Licenciatura en Administración de Negocios / Licenciatura en Administración de Recursos Humanos / Licenciatura en Ciencia de Datos

Matemática 1 – Elementos de Álgebra

GUIA DE LA UNIDAD Nro. 2

Contenidista: Lic. María Mónica Argüello

INDICE – Guía Nro. 2

MAPA DE LA GUIA 2: ECUACIONES LINEALES

OBJETIVOS

En esta Unidad esperamos que el estudiante pueda

- Comprender la naturaleza de las funciones y ecuaciones lineales
- Representar gráficamente funciones lineales
- Comprender la naturaleza de los sistemas de ecuaciones lineales y su representación gráfica
- Comprender los procedimientos con que se obtienen los conjuntos solución para sistemas de ecuaciones.
- Determinar el conjunto de soluciones para diversos tipos de sistemas de ecuaciones.

CONTENIDOS

✓ **ECUACIONES LINEALES**

  - Características de las ecuaciones lineales: Forma general.
  - Características gráficas: Intersecciones.
  - Forma de pendiente-intersección: Interpretación de la pendiente y la intersección con el eje.
  - Determinación de la ecuación de una línea recta: Pendiente e intersección. Pendiente y un punto. Dos puntos.

✓ **SISTEMAS DE ECUACIONES.**

  - Sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas. Clasificación. Conjunto solución
  - Sistemas lineales de más de dos ecuaciones. Clasificación. Conjunto solución.

PALABRAS CLAVE

Abscisa – Compatible – Ecuación – Ejes – Incompatible – Intersección – Ordenada – Paralela – Pendiente – Perpendicular – Punto – Raíz – Secante – Sistema – Solución

BIBLIOGRAFÍA Y MATERIALES DE REFERENCIA

Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal con Aplicaciones* (7a ed.). McGraw Hill.

Haeussler, E. Jr.; Paul, Richard S. y Wood, R. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía* (12a ed.). Prentice Hall.

Larson, R. y Edwards, B. (2004). *Introducción al álgebra lineal.* Limusa.

Lerner N., Sobel A. (1996). *Álgebra* (4a ed.). Prentice Hall.

Lipschutz, Seymour. (1992). *Álgebra lineal.* Colección Schaum. Mc Graw Hill.

Lipschutz, Seymour. (1994). *Teoría de conjuntos y temas afines.* Colección Schaum. Mc Graw Hill.

Swokowski, E. W. y Cole, J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (13a ed.). Cengage Learning.

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Antes de adentrarnos en el estudio de las ecuaciones lineales, nos preguntamos ¿a qué llamamos ecuación? Para conocer la respuesta, lo invitamos a continuar la lectura.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números reales y/o letras (variables) ligadas entre sí mediante distintas operaciones. Las expresiones algebraicas se utilizan en diversas disciplinas como matemática, física, química, economía, etc. Y ayudan a modelizar distintas situaciones.

Algunos ejemplos de estas expresiones son:

$$\frac{x^2-m}{3}\ ; \qquad 2\mathrm{y}-z^5+ax\ ; \qquad \sqrt[3]{10}+\frac{1}{x+2}$$

Observamos en ellas una parte literal que puede representar:

- **Variables:** pueden tomar cualquier valor dentro del conjunto numérico en el cual se opera. Suelen denotarse con las últimas letras del abecedario. $z,\ y,\ x, \ldots$

- **Constantes:** cantidades fijas pero no especificadas, desconocidas o no. Suelen denotarse por las primeras letras del abecedario: $a,\ b,\ c, \ldots$

Por ejemplo:

El doble de un número	$2x$
El doble de un número aumentado en diez unidades	$2x$+10
La diferencia entre dos cantidades	$w-z$
El perímetro de un cuadrado de lado a	$4a$
El producto de dos números consecutivos	$x(x+1)$

Estamos listos para responder la pregunta inicial:

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que se verifican para ciertos valores de las variables, a las cuales también se denomina incógnitas. Por ejemplo:

$$3x - 2 = 5 \qquad 2y + \frac{1}{2}x = -2 \qquad yx^2 - 8y = 2x$$

Resolver una ecuación significa hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad. Estos valores reciben el nombre de raíces o soluciones de la ecuación. Por ejemplo, el par $x = 2,\ \ y = 1$ es una solución de la ecuación

$$xy - 2 = 0$$

Como en este ejemplo, una ecuación puede tener más de una solución. ¿se le ocurre algún otro par de valores $(x; y)$ que satisfagan la ecuación? Por ejemplo, $x = 4$ y $y = \frac{1}{2}$

Veamos un ejemplo de cómo plantear y resolver una ecuación:

Si la suma de las edades de 3 hermanos es 19 años, el mayor tiene 4 años más que el del medio y éste, 3 años más que el menor. ¿Qué edad tiene cada uno?

Primero planteamos la ecuación:

$$\underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{edad del menor}} + \underbrace{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{3})}_{\text{edad del intermedio}} + \underbrace{[(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{3})+\boldsymbol{4}]}_{\text{edad del mayor}} = 19$$

Es decir,	$x + (x+3) + (x+7) = 19$
Quitando paréntesis y sumando nos queda:	$3x + 10 = 19$
Restamos 10 en ambos miembros:	$3x + 10 - 10 = 19 - 10$
Resolviendo las operaciones tenemos	$3x = 9$
Dividiendo por 3 en ambos miembros resulta:	$x = 3$

Por lo tanto, el menor tiene 3 años, el del medio, 6, y el mayor, 10.

Dependiendo de las operaciones que afecten a las variables, será el nombre que reciba la ecuación. Así, una ecuación lineal es aquella en la cual las variables no están afectadas por ninguna potencia: $ax + by + c = 0$.

2. ECUACIÓN LINEAL

En la unidad anterior estudiamos las funciones lineales de la forma $f(x) = mx + b$, Gráficamente, esta función se representa mediante una recta en el plano cuya ecuación asociada:

$$y = mx + b$$

Esto significa, que todos los puntos de coordenadas $(x; y)$ que satisfacen la igualdad pertenecen a la recta. Notamos que ésta es una ecuación lineal de dos variables tal como lo mencionamos en el apartado anterior. Profundizaremos el estudio de estas ecuaciones y sus aplicaciones.

