UNIVERSIDAD CAECE

Cámara Argentina de Comercio y Servicios

Licenciatura en Administración de Negocios / Licenciatura en Administración de Recursos Humanos / Licenciatura en Ciencia de Datos

Matemática 1 – Elementos de Álgebra

GUIA DE LA UNIDAD Nro. 3

Contenidista: Lic. María Mónica Argüello

INDICE – Guía Nro. 3

MAPA DE LA GUIA 3: ÁLGEBRA DE MATRICES

OBJETIVOS

En esta Unidad esperamos que el estudiante pueda

- Comprender la representación matricial de datos.
- Identificar los distintos tipos de matrices y sus relaciones.
- Conocer las operaciones definidas para matrices y sus propiedades.
- Resolver ecuaciones matriciales y aplicarlas a la resolución de problemas.
- Aplicar el álgebra de matrices a la resolución de sistemas de ecuaciones.

CONTENIDOS

✓ **Introducción a las matrices:** Tipos especiales de matrices. Vectores. Matrices cuadradas. Transpuesta de una matriz.

✓ **Operaciones con matrices:** Adición y sustracción de matrices. Multiplicación escalar. El producto interno. Multiplicación de matrices.

✓ **Determinantes:** Cálculo de determinantes. El método de cofactores. Propiedades de las determinantes.

✓ **La inversa de una matriz.** Determinante de la inversa. Obtención de la inversa por medio de cofactores. Aplicación de la inversa a los sistemas de ecuaciones

✓ Algunas aplicaciones económicas y administrativas.

PALABRAS CLAVE

Adjunta – Cuadrada – Cofactor – Determinante – Diagonal – Identidad – Inversa – Gauss – Matriz – Menor – Simétrica – Traza – Triangular

BIBLIOGRAFÍA Y MATERIALES DE REFERENCIA

Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal con Aplicaciones* (7a ed.). McGraw Hill.

Haeussler, E. Jr.; Paul, Richard S. y Wood, R. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía* (12a ed.). Prentice Hall.

Larson, R. y Edwards, B. (2004). *Introducción al álgebra lineal.* Limusa.

Lerner N., Sobel A. (1996). *Álgebra* (4a ed.). Prentice Hall.

Lipschutz, Seymour. (1992). *Álgebra lineal.* Colección Schaum. Mc Graw Hill.

Lipschutz, Seymour. (1994). *Teoría de conjuntos y temas afines.* Colección Schaum. Mc Graw Hill.

Swokowski, E. W. y Cole, J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (13a ed.). Cengage Learning.

1. INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar con esta guía, le solicitamos que lea y complete los ejercicios de la lección “Vectores” que se encuentra al principio de esta unidad, en el aula virtual. Este material le servirá como paso introductorio a lo que desarrollaremos de aquí en adelante.

En esta unidad generalizaremos el concepto de vector. Para ello, analicemos la siguiente situación:

Una fábrica cuenta con dos plantas de producción, en las cuales se producen tres tipos de bolsas para café: económica, estándar y Premium. Durante el mes de marzo, en la planta 1 se produjeron 10000 bolsas económicas, 8000 estándar y 3000 premium. En cambio, en la planta 2 la producción de cada tipo fue de 8000, 5000 y 6000 respectivamente. La producción en el mes de abril para la planta 1 fue de 7000 bolsas económicas, 9000 estándar y 3000 premium. Para el mismo mes, en la planta 2 se produjeron 11000, 10000 y 6000 respectivamente. Una posibilidad para presentar esa información en forma ordenada es la siguiente:

Marzo	Planta / Tipo	Planta 1	Planta 2
	Económica	10	8
	Estándar	8	5
	Premium	3	6

Abril	Planta / Tipo	Planta 1	Planta 2
	Económica	7	11
	Estándar	9	10
	Premium	5	4

En cada tabla, se muestran las cantidades, producidas por cada planta, de los distintos tipos de bolsas, expresadas en miles de unidades. Conociendo el significad de cada número de la tabla, podemos simplificar aún más la notación de la siguiente manera:

$$Marzo = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Abril = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 9 & 10 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Estas tablas reciben el nombre de matriz. Cada fila de la tabla corresponde a un tipo de bolsa, y las columnas corresponden a cada planta de producción.

Informalmente una **matriz** es un conjunto bidimensional cuyos elementos que se organizan en filas y columnas. Dicho de otra manera, es un conjunto de números reales (o cualquier algún otro tipo de elemento) dispuestos en forma de rectángulo. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & \frac{1}{4} & -8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ \pi \\ 11 \end{pmatrix}$$

Observamos que una matriz puede tener distinta cantidad de filas que de columnas.

