

# INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2

# ROTEIRO DA AULA

- 1 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 2 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO LINEAR
- 3 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA
- 4 FORMA DE LAGRANGE - POLINÔMIO  $P_n$
- 5 EXERCÍCIO PROPOSTO
- 6 CONCLUSÃO

# COMO OBTER O POLINÔMIO $p_n(x)$ ?

**Pergunta:** Sabemos que o polinômio interpolante  $p_n(x)$  é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

## IDEIA CENTRAL

Existem diferentes formas de determinar  $p_n(x)$ , todas levando ao mesmo resultado teórico:

- (1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);
- (2) Pela **forma de Lagrange**;
- (3) Pela **forma de Newton**.

**Observação:** Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

# COMO OBTER O POLINÔMIO $p_n(x)$ ?

**Pergunta:** Sabemos que o polinômio interpolante  $p_n(x)$  é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

## IDEIA CENTRAL

Existem diferentes formas de determinar  $p_n(x)$ , todas levando ao mesmo resultado teórico:

- (1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);
- (2) Pela **forma de Lagrange**;
- (3) Pela **forma de Newton**.

**Observação:** Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

# COMO OBTER O POLINÔMIO $p_n(x)$ ?

**Pergunta:** Sabemos que o polinômio interpolante  $p_n(x)$  é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

## IDEIA CENTRAL

Existem diferentes formas de determinar  $p_n(x)$ , todas levando ao mesmo resultado teórico:

- (1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);
- (2) Pela **forma de Lagrange**;
- (3) Pela **forma de Newton**.

**Observação:** Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

# ROTEIRO DA AULA

- 1 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 2 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO LINEAR
- 3 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA
- 4 FORMA DE LAGRANGE - POLINÔMIO  $P_n$
- 5 EXERCÍCIO PROPOSTO
- 6 CONCLUSÃO

# INTERPOLAÇÃO LINEAR (GRAU 1)

Faremos um exemplo teórico para interpolação em **dois** pontos distintos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ .

Como  $n = 1$ , a interpolação por dois pontos é chamada de **interpolação linear**.

## POLINÔMIO DE GRAU 1

Vamos interpolar  $f(x)$  por uma reta  $P_1(x) = ax + b$  tal que:

$$P_1(x_0) = f(x_0), \quad P_1(x_1) = f(x_1).$$

# INTERPOLAÇÃO LINEAR (GRAU 1)

Faremos um exemplo teórico para interpolação em **dois** pontos distintos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ .

Como  $n = 1$ , a interpolação por dois pontos é chamada de **interpolação linear**.

## POLINÔMIO DE GRAU 1

Vamos interpolar  $f(x)$  por uma reta  $P_1(x) = ax + b$  tal que:

$$P_1(x_0) = f(x_0), \quad P_1(x_1) = f(x_1).$$



# INTERPOLAÇÃO LINEAR (GRAU 1)

Faremos um exemplo teórico para interpolação em **dois** pontos distintos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ .

Como  $n = 1$ , a interpolação por dois pontos é chamada de **interpolação linear**.

## POLINÔMIO DE GRAU 1

Vamos interpolar  $f(x)$  por uma reta  $P_1(x) = ax + b$  tal que:

$$P_1(x_0) = f(x_0), \quad P_1(x_1) = f(x_1).$$

# DETERMINANDO OS COEFICIENTES $a$ E $b$

Das condições:

$$(1) \quad f(x_0) = ax_0 + b,$$

$$(2) \quad f(x_1) = ax_1 + b.$$

Subtraindo (2) de (1):

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \Rightarrow a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

De (1), isolando  $b$  e substituindo  $a$ :

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x_0.$$

Colocando  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$  em evidência:

$$b = \left( \frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left( \frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1).$$

# DETERMINANDO OS COEFICIENTES $a$ E $b$

Das condições:

$$(1) \quad f(x_0) = ax_0 + b,$$

$$(2) \quad f(x_1) = ax_1 + b.$$

Subtraindo (2) de (1):

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \Rightarrow \boxed{a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}.$$

De (1), isolando  $b$  e substituindo  $a$ :

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x_0.$$

Colocando  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$  em evidência:

$$\boxed{b = \left( \frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left( \frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1)}.$$