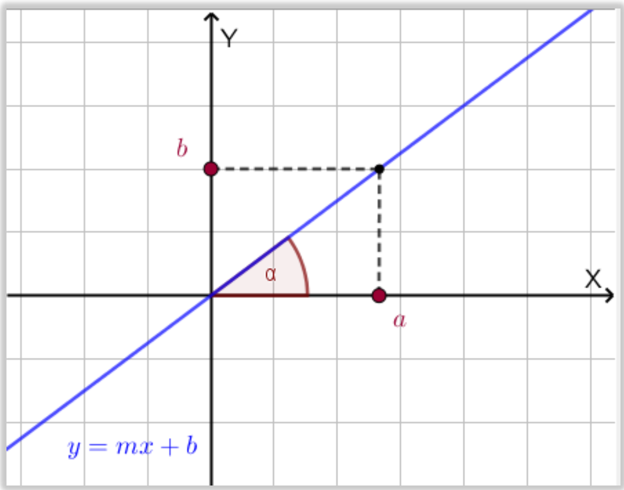
2.1. Forma general de la ecuación de la recta

En toda ecuación lineal de dos variables podemos despejar la variable y en función de x. De esta forma obtenemos la ecuación general de una recta:

$$y = mx + b$$

De esta manera, podemos identificar rápidamente la pendiente, m, y la ordenada al origen, b.

La pendiente determina la inclinación de la recta y se define como la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de X (medido en sentido antihorario):



La pendiente se define como

$$m = tg\ \alpha$$

Es decir, $m = \frac{b}{a}$

Recordamos que, en un triángulo rectángulo, la tangente de un ángulo se define como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a dicho ángulo.

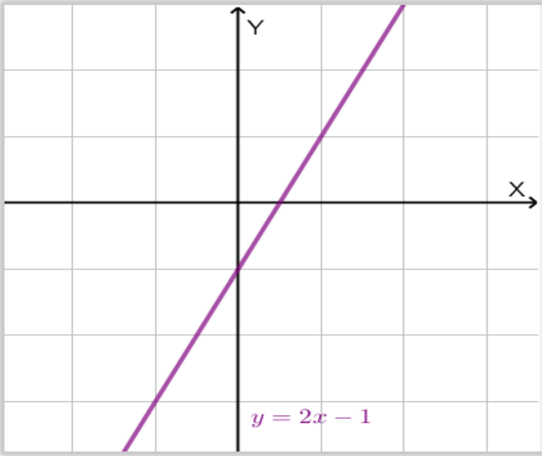
A partir de esta definición se concluye que, conociendo el signo de la pendiente, podemos determinar la inclinación de la recta:

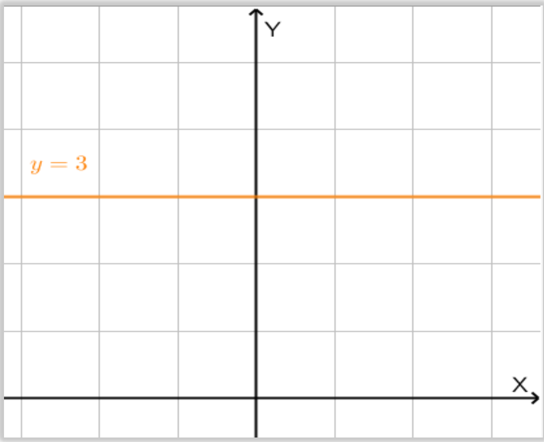
Si $\boldsymbol{m > 0}$, la recta es creciente.

Por ejemplo, la recta de ecuación

$$\boldsymbol{y = 2x - 1}$$

$Pendiente: 2$
$Ordenada\ al\ origen: -1$





Si $\boldsymbol{m = 0}$, la recta es paralela al eje $\boldsymbol{X}$

Por ejemplo, la recta de ecuación

$$\boldsymbol{y = 3}$$

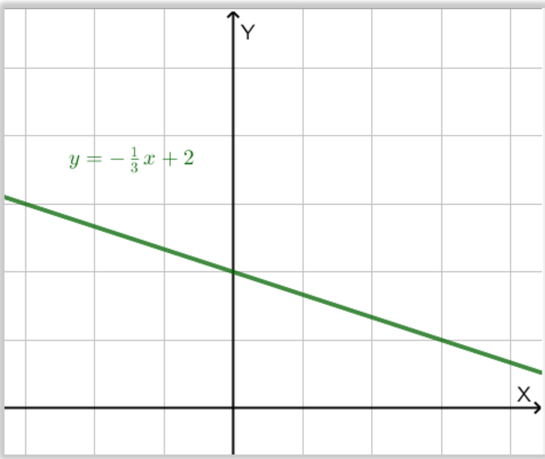
$Pendiente: 0$
$Ordenada\ al\ origen: 3$

Si $\boldsymbol{m < 0}$, la recta es decreciente

Por ejemplo, la recta de ecuación

$$y = -\frac{1}{3}x + 2$$

$Pendiente: -\frac{1}{3}$
$Ordenada\ al\ origen: 2$



Para determinar si una ecuación representa una recta en el plano, se intenta despejar la variable y hasta obtener, si es posible, la ecuación general de la recta.

Veamos la siguiente actividad

ACTIVIDAD 1 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 1 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

La ordenada al origen, b, determina el punto de intersección de la recta con el eje Y. ¿Qué ocurre entonces cuando $b = 0$? Por supuesto, la recta pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$.

¿Identifica en los gráficos anteriores la ordenada al origen de cada recta?

Otro elemento importante de una recta es el punto de intersección con el eje X. En la unidad anterior, definimos este punto en forma general para cualquier función y lo llamamos raíz. En consecuencia, tenemos:

- ✓ La recta corta al eje X cuando $y = 0$. Este punto se llama abscisa al origen o raíz.
- ✓ La recta corta al eje Y cuando $x = 0$. Este punto se llama ordenada al origen.

Antes de continuar, le proponemos realizar la siguiente actividad

ACTIVIDAD 2 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 2 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

La pendiente de una recta también nos permite conocer la posición relativa de ésta con respecto a cualquier otra recta del plano. Sean las rectas r y s de ecuaciones $y = m_1x + a$ y $y = m_2x + b$ respectivamente.

- Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales: $m_1 = m_2$
- Dos rectas son perpendiculares si se verifica: $m_1 \cdot m_2 = -1$

  Esta igualdad es equivalente a: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Veamos la siguiente actividad

ACTIVIDAD 3 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 3 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

2.2. Determinación de la ecuación de una recta

Para determinar la ecuación de una recta es suficiente con conocer la pendiente y la ordenada al origen. Así pues, si queremos determinar la recta que corta al eje Y en el punto $(0; 5)$ y cuya pendiente es $-\frac{1}{2}$, solo debemos reemplazar estos valores en la ecuación general de la recta. La ecuación de la recta pedida es:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Probablemente se estará preguntando si conocer estos valores es la única manera de determinar la ecuación. Es decir, ¿es posible determinar la ecuación de la recta si no se cuenta con esta información? La respuesta a este interrogante es “sí”. Y, como toda afirmación, tiene una justificación que explicaremos a continuación.

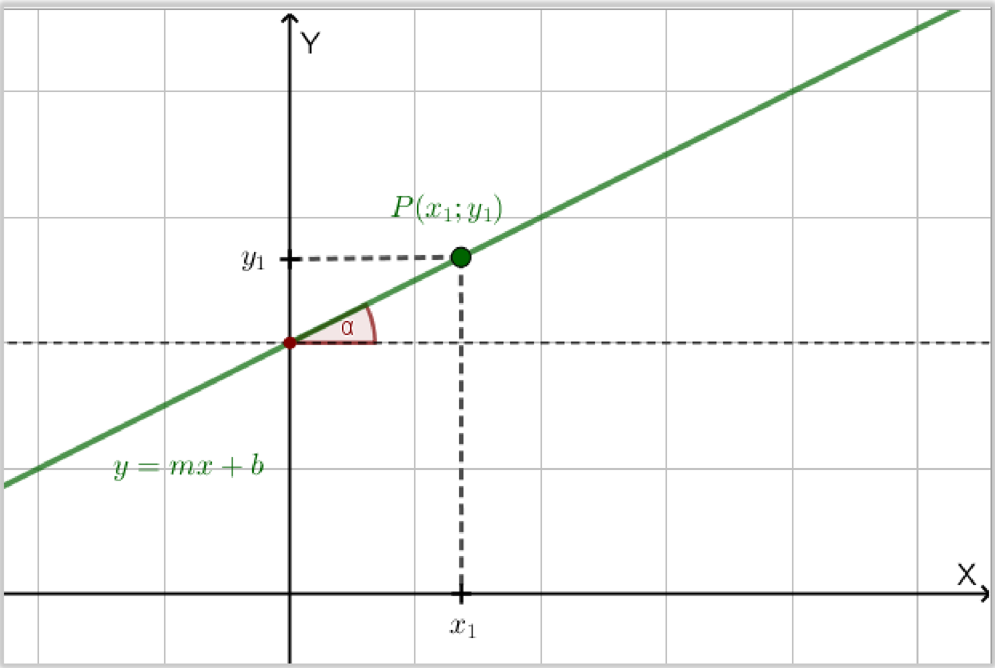
2.2.1. Ecuación Punto – pendiente

Recordando algunas propiedades geométricas, sabemos que dado un punto del plano existen infinitas rectas que lo contienen. Pero, si además de contener a dicho punto, queremos que tenga cierta inclinación, solo una de las infinitas rectas reunirá estas características. Esto significa que, dados un punto y la pendiente, la recta que queda determinada es única.

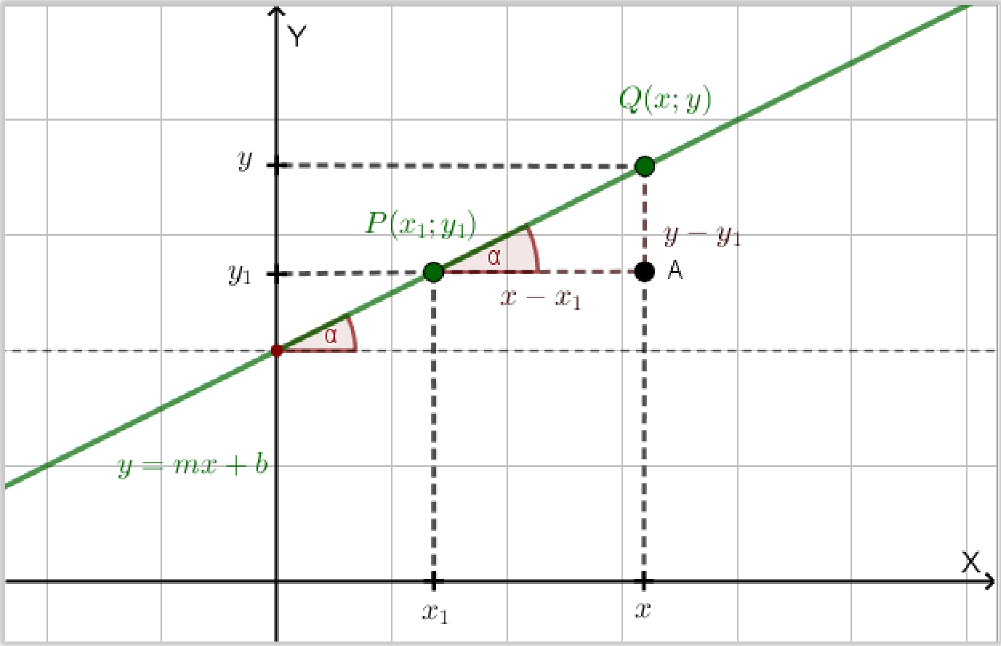
Para profundizar sus conocimientos sobre esta y otras propiedades geométricas puede acceder al curso de geometría básica de GCFGlobal, https://edu.gcfglobal.org/es/geometria-basica/

Queremos determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $\boldsymbol{P_1(x_1; y_1)}$ y tiene pendiente $\boldsymbol{m}$. La ecuación general de la recta será de la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$

Nos faltaría determinar el valor de b. Representamos gráficamente esta situación.



Consideramos un punto cualquiera $Q(x; y)$, y expresamos la pendiente, $m = tg\ \alpha$, en función de los lados del triángulo QPA. No debemos olvidar que tanto m como las coordenadas del punto P son valores conocidos.



