Universidad CAECE
Cámara Argentina de Comercio y Servicios

Licenciatura en Administración de Negocios / Licenciatura en Administración de Recursos Humanos / Licenciatura en Ciencia de Datos

Matemática 1 – Elementos de Álgebra

GUIA DE LA UNIDAD Nro. 1

Contenidista: Lic. María Mónica Argüello

INDICE – Guía Nro. 1

MAPA DE LA GUIA 1: FUNCIONES MATEMÁTICAS

OBJETIVOS

En esta Unidad esperamos que el estudiante pueda

- Adquirir un panorama general del concepto de función matemática,
- Representar e interpretar gráficamente funciones.
- Identificar los tipos más importantes de funciones reales y sus características principales.
- Obtener la expresión de nuevas funciones a partir de otras conocidas.
- Resolver situaciones problemáticas aplicando funciones.

CONTENIDOS:

FUNCIONES MATEMÁTICAS

✓ Relaciones: definición de relación y notación. Conjunto de partida y de llegada.

✓ Funciones: Definición de función. Naturaleza y notación de las funciones. Dominio y rango.

- Representación gráfica de las funciones: Sistema de coordenadas rectangulares.
- Tipos de Funciones: Funciones constantes. Funciones lineales. Funciones cuadráticas y sus características. Funciones cúbicas. Funciones exponenciales y logarítmicas. Funciones racionales.
- Combinación de funciones. Funciones compuestas.

PALABRAS CLAVE

Codominio – Composición – Cuadrática – Dominio – Existencia – Función – Imagen– Lineal – Racional – Relación – Representación – Restricción – Unicidad – Variable

BIBLIOGRAFÍA Y MATERIALES DE REFERENCIA

Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal con Aplicaciones* (7a ed.). McGraw Hill.

Haeussler, E. Jr.; Paul, Richard S. y Wood, R. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía* (12a ed.). Prentice Hall.

Lerner N., Sobel A. (1996). *Álgebra* (4a ed.). Prentice Hall.

Lipschutz, Seymour. (1994). *Teoría de conjuntos y temas afines.* Colección Schaum. Mc Graw Hill.

Swokowski, E. W. y Cole, J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (13a ed.). Cengage Learning.

1. FUNCIONES MATEMÁTICAS

1.1. RELACIONES

A cada ciudadano argentino se le asigna un número de DNI. Cada vehículo tiene asociada una marca. De cada país podemos indicar el continente al cual pertenece. También podríamos relacionar cada continente con algún país que pertenezca a éste. O quizás estamos interesados en determinar la distancia desde cada capital de provincia a la ciudad de Buenos Aires. O el tiempo que tarda en llenarse un tanque de agua dependiendo de la cantidad de agua que ingresa por minuto. Son numerosos los ejemplos de la vida cotidiana en los cuales nos interesa establecer relaciones entre distintas magnitudes o variables. Consideremos entonces los siguientes ejemplos:

1) Formamos un conjunto con todos los nombres de mujer y a cada uno de ellos le asignamos su inicial.

2) A cada número real le asignamos su cuadrado. Por ejemplo, al número 3 le asignamos el 9, o al 11 el 121. En forma general, cada número natural x lo relacionamos con x^2.

3) Definimos dos conjuntos, uno con todos los continentes y el otro con todos los países del mundo. Luego, asignamos a cada continente algún país que pertenezca a él.

4) Supongamos que estamos viajando a una velocidad constante de 80 km/h. La distancia que recorreremos quedará determinada por el tiempo de viaje (distancia= velocidad x tiempo). Se puede expresar esta relación mediante la ecuación $d = 80t$, donde d es la distancia en kilómetros y t el tiempo medido en horas. Cuando $t = 2$, la distancia es $d = 80 * 2 = 160\ km/h$.

5) Teniendo en cuenta la población de una determinada ciudad, relacionamos cada persona con su hermano, siempre que dicho hermano sea ciudadano de la misma ciudad.

¿Observa alguna característica en común entre todos los ejemplos?

Si pudo identificar que en todos ellos se establece una correspondencia entre elementos de dos conjuntos, pudo identificar lo que conocemos como relación entre conjuntos el cual definimos formalmente a continuación.

Definición 1.1.1

Dados dos conjuntos A y B, se define la *relación* R *de* A *en* B a cualquier aplicación que asigna a un elemento de A, algún elemento de B. Simbólicamente lo podemos expresar como:

$$R: A \to B$$

"R asigna elementos de B a elementos de A"

El conjunto A se llama *conjunto de partida* y el conjunto B *conjunto de llegada.*

Si llamamos x a los elementos de A e y a los elementos de B, para indicar que x se relaciona con y lo podemos escribir como:

xRy o $R(x) = y$ o $(x, y) \in R$

Es importante tener en cuenta que esta asignación no necesita cumplir ninguna condición para considerarse relación.

Todos los ejemplos anteriores corresponden a relaciones definidas entre distintos conjuntos. Los analizaremos introduciendo la notación utilizada en matemática:

1) $A =$ conjunto formado por todos los nombres de mujer y $B = \{a, b, c, d, \dots\}$

La relación R está dada por

$$R: A \to B \ / \ R(nombre) = inicial$$

Se lee *"la relación* R *asigna a cada nombre su inicial"*

Por ejemplo, , $R(Patricia) = P$, $R(Carla) = C$, $R(Carolina) = C$, $R(Andrea) = A$

2) $\mathbb{R}$: conjunto de números naturales.

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / T(x) = x^2$$

Por ejemplo, $T(3) = 3^2 = 9$, es decir 3 se relaciona con 9 mediante T. También lo podemos escribir como $3\boldsymbol{T}9$.

