

# INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2

# ROTEIRO DA AULA

- 1 MOTIVAÇÃO
- 2 INTERPOLAÇÃO
- 3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL
- 4 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 5 EXERCÍCIO

# RELAÇÃO ENTRE TEMPERATURA E CALOR ESPECÍFICO DA ÁGUA

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
Calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

- Qual é o calor específico da água a **32,5°C**?
- Qual é a temperatura correspondente a  $c = 0,99837$ ?

Como resolver se os valores intermediários não estão na tabela?

# RELAÇÃO ENTRE TEMPERATURA E CALOR ESPECÍFICO DA ÁGUA

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
Calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

- Qual é o calor específico da água a **32,5°C**?
- Qual é a temperatura correspondente a  $c = 0,99837$ ?

Como resolver se os valores intermediários não estão na tabela?

# RELAÇÃO ENTRE TEMPERATURA E CALOR ESPECÍFICO DA ÁGUA

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
Calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

- Qual é o calor específico da água a **32,5°C**?
- Qual é a temperatura correspondente a  $c = 0,99837$ ?

**Como resolver se os valores intermediários não estão na tabela?**

# POR QUE USAR INTERPOLAÇÃO?

- Muitas vezes, só temos os valores de uma função em **pontos discretos**, como em tabelas experimentais.
- Precisamos estimar valores em **pontos intermediários**.
- A **interpolação** é o processo que permite isso!

**Ideia geral:** Queremos construir uma função  $g(x)$  tal que:

$$g(x_i) = f(x_i), \quad \text{para todos os pontos conhecidos } (x_i, f(x_i)),$$

e que sirva de boa aproximação para  $f(x)$  entre esses pontos.

# POR QUE USAR INTERPOLAÇÃO?

- Muitas vezes, só temos os valores de uma função em **pontos discretos**, como em tabelas experimentais.
- Precisamos estimar valores em **pontos intermediários**.
- A **interpolação** é o processo que permite isso!

**Ideia geral:** Queremos construir uma função  $g(x)$  tal que:

$$g(x_i) = f(x_i), \quad \text{para todos os pontos conhecidos } (x_i, f(x_i)),$$

e que sirva de boa aproximação para  $f(x)$  entre esses pontos.

# DEFINIÇÃO DE INTERPOLAÇÃO (*INFORMAL*)

**Interpolar uma função**  $f(x)$  consiste em aproximá-la por uma função  $g(x)$ , escolhida dentro de uma classe de funções definidas *a priori*, que:

- passa exatamente pelos pontos conhecidos  $(x_i, f(x_i))$ ;
- possui propriedades convenientes (simplicidade, continuidade, diferenciabilidade, etc.);
- pode ser usada no lugar da função original.

**Em outras palavras:** queremos preencher as lacunas entre os dados conhecidos de forma coerente e suave.



# DEFINIÇÃO DE INTERPOLAÇÃO (*INFORMAL*)

**Interpolar uma função**  $f(x)$  consiste em aproximá-la por uma função  $g(x)$ , escolhida dentro de uma classe de funções definidas *a priori*, que:

- passa exatamente pelos pontos conhecidos  $(x_i, f(x_i))$ ;
- possui propriedades convenientes (simplicidade, continuidade, diferenciabilidade, etc.);
- pode ser usada no lugar da função original.

**Em outras palavras:** queremos preencher as lacunas entre os dados conhecidos de forma coerente e suave.

# QUANDO A INTERPOLAÇÃO É NECESSÁRIA?

A substituição de uma função  $f(x)$  por uma aproximação  $g(x)$  é útil quando:

- A) Só conhecemos **valores numéricos tabelados** da função e queremos calcular em um ponto não tabulado;
- B) A função em estudo é **muito complexa** e operações como derivar ou integrar são difíceis (ou impossíveis) de realizar.

**Conclusão:** A interpolação é uma ferramenta essencial para a análise numérica e a engenharia experimental.

# QUANDO A INTERPOLAÇÃO É NECESSÁRIA?

A substituição de uma função  $f(x)$  por uma aproximação  $g(x)$  é útil quando:

- A) Só conhecemos **valores numéricos tabelados** da função e queremos calcular em um ponto não tabulado;
- B) A função em estudo é **muito complexa** e operações como derivar ou integrar são difíceis (ou impossíveis) de realizar.

**Conclusão:** A interpolação é uma ferramenta essencial para a análise numérica e a engenharia experimental.

# ROTEIRO DA AULA

- 1 MOTIVAÇÃO
- 2 INTERPOLAÇÃO
- 3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL
- 4 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 5 EXERCÍCIO

# DEFINIÇÃO DE INTERPOLAÇÃO

Considere  $(n + 1)$  pontos distintos (os **nós de interpolação**):

$x_0, x_1, \dots, x_n$  e os valores  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ .

A ideia é obter uma função  $g(x)$  tal que *reproduza exatamente* os dados nos nós:

$$g(x_0) = f(x_0)$$

$$g(x_1) = f(x_1)$$

$$g(x_2) = f(x_2)$$

$$\vdots$$

$$g(x_n) = f(x_n)$$

## OBJETIVO

Usar  $g(x)$  como **substituta** de  $f(x)$  para estimar valores *entre* os nós.

# DEFINIÇÃO DE INTERPOLAÇÃO

Considere  $(n + 1)$  pontos distintos (os **nós de interpolação**):

$x_0, x_1, \dots, x_n$  e os valores  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ .

A ideia é obter uma função  $g(x)$  tal que *reproduza exatamente* os dados nos nós:

$$g(x_0) = f(x_0)$$

$$g(x_1) = f(x_1)$$

$$g(x_2) = f(x_2)$$

$$\vdots$$

$$g(x_n) = f(x_n)$$

## OBJETIVO

Usar  $g(x)$  como **substituta** de  $f(x)$  para estimar valores *entre* os nós.

# DEFINIÇÃO DE INTERPOLAÇÃO

Considere  $(n + 1)$  pontos distintos (os **nós de interpolação**):

$x_0, x_1, \dots, x_n$  e os valores  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ .

A ideia é obter uma função  $g(x)$  tal que *reproduza exatamente* os dados nos nós:

$$g(x_0) = f(x_0)$$

$$g(x_1) = f(x_1)$$

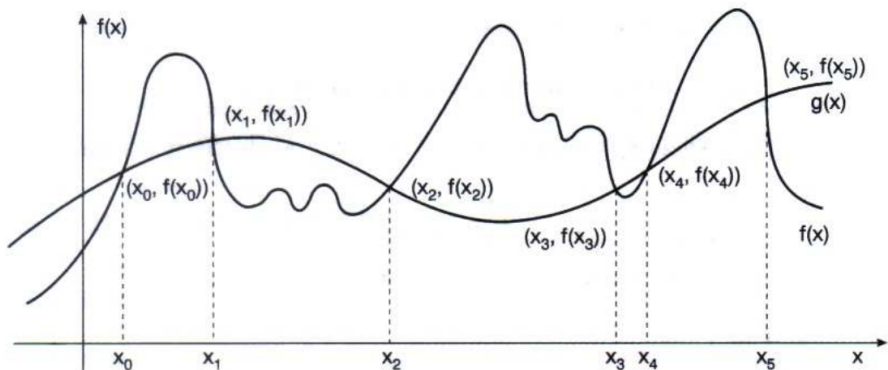
$$g(x_2) = f(x_2)$$

$$\vdots$$

$$g(x_n) = f(x_n)$$

## OBJETIVO

Usar  $g(x)$  como **substituta** de  $f(x)$  para estimar valores *entre* os nós.

VISUALMENTE (EXEMPLO COM  $n = 5$ )

Ambas as curvas passam pelos pontos dados; entre os nós,  $g(x)$  serve como aproximação de  $f(x)$ .



# ROTEIRO DA AULA

- 1 MOTIVAÇÃO
- 2 INTERPOLAÇÃO
- 3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL**
- 4 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 5 EXERCÍCIO

# INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Dado um conjunto de  $(n + 1)$  pontos distintos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)),$$

deseja-se determinar um polinômio  $p_n(x)$ , de grau  $\leq n$ , tal que:

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

**Em outras palavras:** queremos que o polinômio passe exatamente pelos pontos dados.

# INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Dado um conjunto de  $(n + 1)$  pontos distintos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)),$$

deseja-se determinar um polinômio  $p_n(x)$ , de grau  $\leq n$ , tal que:

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

**Em outras palavras:** queremos que o polinômio passe exatamente pelos pontos dados.

# FORMULAÇÃO GERAL

**Representamos o polinômio interpolante como:**

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

A condição de interpolação  $p_n(x_k) = f(x_k)$  para todo  $k = 0, 1, \dots, n$  gera um sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

**Objetivo:** determinar os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  que satisfazem o sistema.

# FORMULAÇÃO GERAL

Representamos o polinômio interpolante como:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

A condição de interpolação  $p_n(x_k) = f(x_k)$  para todo  $k = 0, 1, \dots, n$  gera um **sistema linear**:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

**Objetivo:** determinar os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  que satisfazem o sistema.

# FORMULAÇÃO GERAL

Representamos o polinômio interpolante como:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

A condição de interpolação  $p_n(x_k) = f(x_k)$  para todo  $k = 0, 1, \dots, n$  gera um **sistema linear**:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

**Objetivo:** determinar os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  que satisfazem o sistema.

# FORMA MATRICIAL

O sistema linear pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é chamada de **matriz de Vandermonde**.