En el gráfico podemos observar que, la tangente del ángulo α se puede calcular como

$$m = tg\,\alpha = \frac{\overline{QA}}{\overline{PA}} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Es decir, $$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Despejando tenemos: $$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Luego, $$y = m\,(x - x_1) + y_1$$

En conclusión, conocidos un punto, $P(x_1; y_1)$, y la pendiente, m, podemos determinar la ecuación de la recta reemplazando en la ecuación "*punto – pendiente*":

$\boldsymbol{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$	Ecuación de la recta de pendiente m, que pasa por el punto $P(x_1; y_1)$

Por ejemplo, si queremos determinar ecuación de la recta que pasa por el punto $(6; 1)$ y cuya pendiente es $-\frac{1}{4}$ reemplazamos en la ecuación y obtenemos:

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 6)$$

Para obtener la ecuación general de la recta, despejamos y:

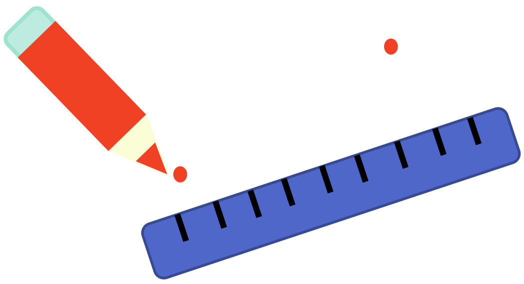
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$$

ACTIVIDAD 4 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 4 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

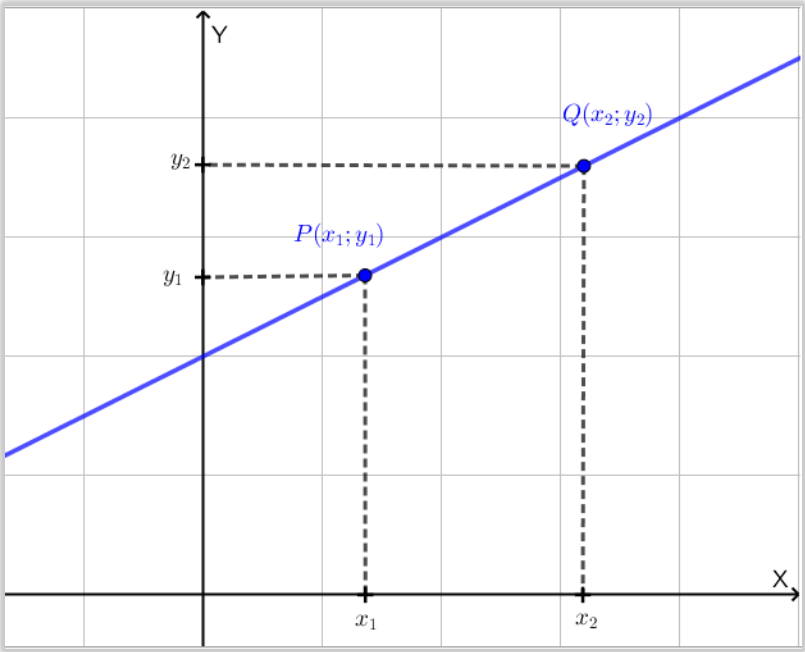
2.2.2. Ecuación Punto - Punto

Otra propiedad de la geometría euclidiana afirma que por dos puntos del plano pasa una única recta. Gráficamente es sencillo verificar que esta afirmación es correcta: si dibujamos dos puntos y tratamos de unirlos con una línea recta, existe una única forma de hacerlo.

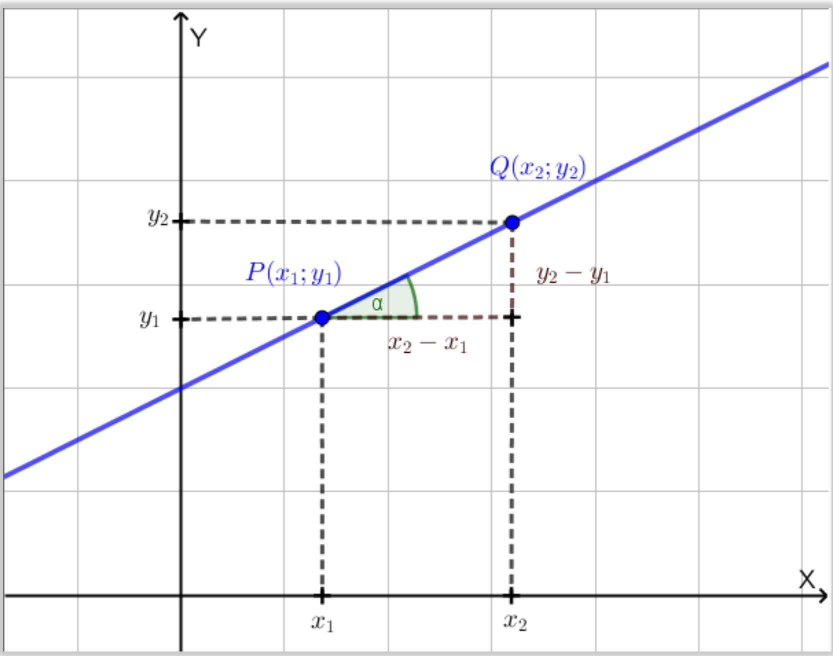


Nos preguntamos entonces si es posible, conociendo solo dos puntos, determinar analíticamente la ecuación general de la recta que los contiene. Como sucediera anteriormente, la respuesta a este interrogante también es "sí". Compartimos con usted el razonamiento que seguimos para deducir esta ecuación.

Supongamos que tenemos dos puntos, $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$, de los cuales conocemos sus coordenadas. Representamos gráficamente la recta que los contiene:



Siguiendo un razonamiento similar al anterior, podemos determinar la pendiente de la recta trabajando con un triángulo rectángulo. Lo representamos en el gráfico a continuación:



Podemos deducir a partir del gráfico que

$$m \; = tg\, \alpha \; = \; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Es decir,

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Reemplazamos m en la ecuación “punto – pendiente”

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

Podemos despejar y y resolver para obtener la ecuación general:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + y_1$$

En conclusión, conocidos dos puntos, $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$, podemos determinar la ecuación de la recta reemplazando en la ecuación “*punto – punto”:*

$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)}$	Ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$

Por ejemplo, queremos determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3; -5)$ y $(1; 4)$:

Podemos reemplazar directamente en la fórmula *“punto – punto”:*

$$y - (-5) = \frac{4 - (-5)}{1 - 3}\,(x - 3)$$

$$y + 5 = -\frac{9}{2}(x - 3)$$

$$y = -\frac{9}{2}(x - 3) - 5$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = -\frac{9}{2}x + \frac{17}{2}}}$$

O bien, podemos calcular primero la pendiente y luego reemplazar en la ecuación *“punto – pendiente”:*

$$m = \frac{4-(-5)}{1-3} = \frac{4+5}{-2} = -\frac{9}{2}$$

Reemplazando m obtenemos la misma ecuación anterior:

$$y + 5 = -\frac{9}{2}(x-3)$$

Cabe mencionar que, dados dos puntos, es indistinto a cuál de ellos llamamos P o Q. La ecuación que se obtiene es única. Si en el ejemplo anterior intercambiamos los puntos:

$$y - 4 = \frac{-5-4}{3-1}\,(x-1)$$

$$y - 4 = -\frac{9}{2}(x-1)$$

$$y = -\frac{9}{2}(x-1) + 4$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = -\frac{9}{2}x + \frac{17}{2}}}$$

Antes de continuar con la lectura de la unidad, le proponemos que realice las siguientes actividades:

ACTIVIDAD 5 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 5 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

ACTIVIDAD 6 (Foro)

Le pedimos que a continuación participe del Foro que le proponemos e intercambie reflexiones con sus compañeros.