# DETERMINANDO OS COEFICIENTES $a$ E $b$

Das condições:

$$(1) \quad f(x_0) = ax_0 + b,$$

$$(2) \quad f(x_1) = ax_1 + b.$$

Subtraindo (2) de (1):

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \Rightarrow \boxed{a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}.$$

De (1), isolando  $b$  e substituindo  $a$ :

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x_0.$$

Colocando  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$  em evidência:

$$\boxed{b = \left( \frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left( \frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1)}.$$

# DETERMINANDO OS COEFICIENTES $a$ E $b$

Das condições:

$$(1) \quad f(x_0) = ax_0 + b,$$

$$(2) \quad f(x_1) = ax_1 + b.$$

Subtraindo (2) de (1):

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \Rightarrow \boxed{a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}.$$

De (1), isolando  $b$  e substituindo  $a$ :

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x_0.$$

Colocando  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$  em evidência:

$$\boxed{b = \left( \frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left( \frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1)}.$$

## EXPRESSÃO DE $P_1(x)$

Substituindo  $a$  e  $b$  em  $P_1(x) = ax + b$ :

$$P_1(x) = \left( \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \right) x + \left( \frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left( \frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1).$$

Agrupando termos com  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$ :

$$P_1(x) = \underbrace{\left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1).$$

FORMA DE LAGRANGE PARA  $n = 1$

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) \quad \text{com} \quad \begin{cases} L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \\ L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \end{cases}$$

## EXPRESSÃO DE $P_1(x)$

Substituindo  $a$  e  $b$  em  $P_1(x) = ax + b$ :

$$P_1(x) = \left( \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \right) x + \left( \frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left( \frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1).$$

Agrupando termos com  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$ :

$$P_1(x) = \underbrace{\left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1).$$

FORMA DE LAGRANGE PARA  $n = 1$

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) \quad \text{com} \quad \begin{cases} L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \\ L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \end{cases}$$

## EXPRESSÃO DE $P_1(x)$

Substituindo  $a$  e  $b$  em  $P_1(x) = ax + b$ :

$$P_1(x) = \left( \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \right) x + \left( \frac{-x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left( \frac{x_0}{x_0 - x_1} \right) f(x_1).$$

Agrupando termos com  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$ :

$$P_1(x) = \underbrace{\left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1).$$

## FORMA DE LAGRANGE PARA $n = 1$

$$\boxed{P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)} \quad \text{com} \quad \begin{cases} L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \\ L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \end{cases}$$



# FORMA FINAL: POLINÔMIO LINEAR DE LAGRANGE

## INTERPOLAÇÃO LINEAR DE LAGRANGE

$$P_1(x) = \underbrace{\left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

- É a equação da reta que passa por  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ .

# FORMA FINAL: POLINÔMIO LINEAR DE LAGRANGE

## INTERPOLAÇÃO LINEAR DE LAGRANGE

$$P_1(x) = \underbrace{\left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{L_1(x)} f(x_1)$$

- É a **equação da reta** que passa por  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ .

## FORMA FINAL: POLINÔMIO LINEAR DE LAGRANGE

O polinômio interpolador de Lagrange que passa por dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é dado por:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1).$$

Observe que:

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1.$$

Logo:

$$P_1(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0,$$

$$P_1(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

### CONCLUSÃO

Assim,  $P_1(x)$  é o **único polinômio de grau no máximo 1** que passa por  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

## FORMA FINAL: POLINÔMIO LINEAR DE LAGRANGE

O polinômio interpolador de Lagrange que passa por dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é dado por:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1).$$

Observe que:

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1.$$

Logo:

$$P_1(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0,$$

$$P_1(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

### CONCLUSÃO

Assim,  $P_1(x)$  é o **único polinômio de grau no máximo 1** que passa por  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

## FORMA FINAL: POLINÔMIO LINEAR DE LAGRANGE

O polinômio interpolador de Lagrange que passa por dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é dado por:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1).$$

Observe que:

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1.$$

Logo:

$$P_1(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0,$$

$$P_1(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

### CONCLUSÃO

Assim,  $P_1(x)$  é o único polinômio de grau no máximo 1 que passa por  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

## FORMA FINAL: POLINÔMIO LINEAR DE LAGRANGE

O polinômio interpolador de Lagrange que passa por dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é dado por:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1).$$