- ✓ La matriz A tiene 3 filas y 2 columnas, decimos que es de orden 3×2
- ✓ La matriz B tiene 3 filas y 3 columnas, decimos que es de orden 3×3
- ✓ La matriz C tiene 2 filas y 4 columnas, decimos que es de orden 2×4
- ✓ La matriz D tiene 3 filas y 1 columnas, decimos que es de orden 3×1. También se llama vector columna o simplemente vector.

El elemento (coeficiente o componente) (i, j) de una matriz A es aquel que se encuentra en la fila i y en la columna j.

Por ejemplo, en la matriz A el elemento $a_{32} = 1$. En la matriz B, el elemento $b_{23} = -8$. ¿Cuál es el elemento c_{12} de la matriz C?

Si una matriz tiene m filas y n columnas, se dice que es una matriz de orden $m \times n$. Nótese que tal matriz tiene $m \cdot n$ elementos. En efecto, cada una de las m filas tiene n elementos. El conjunto formado por todas las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes reales se lo denomina $\mathbb{R}^{m \times n}$

Una matriz A es de orden $m \times n$ si tiene m filas y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si sus elementos, a_{ij}, son números reales, decimos entonces que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Para las matrices del ejemplo tenemos

- ✓ La matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$
- ✓ La matriz $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
- ✓ La matriz $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$
- ✓ La matriz $D \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$

Dos matrices son iguales si son iguales componente a componente:

Definición

$A = B$ si y solo si son del mismo orden y para cada posición (i, j) se verifica $a_{ij} = b_{ij}$

1.1. Matrices especiales

Según sus características, ciertas matrices cumplen un rol importante en el álgebra matricial. Consideraremos algunas de ellas:

1.1.1. Matriz Nula: sus elementos son todos 0. Pueden ser de cualquier orden. Se denota por $\overline{0}$

$$\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la matriz nula de orden 2x3: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.2. Matriz Opuesta ($-\mathbf{A}$): sus elementos son los opuestos de los elementos de A.

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -8 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, entonces $-A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 8 & -5\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

1.1.3. Matriz fila: también llamada vector fila. Tiene solo una fila, es decir, $m=1$.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 5 & -3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times 3}$

1.1.4. Matriz columna: también llamada vector columna. Tiene solo una columna, es decir, $n=1$.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix}7\\ -1\\ \pi\\ 3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 1}$

1.1.5. Matriz transpuesta ($\mathbf{A^t}$)

Si A es una matriz de orden $m\times n$, se define su matriz transpuesta, y se denota por A^t, como la matriz de orden $n\times m$ cuyas filas son las columnas de A. Es decir, el elemento (i,j) de la matriz A^t es el elemento (j,i) de la matriz A, para cualesquiera i y j. En consecuencia, si $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $A^t\in\mathbb{R}^{n\times m}$.

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -8 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathbb{R}^{3\times 2}$, entonces $A^t=\begin{pmatrix}2 & -8 & 0\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}\mathbb{R}^{2\times 3}$

1.1.6. Matriz cuadrada: una matriz es cuadrada si tiene igual número de filas que de columnas. Es decir, si $m=n$

Por ejemplo, $A=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 3\\ \sqrt{5} & 6 & 5\\ 11 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

La **diagonal principal** de una matriz cuadrada está formada por todos los elementos en las posiciones $(i;i)$ de la matriz. Por ejemplo, en la matriz A, la diagonal principal está formada por -2, 6 y $\frac{1}{3}$. En cambio, en la matriz B los elementos de la diagonal principal son 1 y 0.

La suma de los elementos de la diagonal principal se denomina **traza** de la matriz. Para la matriz A tenemos $Tr(A) = -2 + 6 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$. ¿Cuál es la traza de B?

Entre las matrices cuadradas se encuentran algunos tipos especiales de matrices, los cuales definimos a continuación.

1.1.7. Matriz simétrica: una matriz cuadrada es simétrica si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^t}$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 7 & 0,3 & -1 \\ 0,3 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, su transpuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 7 & 0,3 & -1 \\ 0,3 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.8. Matriz anti simétrica: una matriz cuadrada es antisimétrica si $\mathbf{A} = -\mathbf{A^t}$

Por ejemplo, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.9. Matrices Triangular y Diagonal

- Una matriz cuadrada es ***triangular superior*** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

- Una matriz cuadrada es **triangular inferior** si todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero.

- Una matriz cuadrada se dice **diagonal** si todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Por ejemplo, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 1,5 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ -5 & \sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 28 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

A es triangular superior, B triangular inferior y C es diagonal.

¿Podemos afirmar que una matriz diagonal es una matriz triangular superior e inferior a la vez? Si observamos la definición de estas matrices, la matriz diagonal es a la vez triangular superior e inferior.

1.1.10. **Matriz escalar** e identidad

Si en una matriz diagonal todos los elementos de la diagonal principal son iguales se denomina **matriz escalar.** Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si en una matriz escalar los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 se llama **matriz identidad.** Se denota con la letra I. Para cada número natural n, existe una matriz identidad de orden n, I_n. Por ejemplo, la matriz identidad de orden 3 es $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si ha comprendido los temas desarrollados y ha podido realizar todas las actividades propuestas, entonces ha alcanzado los dos primeros objetivos de la unidad 3.

