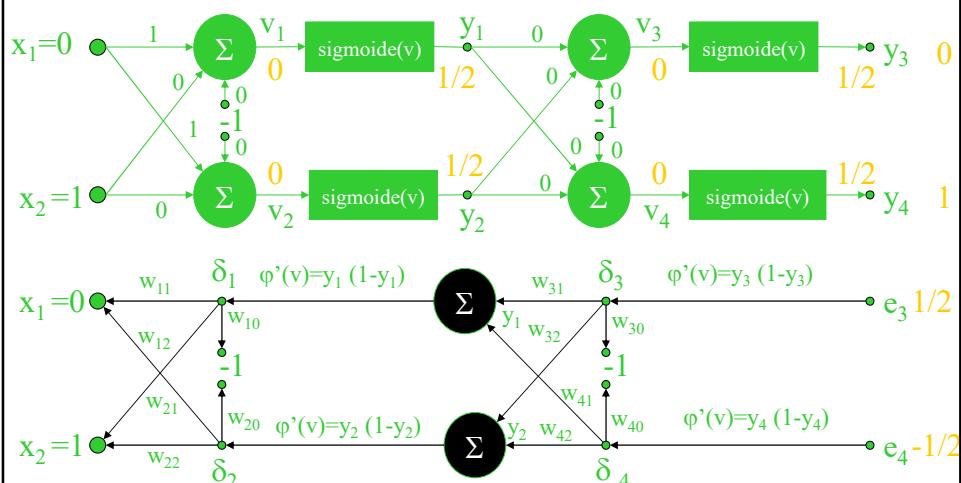
V 1.4, V.Lobo, EN/NOVA-IMS, 2021

Exemplo (cont)



47

Exemplo (cont)



48

24

Problemas com o BackProp

- É um método de gradiente, logo sujeito a mínimos locais
 - Infelizmente é normal haver muitos mínimos locais...
- É lento
- Soluções
 - Várias inicializações
 - Vários valores para o momento
 - Vários métodos de optimização dos parâmetros
- Na maior parte do software de apoio
 - Múltiplas corridas, e escolhe o melhor
 - Optimização por quasi-newton, Lavenberg-Marquadt, gradiente conjugado...

49

Regras práticas...(rules of thumb)

- Tentar primeiro com percepção simples
- Uma camada escondida resolve qualquer problema mas:
 - Aumentar gradualmente o nº de neurónios e ir verificando a diminuição do erro
 - Se o nº de neurónios crescer muito, tentar com 2 camadas escondidas
- Sempre:
 - Várias inicializações, e vários momentos

50

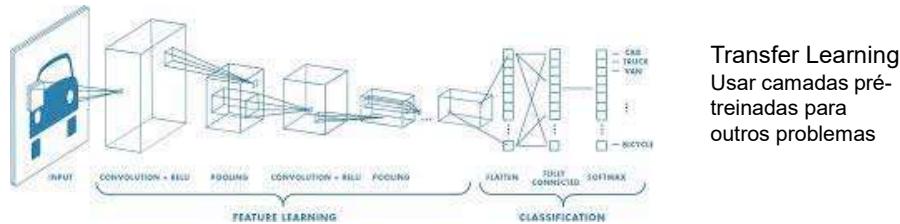
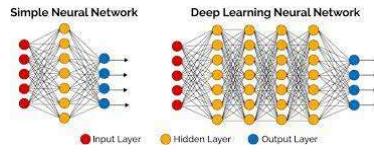
Redes neurais (Perceptrões e MLP)

V 1.4, V.Lobo, EN/NOVA-IMS, 2021

Deep Learning

■ Conceito Básico

- Usar MUITAS camadas numa rede neuronal
- Camadas “mais baixas” estão a fazer *feature extraction*, e podem ter estruturas diferentes
 - Convolutional Layers (nas CNN) – Fazem a convolução de um kernel com várias partes da imagem
- Problemas: muitos (muitos dados), e computação



51

Redes Neuronais

Bibliografia

52

26