Observe que:

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1.$$

Logo:

$$P_1(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0,$$

$$P_1(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

### CONCLUSÃO

Assim,  $P_1(x)$  é o **único polinômio de grau no máximo 1** que passa por  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

# EXEMPLO 1 - INTERPOLAÇÃO LINEAR

Queremos o polinômio interpolador linear que passa por:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (4, 5).$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo:

$$L_0(x) = -\frac{x - 4}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x - 1}{3}.$$

$$P_1(x) = 2\left(-\frac{x - 4}{3}\right) + 5\left(\frac{x - 1}{3}\right) = \frac{-2x + 8 + 5x - 5}{3} = x + 1.$$

$$\boxed{P_1(x) = x + 1} \quad \Rightarrow \quad P_1(1) = 2, \quad P_1(4) = 5.$$

# EXEMPLO 1 - INTERPOLAÇÃO LINEAR

Queremos o polinômio interpolador linear que passa por:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (4, 5).$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo:

$$L_0(x) = -\frac{x - 4}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x - 1}{3}.$$

$$P_1(x) = 2\left(-\frac{x - 4}{3}\right) + 5\left(\frac{x - 1}{3}\right) = \frac{-2x + 8 + 5x - 5}{3} = x + 1.$$

$$\boxed{P_1(x) = x + 1} \quad \Rightarrow \quad P_1(1) = 2, \quad P_1(4) = 5.$$



# EXEMPLO 1 - INTERPOLAÇÃO LINEAR

Queremos o polinômio interpolador linear que passa por:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (4, 5).$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo:

$$L_0(x) = -\frac{x - 4}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x - 1}{3}.$$

$$P_1(x) = 2\left(-\frac{x - 4}{3}\right) + 5\left(\frac{x - 1}{3}\right) = \frac{-2x + 8 + 5x - 5}{3} = x + 1.$$

$$\boxed{P_1(x) = x + 1} \quad \Rightarrow \quad P_1(1) = 2, \quad P_1(4) = 5.$$

# EXEMPLO 1 - INTERPOLAÇÃO LINEAR

Queremos o polinômio interpolador linear que passa por:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (4, 5).$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo:

$$L_0(x) = -\frac{x - 4}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x - 1}{3}.$$

$$P_1(x) = 2\left(-\frac{x - 4}{3}\right) + 5\left(\frac{x - 1}{3}\right) = \frac{-2x + 8 + 5x - 5}{3} = x + 1.$$

$$\boxed{P_1(x) = x + 1} \quad \Rightarrow \quad P_1(1) = 2, \quad P_1(4) = 5.$$

## EXEMPLO 2 - INTERPOLAÇÃO LINEAR

Determine o polinômio interpolador linear que passa pelos pontos  $(2, 4)$  e  $(5, 1)$ .

$$L_0(x) = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5), \quad L_1(x) = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2).$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 4 L_0(x) + 1 L_1(x) = 4 \left( -\frac{1}{3}(x-5) \right) + \frac{1}{3}(x-2) \\ &= -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -x + 6. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(x) = -x + 6} \quad (\text{verifica: } P(2) = 4, P(5) = 1).$$

## EXEMPLO 2 - INTERPOLAÇÃO LINEAR

Determine o polinômio interpolador linear que passa pelos pontos  $(2, 4)$  e  $(5, 1)$ .

$$L_0(x) = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5), \quad L_1(x) = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2).$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 4 L_0(x) + 1 L_1(x) = 4 \left( -\frac{1}{3}(x-5) \right) + \frac{1}{3}(x-2) \\ &= -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -x + 6. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(x) = -x + 6} \quad (\text{verifica: } P(2) = 4, P(5) = 1).$$

## EXEMPLO 2 - INTERPOLAÇÃO LINEAR

Determine o polinômio interpolador linear que passa pelos pontos  $(2, 4)$  e  $(5, 1)$ .