¡Felicitaciones!

Antes de continuar le proponemos realizar la siguiente actividad

ACTIVIDAD 1 (Glosario)

Le pedimos que complete el Glosario de acuerdo a las indicaciones detalladas en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

2. OPERACIONES CON MATRICES

Así como es posible realizar distintas operaciones entre números reales, también es posible realizar operaciones entre matrices. Estudiaremos las principales.

2.1. Suma de matrices

Volviendo a la fábrica de bolsas de café. Supongamos que se quiere conocer la producción total de cada tipo de bolsa para del 2do bimestre por cada planta.

$$Marzo = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Abril = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 9 & 10 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Observando las tablas podemos concluir que, por ejemplo, es la planta 1 se produjeron 17000 bolsas económicas, 17000 estándar y 8000 premium. En cambio, en la planta 2 los totales para cada tipo de bolsa son 19000, 15000 y 10000 respectivamente. Podemos resumir esta información en la siguiente matriz:

$$2do\ bimestre = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 17 & 15 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la suma de las dos matrices anteriores.

Dadas dos matrices es posible sumarlas de manera tal de obtener una nueva matriz. Solo es posible sumar matrices si tienen el mismo orden.

Sean A y B matrices de orden $m \times n$. Se define la suma $A + B$ como una matriz C, cuya componente c_{ij} se obtiene sumando la componente a_{ij} de A mas la componente b_{ij} de B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Es decir, sumamos componente a componente. Por ejemplo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \sqrt{3}+2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}}_{3\times 2}$$

Propiedades de la suma

2.1.1. Asociativa: si se suman tres o más matrices, esta propiedad permite agruparlas de distintas maneras para realizar la suma:

$$(A+B)+C \;=\; A+(B+C)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Conmutativa: esta propiedad permite cambiar el orden en que se realiza la suma:

$$A+B \;=\; B+A$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2.1.3. Elemento neutro: el neutro de la suma de matrices es la matriz nula del tamaño correspondiente:

$$A+\bar{0}=A$$

Por ejemplo, para las matrices de orden 2×3, el neutro de la suma es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.1.4. Elemento opuesto: la matriz opuesta de una matriz A es la matriz que resulta de cambiar los elementos de A por sus opuestos, se denota por $-\mathrm{A}$.

Por ejemplo, si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, entonces $-\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Estas propiedades son semejantes a las correspondientes a la suma de números reales.

La diferencia entre dos matrices se define como la suma de la matriz A y la opuesta de B, $-B$:

$$A - B = A + (-B)$$

En otras palabras, para restar dos matrices se restan componente a componente las matrices en cuestión.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{2\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -7 & 4 & -4 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

Es importante observar que, si las matrices tienen distinto tamaño, no se pueden sumar ni restar.

2.2. Producto por escalar

Se estima que en el mes de mayo la producción de la fábrica de bolsas de café duplicará a la del mes de abril. Si la producción de abril fue

$$Abril = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 9 & 10 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

En mayo tendremos

$$Mayo = \begin{pmatrix} 14 & 22 \\ 18 & 20 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Esta nueva matriz se obtuvo multiplicando por 2 cada elemento de la matriz $Abril$. Esta operación se conoce como *producto por escalar.*

El producto por escalar es una operación que involucra dos tipos de elementos: escalares, que en nuestro caso son números reales y matrices de cualquier orden. El resultado de esta operación es otra matriz del mismo orden que la primera.

Dada una matriz cualquiera A y un número real k (llamado escalar), se define el producto kA como una matriz C, que tendrá el mismo tamaño que A, cuya componente c_{ij} se obtiene al multiplicar k por la componente a_{ij} de A, es decir:

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Para ejemplificar esta operación calculemos el siguiente producto:

$$-5 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -5\cdot 2 & -5\cdot 1 & -5\cdot 3 \\ -5\cdot(-4) & -5\cdot 2 & -5\cdot 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix}}_{2\times 3} =$$

Propiedades del producto por escalar

2.2.1. Asociativa: $(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{kA})$

Por ejemplo,

$$3\left[5\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right] = 15\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, por un lado

$$3\left[5\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix} -5 & 45 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 135 \\ 90 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$15\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 135 \\ 90 & 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que en ambos casos llegamos al mismo resultado.

2.2.2. Existencia del elemento neutro: el neutro del producto por escalar es el número real 1

$$\boldsymbol{1A = A}$$

2.2.3. Distributiva respecto de la suma de matrices:

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{kA}+\boldsymbol{kB}$$

Por ejemplo,

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 5\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Por otra parte, podríamos resolver la misma operación distribuyendo el producto como sigue:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -2 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Observamos que en ambos casos obtenemos la misma matriz.