Se os nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$  são distintos, então  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , e o sistema admite solução única.

# FORMA MATRICIAL

O sistema linear pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é chamada de **matriz de Vandermonde**.

Se os nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$  são distintos, então  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , e o sistema admite solução única.



# TEOREMA DA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

## TEOREMA 1

Dado um conjunto de  $(n + 1)$  pontos distintos  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ , existe um **único polinômio**  $p_n(x)$ , de grau  $\leq n$ , tal que:

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

**Conclusão:** A existência e unicidade da solução estão garantidas pela não singularidade da matriz de Vandermonde.

# TEOREMA DA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

## TEOREMA 1

Dado um conjunto de  $(n + 1)$  pontos distintos  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ , existe um **único polinômio**  $p_n(x)$ , de grau  $\leq n$ , tal que:

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

**Conclusão:** A existência e unicidade da solução estão garantidas pela não singularidade da matriz de Vandermonde.

# ROTEIRO DA AULA

- 1 MOTIVAÇÃO
- 2 INTERPOLAÇÃO
- 3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL
- 4 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 5 EXERCÍCIO

# COMO OBTER O POLINÔMIO $p_n(x)$ ?

**Pergunta:** Sabemos que o polinômio interpolante  $p_n(x)$  é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

## IDEIA CENTRAL

Existem diferentes formas de determinar  $p_n(x)$ , todas levando ao mesmo resultado teórico:

- (1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);
- (2) Pela **forma de Lagrange**;
- (3) Pela **forma de Newton**.

**Observação:** Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

## COMO OBTER O POLINÔMIO $p_n(x)$ ?

**Pergunta:** Sabemos que o polinômio interpolante  $p_n(x)$  é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

### IDEIA CENTRAL

Existem diferentes formas de determinar  $p_n(x)$ , todas levando ao mesmo resultado teórico:

- (1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);
- (2) Pela **forma de Lagrange**;
- (3) Pela **forma de Newton**.

**Observação:** Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

## COMO OBTER O POLINÔMIO $p_n(x)$ ?

**Pergunta:** Sabemos que o polinômio interpolante  $p_n(x)$  é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

### IDEIA CENTRAL

Existem diferentes formas de determinar  $p_n(x)$ , todas levando ao mesmo resultado teórico:

- (1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);
- (2) Pela **forma de Lagrange**;
- (3) Pela **forma de Newton**.

**Observação:** Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

# FORMA 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Ideia:** partimos das condições de interpolação

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

e representamos

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Assim, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

**Resolvendo este sistema** (por substituição, Gauss ou métodos numéricos), obtemos os coeficientes de  $p_n(x)$ .

# FORMA 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Ideia:** partimos das condições de interpolação

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

e representamos

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

**Assim, obtemos o sistema linear:**

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

**Resolvendo este sistema** (por substituição, Gauss ou métodos numéricos), obtemos os coeficientes de  $p_n(x)$ .



# FORMA 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Ideia:** partimos das condições de interpolação

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

e representamos

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

**Assim, obtemos o sistema linear:**

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

**Resolvendo este sistema** (por substituição, Gauss ou métodos numéricos), obtemos os coeficientes de  $p_n(x)$ .

# EXEMPLO 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Problema:** encontrar o polinômio de grau  $\leq 2$  que interpola os pontos:

$x$	$-1$	$0$	$2$
$f(x)$	$4$	$1$	$-1$

1. Representação:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

2. Substituindo os pontos:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

# EXEMPLO 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Problema:** encontrar o polinômio de grau  $\leq 2$  que interpola os pontos:

$x$	$-1$	$0$	$2$
$f(x)$	$4$	$1$	$-1$

## 1. Representação:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

## 2. Substituindo os pontos:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

# EXEMPLO 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Problema:** encontrar o polinômio de grau  $\leq 2$  que interpola os pontos:

$x$	$-1$	$0$	$2$
$f(x)$	$4$	$1$	$-1$

1. Representação:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

2. Substituindo os pontos:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

# EXEMPLO 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Problema:** encontrar o polinômio de grau  $\leq 2$  que interpola os pontos:

$x$	$-1$	$0$	$2$
$f(x)$	$4$	$1$	$-1$

3. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{7}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}$$

