Cálculo Numérico

Prof. Gabriel Souto

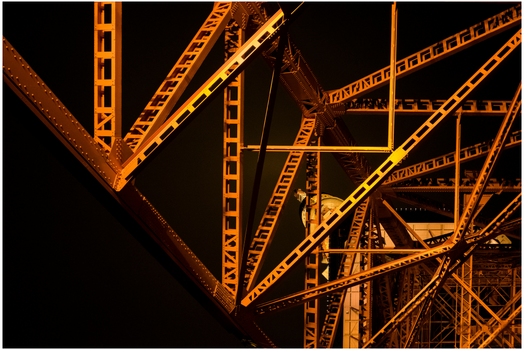
IME/UERJ

2025.2

Sumário

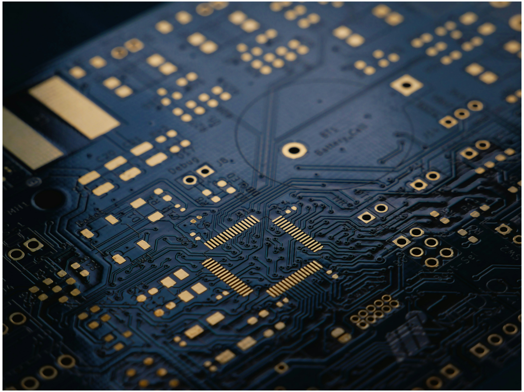
Motivação prática

- Problemas reais geram **grandes sistemas lineares** $Ax = b$:
    - Engenharia (estruturas, circuitos, fluidos),
    - Ciência da Computação (gráficos, simulações),
    - Ciências (modelos climáticos, redes).



Motivação prática

- Problemas reais geram **grandes sistemas lineares** $Ax = b$:
  - Engenharia (estruturas, circuitos, fluidos),
  - Ciência da Computação (gráficos, simulações),
  - Ciências (modelos climáticos, redes).



Resolução de Sistemas Lineares

Como determinar a solução de sistemas lineares?

Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

Para determinar a solução de um sistema linear $Ax = b$ temos:

- **Métodos Diretos:**
  - Eliminação Gaussiana;
  - Decomposição LU;
  - Decomposição de Cholesky.
- **Métodos Iterativos:**
  - Jacobi–Richardson;
  - Gauss–Seidel.

Sumário

Métodos Iterativos: Motivação

Para sistemas lineares de pequena dimensão, usamos métodos diretos (eliminação de Gauss, decomposições LU, Cholesky).

Entretanto, para grandes sistemas esparsos (muitos zeros na matriz), métodos diretos podem ser ineficientes em termos de:

- Memória de armazenamento;
- Tempo computacional.

Métodos Iterativos: Motivação

Para sistemas lineares de pequena dimensão, usamos métodos diretos (eliminação de Gauss, decomposições LU, Cholesky).

Entretanto, para grandes sistemas esparsos (muitos zeros na matriz), métodos diretos podem ser ineficientes em termos de:

- Memória de armazenamento;
- Tempo computacional.

Métodos Iterativos

- Surgem como alternativa aos métodos diretos;
- Aproximam a solução exata de forma sucessiva;
- São úteis em aplicações como:
  - Análise de circuitos;
  - Resolução de equações diferenciais parciais;
  - Problemas de contorno em engenharia.

Ideia Básica de um Método Iterativo

Sistema Linear

Dado um sistema linear $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, procuramos $x \in \mathbb{R}^n$.

Método Iterativo

- Escolhemos uma aproximação inicial $x^{(0)}$;
- Geramos uma sequência de aproximações $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$;
- Esperamos que $x^{(k)} \to x$ (a solução do sistema).

Ideia Básica de um Método Iterativo

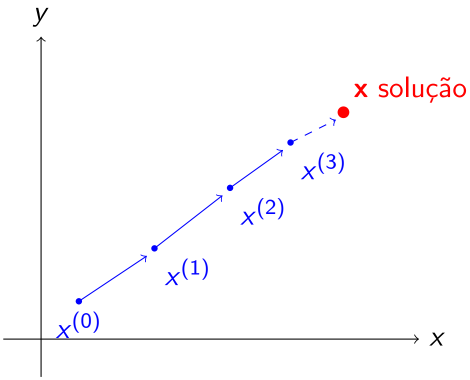
Sistema Linear

Dado um sistema linear $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, procuramos $x \in \mathbb{R}^n$.