Si ha comprendido los temas desarrollados y ha podido realizar todas las actividades propuestas, entonces ha alcanzado los dos primeros objetivos de la unidad 2.

¡Felicitaciones!

3. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un estudiante realiza un test de elección múltiple en el cual responde 17 preguntas obteniendo un puntaje final de 43 puntos. Si se puntúa 4 por cada respuesta correcta y se resta un punto por cada errónea. ¿Cuántas respondió correctamente? ¿Es suficiente esta información para determinarlo?

Una posibilidad es plantear ecuaciones que representen la situación y tratar de resolverlas. Si llamamos x: cantidad de respuestas correctas e y: cantidad de respuestas incorrectas, y dado que el total de respuestas es 17, podemos plantear la ecuación:

$$x + y = 17$$

Por otra parte, sabemos que por cada respuesta correcta sumó 4 puntos, es decir, que la cantidad de respuestas correctas, x, aportó un total de $4x$ puntos al puntaje final. Pero, además, las respuestas incorrectas restan 1 punto, por lo tanto al puntaje obtenido le deberíamos restar tantos puntos como respuestas incorrectas, y. El resultado será el puntaje final, el cual sabemos que fue de 43 puntos:

$$4x - y = 43$$

Es decir, estamos buscando valores x e y que sean solución de ambas ecuaciones en simultáneo. Lo indicamos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 4x - y = 43 \end{cases}$$

Hemos planteado un sistema de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas. Los estudiaremos a continuación, pero antes definimos:

Definición 3.1

Un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$ consiste en un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas que se resolverán simultáneamente. Hallar la **solución de un sistema** consiste en encontrar una solución común a todas las ecuaciones del sistema.

Comenzaremos estudiando sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y luego nos adentraremos en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales de orden superior. Primero, le proponemos realizar la siguiente actividad

ACTIVIDAD 7 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 7 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

3.1. Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas

Probablemente usted ya estará familiarizado con este tipo de sistemas y algunos métodos de resolución, como el método de sustitución o el de igualación.

Recordaremos brevemente en qué consisten estos métodos resolviendo el sistema del problema:

<table>
<tr><td colspan="4">$\begin{cases} x + y = 17 & \boldsymbol{E1} \\ 4x - y = 43 & \boldsymbol{E2} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Método de sustitución
Consiste en despejar alguna variable en una de las ecuaciones y reemplazar en la otra ecuación para obtener, si es posible, el valor de una de las variables.</td><td colspan="2">Método de igualación
Consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones para luego igualar ambas expresiones. Luego, si es posible, se obtiene el valor de la otra variable.</td></tr>
<tr><td>Despejamos la variable y en $E1$:</td><td>$y = 17 - x \quad \boldsymbol{E3}$</td><td>Despejamos la variable y en $E1$ y $E2$:</td><td>$y = 17 - x \quad \boldsymbol{E3}$
$y = 4x - 43 \quad \boldsymbol{E4}$</td></tr>
<tr><td>Reemplazamos y en $E2$:</td><td>$4x - (17 - x) = 43$</td><td>Igualamos ambas expresiones $E3$ y $E4$:</td><td>$17 - x = 4x - 43$</td></tr>
</table>

Resolvemos la ecuación despejando la variable x:	$5x - 17 = 43$ $5x = 60$ $\boldsymbol{x = 12}$	Resolvemos la ecuación despejando la variable x:	$17 + 43 = 4x + x$ $60 = 5x$ $\boldsymbol{x = 12}$
Reemplazamos en $E3$ para obtener el valor de y:	$y = 17 - 12$ $\boldsymbol{y = 5}$	Reemplazamos en $E3$ (o en $E4$) para obtener el valor de y:	$y = 17 - 12$ $\boldsymbol{y = 5}$

Observamos que, cualquiera sea el método de resolución elegido, la solución del sistema es la misma, $x = 12$ e $y = 5$. Significa que el estudiante respondió 12 preguntas en forma correcta, y 5 incorrectas.

Presentaremos un nuevo método de resolución, el cual podremos aplicar para resolver sistemas de orden superior. Para ello veamos el siguiente problema:

Pablo y Alicia llevan entre los dos $850. Si Alicia le da $120 a Pablo, ambos tendrán la misma cantidad. ¿Cuánto dinero lleva cada uno?

¿Cuántas ecuaciones debemos plantear para resolver el problema? ¿Por qué?

$$\begin{cases} x + y = 850 \\ x - 120 = y + 120 \end{cases}$$

En ambas ecuaciones, x representa el dinero de Alicia e y el dinero de Pablo. Queremos hallar los valores de x e y que verifiquen ambas a la vez. Para resolverlo, podemos proceder de la siguiente manera:

1) Trabajamos analíticamente en cada ecuación para tener las incógnitas en un solo miembro y en el mismo orden:

$$\begin{cases} x + y & = & 850 \\ x - y & = & 120 + 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 850 \\ x - y = 240 \end{cases}$$

2) Copiamos los coeficientes de la siguiente manera (cada fila corresponde a una ecuación):

$$\begin{array}{cc|cc} \overbrace{1}^{\text{coeficientes de } x} & \overbrace{1}^{\text{coeficientes de } y} & 850 & F1 \\ 1 & -1 & 240 & F2 \end{array}$$

Por ahora sólo tenga en cuenta que esta tabla de números se conoce como *matriz ampliada del sistema*. En la unidad siguiente, profundizaremos su estudio al ver el tema "Matrices".