$$L_0(x) = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5), \quad L_1(x) = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2).$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 4 L_0(x) + 1 L_1(x) = 4 \left( -\frac{1}{3}(x-5) \right) + \frac{1}{3}(x-2) \\ &= -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -x + 6. \end{aligned}$$

$$P(x) = -x + 6 \quad (\text{verifica: } P(2) = 4, P(5) = 1).$$

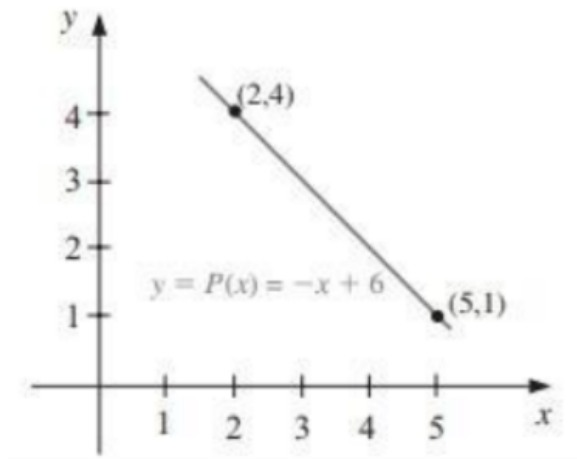
## EXEMPLO 2 - INTERPOLAÇÃO LINEAR

Determine o polinômio interpolador linear que passa pelos pontos  $(2, 4)$  e  $(5, 1)$ .

$$L_0(x) = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5), \quad L_1(x) = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2).$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 4 L_0(x) + 1 L_1(x) = 4 \left( -\frac{1}{3}(x-5) \right) + \frac{1}{3}(x-2) \\ &= -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -x + 6. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(x) = -x + 6} \quad (\text{verifica: } P(2) = 4, P(5) = 1).$$

EXEMPLO 2 - GRÁFICO DE  $y = P(x)$ 

# ROTEIRO DA AULA

- 1 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 2 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO LINEAR
- 3 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA**
- 4 FORMA DE LAGRANGE - POLINÔMIO  $P_n$
- 5 EXERCÍCIO PROPOSTO
- 6 CONCLUSÃO



# INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA (GRAU 2)

Agora, queremos interpolar  $f(x)$  por um polinômio de grau 2, denotado por  $P_2(x)$ .

Neste caso, precisamos de três pontos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2(x_1) = f(x_1), \quad P_2(x_2) = f(x_2).$$

## IDEIA

O polinômio  $P_2(x)$  será uma **parábola** que passa exatamente pelos três pontos dados.

## INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA (GRAU 2)

Agora, queremos interpolar  $f(x)$  por um polinômio de grau 2, denotado por  $P_2(x)$ . Neste caso, precisamos de três pontos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2(x_1) = f(x_1), \quad P_2(x_2) = f(x_2).$$

### IDEIA

O polinômio  $P_2(x)$  será uma **parábola** que passa exatamente pelos três pontos dados.

## INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA (GRAU 2)

Agora, queremos interpolar  $f(x)$  por um polinômio de grau 2, denotado por  $P_2(x)$ . Neste caso, precisamos de três pontos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2(x_1) = f(x_1), \quad P_2(x_2) = f(x_2).$$

### IDEIA

O polinômio  $P_2(x)$  será uma **parábola** que passa exatamente pelos três pontos dados.

## INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA (GRAU 2)

Agora, queremos interpolar  $f(x)$  por um polinômio de grau 2, denotado por  $P_2(x)$ . Neste caso, precisamos de três pontos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2(x_1) = f(x_1), \quad P_2(x_2) = f(x_2).$$

### IDEIA

O polinômio  $P_2(x)$  será uma **parábola** que passa exatamente pelos três pontos dados.

# CONSTRUÇÃO PELA FORMA DE LAGRANGE

Aplicando o mesmo raciocínio feito na interpolação linear:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$  e  $L_2(x)$  formam a **base de Lagrange de grau 2**.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

# CONSTRUÇÃO PELA FORMA DE LAGRANGE

Aplicando o mesmo raciocínio feito na interpolação linear:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$  e  $L_2(x)$  formam a **base de Lagrange de grau 2**.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

## DETERMINANDO OS COEFICIENTES $a$ , $b$ E $c$

Seja  $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ . Das condições de interpolação:

$$(1) f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c,$$

$$(2) f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c,$$

$$(3) f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Eliminando  $c$  por subtração par a par:

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = (x_0 - x_1)[a(x_0 + x_1) + b],$$