Método Iterativo

- Escolhemos uma aproximação inicial $x^{(0)}$;
- Geramos uma sequência de aproximações $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$;
- Esperamos que $x^{(k)} \to x$ (a solução do sistema).

Visualizando a Ideia



Cada iteração aproxima mais a solução.

Sumário

Método de Jacobi

Sistema Linear

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Isolando x_1 da primeira equação

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k-1)}\right)}{a_{11}}$$

Método de Jacobi

Sistema Linear

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Isolando x_1 da primeira equação

$$
x_1^{(k)} = \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k-1)}\right)}{a_{11}}
$$

Método de Jacobi

Observação Importante

Na iteração k, utilizamos os valores da iteração $k-1$ para calcular cada componente da nova aproximação.

Método de Jacobi — componente a componente

Da mesma forma, isolando o elemento x_i na i-ésima equação ($i = 1, \ldots, n$):

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k-1)}\right)}{a_{11}},$$

$$x_2^{(k)} = \frac{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k-1)} + a_{23}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k-1)}\right)}{a_{22}},$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = \frac{b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k-1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}\right)}{a_{nn}}.$$

Ideia-chave

Cada componente na iteração k usa *apenas* os valores da **iteração anterior** $k-1$.

Método de Jacobi — componente a componente

Da mesma forma, isolando o elemento x_i na i-ésima equação ($i = 1, \ldots, n$):

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k-1)}\right)}{a_{11}},$$

$$x_2^{(k)} = \frac{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k-1)} + a_{23}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k-1)}\right)}{a_{22}},$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = \frac{b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k-1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}\right)}{a_{nn}}.$$

Ideia-chave

Cada componente na iteração k usa *apenas* os valores da **iteração anterior** $k-1$.

Método de Jacobi - Formalização

Aproximação inicial

$$x^{(0)} = \text{vetor inicial de aproximação (chute inicial).}$$

Iteração de Jacobi

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, a atualização é dada por:

$$\boxed{x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)} \right)}$$

Método de Jacobi - Formalização

Aproximação inicial

$$x^{(0)} = \text{vetor inicial de aproximação (chute inicial).}$$

Iteração de Jacobi

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, a atualização é dada por:

$$\boxed{x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)} \right)}$$

Exemplo 1

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para determinar a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Exemplo 1

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para determinar a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na primeira iteração, encontramos:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{2}, \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}\left(-1 - 3x_1^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(-1 - 0) = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Exemplo 1

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para determinar a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na segunda iteração, encontramos:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}, \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}\left(-1 - 3x_1^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}. \end{cases}$$

Exemplo 1

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para determinar a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na terceira iteração, encontramos:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_2^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{8}\right) = \frac{13}{16}, \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}\left(-1 - 3x_1^{(2)}\right) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{5}{8}\right) = -\frac{23}{32}. \end{cases}$$

Sumário

Critério de Parada

Além do número máximo de iterações, usamos a diferença entre duas iterações consecutivas como critério de parada do método de Jacobi.

Ideia

Paramos as iterações quando a solução não muda mais significativamente de uma iteração para a outra.

Critério de Parada

Além do número máximo de iterações, usamos a diferença entre duas iterações consecutivas como critério de parada do método de Jacobi.

Ideia

Paramos as iterações quando a solução não muda mais significativamente de uma iteração para a outra.

Critério de Parada — Definição Formal

Formalmente, paramos as iterações quando a diferença relativa de duas iterações consecutivas satisfaz:

$$D_r = \frac{\max\{|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|,\ i = 1, \ldots, n\}}{\max\{|x_i^{(k)}|,\ i = 1, \ldots, n\}} \ \leq \ \tau,$$

em que $\tau > 0$ é uma **tolerância pré-estabelecida**.