3) Continuamos realizando algunas operaciones entre las filas de la matriz ampliada, a partir de las cuales obtendremos otra matriz, sobre ésta realizaremos nuevas operaciones y así sucesivamente. Formalizaremos este procedimiento más adelante, por el momento lo importante es que adquiera la capacidad de seguir la secuencia y comprender los cálculos que seguidamente se plantean:

Partimos de la matriz ampliada:	$\begin{array}{cc\|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{850} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{240} \end{array}$	
Reemplazamos $F1$ por la fila que se obtiene al sumar $F1+F2$ (sumamos posición a posición)	$\begin{array}{cc\|c} \mathbf{1+1} & \mathbf{1+(-1)} & \mathbf{850+240} \\ 1 & -1 & 240 \end{array}$ $\begin{array}{cc\|c} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1090} \\ 1 & -1 & 240 \end{array}$	$F1 \longrightarrow F1+F2$
Reemplazamos $F1$ por la fila que se obtiene al dividir toda la fila 1 por 2:	$\begin{array}{cc\|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{545} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{240} \end{array}$	$F1 \longrightarrow \frac{F1}{2}$
Reemplazamos $F2$ por la fila que se obtiene al restar $F2-F1$:	$\begin{array}{cc\|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{545} \\ \mathbf{1-1} & \mathbf{-1-0} & \mathbf{240-545} \end{array}$ $\begin{array}{cc\|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{545} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-305} \end{array}$	$F2 \longrightarrow F2-F1$
Reemplazamos $F2$ por la fila que se obtiene al multiplicar toda la fila 2 por -1:	$\begin{array}{cc\|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{545} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{305} \end{array}$	$F2 \longrightarrow -F2$

Cada nueva matriz que obtuvimos representa *un sistema equivalente* al anterior. Dos sistemas son equivalentes si admiten las mismas soluciones. Es decir, si rearmamos el sistema a partir de cualquiera de las matrices obtenidas, las soluciones serán las mismas que la del sistema original. Conviene trabajar a partir de la última matriz, enseguida comprenderá por qué:

Rearmar el sistema significa volver a escribir las ecuaciones tomando como coeficientes los valores de la matriz, teniendo en cuenta que la 1er columna corresponde a la variable x y la 2da a la variable y:

$$\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{545} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{305} \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{1}\boldsymbol{x} + \mathbf{0}\boldsymbol{y} = \mathbf{545} \\ \mathbf{0}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}\boldsymbol{y} = \mathbf{305} \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} x = 545 \\ y = 305 \end{cases}$$

Hemos obtenido la solución del sistema y, en consecuencia, Alicia tiene \$545 y Pablo \$305.

Este método se conoce como *Método de Gauss* y las operaciones entre filas que realizamos *operaciones elementales.* Las definimos a continuación:

Definición 3.2

Son operaciones elementales:

- ✓ Multiplicar los términos de una fila por un número real distinto de cero.
- ✓ Intercambiar filas paralelas.
- ✓ Sustituir una fila por la que resulta de sumarle a ésta un múltiplo de otra fila

¿Identifica en el desarrollo anterior las distintas operaciones elementales que realizamos?

En efecto, solo realizamos la primera (por ejemplo, al reemplazar $F1$ por $F1 + F2$) y la tercera, (por ejemplo al multiplicar $F2$ por -1).

Antes de continuar, le proponemos la siguiente actividad

ACTIVIDAD 8 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 8 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

3.2. Sistemas de m ecuaciones y n incógnitas

Generalizaremos lo trabajado en los sistemas de orden 2×2 a sistemas de mayor orden, $m \times n$:

Definición 3.3

Un **sistema de ecuaciones lineales** (SEL) es de orden $m \times n$ si tiene m ecuaciones y n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde m y n son números naturales, los a_{ij} son números reales llamados ***coeficientes***, las x_j son las incógnitas y los b_i números reales llamados términos independientes.

Por ejemplo, el siguiente es un sistema de orden 4x3:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 3 \\ -2x_1 - 7x_2 + 6x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Donde, $a_{12} = 5$, $a_{33} = 4$, $a_{31} = -1$, etc. Podemos escribir los coeficientes en una matriz como

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se conoce como *matriz de coeficientes del sistema.*

Los términos independientes son $b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 3$ y $b_4 = 2$. Se pueden escribir en forma de vector como

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se llama *vector de términos independientes.*

Hallar la **solución de un sistema** consiste en encontrar una solución común a todas las ecuaciones del sistema. Es decir, se debe hallar un valor para cada incógnita x_j tal que se verifiquen todas las ecuaciones a la vez.

Por ejemplo, $x_1 = \frac{1}{7},\ x_2 = \frac{2}{7}$ y $x_3 = \frac{5}{7}$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 3 \\ -2x_1 - 7x_2 + 6x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Ya que si reemplazamos $x_1,\ x_2$ y x_3 en cada ecuación, la igualdad se verifica.

Para resolver estos sistemas, podemos aplicar el método de Gauss trabajando con la matriz de coeficientes, a la cual se le agrega el vector de términos independientes. Esta nueva matriz se conoce como *matriz ampliada del sistema:* $\boldsymbol{A}' = \mathbf{A}|\boldsymbol{b}$

En nuestro ejemplo, la matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & -7 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Aplicaremos operaciones elementales sucesivamente sobre la matriz A', tratando de completar con ceros cada columna, de manera tal de obtener un sistema más sencillo de resolver.

Recuerde que cada operación que indicamos, se realiza componente a componente en cada fila. Por ejemplo, si reemplazamos $F3$ por la fila que se obtiene al realizar $F3 + 5 \cdot F2$, el cálculo que realizamos es el siguiente:

$$
\begin{array}{rrrrr}
5 \cdot F2: & 1 \cdot 5 & -3 \cdot 5 & 1 \cdot 5 & 0 \cdot 5 \\
+ \quad F3: & -1 & 1 & 4 & 3 \\
\hline
F3 + 5F2: & 4 & -14 & 9 & 3
\end{array}
$$

