Interpolação Polinomial

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2

Roteiro da Aula

Relação entre Temperatura e Calor Específico da Água

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
Calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

- Qual é o calor específico da água a **32,5°C**?
- Qual é a temperatura correspondente a $c = 0{,}99837$?

Como resolver se os valores intermediários não estão na tabela?

Relação entre Temperatura e Calor Específico da Água

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
Calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

- Qual é o calor específico da água a **32,5°C**?
- Qual é a temperatura correspondente a $c = 0{,}99837$?

Como resolver se os valores intermediários não estão na tabela?

Relação entre Temperatura e Calor Específico da Água

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
Calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

- Qual é o calor específico da água a **32,5°C**?
- Qual é a temperatura correspondente a $c = 0{,}99837$?

Como resolver se os valores intermediários não estão na tabela?

Por que usar interpolação?

- Muitas vezes, só temos os valores de uma função em **pontos discretos**, como em tabelas experimentais.
- Precisamos estimar valores em **pontos intermediários**.
- A **interpolação** é o processo que permite isso!

Ideia geral: Queremos construir uma função $g(x)$ tal que:

$$g(x_i) = f(x_i), \quad \text{para todos os pontos conhecidos } (x_i, f(x_i)),$$

e que sirva de boa aproximação para $f(x)$ entre esses pontos.

Por que usar interpolação?

- Muitas vezes, só temos os valores de uma função em **pontos discretos**, como em tabelas experimentais.
- Precisamos estimar valores em **pontos intermediários**.
- A **interpolação** é o processo que permite isso!

Ideia geral: Queremos construir uma função $g(x)$ tal que:

$$g(x_i) = f(x_i), \quad \text{para todos os pontos conhecidos } (x_i, f(x_i)),$$

e que sirva de boa aproximação para $f(x)$ entre esses pontos.

Definição de Interpolação (*Informal*)

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximá-la por uma função $g(x)$, escolhida dentro de uma classe de funções definidas *a priori*, que:

- passa exatamente pelos pontos conhecidos $(x_i, f(x_i))$;
- possui propriedades convenientes (simplicidade, continuidade, diferenciabilidade, etc.);
- pode ser usada no lugar da função original.

Em outras palavras: queremos preencher as lacunas entre os dados conhecidos de forma coerente e suave.

Definição de Interpolação (*Informal*)

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximá-la por uma função $g(x)$, escolhida dentro de uma classe de funções definidas *a priori*, que:

- passa exatamente pelos pontos conhecidos $(x_i, f(x_i))$;
- possui propriedades convenientes (simplicidade, continuidade, diferenciabilidade, etc.);
- pode ser usada no lugar da função original.

Em outras palavras: queremos preencher as lacunas entre os dados conhecidos de forma coerente e suave.

Quando a interpolação é necessária?

A substituição de uma função $f(x)$ por uma aproximação $g(x)$ é útil quando:

A) Só conhecemos **valores numéricos tabelados** da função e queremos calcular em um ponto não tabulado;

B) A função em estudo é **muito complexa** e operações como derivar ou integrar são difíceis (ou impossíveis) de realizar.

Conclusão: A interpolação é uma ferramenta essencial para a análise numérica e a engenharia experimental.

Quando a interpolação é necessária?

A substituição de uma função $f(x)$ por uma aproximação $g(x)$ é útil quando:

- A) Só conhecemos **valores numéricos tabelados** da função e queremos calcular em um ponto não tabulado;
- B) A função em estudo é **muito complexa** e operações como derivar ou integrar são difíceis (ou impossíveis) de realizar.

Conclusão: A interpolação é uma ferramenta essencial para a análise numérica e a engenharia experimental.