2.2.4. Distributiva respecto de la suma de escalares:

$$(h+k)A=hA+kA$$

Por ejemplo,

$$(-2+5)\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 9\\ -12 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

O bien,

$$(-2+5)\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -6\\ 8 & -4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 5 & 15\\ -20 & 10 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 3 & 9\\ -12 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

Observamos que en ambos casos obtenemos la misma matriz.

Estas operaciones se pueden combinar. Por ejemplo, sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si se quiere resolver $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{2B}$, primero se debe calcular el producto $-\boldsymbol{2B}$, y luego sumar la matriz obtenida con $\boldsymbol{A}$:

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -5 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Si en cambio, se quiere calcular el producto entre $(x + 2)$ y la matriz B, para algún $x \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$(x + 2)B = \begin{pmatrix} x + 2 & x + 2 & 2x + 4 \\ 2x + 4 & 0 & 3x + 6 \\ -2x - 4 & -x - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b se verifica la siguiente igualdad?

$$\begin{pmatrix} 3 - a & 2 \\ 4 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a + b \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Para poder responder, primero debemos resolver la suma del miembro izquierdo:

$$\begin{pmatrix} 5 - a & 2 + a + b \\ 6 & b - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos una igualdad de matrices de igual orden. Recordamos que dos matrices son iguales si lo son componente a componente. Por lo tanto, se deben verificar las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} 5 - a & = & -1 \\ 6 & = & 6 \\ 2 + a + b & = & 9 \\ b - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de 4 ecuaciones lineales y dos incógnitas. Resolviendo el sistema, obtenemos la solución $a = 6$ y $b = 1$.

Antes de continuar, veamos la siguiente actividad

ACTIVIDAD 2 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 2 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Teniendo en cuenta las propiedades de estas operaciones, es posible resolver ecuaciones que involucran matrices. ¿Cómo procedemos cuando la incógnita es una matriz? Lo explicaremos a partir del siguiente ejemplo:

Siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $3X - A = B$

Observamos que para que las operaciones se puedan realizar, la matriz X debe ser de orden 3x2.

Aplicando las propiedades de las operaciones involucradas podemos "despejar" la matriz X:

Sumamos A en ambos miembros de la igualdad, tenemos: $3X - A + A = B + A$

Dado que la suma $(-A + A)$ es igual a la matriz nula de orden 3x2, la cual es neutro para la suma, se cancela y queda: $3X = B + A$

Por último, multiplicando por $\frac{1}{3}$ en ambos miembros queda la igualdad: $X = \frac{1}{3}\,(B + A)$

Para determinar la matriz X solo falta realizar la última operación. Es decir,

$$X = \frac{1}{3}\,(B + A) \;=\; \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & {}^{1}\!/_{3} \\ {}^{2}\!/_{3} & 1 \\ {}^{5}\!/_{3} & {}^{13}\!/_{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es $X = \begin{pmatrix} 2 & {}^{1}\!/_{3} \\ {}^{2}\!/_{3} & 1 \\ {}^{5}\!/_{3} & {}^{13}\!/_{3} \end{pmatrix}$

ACTIVIDAD 3 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 3 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

2.3. Producto de un vector fila por un vector columna

Solo resta definir el producto entre dos matrices, el cual dará por resultado una nueva matriz. Comenzaremos realizando el producto entre dos vectores, el cual da por resultado un número real, para luego generalizarlo a matrices de orden superior.

Sea A una matriz de orden $1 \times n$ y B una matriz de orden $n \times 1$. Definimos el producto entre A y B (en ese orden) como el número real siguiente:

$$AB = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

donde a_i son los elementos de A y b_i los de B.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ {}^{1}\!/_{3} \\ -2 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-5) + 9\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot(-2) = -4$$

El vector fila y el vector columna deben tener el mismo número de elementos.

Veamos una aplicación de este producto. Supongamos que la fábrica del ejemplo quiere determinar los costos de producción del mes de marzo. Recordemos que la producción de cada tipo de envase, por planta, está dado por la matriz:

$$Marzo = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Es decir, la producción de marzo de cada planta está dada por las matrices columna:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Se sabe que los costos de producción de la Planta 1, cada 1000 envases, son: $500 para la línea económica, $750 para la estándar y $1200 para la Premium. Con respecto a la Planta 2, los costos para cada tipo de envase son $400, $800 y $1100 respectivamente. Podemos resumir esta información mediante las siguientes matrices columna:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 500 \\ 750 \\ 1200 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ 1100 \end{pmatrix}$$

¿Qué obtendremos al multiplicar cada matriz de producción por su correspondiente matriz de costo? Para poder realizar el producto, consideramos las transpuestas de las matrices C_1 y C_2:

$$\begin{pmatrix} 500 & 750 & 1200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = 500 \cdot 10 + 750 \cdot 8 + 1200 \cdot 3 = 14600$$

$$\begin{pmatrix} 400 & 800 & 1100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 400 \cdot 8 + 800 \cdot 5 + 1100 \cdot 6 = 13800$$

Estos resultados corresponden al costo total de cada planta en el mes de marzo.