Esta fila sería la nueva fila 3

Volviendo a nuestro ejemplo, procedemos como sigue

Escribimos la matriz ampliada del sistema.	$\left(\begin{array}{rrr\|r} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & -7 & 6 & 2 \end{array}\right)$
Realizamos operaciones para obtener ceros debajo de la posición $\boldsymbol{a_{11} = 2}$: ✓$F2$ la reemplazamos por $(2 \cdot F2 - F1)$ ✓$F3$ la reemplazamos por $(2 \cdot F3 + F1)$ ✓$F4$ la reemplazamos por $(F4 + F1)$	$\left(\begin{array}{rrr\|r} \mathbf{2} & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -11 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right)$
Para simplificar los cálculos posteriores, reemplazamos $F2$ por $(-1 \cdot F2)$	$\left(\begin{array}{rrr\|r} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right)$
Realizamos operaciones para obtener ceros debajo de la posición $\boldsymbol{a_{22} = 11}$: ✓$F3$ la reemplazamos por $\left(F3 - \frac{7}{11} \cdot F2\right)$ ✓$F4$ la reemplazamos por $\left(F4 + \frac{2}{11} \cdot F2\right)$	$\left(\begin{array}{rrr\|r} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{11} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 98/11 & 70/11 \\ 0 & 0 & 49/11 & 35/11 \end{array}\right)$

Para simplificar los cálculos posteriores, reemplazamos ✓$F2$ por $(\frac{11}{14}\cdot F2)$ ✓$F3$ por $(\frac{11}{7}\cdot F3)$	$\left.\begin{matrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{matrix}\right\rvert \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{matrix}$
Realizamos operaciones para obtener ceros debajo de la posición $\color{red}{a_{33}=7}$: ✓$F4$ la reemplazamos por $(F4-F3)$	$\left.\begin{matrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & \color{red}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\rvert \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}$

Los números que fuimos utilizando para obtener ceros en cada columna (pintados de **rojo**) se llaman *pivotes.*

Definición 3.4

Llamamos *pivote* de una fila a la primera entrada no nula de la fila, de izquierda a derecha.

A partir de la última matriz, rearmamos el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\rvert \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2\,x_1 + \;5\,x_2 - \;x_3 & = & 1 \\ 0\,x_1 + 11\,x_2 - 3\,x_3 & = & 1 \\ 0\,x_1 + \;0\,x_2 + 7\,x_3 & = & 5 \\ 0\,x_1 + \;0\,x_2 + 0\,x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} 2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 & = & 1 \\ 11\,x_2 - 3\,x_3 & = & 1 \\ 7\,x_3 & = & 5 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

Despejamos x_3 en la 3ra ecuación y obtenemos $\boldsymbol{x_3 = \frac{5}{7}}$.

Reemplazamos este valor en la 2da ecuación y despejamos x_2. Por lo tanto, $x_2 = \frac{1+\frac{15}{7}}{11}$, entonces $\boldsymbol{x_2 = \frac{2}{7}}$.

Por último, sustituimos x_2 y x_3 en la primera ecuación, resulta $2\,x_1 + 5\cdot\frac{2}{7} - \frac{5}{7} = 1$. Luego, despejamos x_1 y obtenemos $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{7}}$.

La solución del sistema es $Sol = \left\{ \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right) \right\}$.

Resumiendo, para resolver un SEL mediante el método de Gauss debemos seguir los siguientes pasos:

- ✓ Se escribe la matriz ampliada del sistema, $\boldsymbol{A}' = \mathbf{A}|\boldsymbol{b}$
- ✓ Se realizan operaciones elementales hasta convertir $\boldsymbol{A}'$ en una matriz con ceros debajo de cada pivote.
- ✓ Se reescribe el sistema a partir de la última matriz obtenida.
- ✓ Se resuelve el sistema escalonado obtenido, el cual es equivalente al original.

Para simplificar la notación, podemos nombrar las variables como x, y, z, en lugar de x_1, x_2, x_3.

ACTIVIDAD 9 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 9 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

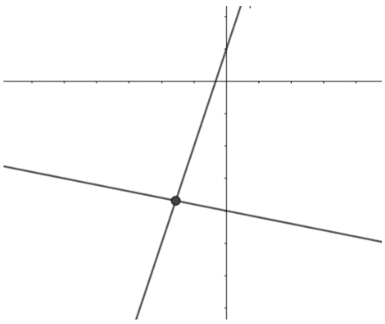
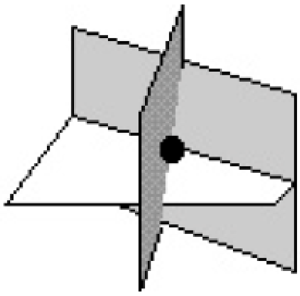
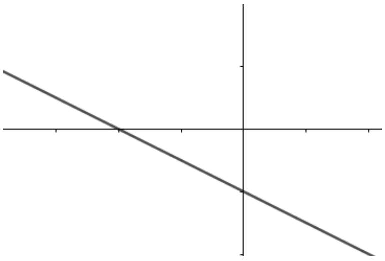
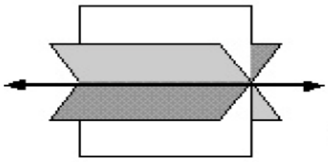
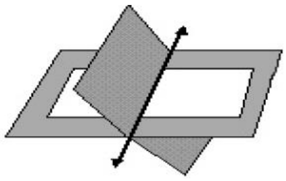
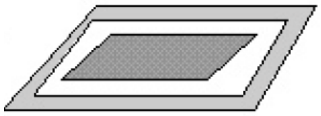
3.3. Clasificación de un sistema de ecuaciones lineales

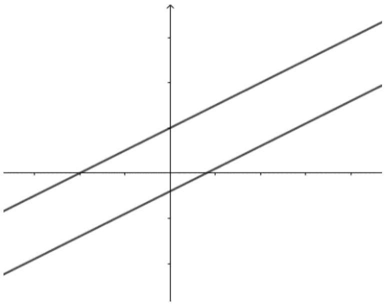
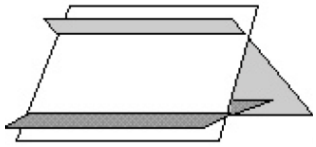
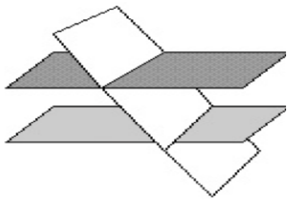
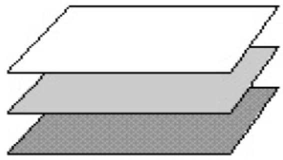
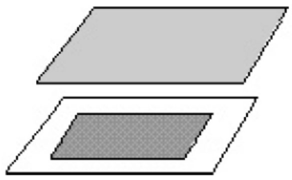
Los sistemas de ecuaciones se clasifican dependiendo de si tienen o no solución. Existen tres posibilidades:

- ✓ Si hay una única solución (un valor para cada incógnita) decimos que el sistema es *compatible determinado* (**SCD**).
- ✓ Si hay infinitas soluciones, decimos que es *compatible indeterminado* (**SCI**).
- ✓ Si no hay ninguna, y esto ocurre cuando dos o más ecuaciones no pueden verificarse al mismo tiempo, decimos que es *incompatible* (**SI**).