4. Polinômio interpolante:

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

# EXEMPLO 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Problema:** encontrar o polinômio de grau  $\leq 2$  que interpola os pontos:

$x$	$-1$	$0$	$2$
$f(x)$	$4$	$1$	$-1$

**3. Resolvendo o sistema:**

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{7}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}$$

**4. Polinômio interpolante:**

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

# EXEMPLO 1 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

**Problema:** encontrar o polinômio de grau  $\leq 2$  que interpola os pontos:

$x$	$-1$	$0$	$2$
$f(x)$	$4$	$1$	$-1$

3. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{7}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}$$

4. Polinômio interpolante:

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

## EXEMPLO 2 — EFEITOS NUMÉRICOS NA RESOLUÇÃO DO SISTEMA

**Problema:** Embora no Exemplo 1 a resolução tenha sido simples e exata, isso **não ocorre em geral**. A matriz de Vandermonde pode ser **mal-condicionada**, tornando o sistema sensível a erros de arredondamento.

**Exemplo:** determinar  $p_3(x)$  que interpola os pontos:

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	5	13	-4	-8

Impondo  $p_3(x_k) = f(x_k)$ , obtemos:

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$



## EXEMPLO 2 — EFEITOS NUMÉRICOS NA RESOLUÇÃO DO SISTEMA

**Problema:** Embora no Exemplo 1 a resolução tenha sido simples e exata, isso **não ocorre em geral**. A matriz de Vandermonde pode ser **mal-condicionada**, tornando o sistema sensível a erros de arredondamento.

**Exemplo:** determinar  $p_3(x)$  que interpola os pontos:

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	5	13	-4	-8

Impondo  $p_3(x_k) = f(x_k)$ , obtemos:

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$

## EXEMPLO 2 — EFEITOS NUMÉRICOS NA RESOLUÇÃO DO SISTEMA

**Problema:** Embora no Exemplo 1 a resolução tenha sido simples e exata, isso **não ocorre em geral**. A matriz de Vandermonde pode ser **mal-condicionada**, tornando o sistema sensível a erros de arredondamento.

**Exemplo:** determinar  $p_3(x)$  que interpola os pontos:

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	5	13	-4	-8

Impondo  $p_3(x_k) = f(x_k)$ , obtemos:

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$

# SOLUÇÃO NUMÉRICA APROXIMADA

**Resolvendo o sistema com aritmética de 3 dígitos (ponto flutuante):**

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

**Verificação:**

$$p_3(0.4) = -10 \neq f(0.4) = -8$$

## INTERPRETAÇÃO

Mesmo que o sistema seja matematicamente bem definido, a solução **numérica** pode apresentar grandes erros devido:

- à **propagação de erros de arredondamento**;
- ao **mau condicionamento** da matriz de Vandermonde;
- à **limitação de precisão da aritmética utilizada**.

# SOLUÇÃO NUMÉRICA APROXIMADA

**Resolvendo o sistema com aritmética de 3 dígitos (ponto flutuante):**

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

**Verificação:**

$$p_3(0.4) = -10 \neq f(0.4) = -8$$

## INTERPRETAÇÃO

Mesmo que o sistema seja matematicamente bem definido, a solução **numérica** pode apresentar grandes erros devido:

- à **propagação de erros de arredondamento**;
- ao **mau condicionamento** da matriz de Vandermonde;
- à **limitação de precisão da aritmética utilizada**.

# SOLUÇÃO NUMÉRICA APROXIMADA

**Resolvendo o sistema com aritmética de 3 dígitos (ponto flutuante):**

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

**Verificação:**

$$p_3(0.4) = -10 \neq f(0.4) = -8$$

## INTERPRETAÇÃO

Mesmo que o sistema seja matematicamente bem definido, a solução **numérica** pode apresentar grandes erros devido:

- à **propagação de erros de arredondamento**;
- ao **mau condicionamento** da matriz de Vandermonde;
- à limitação de precisão da aritmética utilizada.

## CONCLUSÃO DO EXEMPLO 2

### ATENÇÃO!

**Nem sempre resolver o sistema linear é uma boa estratégia.**

- Em casos com nós próximos, o sistema de Vandermonde torna-se instável.
- Pequenos erros nos dados podem gerar **grandes erros nos coeficientes** do polinômio.
- Métodos alternativos como **Lagrange** e **Newton** são numericamente mais estáveis.

### CONCLUSÃO

O Exemplo 2 mostra que a interpolação polinomial, embora conceitualmente simples, exige **cuidados numéricos** para evitar resultados incorretos em computadores.

## CONCLUSÃO DO EXEMPLO 2

### ATENÇÃO!

Nem sempre resolver o sistema linear é uma boa estratégia.