2.4. Producto entre dos matrices

Veremos ahora como realizar el producto entre dos matrices. Así como las matrices debían tener el mismo orden para poder realizar la suma, para poder realizar el producto entre dos matrices éstas deben cumplir cierta condición respecto del orden. Más específicamente, el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Sea A una matriz $m \times k$ y B una matriz $k \times n$. Se define el producto AB como una matriz C, que tendrá orden $m \times n$, cuya componente c_{ij} se obtiene al multiplicar la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B, es decir:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

Dicho de otra manera, para obtener la componente de la posición (i, j) se realiza el producto entre el vector fila correspondiente a la fila i de A con el vector columna correspondiente a la columna j de B.

Consideramos las matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \text{y} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$$

Observamos que no se puede calcular AB (¿por qué?), pero puede multiplicarse B por A, resultando una matriz BA de orden 4×3:

$$\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 1 & -4 & 14 \\ -2 & 18 & 12 \\ -1 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Cada elemento de esta matriz se obtuvo realizando el producto entre filas y columnas como indicamos anteriormente. Por ejemplo, el elemento de la posición (2,3) se calculó multiplicando la fila 2 de B por la columna 3 de A :

$$(-1 \quad 5)\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} = (-1)\cdot 6 + 5 \cdot 4 = 14$$

Propiedades del producto de matrices

Esta operación verifica algunas propiedades como:

2.4.1. Asociativa

Para multiplicar 3, o más matrices, es posible agruparlas de distinta manera para realizar el producto obteniendo el mismo resultado:

$$(AB)C = A(BC)$$

2.4.2. Elemento neutro:

El elemento neutro del producto es la matriz identidad cuyo orden dependerá del orden de la matriz que multiplica. Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces I_n es neutro a derecha y I_m es el neutro a izquierda.

$$AI_n = A \quad \text{y} \quad I_m A = A$$

2.4.3. Distributiva respecto de la suma de matrices:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

¿Qué podemos decir respecto de la propiedad conmutativa? En el ejemplo anterior, solo uno de los productos era posible, BA. Podemos afirmar entonces que, para estas matrices, $AB \neq BA$. ¿Sucederá lo mismo en los casos en que ambos productos sean posibles? Veamos el siguiente ejemplo.

Consideremos las matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Dado que ambas son de orden 2x2, es posible realizar ambos productos:

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5 & 6+20 \\ -1+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 26 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 & -5+0 \\ 3+4 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que, si bien ambos productos son posibles, las matrices que se obtuvieron en cada caso son distintas. Es decir, $CD \neq DC$.

Concluimos entonces que **el producto de matrices NO es conmutativo**. En general,

$$\boldsymbol{AB \neq BA}$$

En el aula virtual encontrará el enlace a un simulador de esta operación.

Veamos las siguientes actividades

ACTIVIDAD 4 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 4 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

ACTIVIDAD 5 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 5 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Si ha comprendido los temas desarrollados y ha podido realizar todas las actividades propuestas, entonces ha alcanzado el tercer y cuarto objetivos de la unidad 3.

¡Felicitaciones!

3. DETERMINANTES

Cada matriz cuadrada tiene asociado un número el cual se conoce como determinante. El determinante de una matriz permite, entre otras cosas, determinar si la matriz es o no invertible. Para las matrices cuadradas de orden1, 2 y 3 tenemos fórmulas sencillas para calcular su determinante. En cambio, si la matriz es de orden superior a 3, debemos recurrir a otros recursos. El determinante de una matriz A se denota como $det(A)$ o $|A|$.

El determinante de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$, es un número real asociado a ella que se define de la siguiente manera:

- Si $n = 1$, $A = [a_{11}]$. Entonces $\boldsymbol{det(A) = a_{11}}$
- Si $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces $\boldsymbol{det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$
- Si $n > 2$, se define $det(A)$ mediante el desarrollo de Laplace

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $|A| = -1 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = -16$

Para el caso $\mathbf{n = 3}$, se puede aplicar la Regla de Sarrus:

Si $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces el $\det(A)$ se calcula como:

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Es sencillo aplicar esta fórmula teniendo en cuenta el siguiente esquema:

Se repiten las filas 1 y 2

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \\ \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \\ \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{array}$$

$$|A| = (\boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33}} + \boldsymbol{a_{21}a_{32}a_{13}} + \boldsymbol{a_{31}a_{12}a_{23}}) - (\boldsymbol{a_{31}a_{22}a_{13}} + \boldsymbol{a_{11}a_{32}a_{23}} + \boldsymbol{a_{21}a_{12}a_{33}})$$

Apliquemos esta fórmula para calcular el determinante de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= [1 \cdot 4 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \cdot 0] - [0 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-4)] \\ &= -19 - 24 = -43 \end{aligned}$$

3.1. Determinante mediante el método de cofactores.

Mediante este método se puede calcular el determinante para matrices de cualquier tamaño. Consideremos una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, definimos:

- **Menor** $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{M_{ij}}$: es el determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo en $\boldsymbol{A}$ la fila $\boldsymbol{i}$ y la columna $\boldsymbol{j}$.