En **un** sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas cada ecuación representa gráficamente una recta en el plano. Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas, cada ecuación representa gráficamente un plano en el espacio. El estudio de la solución del sistema se limita a estudiar la intersección entre ellos, o, lo que es equivalente, la posición de estas rectas o planos (paralelos, secantes, coincidentes, etc.

En la tabla siguiente mostramos algunas posibilidades, dependiendo la cantidad de incógnitas.

Tipo de sistema	**2 ecuaciones de 2 variables**	**3 ecuaciones de 3 variables**
SCD Un único punto de intersección	Rectas secantes 	Los tres planos se cortan en un punto. 
SCI Infinitos puntos en común	Rectas coincidentes 	~ Los tres planos se cortan en una recta.  ~ Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.  ~ Los tres planos son coincidentes 

SI No tienen puntos en común	Rectas paralelas 	~ Los planos se cortan dos a dos.  ~ Dos planos son paralelos y el otro los corta.  ~ Los tres planos son paralelos.  ~ Dos planos son paralelos y el otro coincidente con uno de ellos. 

Al resolver un sistema mediante el método de Gauss, podemos encontrarnos con alguno de los siguientes casos:

1. Si se obtiene un sistema escalonado con al menos un coeficiente no nulo en cada fila, el sistema es compatible determinado, tiene solución única. Como, por ejemplo, el sistema que estudiamos previamente.

2. Si se obtiene una o más filas en las que todos los elementos son ceros, el sistema tiene infinitas soluciones, es un sistema compatible indeterminado. Las soluciones se determinan despejando una o varias incógnitas en función de otras. Por ejemplo, resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - z & = & 0 \\ x + 4y + z & = & -4 \\ x + y & = & -2 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema.	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$
Realizamos operaciones para obtener ceros debajo de la posición $\boldsymbol{a_{11} = 1}$: ✓ $F2 \longrightarrow (F2 - F1)$ ✓ $F3 \longrightarrow (F3 - F1)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \mathbf{1} & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$
Realizamos operaciones para obtener ceros debajo de la posición $\boldsymbol{a_{22} = 6}$: ✓ $F3 \longrightarrow \left(F3 - \frac{1}{2} \cdot F2\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{6} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Observamos que la última fila es completamente nula. Concluimos entonces que el sistema es compatible indeterminado. Reescribimos las ecuaciones para determinar las soluciones:

$$\begin{cases} x - 2y - z & = 0 \\ 6y + 2z & = -4 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

La última ecuación es una igualdad verdadera, por lo tanto despejamos x e y en función de z en las otras ecuaciones y obtenemos:

$$y = -\frac{z+2}{3} \qquad\qquad x = \frac{z-4}{3}$$

Es decir, reemplazando z por distintos valores obtenemos los puntos que son solución del sistema. Lo expresamos como

$$Sol = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{z-4}{3} \\ -\frac{z+2}{3} \\ z \end{pmatrix} con\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Si se obtiene una o más filas en las que todos los elementos son ceros, salvo el elemento correspondiente al término independiente, digamos k, entonces el sistema no tiene solución y por tanto es incompatible. Esto es porque la fila en cuestión correspondería a una ecuación del tipo $0 = k$, lo cual es imposible porque dijimos que $k \neq 0$. Veamos un ejemplo.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z & = & 0 \\ x + y - z & = & 1 \\ x - 2y + 4z & = & 2 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema.	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$
Realizamos operaciones para obtener ceros debajo de la posición $\boldsymbol{a_{11} = 2}$: ✓ $F2 \longrightarrow (2 \cdot F2 - F1)$ ✓ $F3 \longrightarrow (2 \cdot F3 - F1)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \mathbf{2} & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right)$
Realizamos operaciones para obtener ceros debajo de la posición $\boldsymbol{a_{22} = 3}$: ✓ $F3 \longrightarrow (F3 + F2)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

Observamos que la última fila es completamente nula, salvo el término independiente que es 6. Concluimos entonces que el sistema es incompatible. Reescribimos las ecuaciones para comprobar esta conclusión:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z & = 0 \\ 3y - 5z & = 2 \\ 0 & = 6 \end{cases}$$

Dado que la última ecuación es falsa, el sistema no tiene solución.

Le proponemos realizar la siguiente actividad

ACTIVIDAD 10 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 10 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Si ha comprendido los temas desarrollados y ha podido realizar todas las actividades propuestas, entonces ha alcanzado los últimos tres objetivos de la unidad 2.

¡Felicitaciones!

Antes de continuar con la lectura de la unidad 3 y para poner en práctica los conceptos y procedimientos aprendidos en la presente unidad, le invitamos a realizar la autoevaluación integradora de la unidad 2.

SÍNTESIS DE LA UNIDAD

En esta unidad hemos profundizado el estudio de las funciones lineales desde el punto de vista de la geometría analítica. De esta manera, asociamos las funciones lineales con una ecuación lineal cuya representación gráfica es una recta en el plano. El estudio de las rectas desde este enfoque nos permitió establecer una relación entre la geometría y el álgebra de manera de poder determinar analíticamente su ecuación. Vimos que es posible determinar la ecuación de una recta conocida su pendiente y un punto o dos puntos que pertenezcan a ella.

Por otra parte, aprendimos a resolver problemas en los cuales es necesario plantear en simultáneo dos o más ecuaciones lineales con dos incógnitas. Luego, lo generalizamos a sistemas de ecuaciones de más de dos ecuaciones con tres o más incógnitas.

Por último, introducimos un nuevo concepto, el de *matriz*, del cual nos ocuparemos en la próxima unidad.

Si Ud. ha realizado las Actividades propuestas con éxito, ha logrado los objetivos:

- Comprender la naturaleza de las funciones y ecuaciones lineales
- Representar gráficamente funciones lineales
- Comprender la naturaleza de los sistemas de ecuaciones lineales y su representación gráfica
- Comprender los procedimientos con que se obtienen los conjuntos solución para sistemas de ecuaciones.
- Determinar el conjunto de soluciones para diversos tipos de sistemas de ecuaciones.

Podrá continuar con la Unidad 3

¡FELICITACIONES!