- Em casos com nós próximos, o sistema de Vandermonde torna-se instável.
- Pequenos erros nos dados podem gerar **grandes erros nos coeficientes** do polinômio.
- Métodos alternativos como **Lagrange** e **Newton** são numericamente mais estáveis.

### CONCLUSÃO

O Exemplo 2 mostra que a interpolação polinomial, embora conceitualmente simples, exige **cuidados numéricos** para evitar resultados incorretos em computadores.

## CONCLUSÃO DO EXEMPLO 2

### ATENÇÃO!

Nem sempre resolver o sistema linear é uma boa estratégia.

- Em casos com nós próximos, o sistema de Vandermonde torna-se instável.
- Pequenos erros nos dados podem gerar **grandes erros nos coeficientes** do polinômio.
- Métodos alternativos como **Lagrange** e **Newton** são numericamente mais estáveis.

### CONCLUSÃO

O Exemplo 2 mostra que a interpolação polinomial, embora conceitualmente simples, exige **cuidados numéricos** para evitar resultados incorretos em computadores.



# ROTEIRO DA AULA

- 1 MOTIVAÇÃO
- 2 INTERPOLAÇÃO
- 3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL
- 4 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 5 EXERCÍCIO

## EXERCÍCIO

A tabela a seguir mostra valores experimentais do **calor específico da água** em diferentes temperaturas:

Temperatura $T$ (°C)	20	30	40
Calor específico $c$ (kcal/kg°C)	0.99907	0.99826	0.99828

## Tarefas:

- 1 Determine o polinômio interpolante  $p_2(T)$  de grau  $\leq 2$  que passa pelos três pontos dados, na forma:

$$p_2(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$$

- 2 Use o polinômio obtido para **estimar o calor específico a  $T = 32,5^\circ\text{C}$** .
- 3 Analise se o valor estimado é coerente com o comportamento esperado da tabela.

## EXERCÍCIO

A tabela a seguir mostra valores experimentais do **calor específico da água** em diferentes temperaturas:

Temperatura $T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	20	30	40
Calor específico $c$ ( $\text{kcal/kg}^{\circ}\text{C}$ )	0.99907	0.99826	0.99828

## Tarefas:

- 1 Determine o polinômio interpolante  $p_2(T)$  de grau  $\leq 2$  que passa pelos três pontos dados, na forma:

$$p_2(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$$

- 2 Use o polinômio obtido para **estimar o calor específico a  $T = 32,5^{\circ}\text{C}$** .
- 3 Analise se o valor estimado é coerente com o comportamento esperado da tabela.

# RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO

## 1. Sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 + 20a_1 + 400a_2 = 0.99907 \\ a_0 + 30a_1 + 900a_2 = 0.99826 \\ a_0 + 40a_1 + 1600a_2 = 0.99828 \end{cases}$$

## 2. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1.00042, \quad a_1 = -1.52 \times 10^{-4}, \quad a_2 = 1.00 \times 10^{-5}$$

## 3. Polinômio interpolante:

$$p_2(T) = 1.00042 - 1.52 \times 10^{-4} T + 1.00 \times 10^{-5} T^2$$

# RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO

## 1. Sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 + 20a_1 + 400a_2 = 0.99907 \\ a_0 + 30a_1 + 900a_2 = 0.99826 \\ a_0 + 40a_1 + 1600a_2 = 0.99828 \end{cases}$$

## 2. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1.00042, \quad a_1 = -1.52 \times 10^{-4}, \quad a_2 = 1.00 \times 10^{-5}$$

## 3. Polinômio interpolante:

$$p_2(T) = 1.00042 - 1.52 \times 10^{-4} T + 1.00 \times 10^{-5} T^2$$

# RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO

## 1. Sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 + 20a_1 + 400a_2 = 0.99907 \\ a_0 + 30a_1 + 900a_2 = 0.99826 \\ a_0 + 40a_1 + 1600a_2 = 0.99828 \end{cases}$$

## 2. Resolvendo o sistema:

$$a_0 = 1.00042, \quad a_1 = -1.52 \times 10^{-4}, \quad a_2 = 1.00 \times 10^{-5}$$

## 3. Polinômio interpolante:

$$p_2(T) = 1.00042 - 1.52 \times 10^{-4}T + 1.00 \times 10^{-5}T^2$$

# EXERCÍCIO

4. Estimando em  $T = 32,5^{\circ}\text{C}$ :

$$p_2(32.5) = 0.99831$$

## CONCLUSÃO

O valor estimado é coerente com a tendência da tabela, pois o calor específico da água varia muito pouco nessa faixa de temperatura.

# INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2