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0^2 - x_2^2) + b(x_0 - x_2) = (x_0 - x_2)[a(x_0 + x_2) + b].$$

Defina os *coeficientes angulares*:

$$s_{01} := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \quad s_{02} := \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}.$$

Então

$$s_{01} = a(x_0 + x_1) + b, \quad s_{02} = a(x_0 + x_2) + b$$

## DETERMINANDO OS COEFICIENTES $a$ , $b$ E $c$

Seja  $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ . Das condições de interpolação:

$$(1) f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c,$$

$$(2) f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c,$$

$$(3) f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Eliminando  $c$  por subtração par a par:

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = (x_0 - x_1)[a(x_0 + x_1) + b],$$

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0^2 - x_2^2) + b(x_0 - x_2) = (x_0 - x_2)[a(x_0 + x_2) + b].$$

Defina os *coeficientes angulares*:

$$s_{01} := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \quad s_{02} := \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}.$$

Então

$$s_{01} = a(x_0 + x_1) + b, \quad s_{02} = a(x_0 + x_2) + b$$



## DETERMINANDO OS COEFICIENTES $a$ , $b$ E $c$

Seja  $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ . Das condições de interpolação:

$$(1) f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c,$$

$$(2) f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c,$$

$$(3) f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Eliminando  $c$  por subtração par a par:

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = (x_0 - x_1)[a(x_0 + x_1) + b],$$

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0^2 - x_2^2) + b(x_0 - x_2) = (x_0 - x_2)[a(x_0 + x_2) + b].$$

Defina os *coeficientes angulares*:

$$s_{01} := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \quad s_{02} := \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}.$$

Então

$$s_{01} = a(x_0 + x_1) + b, \quad s_{02} = a(x_0 + x_2) + b.$$

OBTENDO  $a$  E  $b$ 

Subtraindo as duas expressões:

$$s_{01} - s_{02} = a[(x_0 + x_1) - (x_0 + x_2)] = a(x_1 - x_2).$$

$$a = \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}}{x_1 - x_2}.$$

De  $s_{01} = a(x_0 + x_1) + b$ , obtemos:

$$b = s_{01} - a(x_0 + x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2}(x_0 + x_1).$$

OBTENDO  $a$  E  $b$ 

Subtraindo as duas expressões:

$$s_{01} - s_{02} = a[(x_0 + x_1) - (x_0 + x_2)] = a(x_1 - x_2).$$

$$a = \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}}{x_1 - x_2}.$$

De  $s_{01} = a(x_0 + x_1) + b$ , obtemos:

$$b = s_{01} - a(x_0 + x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2}(x_0 + x_1).$$

OBTENDO  $a$  E  $b$ 

Subtraindo as duas expressões:

$$s_{01} - s_{02} = a[(x_0 + x_1) - (x_0 + x_2)] = a(x_1 - x_2).$$

$$a = \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}}{x_1 - x_2}.$$

De  $s_{01} = a(x_0 + x_1) + b$ , obtemos:

$$b = s_{01} - a(x_0 + x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2}(x_0 + x_1).$$

OBTENDO  $c$  E A EXPRESSÃO DE  $P_2(x)$ 

De (1):

$$c = f(x_0) - ax_0^2 - bx_0.$$

Logo,

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) + f(x_0).$$

Substituindo as expressões de  $a$  e  $b$  e **organizando** os termos com  $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$  em evidência, obtemos:

$$P_2(x) = A_0(x) f(x_0) + A_1(x) f(x_1) + A_2(x) f(x_2),$$

onde  $A_0, A_1, A_2$  dependem apenas de  $x, x_0, x_1, x_2$ .

OBTENDO  $c$  E A EXPRESSÃO DE  $P_2(x)$ 

De (1):

$$c = f(x_0) - ax_0^2 - bx_0.$$

Logo,

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) + f(x_0).$$

Substituindo as expressões de  $a$  e  $b$  e **organizando** os termos com  $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$  em evidência, obtemos:

$$P_2(x) = A_0(x) f(x_0) + A_1(x) f(x_1) + A_2(x) f(x_2),$$

onde  $A_0, A_1, A_2$  dependem apenas de  $x, x_0, x_1, x_2$ .

