Cálculo Numérico – IME/UERJ

Gabarito – Interpolação Polinomial

30 de outubro de 2025

Exercício 1 – Interpolação Quadrática

Dados:

x	-1	0	1
$f(x)$	0,6931	0,6931	1,0986

Deseja-se determinar o polinômio quadrático $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, estimar $f(0{,}5)$ e comparar com $\ln(2{,}5)$.

1) Montagem do sistema linear

Impondo $p_2(x_i) = f(x_i)$:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 0{,}6931 & \text{(em } x = -1) \\ a_0 = 0{,}6931 & \text{(em } x = 0) \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1{,}0986 & \text{(em } x = 1) \end{cases}$$

2) Resolução do sistema

Da segunda equação, $a_0 = 0{,}6931$. Substituindo nas outras:

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = 0{,}6931 - 0{,}6931 = 0, \\ a_1 + a_2 = 1{,}0986 - 0{,}6931 = 0{,}4055. \end{cases}$$

Somando as duas: $2a_2 = 0{,}4055 \Rightarrow a_2 = 0{,}20275$. Logo, de $-a_1 + a_2 = 0$ obtemos $a_1 = a_2 = 0{,}20275$.

Coeficientes (exatos como frações):

$$a_0 = \frac{6931}{10000}, \qquad a_1 = a_2 = \frac{811}{4000}.$$

3) Polinômio interpolante

$$\boxed{p_2(x) = 0{,}6931 \;+\; 0{,}20275\,x \;+\; 0{,}20275\,x^2}.$$

4) Estimativa em $x = 0{,}5$

$$\begin{aligned} p_2(0{,}5) &= 0{,}6931 + 0{,}20275 \cdot (0{,}5) + 0{,}20275 \cdot (0{,}5)^2 \\ &= 0{,}6931 + 0{,}101375 + 0{,}0506875 \\ &= 0{,}8451625. \end{aligned}$$

$$\boxed{p_2(0{,}5) = 0{,}8451625}.$$

5) Comparação com o valor real

$$f(0{,}5) = \ln(2{,}5) \approx 0{,}9162907319.$$

$$\text{erro absoluto} = |0{,}916290732 - 0{,}8451625| \approx 0{,}0711282.$$

$$\text{erro relativo} \approx \frac{0{,}0711282}{0{,}916290732} \approx 7{,}76\%.$$

$$\boxed{\text{Erro absoluto } \approx 7{,}11 \times 10^{-2}, \quad \text{erro relativo } \approx 7{,}76\%}.$$

Comentário: O polinômio quadrático captura a tendência, mas subestima o valor real em $x = 0{,}5$; o erro é consistente com a curvatura (convexidade) de $\ln(x + 2)$ nessa região.

Exercício 2 – Dilatação Térmica

Dados:

T(°C)	0	50	100
L(mm)	100,00	100,60	101,30

Deseja-se determinar $p_2(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$, estimar $L(75°\text{C})$ e calcular a variação percentual relativa a $T = 0$°C.

1) Montagem do sistema linear

$$\begin{cases} a_0 = 100{,}00 & (\text{em } T = 0) \\ a_0 + 50a_1 + 2500a_2 = 100{,}60 & (\text{em } T = 50) \\ a_0 + 100a_1 + 10000a_2 = 101{,}30 & (\text{em } T = 100) \end{cases}$$

2) Resolução do sistema

Da primeira equação, $a_0 = 100$. Substituindo:

$$\begin{cases} 50a_1 + 2500a_2 = 0{,}60, \\ 100a_1 + 10000a_2 = 1{,}30. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira por 2: $100a_1 + 5000a_2 = 1{,}20$. Subtraindo da segunda:

$$(100a_1 + 10000a_2) - (100a_1 + 5000a_2) = 1{,}30 - 1{,}20 \Rightarrow 5000a_2 = 0{,}10 \Rightarrow a_2 = 0{,}00002.$$

Então, $50a_1 + 2500(0{,}00002) = 0{,}60 \Rightarrow 50a_1 + 0{,}05 = 0{,}60 \Rightarrow a_1 = 0{,}011$.