3) $A =$ conjunto formado por todos los continentes y $B =$ conjunto formado por todos los países del mundo. Definimos la relación S que a cada continente le asigna un país que pertenezca a él:

$$S: A \rightarrow B / S(continente) = país\ de\ dicho\ continente$$

Ejemplo:

$$S(Europa) = España$$

$$S(Asia) = Japón$$

$$S(África) = Egipto$$

4) Consideramos el conjunto R de número reales y definimos la relación D que determina la distancia recorrida al viajar a una velocidad constante de $80\ km/h$ como:

$$D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / D(t) = 80t$$

5) Llamamos A al conjunto formado por todas las personas que viven en la ciudad. La relación queda definida por:

$$F: A \rightarrow A /\ \ F(ciudadano) = hermano\ de\ dicho\ ciudadano$$

Tal vez usted se estará preguntando por qué la relación S del ejemplo 3 le asigna *España* al continente europeo en lugar de algún otro país como *Francia, Alemania, Dinamarca,* etc. Ciertamente podríamos asignarle todos ellos ya que la relación definida no especifica nada. Tendríamos entonces que el elemento *Europa* del conjunto de partida se relaciona con varios elementos del conjunto de llegada:

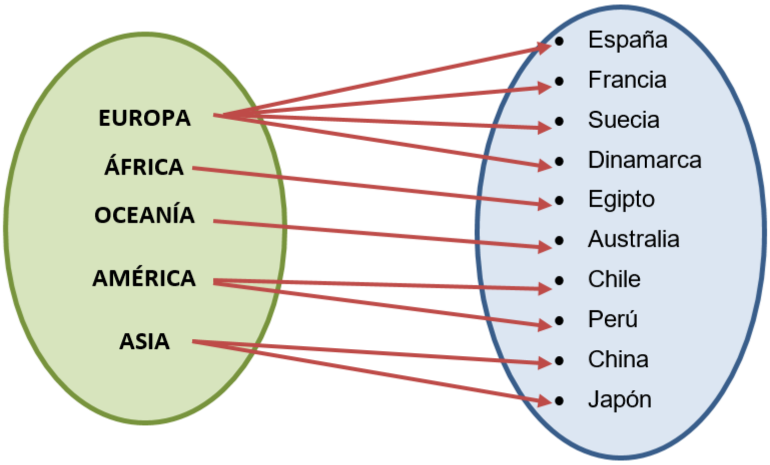
$$S(Europa) = España$$

$$S(Europa) = Francia$$

$$S(Europa) = Dinamarca$$

$$S(Europa) = Suecia$$

Lo mismo ocurre con los demás continentes. A modo de ejemplo, representamos gráficamente algunas de estas asignaciones en un diagrama de Venn:



Distinto es lo que ocurre, por ejemplo, con la relación T ya que el cuadrado de cada número real es único. Estudiaremos relaciones que tengan esta característica la cual se conoce como *unicidad:*

Definición 1. 1.2

Una relación verifica la *unicidad* si a cada elemento del conjunto de partida le asigna **un único** elemento del conjunto de llegada.

¿Puede identificar en cuál de las relaciones de los ejemplos se verifica la unicidad? Efectivamente, solo cumplen la unicidad las relaciones R, T y D.

Si no quedan elementos del conjunto de partida sin relacionarse con alguno del conjunto de llegada, se dice que la relación verifica la *existencia:*

Definición 1.1.3

Una relación verifica la *existencia* si a **todos** los elementos del conjunto de partida le asigna **algún** elemento del conjunto de llegada.

¿Le parece que en alguna de las relaciones definidas anteriormente no se verifica la *existencia*? En efecto, solo en la relación del ejemplo 5 ya que podría haber ciudadanos que no tengan hermanos, y en consecuencia no se relacionarían con nadie según F.

La relación F no verifica ni la *existencia*, ni la *unicidad.* (un ciudadano podría tener más de un hermano, por lo cual debería relacionarse con todos ellos).

1.2. FUNCIONES

Nos interesan las relaciones que cumplan con ambas condiciones, de esta manera surge el concepto de *función:*

Definición 1.2.1

Dados A y B conjuntos, una aplicación $f: A \to B$ es una *función* si y sólo si a cada elemento de A le asigna **uno y solo un** elemento de B.

Lo escribimos como

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \ / \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

Se lee "*función f definida de A en B tal que le asigna al elemento x el elemento y*"

Es importante notar que esta definición incluye las dos condiciones que definimos anteriormente:

- **Existencia**: a cada elemento de A, x, se le debe asignar uno de B, y.
- **Unicidad**: el elemento que se le asigna debe ser único (x no puede relacionarse con dos elementos distintos de B)

Las funciones matemáticas están presentes en numerosas situaciones de la vida cotidiana. Analicemos la siguiente:

Se necesita reparar un tanque de agua y para ello se comienza a vaciar con la ayuda de una bomba. Al comienzo el tanque estaba lleno. Durante el tiempo que demora en vaciarse se va registrando el nivel del agua y se vuelca la información obtenida en un gráfico como el siguiente:

Podemos observar en él la relación entre la cantidad de agua que queda en el tanque, medida en litros, en función del tiempo transcurrido desde que comienza a vaciarse, medido en horas. El gráfico corresponde a una función matemática que relaciona la variable x: $tiempo$ con la variable y: $cantidad\ de\ agua$.

Observando el gráfico, ¿puede responder cuál es la capacidad del tanque? ¿o cuánto tiempo tardó en vaciarse? ¿Podemos deducir qué ocurrió entre las 2 y las 5 horas desde que comenzó el vaciamiento? ¿En qué momento, entre que comenzó y finalizó el vaciamiento, la cantidad de agua por hora que salía fue mayor?