Roteiro da Aula

Definição de Interpolação

Considere $(n+1)$ pontos distintos (os **nós de interpolação**):

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n \quad \text{e os valores} \quad f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_n).$$

A ideia é obter uma função $g(x)$ tal que *reproduza exatamente* os dados nos nós:

$$\boxed{\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) \\ g(x_1) &= f(x_1) \\ g(x_2) &= f(x_2) \\ &\vdots \\ g(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}}$$

Objetivo

Usar $g(x)$ como **substituta** de $f(x)$ para estimar valores *entre* os nós.

Definição de Interpolação

Considere $(n+1)$ pontos distintos (os **nós de interpolação**):

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n \quad \text{e os valores} \quad f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_n).$$

A ideia é obter uma função $g(x)$ tal que *reproduza exatamente* os dados nos nós:

$$\boxed{\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) \\ g(x_1) &= f(x_1) \\ g(x_2) &= f(x_2) \\ &\vdots \\ g(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}}$$

Objetivo

Usar $g(x)$ como **substituta** de $f(x)$ para estimar valores *entre* os nós.

Definição de Interpolação

Considere $(n+1)$ pontos distintos (os **nós de interpolação**):

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n \quad \text{e os valores} \quad f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_n).$$

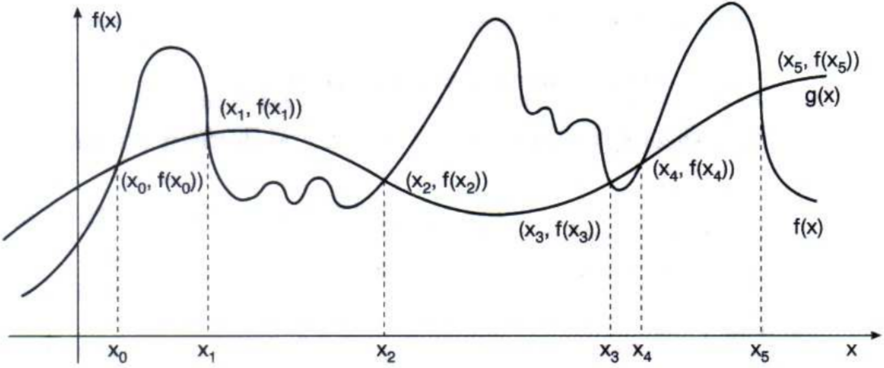
A ideia é obter uma função $g(x)$ tal que *reproduza exatamente* os dados nos nós:

$$\boxed{\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) \\ g(x_1) &= f(x_1) \\ g(x_2) &= f(x_2) \\ &\vdots \\ g(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}}$$

Objetivo

Usar $g(x)$ como **substituta** de $f(x)$ para estimar valores *entre* os nós.

Visualmente (exemplo com $n = 5$)



Ambas as curvas passam pelos pontos dados; entre os nós, $g(x)$ serve como aproximação de $f(x)$.

Roteiro da Aula

Interpolação Polinomial

Dado um conjunto de $(n+1)$ pontos distintos

$$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ \dots,\ (x_n, f(x_n)),$$

deseja-se determinar um polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que:

$$\boxed{p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.}$$

Em outras palavras: queremos que o polinômio passe exatamente pelos pontos dados.

Interpolação Polinomial

Dado um conjunto de $(n+1)$ pontos distintos

$$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ \ldots,\ (x_n, f(x_n)),$$

deseja-se determinar um polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que:

$$\boxed{p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.}$$

Em outras palavras: queremos que o polinômio passe exatamente pelos pontos dados.

Formulação geral

Representamos o polinômio interpolante como:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

A condição de interpolação $p_n(x_k) = f(x_k)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$ gera um **sistema linear**:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Objetivo: determinar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que satisfazem o sistema.

Formulação geral

Representamos o polinômio interpolante como:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

A condição de interpolação $p_n(x_k) = f(x_k)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$ gera um **sistema linear**:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Objetivo: determinar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que satisfazem o sistema.

Formulação geral

Representamos o polinômio interpolante como:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

A condição de interpolação $p_n(x_k) = f(x_k)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$ gera um **sistema linear**:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Objetivo: determinar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que satisfazem o sistema.