  Continuamos con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ del ejemplo anterior. Un menor asociado a ella es

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 3$$

- **Cofactor** $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$: $\boldsymbol{C_{ij}} = (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{i+j}} \cdot \boldsymbol{M_{ij}}$

  Por ejemplo, para la matriz A del ejemplo anterior

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot 3 = -3$$

Observamos que cada matriz tiene asociados tantos menores y cofactores como elementos tiene la matriz. Si es de orden n, se pueden calcular n^2 cofactores.

Desarrollo de Laplace

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$ se calcula como

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{1j}\, \boldsymbol{C}_{1j}$$

Es decir, para calcular el determinante de una matriz se van sumando los productos entre cada elemento de la fila 1 con su correspondiente cofactor.

Es importante destacar que **el determinante de una matriz es único**.

Veamos cómo aplicar esta fórmula para calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Desarrollando por fila 1 tenemos

$$det(A) = 1 \cdot C_{11} + 2 \cdot C_{12} + (\,-1) \cdot C_{13}$$

Calcularemos cada cofactor por separado, y luego los reemplazaremos en la fórmula:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (-16) = -16$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-12) = 12$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 3 = 3$$

Luego,

$$det(A) = 1 \cdot (-16) + 2 \cdot 12 + (\,-1) \cdot 3 = 5$$

Por lo tanto, $\det(A) = 5$.

¿Qué valor se obtiene si calculamos el determinante de esta matriz mediante la regla de Sarrus?

Si bien el desarrollo de Laplace se realiza a partir de la fila 1, el siguiente teorema garantiza que el determinante se puede obtener desarrollando por cualquier fila o columna.

Teorema

El desarrollo de Laplace puede realizarse a partir de cualquier fila (o columna) de A.

Esto permite elegir convenientemente la fila mediante la cual realizar el desarrollo. Si observamos que en una fila hay elementos nulos, al realizar el desarrollo a partir de dicha fila, evitaremos calcular algunos cofactores ya que quedarán multiplicados por cero.

Volviendo a la matriz A del ejemplo, si calculáramos su determinante desarrollando mediante la fila 2 tendríamos:

$$det(A) = 3 \cdot C_{21} + 4 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{23} = 3 \cdot C_{21} + 4 \cdot C_{22}$$

O también, podríamos realizar el desarrollo mediante la fila 3:

$$det(A) = (-1) \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{32} + (-4) \cdot C_{33} = (-1) \cdot C_{31} + (-4) \cdot C_{33}$$

Observamos que, en ambos casos, solo debemos calcular dos cofactores. En todos los casos, también si se aplica la regla de Sarrus, el resultado deberá ser 5.

ACTIVIDAD 6 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 6 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Supongamos que queremos hallar el valor de λ tal que $|A| = 0$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Dado que la fila 1 tiene dos elementos iguales a 0, calculamos el determinante de A desarrollando por fila 1:

$$|A| = (2-\lambda)\cdot C_{11} + 0\cdot C_{12} + 0\cdot C_{13}$$

$$|A| = (2-\lambda)\cdot C_{11}$$

$$|A| = (2-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2-\lambda)\cdot(-1)^{2}\cdot[(3-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot 0]$$

$$|A| = (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$

Para que $|A| = 0$, deberá ser

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Es decir, $2-\lambda = 0$ o $3-\lambda = 0$ o $1-\lambda = 0$

Por lo tanto, tenemos tres soluciones:

$$\lambda = 2 \quad \text{o} \quad \lambda = 3 \quad \text{o} \quad \lambda = 1$$

ACTIVIDAD 7 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 7 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

3.2. Propiedades del determinante

Estas propiedades permiten simplificar el cálculo del determinante de una matriz o deducir su valor a partir de conocer otros determinantes.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces

3.2.1. Si $B \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times n}}$ se obtiene al intercambiar dos filas (o columnas) de A, entonces $|B| = -|A|$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 9, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |B| = -9$$

3.2.2. Si B $\in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ se obtiene al multiplicar una fila (o columna) de A por un escalar no nulo α, entonces $|B| = \alpha|A|$

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 9,$

Sea $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila 1 de B es igual al doble de la fila 1 de A. Por lo tanto, $|B| = 2 \cdot 9 = 18$

3.2.3. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $|\alpha A| = \alpha^n|A|$

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 9,$ entonces la matriz $3A = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$.