Critério de Parada — Forma Alternativa

De forma equivalente, podemos escrever:

$$D_r = \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} \quad \leq \quad \tau,$$

onde

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |v_i|$$

é a **norma infinito** (máximo valor absoluto dos componentes).

Critério de Parada — Interpretação

- τ controla a **precisão desejada**: quanto menor τ, mais iterações serão necessárias.
- Esse critério garante que a aproximação $x^{(k)}$ estabilizou.
- Além disso, sempre definimos um **número máximo de iterações** $k_{\max}$ para evitar laços infinitos.

Resumo

$$\text{Parar se } D_r \le \tau \quad \text{ou} \quad k \ge k_{\max}.$$

Critério de Parada — Interpretação

- τ controla a **precisão desejada**: quanto menor τ, mais iterações serão necessárias.
- Esse critério garante que a aproximação $x^{(k)}$ estabilizou.
- Além disso, sempre definimos um **número máximo de iterações** k_{max} para evitar laços infinitos.

Resumo

$$\text{Parar se } D_r \leq \tau \quad \text{ou} \quad k \geq k_{\text{max}}.$$

Exemplo 2 (Revisado com critério de parada)

Use o método de Jacobi, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\tau = 10^{-4}$ como critério de parada, para determinar a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na primeira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{2}, \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}\left(-1 - 3x_1^{(0)}\right) = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\left\{\left|\frac{1}{2} - 0\right|, \ \left|-\frac{1}{4} - 0\right|\right\}}{\max\left\{\left|\frac{1}{2}\right|, \ \left|-\frac{1}{4}\right|\right\}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Exemplo 2 (critério de parada)

Use o método de Jacobi, com $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\tau = 10^{-4}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na segunda iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}, \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}\left(-1 - 3x_1^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}. \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\left\{\left|\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\right|, \left|-\frac{5}{8} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right|\right\}}{\max\left\{\left|\frac{5}{8}\right|, \left|-\frac{5}{8}\right|\right\}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.$$

Exemplo 2 (critério de parada)

Use o método de Jacobi, com $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\tau = 10^{-4}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na terceira iteração, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 - x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{8}\right) = \frac{13}{16}, \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(-1 - 3x_1^{(2)}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 3\frac{5}{8}\right) = -\frac{23}{32}. \end{cases}$$

com

$$D_r = \frac{\max\left\{\left|\frac{13}{16} - \frac{5}{8}\right|, \left|-\frac{23}{32} - \left(-\frac{5}{8}\right)\right|\right\}}{\max\left\{\left|\frac{13}{16}\right|, \left|-\frac{23}{32}\right|\right\}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{23}{16}} = \frac{3}{23}.$$

Exemplo 2 (critério de parada)

Use o método de Jacobi, com $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\tau = 10^{-4}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Na iteração 19, encontramos

$$\begin{cases} x_1^{(19)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_2^{(18)}\right) \approx 0.9999, \\ x_2^{(19)} = \frac{1}{4}\left(-1 - 3x_1^{(18)}\right) \approx -0.9999, \end{cases}$$

com

$$D_r \approx 7.3 \times 10^{-5}.$$

Sumário

Exercício

Resolver por Jacobi:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 11, \\ x_1 + 10x_2 = 10, \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau = 10^{-3}.$$

Fórmulas da iteração

$$x_1^{(k+1)} = \frac{11 - x_2^{(k)}}{10}, \qquad x_2^{(k+1)} = \frac{10 - x_1^{(k)}}{10}.$$

Exercício

Resolver por Jacobi:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 11, \\ x_1 + 10x_2 = 10, \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau = 10^{-3}.$$

Fórmulas da iteração

$$x_1^{(k+1)} = \frac{11 - x_2^{(k)}}{10}, \qquad x_2^{(k+1)} = \frac{10 - x_1^{(k)}}{10}.$$

Iteração 1:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{11-0}{10} \\ \frac{10-0}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \qquad D_r = \frac{\max\{1.1, 1.0\}}{\max\{1.1, 1.0\}} = 1.$$

Exercício

Resolver por Jacobi:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 11, \\ x_1 + 10x_2 = 10, \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau = 10^{-3}.$$