Coeficientes (exatos):

$$a_0 = 100, \qquad a_1 = \frac{11}{1000} = 0{,}011, \qquad a_2 = \frac{1}{50000} = 0{,}00002.$$

3) Polinômio interpolante

$$\boxed{p_2(T) = 100 \ + \ 0{,}011\,T \ + \ 0{,}00002\,T^2}.$$

4) Estimativa em $T = 75°\text{C}$

$$\begin{aligned} p_2(75) &= 100 + 0{,}011 \cdot 75 + 0{,}00002 \cdot 75^2 \\ &= 100 + 0{,}825 + 0{,}1125 \\ &= 100{,}9375. \end{aligned}$$

$$\boxed{L(75°\text{C}) \approx 100{,}9375 \text{ mm}}.$$

5) Variação percentual em relação a $0°\text{C}$

$$\Delta L = p_2(75) - L(0) = 100{,}9375 - 100 = 0{,}9375 \text{ mm}.$$

$$\text{Variação percentual} \ = \frac{\Delta L}{L(0)} = \frac{0{,}9375}{100} = 0{,}009375 = 0{,}9375\%.$$

$$\boxed{\Delta L / L_0 \approx 0{,}9375\%}.$$

Exercício 3 — Lagrange Linear (grau 1)

Dados:

$$(x_0, y_0) = (1.0, \ 1.0000), \qquad (x_1, y_1) = (1.8, \ 1.2806).$$

Queremos o polinômio interpolante linear

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x),$$

onde os polinômios base de Lagrange (para dois nós) são:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

1) Polinômios base

Denominadores:

$$x_0 - x_1 = 1.0 - 1.8 = -0{,}8, \qquad x_1 - x_0 = 1.8 - 1.0 = 0{,}8.$$

Logo,

$$L_0(x) = \frac{x - 1.8}{-0{,}8}, \qquad L_1(x) = \frac{x - 1.0}{0{,}8}.$$

2) Polinômio interpolante

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0\, L_0(x) + y_1\, L_1(x) \\ &= 1.0000 \cdot \frac{x - 1.8}{-0{,}8} \; + \; 1.2806 \cdot \frac{x - 1.0}{0{,}8}. \end{aligned}$$

Expandindo e simplificando:

$$p_1(x) = 0{,}35075\, x + 0{,}64925.$$

3) Estimativa em $x = 1{,}5$

$$p_1(1{,}5) = 0{,}35075 \cdot 1{,}5 + 0{,}64925 = 0{,}526125 + 0{,}64925 = 1{,}175375.$$

$$\boxed{p_1(1{,}5) \approx 1{,}175375}.$$

Exercício 4 — Lagrange Quadrático (grau 2)

Dados:

$$(x_0, y_0) = (0,\ 1{,}2), \qquad (x_1, y_1) = (1,\ 2{,}1), \qquad (x_2, y_2) = (2{,}5,\ 2{,}0).$$

O polinômio interpolante quadrático é

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x),$$

com

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

1) Polinômios base

Para $k = 0$ (nó $x_0 = 0$):

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 2{,}5)}{(0 - 1)(0 - 2{,}5)} = \frac{(x - 1)(x - 2{,}5)}{(+2{,}5)}.$$

Para $k = 1$ (nó $x_1 = 1$):

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{x(x - 2{,}5)}{(1 - 0)(1 - 2{,}5)} = \frac{x(x - 2{,}5)}{(1)(-1{,}5)} = -\frac{2}{3}\,x(x - 2{,}5).$$

Para $k = 2$ (nó $x_2 = 2{,}5$):

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x(x - 1)}{(2{,}5 - 0)(2{,}5 - 1)} = \frac{x(x - 1)}{(2{,}5)(1{,}5)} = \frac{4}{15}\,x(x - 1).$$