Forma matricial

O sistema linear pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

A matriz A é chamada de **matriz de Vandermonde**.

Se os nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são distintos, então $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, e o sistema admite solução única.

Forma matricial

O sistema linear pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

A matriz A é chamada de **matriz de Vandermonde**.

Se os nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são distintos, então $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, e o sistema admite solução única.

Teorema da interpolação polinomial

Teorema 1

Dado um conjunto de $(n+1)$ pontos distintos $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, existe um **único polinômio** $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que:

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Conclusão: A existência e unicidade da solução estão garantidas pela não singularidade da matriz de Vandermonde.

Teorema da interpolação polinomial

Teorema 1

Dado um conjunto de $(n+1)$ pontos distintos $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, existe um **único polinômio** $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que:

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Conclusão: A existência e unicidade da solução estão garantidas pela não singularidade da matriz de Vandermonde.

Roteiro da Aula

Como obter o polinômio $p_n(x)$?

Pergunta: Sabemos que o polinômio interpolante $p_n(x)$ é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

Ideia central

Existem diferentes formas de determinar $p_n(x)$, todas levando ao mesmo resultado teórico:

(1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);

(2) Pela **forma de Lagrange**;

(3) Pela **forma de Newton**.

Observação: Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

Como obter o polinômio $p_n(x)$?

Pergunta: Sabemos que o polinômio interpolante $p_n(x)$ é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

Ideia central

Existem diferentes formas de determinar $p_n(x)$, todas levando ao mesmo resultado teórico:

(1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);

(2) Pela **forma de Lagrange**;

(3) Pela **forma de Newton**.

Observação: Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

Como obter o polinômio $p_n(x)$?

Pergunta: Sabemos que o polinômio interpolante $p_n(x)$ é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

Ideia central

Existem diferentes formas de determinar $p_n(x)$, todas levando ao mesmo resultado teórico:

(1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);

(2) Pela **forma de Lagrange**;

(3) Pela **forma de Newton**.

Observação: Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

Forma 1 — Resolução do Sistema Linear

Ideia: partimos das condições de interpolação

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

e representamos

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Assim, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Resolvendo este sistema (por substituição, Gauss ou métodos numéricos), obtemos os coeficientes de $p_n(x)$.

Forma 1 — Resolução do Sistema Linear

Ideia: partimos das condições de interpolação

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

e representamos

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Assim, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Resolvendo este sistema (por substituição, Gauss ou métodos numéricos), obtemos os coeficientes de $p_n(x)$.

Forma 1 — Resolução do Sistema Linear

Ideia: partimos das condições de interpolação

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

e representamos

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Assim, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Resolvendo este sistema (por substituição, Gauss ou métodos numéricos), obtemos os coeficientes de $p_n(x)$.

Exemplo 1 — Resolução do sistema linear

Problema: encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

1. **Representação:**

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

2. **Substituindo os pontos:**

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

Exemplo 1 — Resolução do sistema linear

Problema: encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

1. **Representação:**

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

2. **Substituindo os pontos:**

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

EXEMPLO 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

Problema: encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

1. **Representação:**

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

2. **Substituindo os pontos:**

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

Exemplo 1 — Resolução do sistema linear

Problema: encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

3. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{7}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}$$

4. Polinômio interpolante:

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \tfrac{7}{3}x + \tfrac{2}{3}x^2}$$

Exemplo 1 — Resolução do sistema linear

Problema: encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

3. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{7}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}$$

4. Polinômio interpolante:

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2}$$

Exemplo 1 — Resolução do sistema linear

Problema: encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

3. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{7}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}$$

4. Polinômio interpolante:

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \tfrac{7}{3}x + \tfrac{2}{3}x^2}$$

Exemplo 2 — Efeitos numéricos na resolução do sistema

Problema: Embora no Exemplo 1 a resolução tenha sido simples e exata, isso **não ocorre em geral**. A matriz de Vandermonde pode ser **mal-condicionada**, tornando o sistema sensível a erros de arredondamento.