Al establecer la relación que existe entre dos variables mediante una función matemática, podemos responder estos y otros interrogantes. Una función puede representarse de diferentes maneras. Antes de explicar cada una de ellas, enunciaremos algunos conceptos importantes a tener en cuenta:

Siendo la función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B} \ / \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ tenemos:

- A es el ***dominio*** de la función f
- B es el ***codominio*** de la función f
- Si $f(x) = y$, y es imagen de x y x es pre imagen de y
- x se denomina ***variable independiente***
- y se denomina ***variable dependiente***

Observamos que cada x tiene una única imagen (unicidad) pero cada y puede tener ninguna, una o más de una pre imagen. Por ejemplo, consideremos la función definida en el conjunto de números reales dada por $f(x) = x^2$. Es fácil comprobar que toma el mismo valor para cada número y su opuesto: 16 es la imagen de 4 porque $f(4) = 4^2 = 16$, pero 16 también es imagen de -4 ya que $f(-4) = (-4)^2 = 16$. Por lo tanto, 16 tiene dos pre imágenes: 4 y -4.

Veamos la Actividad a continuación

ACTIVIDAD 1 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 1 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Como en el ejemplo anterior, las funciones que estudiaremos se definen mediante fórmulas. Para que dichas fórmulas determinen funciones debe definirse el dominio de manera tal que se verifiquen la existencia y unicidad. Para ello, tenemos que tener en cuenta si las fórmulas involucran operaciones con alguna restricción.

Ampliamos entonces las definiciones anteriores:

Definición 1.2.2

DOMINIO de f: conjunto formado por todos los valores permitidos para la variable independiente. Llamamos *dominio natural* al mayor conjunto sobre el cual está bien definida la expresión que determina la función.

IMAGEN de f: conjunto formado por elementos del codominio que tienen pre imagen.

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene por dominio al conjunto de todos los números reales menos el 0 ya que no podemos dividir por cero, lo escribimos como:

$$f\colon \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$$

Si analizamos la función $g(x) = \sqrt[2]{2-x}$ su dominio se forma con los números reales que no hacen negativa la operación dentro del radicando. Es decir, tiene por dominio al conjunto formado por todos los números reales menores o iguales que 2, ¿por qué? Lo escribimos de la siguiente manera:

$$g\colon (-\infty; 2) \rightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = \sqrt[2]{2-x}$$

En forma general, para calcular el dominio de una función a partir de su fórmula se trabaja analíticamente de manera tal de determinar el conjunto "más grande" de valores de x para los cuales las operaciones que aparecen en la fórmula tengan sentido y estén bien definidas. Por ejemplo, si tenemos una división, el divisor debe ser distinto de 0, en una raíz de índice par el radicando mayor o igual a 0, en un logaritmo el argumento debe ser mayor que cero, etc.

Antes de continuar, le proponemos mirar el video que se encuentra en el aula virtual en donde se muestran ejemplos de cómo calcular el dominio de distintas funciones. Luego de mirar el video, podrá realizar la siguiente actividad:

ACTIVIDAD 2 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 2 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Evaluar una función en un punto x_0 consiste en sustituir en la fórmula de la función la variable independiente por dicho valor y calcular el valor y_0 que toma.: $f(x_0) = y_0$

Por ejemplo, al evaluar la función $g(x) = \sqrt[2]{2-x}$ en $x_0 = -1$ tenemos $g(1) = \sqrt[2]{2-(-1)} = \sqrt{3}$

Veamos la siguiente actividad:

ACTIVIDAD 3 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 3 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Cuando trabajamos con una función, podemos estar interesados en el valor que toma cuando la variable independiente es igual a cero. Por ejemplo, si una función determina el nivel del agua en un recipiente en función del tiempo, medido en segundos, cuando el tiempo es igual a 0 segundos, la función nos dará el nivel inicial del agua. También nos podría interesar el o los valores de x que anulan la función. En el ejemplo, si para $x = 8$ la función vale cero, significa que al cabo de 8 segundos, el recipiente se vacía (porque el nivel sería igual a cero). Estos valores son importantes y los definimos a continuación:

Definición 1.2.3 ***Raíz y ordenada al origen***

- Llamamos *raíz* de una función al valor de x tal que $f(x) = 0$. Una función puede tener ninguna, una o más de una raíz. El conjunto formado por todas las raíces de la función se denomina conjunto de ceros y se denota por C_0.

- La *ordenada al origen* de una función es el valor que toma para $x = 0$. Es decir, a es la ordenada al origen de la función f si $f(0) = a$. La ordenada al origen, si existe, es única.

Veamos la siguiente actividad

ACTIVIDAD 4 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 4 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

1.2.1. Representación de funciones

Hay distintas formas de representar una función. Describiremos algunas de ellas mediante el siguiente ejemplo:

Consideramos los conjuntos $A = \{-2;\ -1; 0; 1; 2\}$ y $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ y definimos la función $f: A \to B$ que asigna a cada x su cuadrado.