De acuerdo a esta propiedad, $|3A| = 3^2 \cdot 9 = 81$

3.2.4. Si A tiene una fila (o columna) nula, entonces $|A| = 0$

3.2.5. Si en A una fila (o columna) es múltiplo de otra, $|A| = 0$

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$, observamos que la fila 2 se obtiene multiplicando la fila 1 por -3. Aplicando la propiedad, su determinante es cero. Lo verificamos calculando el determinante de la matriz mediante la fórmula:

$$|A| = 3 \cdot 6 - (-9) \cdot (-2) = 18 - 18 = 0$$

3.2.6. Si B $\in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|AB| = |A||B|$

Es decir, si conocemos los determinantes de dos matrices, podemos calcular el determinante de la matriz producto multiplicando el determinante de cada matriz.

3.2.7. Si A es triangular, entonces el determinante de A se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal principal:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Por ejemplo, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$|A| = 3 \cdot [(-1) \cdot 8 - 0 \cdot 2] - 0 \cdot [1 \cdot 8 - 0 \cdot (-5)] + 0 \cdot [1 \cdot 2 - (-1) \cdot (5)]$$

Es decir, $\quad |A| = 3 \cdot (-1) \cdot 8 = -24$

3.2.8. El determinante de una matriz coincide con el de su transpuesta:

$$|\mathrm{A}| = |\mathrm{A}^{\mathrm{t}}|$$

Veamos la siguiente actividad

ACTIVIDAD 8 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 8 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

4. INVERSA DE UNA MATRIZ

Para resolver una ecuación de la forma $ax = b$, con $a \neq 0$, basta con multiplicar ambos miembros por el inverso de a:

$$5x = 8$$

Multiplicamos ambos miembros por el inverso de 5

$$\frac{1}{5} \cdot 5 \cdot x = \frac{1}{5} \cdot 8$$

En el miembro izquierdo, el producto $\frac{1}{5} \cdot 5$ es igual al neutro del producto, 1:

$$1 \cdot x = \frac{8}{5}$$

Por lo tanto, $x = \frac{8}{5}$

Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

¿Cómo resolver una ecuación del tipo $AX = B$, donde A, B y X son matrices? Trazando una analogía con la resolución de ecuaciones de números reales, debemos hallar una matriz tal que al multiplicarla por A se obtenga el neutro del producto de matrices.

Se denomina matriz inversa y la definimos a continuación:

Si A una matriz cuadrada de orden n, se dice que A es invertible (o regular, o no singular) si existe una matriz B, de orden n, tal que $AB = I_n$ y $BA = I_n$. La matriz B es la inversa de A y se denota por $B = A^{-1}$.

Recordamos que el neutro del producto de matrices es la matriz identidad (revisar la propiedad vista en el punto 2.4.2)

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

¿Cómo podemos estar seguros de que esta matriz es la inversa de A? En efecto,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que se cumplen ambas condiciones de la definición de inversa, la matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ es la inversa de $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Volviendo a la ecuación

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Es posible resolverla utilizando la matriz inversa de A como sigue:

Para simplificar la notación, reescribimos la ecuación como $AX = B$

Dado que sabemos que existe la matriz inversa de A, podemos multiplicar ambos miembros, por izquierda, por A^{-1}:

$$A^{-1}A\,X = A^{-1}B$$

Por definición de matriz inversa, sabemos que $A^{-1}A = I_2$. Luego

$$I_2\,X = A^{-1}B$$

Y, dado que la matriz identidad es el neutro para el producto de matrices, tenemos

$$X = A^{-1}B$$

Es decir,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el producto, concluimos que $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{18}{5} \\ -\frac{59}{15} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

De la definición destacamos que solo las matrices cuadradas pueden ser invertibles, pero no todas ellas lo son. En el siguiente teorema veremos una condición necesaria y suficiente para determinar si una matriz admite inversa o no:

Teorema

Una matriz es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero.

Veremos dos métodos para hallar la inversa de una matriz invertible:

- Método de Gauss – Jordan
- Método de Cofactores

4.1. Método de Gauss – Jordan

Este método es similar al utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se escribe la matriz ampliada $\mathbf{A}|\boldsymbol{I_n}$ y se realizan operaciones elementales hasta llegar a $\boldsymbol{I_n}|\mathbf{B}$. Si esto es posible, será $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$

Aplicaremos este método para hallar, si es posible, la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Primero escribimos la matriz ampliada:

$$A \mid I_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego, realizaremos operaciones elementales de manera tal de obtener la matriz identidad a la izquierda.