2) Construção de $p_2(x)$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y_0\,L_0(x) + y_1\,L_1(x) + y_2\,L_2(x) \\ &= 1{,}2 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2{,}5)}{2{,}5} \;+\; 2{,}1 \cdot \Big(-\frac{2}{3}\,x(x - 2{,}5)\Big) \;+\; 2{,}0 \cdot \Big(\frac{4}{15}\,x(x - 1)\Big). \end{aligned}$$

Expandindo e simplificando, obtém-se a forma padrão:

$$\boxed{p_2(x) \;=\; -\frac{29}{75}\,x^2 \;+\; \frac{193}{150}\,x \;+\; \frac{6}{5}}.$$

Em decimais:

$$p_2(x) \approx -0{,}3866667\,x^2 + 1{,}2866667\,x + 1{,}2.$$

3) Estimativas com $p_2(x)$

Para $x = 1{,}8$**:**

$$\begin{aligned} p_2(1{,}8) &= -\frac{29}{75}(1{,}8)^2 + \frac{193}{150}(1{,}8) + \frac{6}{5} \\ &= -\frac{29}{75} \cdot 3{,}24 + \frac{193}{150} \cdot 1{,}8 + 1{,}2 \\ &\approx -1{,}2528 + 2{,}316 + 1{,}2 \\ &= 2{,}2632. \end{aligned}$$

$$\boxed{p_2(1{,}8) \approx 2{,}2632}.$$

Para $x = 0{,}5$:

$$\begin{aligned}
p_2(0{,}5) &= -\frac{29}{75}(0{,}5)^2 + \frac{193}{150}(0{,}5) + \frac{6}{5} \\
&= -\frac{29}{75} \cdot 0{,}25 + \frac{193}{150} \cdot 0{,}5 + 1{,}2 \\
&= -0{,}096\bar{6} + 0{,}643\bar{3} + 1{,}2 \\
&= 1{,}746\bar{6}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_2(0{,}5) \approx 1{,}7467}.$$

Exercício 5 — Polinômio de Newton de Grau 2

Dados:

$$(x_0, f_0) = (0,\ 1.0000), \quad (x_1, f_1) = (0{,}2,\ 1.2214), \quad (x_2, f_2) = (0{,}4,\ 1.4918).$$

1) Tabela de diferenças divididas (até ordem 2)

$$f[x_0] = f_0 = 1.0000, \qquad f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1.2214 - 1.0000}{0.2 - 0} = 1.1070,$$

$$f[x_1] = f_1 = 1.2214,$$

$$f[x_2] = f_2 = 1.4918. \qquad f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.4918 - 1.2214}{0.4 - 0.2} = 1.3520,$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1.3520 - 1.1070}{0.4 - 0} = 0.6125.$$

Resumo (coeficientes de Newton):

$$d_0 = f[x_0] = 1.0000, \quad d_1 = f[x_0, x_1] = 1.1070, \quad d_2 = f[x_0, x_1, x_2] = 0.6125.$$

2) Polinômio interpolador na forma de Newton

$$\boxed{P_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)} = 1 + 1{,}1070\, x + 0{,}6125\, x(x - 0{,}2).$$

3) Estimativa em $x = 0{,}3$

$$\begin{aligned}
P_2(0{,}3) &= 1 + 1{,}1070 \cdot 0{,}3 + 0{,}6125 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}3 - 0{,}2) \\
&= 1 + 0{,}3321 + 0{,}6125 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \\
&= 1 + 0{,}3321 + 0{,}018375 \\
&= \boxed{1{,}350475}.
\end{aligned}$$

4) Erro absoluto em relação a $e^{0,3} = 1{,}3499$

$$\boxed{|e^{0,3} - P_2(0{,}3)| \approx |1{,}3499 - 1{,}350475| = 5{,}75 \times 10^{-4}}.$$

Exercício 6 — Interpolação Cúbica e Estimativa de Erro

Dados:

$$(T_0, R_0) = (0,\ 100{,}0), \quad (T_1, R_1) = (40,\ 113{,}0), \quad (T_2, R_2) = (80,\ 126{,}8), \quad (T_3, R_3) = (120,\ 141{,}5).$$