Representación mediante una fórmula

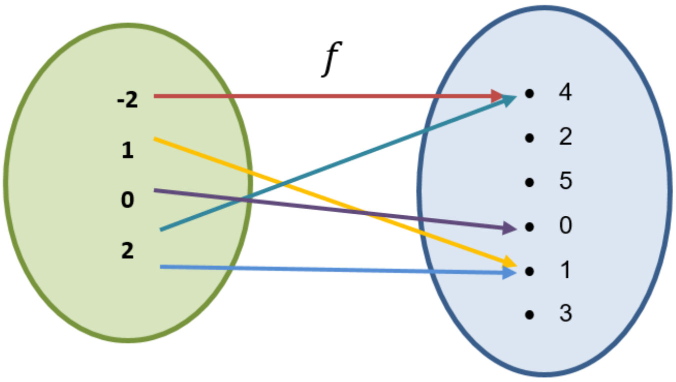
Las funciones matemáticas pueden definirse mediante fórmulas. Es decir, especificando la relación entre las variables mediante una ecuación de la forma $f(x) = y$.

La función del ejemplo podemos escribirla como: $f(x) = x^2$

Tabla de valores

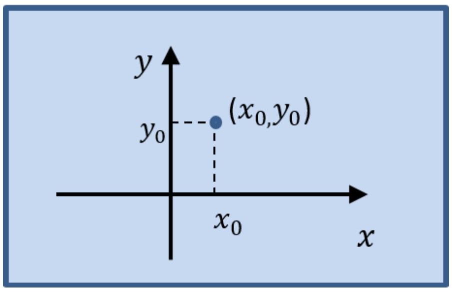
x	$f(x) = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Representación mediante diagramas de Venn



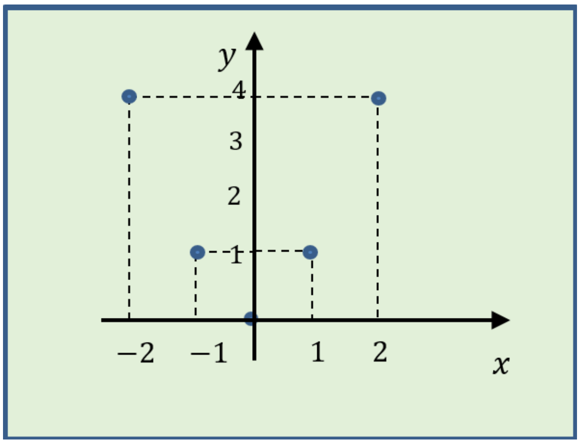
Representación gráfica de una función

Una función de una variable se representa gráficamente por una curva en el plano XY. Dicha curva estará formada por todos los pares de puntos $(x; y)$ que satisfacen la ecuación de la función. Si $f(x_0) = y_0$, la variable independiente se representa en el eje horizontal (x) y la dependiente en el eje vertical (y):

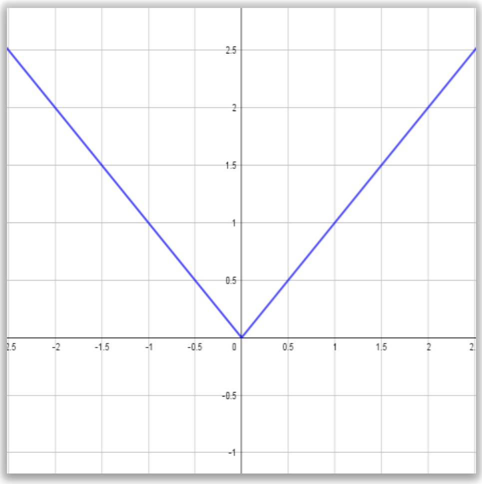


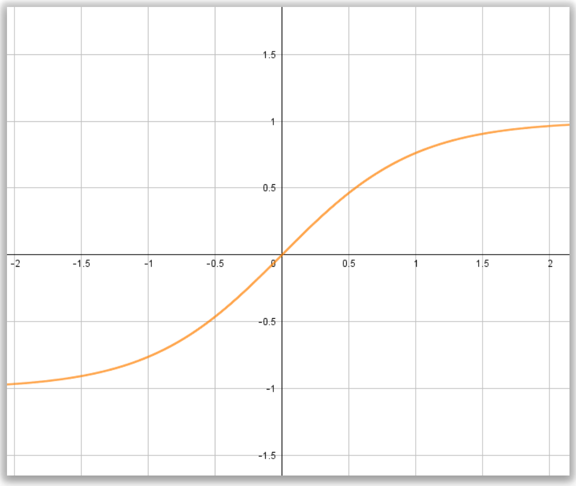
No cualquier curva del plano es la representación de una función, ya que para serlo no puede tener dos puntos sobren una misma recta vertical. Es decir, cada recta vertical puede cortar a la gráfica de una función en un solo punto, caso contrario no cumpliría con la condición de unicidad.

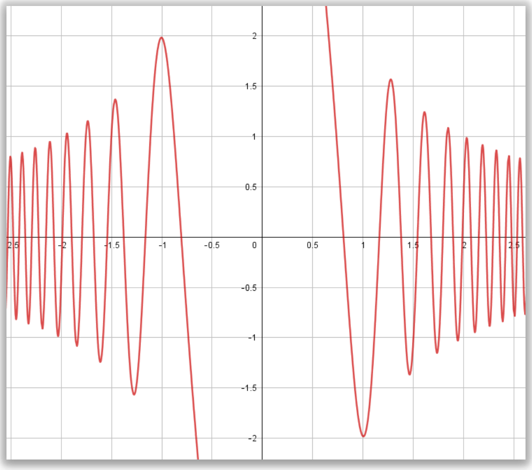
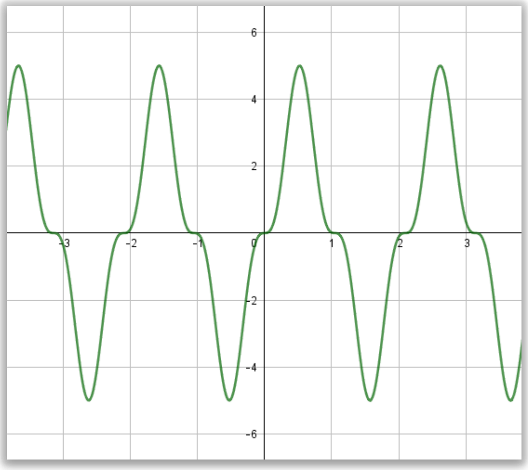
La representación de la función del ejemplo, al estar definida en conjuntos finitos, está compuesta por puntos aislados:



Les presentamos ejemplos de curvas que representan funciones:





Veamos la siguiente Actividad:

ACTIVIDAD 5 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 5 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Ya podemos responder todos los interrogantes que quedaron pendientes de la función que relacionaba el nivel del agua del tanque con el tiempo transcurrido desde que comenzó a vaciarse: la capacidad del tanque corresponde con la ordenada al origen, es decir 350 litros. La raíz corresponde al tiempo que tardó en vaciarse, es decir 7 horas. Entre las 2 y las 5 el nivel de agua se mantuvo constante. Observando la pendiente del primer tramo del gráfico, podemos asegurar que durante las primeras 2 horas, el nivel del agua disminuyó más rápidamente.

Si pudo responder todas estas preguntas, le proponemos realizar la siguiente actividad:

ACTIVIDAD 6 (Foro)

Le pedimos que a continuación participe del foro que le proponemos e intercambie reflexiones con sus compañeros.

1.2.2. Igualdad de funciones

¿Podemos entonces afirmar que las funciones $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ y $g(x)=x-2$ son iguales?

Tomemos un valor cualquiera para x y calculemos su imagen para cada función. Por ejemplo, si $x=8$, tenemos:

$$g(8)=8-2=6$$

$$f(8)=\frac{8^2-4}{8+2}=\frac{60}{10}=6$$

Por lo tanto, para $x=8$, $f(8)=g(8)$. Y esto se cumple para cualquier valor de x ya que podemos simplificar la fórmula de la función f de la siguiente manera:

	$f(x)=$	$\frac{x^2-4}{x+2}$
Factorizando el numerador:	$f(x)=$	$\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$
Simplificamos $(x+2)$:	$f(x)=$	$\frac{(x-2)}{1}$
Tenemos entonces	$f(x)=$	$x-2$

Dado que obtuvimos la misma expresión que define a $g(x)$, podríamos afirmar que las funciones son iguales. ¿Pero qué ocurre con el dominio de cada función? La función g tiene por dominio al conjunto $\mathbb{R}$ ya que su fórmula no tiene ninguna restricción. Para determinar el dominio de f, debemos considerar la fórmula original, sin simplificarla. En ella tenemos un cociente y ya vimos que no podemos dividir por cero. Entonces debemos quitar del dominio aquellos números que anulan el denominador $(x+2)$: $x+2=0$ si $x=-2$. Luego $Dom\ f=\mathbb{R}-\{-2\}$. Por lo tanto, estas funciones no son iguales ya que no están definidas en los mismos conjuntos.

Definición 1.2.4

Dos funciones f y g son iguales si están definidas en los mismos conjuntos y además, cada elemento x del dominio tiene la misma imagen para cada función. Es decir, para cada x del dominio, se verifica $f(x) = g(x)$.

1.2.3. Restricción de dominio y codominio

En algunas ocasiones, necesitamos modificar los conjuntos sobre los cuales está definida una función para que tenga ciertas características. O quizás estamos mediante una relación que no es función por no cumplir con alguna de las condiciones de existencia y unicidad. Por ejemplo, la relación definida en $\mathbb{R}$ dada por $R(x) = \sqrt{x}$ no es función ya que no existe para valores de x negativos. Sin embargo, si en lugar de considerar todos los reales, definimos la relación $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $(0; +\infty)$, podemos comprobar que en este conjunto, la relación es una función. Teniendo en cuenta la definición 1.2.4, no podemos afirmar que estas relaciones son iguales, pero seguramente usted notó que, sin considerar los conjuntos, la relación es *casi la misma* porque sus fórmulas son iguales.

Decimos entonces que f es una restricción de R ya que el dominio de f es un subconjunto del dominio de R y para cada x se tiene $f(x) = R(x)$.

Dada una función cualquiera, podemos definir una restricción de ella considerando subconjuntos del dominio o del codominio:

Definición 1.2.5

Sea $f: A \to B$ una función. Una función g es una restricción de f si y sólo si el dominio y el codominio de g están incluidos en A y B respectivamente y, además, para cada x se tiene $f(x) = g(x)$.

Si ha comprendido los temas desarrollados y ha podido realizar todas las actividades propuestas, entonces ha alcanzado los dos primeros objetivos de la unidad 1.

¡Felicitaciones!

1.3. FUNCIONES ELEMENTALES

Algunas funciones son de mayor interés dependiendo la fórmula que las definen. Estudiaremos detalladamente las siguientes:

Función lineal

$$f(x) = ax + b \quad \text{donde } a, b \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, $f(x) = 7x - 1$

Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x - \sqrt{3}$

Función definida a trozos

En algunas ocasiones, se define una función en términos de más de una fórmula. Solo se debe aclarar para qué valores de x corresponde cada expresión.

En el aula virtual encontrará un ejemplo detallado de este tipo de funciones que le pedimos observe antes de continuar.