Exemplo: determinar $p_3(x)$ que interpola os pontos:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	5	13	-4	-8

Impondo $p_3(x_k) = f(x_k)$, obtemos:

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$

Exemplo 2 — Efeitos numéricos na resolução do sistema

Problema: Embora no Exemplo 1 a resolução tenha sido simples e exata, isso **não ocorre em geral**. A matriz de Vandermonde pode ser **mal-condicionada**, tornando o sistema sensível a erros de arredondamento.

Exemplo: determinar $p_3(x)$ que interpola os pontos:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	5	13	-4	-8

Impondo $p_3(x_k) = f(x_k)$, obtemos:

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$

Exemplo 2 — Efeitos numéricos na resolução do sistema

Problema: Embora no Exemplo 1 a resolução tenha sido simples e exata, isso **não ocorre em geral**. A matriz de Vandermonde pode ser **mal-condicionada**, tornando o sistema sensível a erros de arredondamento.

Exemplo: determinar $p_3(x)$ que interpola os pontos:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	5	13	-4	-8

Impondo $p_3(x_k) = f(x_k)$, obtemos:

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$

Solução numérica aproximada

Resolvendo o sistema com aritmética de 3 dígitos (ponto flutuante):

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

Verificação:

$$p_3(0.4) = -10 \neq f(0.4) = -8$$

Interpretação

Mesmo que o sistema seja matematicamente bem definido, a solução **numérica** pode apresentar grandes erros devido:

- à **propagação de erros de arredondamento**;
- ao **mau condicionamento** da matriz de Vandermonde;
- à limitação de precisão da aritmética utilizada.

Solução numérica aproximada

Resolvendo o sistema com aritmética de 3 dígitos (ponto flutuante):

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

Verificação:

$$p_3(0.4) = -10 \neq f(0.4) = -8$$

Interpretação

Mesmo que o sistema seja matematicamente bem definido, a solução **numérica** pode apresentar grandes erros devido:

- à **propagação de erros de arredondamento**;
- ao **mau condicionamento** da matriz de Vandermonde;
- à limitação de precisão da aritmética utilizada.

Solução numérica aproximada

Resolvendo o sistema com aritmética de 3 dígitos (ponto flutuante):

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

Verificação:

$$p_3(0.4) = -10 \neq f(0.4) = -8$$

Interpretação

Mesmo que o sistema seja matematicamente bem definido, a solução **numérica** pode apresentar grandes erros devido:

- à **propagação de erros de arredondamento**;
- ao **mau condicionamento** da matriz de Vandermonde;
- à limitação de precisão da aritmética utilizada.

Conclusão do Exemplo 2

Atenção!

Nem sempre resolver o sistema linear é uma boa estratégia.

- Em casos com nós próximos, o sistema de Vandermonde torna-se instável.
- Pequenos erros nos dados podem gerar **grandes erros nos coeficientes** do polinômio.
- Métodos alternativos como **Lagrange** e **Newton** são numericamente mais estáveis.

Conclusão

O Exemplo 2 mostra que a interpolação polinomial, embora conceitualmente simples, exige **cuidados numéricos** para evitar resultados incorretos em computadores.

Conclusão do Exemplo 2

Atenção!

Nem sempre resolver o sistema linear é uma boa estratégia.

- Em casos com nós próximos, o sistema de Vandermonde torna-se instável.
- Pequenos erros nos dados podem gerar **grandes erros nos coeficientes** do polinômio.
- Métodos alternativos como **Lagrange** e **Newton** são numericamente mais estáveis.

Conclusão

O Exemplo 2 mostra que a interpolação polinomial, embora conceitualmente simples, exige **cuidados numéricos** para evitar resultados incorretos em computadores.