OBTENDO  $c$  E A EXPRESSÃO DE  $P_2(x)$ 

De (1):

$$c = f(x_0) - ax_0^2 - bx_0.$$

Logo,

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) + f(x_0).$$

Substituindo as expressões de  $a$  e  $b$  e **organizando** os termos com  $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$  em evidência, obtemos:

$$P_2(x) = A_0(x) f(x_0) + A_1(x) f(x_1) + A_2(x) f(x_2),$$

onde  $A_0, A_1, A_2$  dependem apenas de  $x, x_0, x_1, x_2$ .

## COLOCANDO NA BASE DE LAGRANGE (FORMA FINAL)

Os coeficientes  $A_k(x)$  obtidos acima coincidem com os **polinômios de Lagrange**:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

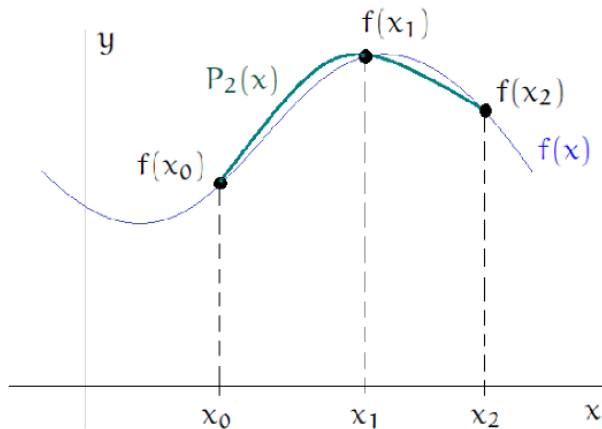
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$



# INTERPOLAÇÃO POR POLINÔMIO DE GRAU 2 (PARÁBOLA)



# EXEMPLO NUMÉRICO — INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA

Queremos determinar o polinômio interpolador de grau 2 para:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (2, 3), \quad (x_2, y_2) = (4, 1).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}.$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 2L_0(x) + 3L_1(x) + 1L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}.$$

# EXEMPLO NUMÉRICO — INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA

Queremos determinar o polinômio interpolador de grau 2 para:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (2, 3), \quad (x_2, y_2) = (4, 1).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}.$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 2L_0(x) + 3L_1(x) + 1L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}.$$

## EXEMPLO NUMÉRICO — INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA

Queremos determinar o polinômio interpolador de grau 2 para:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (2, 3), \quad (x_2, y_2) = (4, 1).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}.$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 2L_0(x) + 3L_1(x) + 1L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}.$$

# VERIFICAÇÃO E INTERPRETAÇÃO

$$P_2(1) = 2, \quad P_2(2) = 3, \quad P_2(4) = 1.$$

## CONCLUSÃO

O polinômio

$$P_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}$$

é a parábola que passa exatamente pelos três pontos dados.

*Assim como no caso linear, a forma de Lagrange fornece uma expressão explícita, mas agora o polinômio é de grau 2 (parábola).*

# VERIFICAÇÃO E INTERPRETAÇÃO

$$P_2(1) = 2, \quad P_2(2) = 3, \quad P_2(4) = 1.$$

## CONCLUSÃO

O polinômio

$$P_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}$$

é a parábola que passa exatamente pelos três pontos dados.

*Assim como no caso linear, a forma de Lagrange fornece uma expressão explícita, mas agora o polinômio é de grau 2 (parábola).*

# VERIFICAÇÃO E INTERPRETAÇÃO

$$P_2(1) = 2, \quad P_2(2) = 3, \quad P_2(4) = 1.$$

## CONCLUSÃO

O polinômio

$$P_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}$$

é a parábola que passa exatamente pelos três pontos dados.

*Assim como no caso linear, a forma de Lagrange fornece uma expressão explícita, mas agora o polinômio é de grau 2 (parábola).*

# ROTEIRO DA AULA

- 1 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 2 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO LINEAR
- 3 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA
- 4 FORMA DE LAGRANGE - POLINÔMIO  $P_n$**
- 5 EXERCÍCIO PROPOSTO
- 6 CONCLUSÃO



# INTERPOLAÇÃO DE POLINÔMIO DE GRAU $\leq n$

**Pergunta:** Já vimos que podemos obter o polinômio interpolante  $p_n(x)$  resolvendo um sistema linear. Mas... **será que existe uma forma direta de escrevê-lo, sem resolver o sistema?**

## IDEIA

A **Forma de Lagrange** fornece uma expressão explícita para o polinômio interpolante:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

onde cada  $L_k(x)$  é um **polinômio de Lagrange** de grau  $n$ .