Luego de ver el ejemplo del Campus, le proponemos determinar los valores que toma la siguiente función en -5, -2, 0, 3 y 5:

$$f(x) = \begin{cases} |1 - x| & si \quad x < -2 \\ 2x - 3 & si \quad -2 \leq x < 3 \\ -x^2 - 6 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Para poder responder, debemos evaluar la función en cada uno de los valores pedidos teniendo en cuenta la fórmula que corresponde a cada intervalo:

$$f(-5) = |1 - (-5)| = |6| = 6$$

$$f(-2) = 2(-2) - 3 = -7$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(3) = -3^2 - 6 = -9 - 6 = -15$$

$$f(5) = -5^2 - 6 = -25 - 6 = -31$$

Función valor absoluto

La función valor absoluto está definida por tramos: toma el mismo valor que x, si éste es positivo o cero, y toma el valor de su opuesto si es negativo:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Podemos transformar esta función agregando constantes de la siguiente manera:

$$f(x) = a|bx + c| + d \qquad \text{donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Por ejemplo, $f(x) = -5\,|3x + 8| + \frac{5}{3}$

Función exponencial

$$f(x) = k\,a^{x-b} + c \quad \text{donde } a, b, c, k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,\ \ a > 0 \ \text{ y } \ a \neq 1$$

Por ejemplo, $f(x) = 3^{x-1} + 5$

Función logarítmica

$$f(x) = k\,log_a(x + b) + c \quad \text{donde } a, b, c, k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,$$

$a > 0,\ \ a \neq 1 \ \text{ y } \ (x + b) > 0$

Recordemos la definición de logaritmo:

$$log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ donde } P(x) \text{ y } Q(x) \text{ son polinomios}$$

Profundizaremos sobre las características de estas funciones en la presentación que se encuentra en el Campus, *Funciones elementales.*

Luego de verla, realice las siguientes actividades:

ACTIVIDAD 7 (Tarea)

Le pedimos que realice la Actividad 7 que le proponemos en el campus y la envíe al tutor para su corrección.

ACTIVIDAD 8 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 8 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

1.4. OPERACIONES CON FUNCIONES

Así como podemos realizar operaciones entre dos números reales, también podemos operar con funciones. Al sumar, restar, multiplicar o dividir funciones, obtenemos como resultado una nueva función. Solo debemos determinar el dominio convenientemente para que la expresión obtenida esté bien definida.

1.4.1. Operaciones elementales

DEFINICIÓN 1.4.1

Dadas dos funciones f y g definimos:

- ✓ La función suma $(f+g)$ como $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- ✓ La función diferencia $(f-g)$ como $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- ✓ La función producto $(f\cdot g)$ como $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- ✓ La función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)$ como $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ siempre que $g(x)\neq 0$

Por ejemplo, si $f(x)=\sqrt{x}+5$ y $g(x)=x^2-2x+1$

- ✓ $(f+g)(x)=\left(\sqrt{x}+5\right)+(x^2-2x+1)=\sqrt{x}+x^2-2x+6$
- ✓ $(f-g)(x)=\left(\sqrt{x}+5\right)-(x^2-2x+1)=\sqrt{x}-x^2+2x+4$
- ✓ $(f\cdot g)(x)=\left(\sqrt{x}+5\right)(x^2-2x+1)=x^2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+\sqrt{x}+5x^2-10x+5$
- ✓ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}+5}{x^2-2x+1}$

Para cada una de las funciones obtenidas, debemos determinar su dominio teniendo en cuenta las restricciones de la expresión que la define.

1.4.2. Composición

Continuemos trabajando con las funciones $f(x)=\sqrt{x}+5$ y $g(x)=x^2-2x+1$ del ejemplo anterior. Dado que el dominio de g es el conjunto de todos los reales, podemos evaluar la función, por ejemplo, en $x=3$

$$g(3)=3^2-2\cdot 3+1=4$$

Luego, evaluamos la función f en el valor obtenido, $x=4$:

$$f(4)=\sqrt{4}+5=7$$

Los pasos que acabamos de realizar los podemos resumir como:

$$f\big(g(3)\big) = f(4) = 7$$

Este procedimiento se denomina composición de funciones y consiste en aplicar dos funciones en forma consecutiva. En el ejemplo, al valor $x = 3$ primero le aplicamos la función g y al resultado, la función f. Para poder realizarlo, la imagen que se obtiene al aplicar la primera función tiene que estar en el dominio de la segunda. Por ejemplo, si al aplicar g obtuviéramos un número negativo, no podríamos calcular la raíz cuadrada al aplicar f.

La composición de funciones es una operación que se define de la siguiente manera:

Definición 1.4.2

Dadas las funciones f y g, la función compuesta de f con g se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Para que la función compuesta exista, $Im\ g$ debe estar incluida en $Dom\ f$

Vamos a determinar la expresión de la función compuesta $(f \circ g)$ del ejemplo anterior:

Primero, vemos si se cumple la condición $Im\ g \subseteq Dom\ f$. En efecto, $Im\ g = [0; +\infty)$ y el $Dom\ f = [0; +\infty)$. Como se cumple la condición, podemos componer las funciones

$f(x) = \sqrt{x} + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ (f \circ g)(x) &= f(x^2 - 2x + 1)\\ (f \circ g)(x) &= \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 5\end{aligned}$$

¿Podemos componer las funciones en orden inverso? Claro que podemos, siempre y cuando se cumpla la condición de que la imagen de la "primera" esté incluido en el dominio de la "segunda". Para las funciones del ejemplo tenemos $Im\ f = [5;\ +\infty)$ y $Dom\ g = \mathbb{R}$, por lo tanto se verifica $Im\ f \subseteq Dom\ g$. Determinemos su expresión:

$$(g \circ f)(x) = \quad g(f(x))$$

$$(g \circ f)(x) = \quad g(\sqrt{x} + 5)$$

$$(g \circ f)(x) = \quad (\sqrt{x} + 5)^2 - 2(\sqrt{x} + 5) + 1$$

En este ejemplo pudimos obtener ambas composiciones, esto no siempre es posible. Cabe destacar que las funciones obtenidas son distintas: la composición de funciones no es conmutativa: $f \circ g \neq g \circ f$.