Conclusão do Exemplo 2

Atenção!

Nem sempre resolver o sistema linear é uma boa estratégia.

- Em casos com nós próximos, o sistema de Vandermonde torna-se instável.
- Pequenos erros nos dados podem gerar **grandes erros nos coeficientes** do polinômio.
- Métodos alternativos como **Lagrange** e **Newton** são numericamente mais estáveis.

Conclusão

O Exemplo 2 mostra que a interpolação polinomial, embora conceitualmente simples, exige **cuidados numéricos** para evitar resultados incorretos em computadores.

Roteiro da Aula

Exercício

A tabela a seguir mostra valores experimentais do **calor específico da água** em diferentes temperaturas:

Temperatura T (°C)	20	30	40
Calor específico c (kcal/kg°C)	0.99907	0.99826	0.99828

Tarefas:

1. Determine o polinômio interpolante $p_2(T)$ de grau ≤ 2 que passa pelos três pontos dados, na forma:
$$p_2(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$$
2. Use o polinômio obtido para **estimar o calor específico a** $T = 32{,}5°$**C**.
3. Analise se o valor estimado é coerente com o comportamento esperado da tabela.

Exercício

A tabela a seguir mostra valores experimentais do **calor específico da água** em diferentes temperaturas:

Temperatura T (°C)	20	30	40
Calor específico c (kcal/kg°C)	0.99907	0.99826	0.99828

Tarefas:

1. Determine o polinômio interpolante $p_2(T)$ de grau ≤ 2 que passa pelos três pontos dados, na forma:
$$p_2(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$$
2. Use o polinômio obtido para **estimar o calor específico a** $T = 32{,}5°$**C**.
3. Analise se o valor estimado é coerente com o comportamento esperado da tabela.

Resolução do Exercício

1. Sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 + 20a_1 + 400a_2 = 0.99907 \\ a_0 + 30a_1 + 900a_2 = 0.99826 \\ a_0 + 40a_1 + 1600a_2 = 0.99828 \end{cases}$$

2. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1.00042, \quad a_1 = -1.52 \times 10^{-4}, \quad a_2 = 1.00 \times 10^{-5}$$

3. Polinômio interpolante:

$$\boxed{p_2(T) = 1.00042 - 1.52 \times 10^{-4} T + 1.00 \times 10^{-5} T^2}$$

Resolução do Exercício

1. Sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 + 20a_1 + 400a_2 = 0.99907 \\ a_0 + 30a_1 + 900a_2 = 0.99826 \\ a_0 + 40a_1 + 1600a_2 = 0.99828 \end{cases}$$

2. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1.00042, \quad a_1 = -1.52 \times 10^{-4}, \quad a_2 = 1.00 \times 10^{-5}$$

3. Polinômio interpolante:

$$\boxed{p_2(T) = 1.00042 - 1.52 \times 10^{-4} T + 1.00 \times 10^{-5} T^2}$$

Resolução do Exercício

1. **Sistema de equações:**

$$\begin{cases} a_0 + 20a_1 + 400a_2 = 0.99907 \\ a_0 + 30a_1 + 900a_2 = 0.99826 \\ a_0 + 40a_1 + 1600a_2 = 0.99828 \end{cases}$$

2. **Resolvendo o sistema:**

$$a_0 = 1.00042, \quad a_1 = -1.52 \times 10^{-4}, \quad a_2 = 1.00 \times 10^{-5}$$

3. **Polinômio interpolante:**

$$\boxed{p_2(T) = 1.00042 - 1.52 \times 10^{-4} T + 1.00 \times 10^{-5} T^2}$$

Exercício

4. Estimando em $T = 32{,}5°$C:

$$p_2(32.5) = 0.99831$$

Conclusão

O valor estimado é coerente com a tendência da tabela, pois o calor específico da água varia muito pouco nessa faixa de temperatura.

Interpolação Polinomial

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2