Partimos de la matriz ampliada:	$\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$
Realizamos operaciones para obtener ceros debajo de la posición $\boldsymbol{a_{11} = 1}$: ✓$F3$ la reemplazamos por $(F3 - F1)$	$\begin{array}{ccc\|ccc} \mathbf{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$
Realizamos operaciones para obtener ceros por encima y debajo de la posición $\boldsymbol{a_{22} = 1}$: ✓$F1$ la reemplazamos por $(F1 + 2 \cdot F2)$ ✓$F3$ la reemplazamos por $(F3 - 4 \cdot F2)$	$\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 1 \end{array}$
Reemplazamos $F3$ por $\frac{1}{2}$ $F3$	$\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 & 1/2 \end{array}$

Realizamos operaciones para obtener ceros por encima de la posición $\boldsymbol{a_{33} = 1}$: ✓$F1$ la reemplazamos por $(F1 - F3)$ ✓$F2$ la reemplazamos por $(F2 + F3)$	$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{matrix}\right\vert \begin{matrix} {}^{3}/_{2} & 4 & {}^{-1}/_{2} \\ {}^{-1}/_{2} & -1 & {}^{1}/_{2} \\ {}^{-1}/_{2} & -2 & {}^{1}/_{2} \end{matrix}$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{2} & 4 & {}^{-1}/_{2} \\ {}^{-1}/_{2} & -1 & {}^{1}/_{2} \\ {}^{-1}/_{2} & -2 & {}^{1}/_{2} \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD 9 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 9 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

4.2. Método de Cofactores para hallar la inversa de una matriz A

Otra posibilidad para determinar la matriz inversa de una matriz cuadrada es mediante la matriz adjunta.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

Se define la **matriz de cofactores de $\boldsymbol{A}$** como la matriz del mismo orden cuyo elemento (i, j) es el cofactor C_{ij}:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Se define la **matriz adjunta de $\boldsymbol{A}$** como la traspuesta de la matriz de cofactores:

$$\boldsymbol{Adj(A) = C^t}$$

Por ejemplo, para la matriz A anterior tenemos

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

El siguiente teorema relaciona la matriz adjunta de una matriz A con su inversa:

Teorema

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $|A| \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$$

Continuando con el ejemplo, dado que $|A| = 2$ podemos determinar la inversa de la matriz A:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{2} Adj(A)}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

ACTIVIDAD 10 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 10 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

ACTIVIDAD 11 (Tarea)

Le pedimos que realice la Actividad 11 que le proponemos en el campus y la envíe al tutor para su corrección.

4.3. Aplicación de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones

En la unidad anterior trabajamos con matrices asociadas a los sistemas de ecuaciones, sin profundizar en su estudio. Aplicando el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema era posible clasificarlo y determinar su solución. Estudiaremos otra forma de resolver un sistema de ecuaciones aplicando, en los casos en que sea posible, la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

Supongamos que queremos resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = & 0 \\ y - z & = & -4 \\ x + 2y + 1 & = & -2 \end{cases}$$

La forma matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes es la matriz A del ejemplo anterior. Por lo tanto, sabemos que existe su inversa. Si multiplicamos ambos miembros por la inversa de la matriz A tenemos:

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 4 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En el miembro izquierdo el producto es igual a la identidad de orden 3 (¿por qué?). Por esta razón la ecuación queda como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el producto obtenemos la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD 12 (Autoevaluación)

Le pedimos que realice el ejercicio 12 de las actividades que le proponemos en el campus de manera de ir afianzando conceptos vistos hasta aquí.

Si ha comprendido los temas desarrollados y ha podido realizar todas las actividades propuestas, entonces ha alcanzado el último objetivo de la unidad 3.

¡Felicitaciones!

Antes de continuar con la lectura de la unidad 4 y para poner en práctica los conceptos y procedimientos aprendidos en la presente unidad, le invitamos a realizar la autoevaluación integradora de la unidad 3.

SÍNTESIS DE LA UNIDAD

Las matrices constituyen uno de los elementos fundamentales del álgebra lineal por sus numerosas aplicaciones. En esta unidad, hemos definido estos elementos y profundizamos el estudio de los principales tipos de matrices. Luego, estudiamos las distintas operaciones que se pueden realizar entre ellas, como la suma y el producto de matrices, y sus aplicaciones. También definimos el producto por escalar, operación entre números reales y matrices. Continuamos el desarrollo de la unidad mediante el estudio del determinante asociado a una matriz, el cual permite, entre otras cosas, determinar si una matriz es o no invertible. Finalmente presentamos el concepto de inversa de una matriz y su relación con la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Si Ud. ha realizado las Actividades propuestas con éxito, ha logrado los objetivos:

- Comprender la representación matricial de datos.
- Identificar los distintos tipos de matrices y sus relaciones.
- Conocer las operaciones definidas para matrices y sus propiedades.
- Resolver ecuaciones matriciales y aplicarlas a la resolución de problemas.
- Aplicar el álgebra de matrices a la resolución de sistemas de ecuaciones.

Podrá continuar con la Unidad 4

¡FELICITACIONES!