Veamos la siguiente actividad:

ACTIVIDAD 9 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 9 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Si ha comprendido los temas desarrollados y ha podido realizar todas las actividades propuestas, entonces ha alcanzado el tercer y cuarto objetivo de la unidad 1.

¡Felicitaciones!

2. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Comenzamos la unidad dando ejemplos cotidianos de funciones matemáticas. Sin embargo, solo los nombramos. Luego de haber recorrido todos los temas de esta guía hemos adquirido las herramientas necesarias para analizar algunos ejemplos de aplicaciones de funciones.

Situación 1

Un productor agropecuario quiere determinar la cantidad de árboles que debe agregar en su plantación de ciruelos para obtener la máxima cosecha posible. Sabe que con los 50 ciruelos que tiene actualmente, el rendimiento anual promedio por árbol es de 1400 ciruelas. Pero por cada nuevo árbol que plante, el rendimiento anual de cada árbol disminuirá 20 ciruelas. ¿Cuántos árboles le recomendaría plantar?

Pensemos juntos. Con los 50 ciruelos que tiene actualmente, la cosecha anual es de $50 \cdot 1400 = 70000$ ciruelas. Si agrega 5 árboles, el rendimiento anual de cada árbol disminuiría a 1300 ya que $1400 - 20 \cdot 5 = 1300$. Esto equivale a una cosecha anual de $55 \cdot 1300 = 71500$ ciruelas.

Si en cambio plantara 20 árboles, el rendimiento de cada uno sería de 1000 ciruelas al año $(1400 - 20 \cdot 20 = 1000)$ y la cosecha anual de $70 \cdot 1000 = 70000$. Observamos que este valor coincide con la cosecha actual, razón por la cual no valdría la pena ampliar la plantación. Pero, ¿qué ocurriría si plantara 25 árboles? ¿y 7?

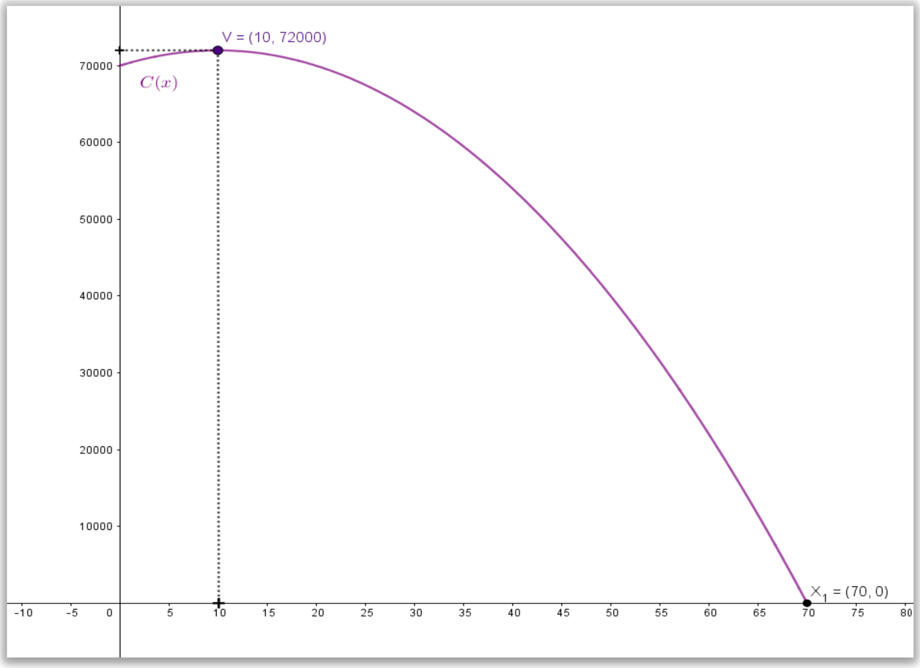
Vamos a deducir una función que represente la cosecha anual y de esta manera poder determinar cuál será la máxima cosecha que podría obtener y para qué cantidad de árboles.

Cantidad de árboles nuevos	**Rendimiento por árbol**	**Cosecha anual**
0	1400	$50 \cdot 1400 = 70000$
5	$1400 - 20 \cdot 5 = 1300$	$55 \cdot 1300 = 71500$
20	$1400 - 20 \cdot 20 = 1000$	$70 \cdot 1000 = 70000$
25	¿?	67500
7	¿?	71820
x	$1400 - 20x$	$\underbrace{(50+x)}_{Total\ de\ árboles} \cdot \underbrace{(\mathbf{1400 - 20x})}_{Rendimiento\ x\ árbol} = \underbrace{C(x)}_{Cosecha\ anual}$

Concluimos entonces que la función que permite calcular la cosecha anual de ciruelas dependiendo la cantidad de árboles nuevos que se planten está dada por:

$$C(x) = (50 + x)(1400 - 20x)$$

Ahora que tenemos la expresión de la función, podemos analizarla y sacar conclusiones respecto de la cosecha. Dado que es una función cuadrática con coeficiente principal negativo, sabemos que alcanza su máximo en el vértice de la misma, $V(10; 72000)$. Es decir, si agrega 10 árboles, obtendrá una cosecha máxima de 72000 ciruelas. También podemos deducir que si planta 70 árboles más, la plantación no producirá nada ya que $x = 70$ es una raíz de la función. Para representar gráficamente esta función, consideramos como dominio y codominio los conjuntos que tienen sentido en términos del problema (no podemos plantar -3 árboles, o tener una cosecha negativa):