Fórmulas da iteração

$$x_1^{(k+1)} = \frac{11 - x_2^{(k)}}{10}, \qquad x_2^{(k+1)} = \frac{10 - x_1^{(k)}}{10}.$$

Iteração 1:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{11-0}{10} \\ \frac{10-0}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \qquad D_r = \frac{\max\{1.1, 1.0\}}{\max\{1.1, 1.0\}} = 1.$$

Exemplo curto — iterações 2 e 3

Iteração 2:

$$x_1^{(2)} = \frac{11 - 1.0}{10} = 1.0, \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.89 \end{bmatrix}$$
$$x_2^{(2)} = \frac{10 - 1.1}{10} = 0.89,$$

$$D_r = \frac{\max\{|1.00 - 1.10|,\ |0.89 - 1.00|\}}{\max\{1.00, 0.89\}} = \frac{0.11}{1.00} = 0.11.$$

Iteração 3:

$$x_1^{(3)} = \frac{11 - 0.89}{10} = 1.011, \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.011 \\ 0.900 \end{bmatrix}$$
$$x_2^{(3)} = \frac{10 - 1.00}{10} = 0.90,$$

$$D_r = \frac{\max\{0.011,\ 0.010\}}{\max\{1.011,\ 0.900\}} \approx \frac{0.011}{1.011} \approx 1.09 \times 10^{-2}.$$

Exemplo curto — iterações 2 e 3

Iteração 2:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{11 - 1.0}{10} = 1.0, \\ x_2^{(2)} &= \frac{10 - 1.1}{10} = 0.89, \end{aligned} \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.89 \end{bmatrix}$$

$$D_r = \frac{\max\{|1.00 - 1.10|,\ |0.89 - 1.00|\}}{\max\{1.00, 0.89\}} = \frac{0.11}{1.00} = 0.11.$$

Iteração 3:

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= \frac{11 - 0.89}{10} = 1.011, \\ x_2^{(3)} &= \frac{10 - 1.00}{10} = 0.90, \end{aligned} \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.011 \\ 0.900 \end{bmatrix}$$

$$D_r = \frac{\max\{0.011,\ 0.010\}}{\max\{1.011,\ 0.900\}} \approx \frac{0.011}{1.011} \approx 1.09 \times 10^{-2}.$$

Exemplo curto — iteração 4

Iteração 4:

$$x_1^{(4)} = \frac{11 - 0.90}{10} = 1.010, \qquad x^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.010 \\ 0.8989 \end{bmatrix}$$
$$x_2^{(4)} = \frac{10 - 1.011}{10} = 0.8989,$$

$$D_r = \frac{\max\{|1.010 - 1.011|,\ |0.8989 - 0.9000|\}}{\max\{1.010,\ 0.8989\}} = \frac{0.0011}{1.010} \approx 1.09 \times 10^{-3}.$$

Ainda $D_r > \tau = 10^{-3}$ $\Rightarrow$ segue mais uma iteração.

Exemplo curto — parada na iteração 5

Iteração 5:

$$x_1^{(5)} = \frac{11 - 0.8989}{10} = 1.01011, \qquad x^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.01011 \\ 0.89900 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(5)} = \frac{10 - 1.010}{10} = 0.8990,$$

$$D_r = \frac{\max\{|1.01011 - 1.010|,\ |0.89900 - 0.8989|\}}{\max\{1.01011,\ 0.89900\}} \approx \frac{0.00011}{1.01011} \approx 1.09 \times 10^{-4} \ < \ \tau.$$

Conclusão

Parou em $k = 5$ com $x^{(5)} \approx (1.01011,\ 0.89900)^T$.
(Solução exata: $x = \left(\frac{100}{99},\ \frac{89}{99}\right)^T \approx (1.01010,\ 0.89899)^T$)

Sumário

Considerações Finais

- **Ideia central**: Jacobi é um método iterativo que refina uma aproximação até resolver $Ax = b$.
- **Quando usar**: matrizes grandes e esparsas, fácil paralelização, implementação simples.
- **Critérios de parada**: monitore $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$ e o limite de iterações.

Cálculo Numérico

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2