1) Tabela de diferenças divididas (até ordem 3)

$$\text{Ordem 0:} \quad \begin{cases} f[T_0] = 100{,}0,\ f[T_1] = 113{,}0,\ f[T_2] = 126{,}8,\ f[T_3] = 141{,}5. \end{cases}$$

$$\text{Ordem 1:} \quad \begin{cases} f[T_0, T_1] = \dfrac{113-100}{40-0} = 0{,}325 = \frac{13}{40}, \\ f[T_1, T_2] = \dfrac{126{,}8-113}{80-40} = 0{,}345, \\ f[T_2, T_3] = \dfrac{141{,}5-126{,}8}{120-80} = 0{,}3675. \end{cases}$$

$$\text{Ordem 2:} \quad \begin{cases} f[T_0, T_1, T_2] = \dfrac{0{,}345 - 0{,}325}{80-0} = 0{,}00025 = \frac{1}{4000}, \\ f[T_1, T_2, T_3] = \dfrac{0{,}3675 - 0{,}345}{120-40} = 0{,}00028125. \end{cases}$$

$$\text{Ordem 3:} \quad f[T_0, T_1, T_2, T_3] = \frac{0{,}00028125 - 0{,}00025}{120-0} = 2{,}6041666\ldots \times 10^{-7} = \frac{1}{3\,840\,000}.$$

Resumo (coeficientes de Newton):

$$d_0 = f[T_0] = 100, \quad d_1 = f[T_0, T_1] = 0{,}325, \quad d_2 = f[T_0, T_1, T_2] = 0{,}00025, \quad d_3 = f[T_0, T_1, T_2, T_3] = \frac{}{3\,84}$$

2) Polinômio cúbico na forma de Newton

$$\boxed{P_3(T) = d_0 + d_1(T - T_0) + d_2(T - T_0)(T - T_1) + d_3(T - T_0)(T - T_1)(T - T_2)}$$

$$P_3(T) = 100 + 0{,}325\,T + 0{,}00025\,T(T - 40) + \frac{1}{3\,840\,000}\,T(T - 40)(T - 80).$$

3) Estimativa em $T = 60°\mathrm{C}$

$$\begin{aligned}
P_3(60) &= 100 + 0{,}325 \cdot 60 + 0{,}00025 \cdot 60 \cdot (60-40) + \frac{1}{3\,840\,000} \cdot 60 \cdot (60-40) \cdot (60-80) \\
&= 100 + 19{,}5 + 0{,}00025 \cdot 60 \cdot 20 + \frac{1}{3\,840\,000} \cdot 60 \cdot 20 \cdot (-20) \\
&= 100 + 19{,}5 + 0{,}3 - \frac{24\,000}{3\,840\,000} \\
&= 119{,}8 - 0{,}00625 \\
&= \boxed{119{,}79375\ \Omega}.
\end{aligned}$$

4) Estimativa do erro em $T = 60°\mathrm{C}$

Pelo enunciado, considere uma aproximação para a *diferença dividida de ordem 4*

$$\max|\text{ordem } 4| \;\approx\; 5 \times 10^{-5}.$$

O limitante:

$$|E_3(x)| \;\leq\; |(x-T_0)(x-T_1)(x-T_2)(x-T_3)| \;\cdot\; \max|\text{ordem } 4|.$$

Em $x = 60$:

$$|(60-0)(60-40)(60-80)(60-120)| = |60 \cdot 20 \cdot (-20) \cdot (-60)| = 1\,440\,000.$$

Logo,

$$\boxed{|E_3(60)| \;\lesssim\; 1{,}44 \times 10^6 \cdot 5 \times 10^{-5} \;=\; 72.}$$

Observação: este é um **limite** (bastante conservador) — na prática, o erro real costuma ser muito menor, especialmente para dados quase lineares/quadráticos. Se houver informação mais realista sobre a ordem 4 (ou uma estimativa via suavidade do fenômeno), o limitante fica significativamente mais apertado.