Situación 2

La distancia de detención es la distancia que se recorre desde que se detecta un obstáculo hasta que el vehículo se detiene por completo. Son numerosos los factores que influyen en el cálculo de esta distancia como ser el estado de la calzada y del vehículo, la climatología, el tiempo de reacción del conductor, la velocidad, etc. Considerando un vehículo en buen estado, un conductor en estado físico normal y con una calzada y clima óptimos, podemos calcular la distancia de detención, d en metros, en función de la velocidad, x medida en km/h, mediante la siguiente fórmula:

$$d(x) = \frac{1}{180}x^2 + \frac{3}{10}x$$

Es decir, si un vehículo circula a 40 km/h, la distancia de detención será de

$$d(40) = \frac{1}{180}40^2 + \frac{3}{10}40 = 20{,}88\ mts$$

(Esta información fue tomada de la página https://www.autoescuelapitlane.com/distancias-de-reaccion-detencion-y-frenado)

Se convoca a un perito para determinar si un vehículo superó la velocidad máxima permitida antes de chocar contra un árbol. El perito concurre al lugar del accidente y mide los derrapones que dejó el automóvil antes de chocar con el árbol. Según esa medición, la distancia de detención fue de 76,2 metros. Suponiendo que se cumplen las condiciones para aplicar la fórmula anterior ¿podemos determinar la velocidad a la que circulaba?

En efecto, solo debemos reemplazar en la fórmula el valor de la distancia y luego hallar el valor de la variable x:

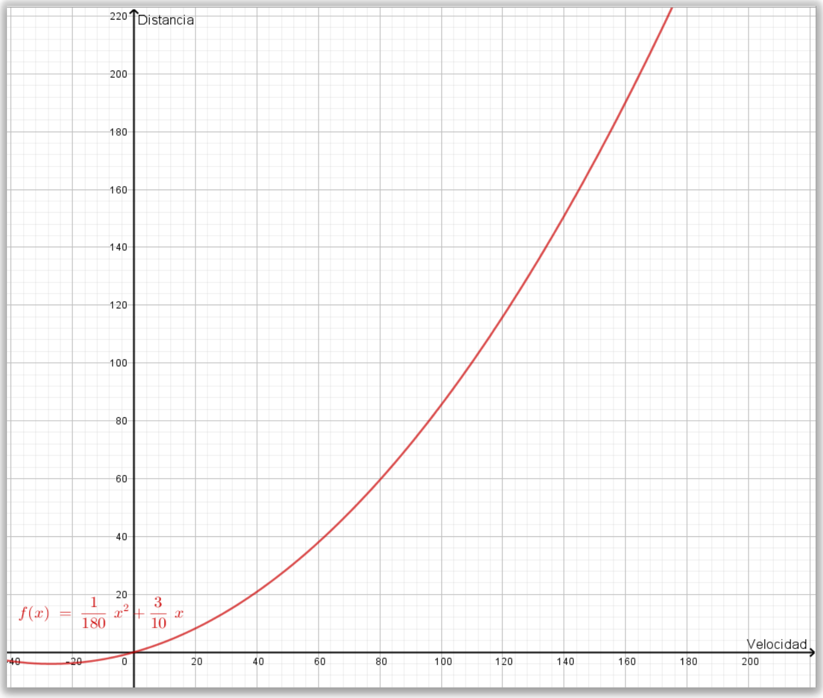
$$d(x) = \frac{1}{180}x^2 + \frac{3}{10}x$$

$$76{,}2 = \frac{1}{180}x^2 + \frac{3}{10}x$$

$$0 = \frac{1}{180}x^2 + \frac{3}{10}x - 76{,}2$$

Para resolver esta ecuación cuadrática, aplicamos la fórmula $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ donde $a = \frac{1}{180}$, $b = \frac{3}{10}$ y $c = 76{,}2$. De los dos resultados, tomamos solo el positivo (¿por qué?) lo que significa que el vehículo circulaba a 93,2 km/h.

Analizando el gráfico de la función, podemos observar como aumenta la distancia de detención mientras mayor sea la velocidad de circulación.



Antes de continuar con la lectura de la unidad 2 y para poner en práctica los conceptos y procedimientos aprendidos en la presente unidad, le invitamos a realizar la autoevaluación integradora de la unidad 1.

SÍNTESIS DE LA UNIDAD

Son numerosas las ciencias que recurren a la modelización matemática en la resolución de situaciones problemáticas. Como hemos estudiado, las funciones matemáticas cumplen un rol fundamental en esta modelización. Por otra parte, éstas constituyen la base del cálculo, el cual brinda herramientas que permiten analizar, representar y obtener conclusiones basadas en la información que nos aportan las funciones elementales. En esta unidad hemos aprendido a reconocerlas, representarlas, analizarlas y, a través de ejemplos, aplicarlas a situaciones cotidianas. En la próxima unidad profundizaremos el estudio de las funciones lineales, los invitamos a continuar la lectura.

Si Ud. ha realizado las Actividades propuestas con éxito, ha logrado los objetivos:

- Adquirir un panorama general del concepto de función matemática,
- Representar e interpretar gráficamente funciones.
- Identificar los tipos más importantes de funciones reales y sus características principales.
- Obtener la expresión de nuevas funciones a partir de otras conocidas.
- Resolver situaciones problemáticas aplicando funciones.

Podrá continuar con la Unidad 2

¡FELICITACIONES!