Essa forma evita resolver sistemas lineares e é **muito mais estável numericamente**.

# INTERPOLAÇÃO DE POLINÔMIO DE GRAU $\leq n$

**Pergunta:** Já vimos que podemos obter o polinômio interpolante  $p_n(x)$  resolvendo um sistema linear. Mas... **será que existe uma forma direta de escrevê-lo, sem resolver o sistema?**

## IDEIA

A **Forma de Lagrange** fornece uma expressão explícita para o polinômio interpolante:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

onde cada  $L_k(x)$  é um **polinômio de Lagrange** de grau  $n$ .

Essa forma evita resolver sistemas lineares e é **muito mais estável numericamente**.

# INTERPOLAÇÃO DE POLINÔMIO DE GRAU $\leq n$

**Pergunta:** Já vimos que podemos obter o polinômio interpolante  $p_n(x)$  resolvendo um sistema linear. Mas... **será que existe uma forma direta de escrevê-lo, sem resolver o sistema?**

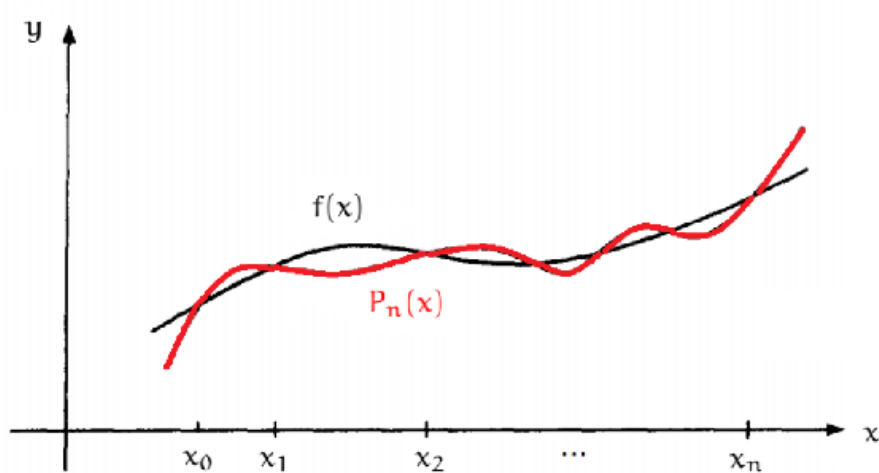
## IDEIA

A **Forma de Lagrange** fornece uma expressão explícita para o polinômio interpolante:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

onde cada  $L_k(x)$  é um **polinômio de Lagrange** de grau  $n$ .

Essa forma evita resolver sistemas lineares e é **muito mais estável numericamente**.

INTERPOLAÇÃO DE POLINÔMIO DE GRAU  $\leq n$ 

# FORMA DE LAGRANGE — DEFINIÇÃO

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $n+1$ ) pontos distintos e  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**Queremos:** encontrar o polinômio  $p_n(x)$  de grau  $\leq n$  que interpola  $f(x)$  nesses pontos.

## REPRESENTAÇÃO GERAL

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x),$$

onde os polinômios  $L_k(x)$  são de grau  $n$ .

**Condição de interpolação:**

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$

# FORMA DE LAGRANGE — DEFINIÇÃO

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $n+1$ ) pontos distintos e  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**Queremos:** encontrar o polinômio  $p_n(x)$  de grau  $\leq n$  que interpola  $f(x)$  nesses pontos.

## REPRESENTAÇÃO GERAL

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x),$$

onde os polinômios  $L_k(x)$  são de grau  $n$ .

**Condição de interpolação:**

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$

# FORMA DE LAGRANGE — DEFINIÇÃO

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $n+1$ ) pontos distintos e  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**Queremos:** encontrar o polinômio  $p_n(x)$  de grau  $\leq n$  que interpola  $f(x)$  nesses pontos.

## REPRESENTAÇÃO GERAL

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x),$$

onde os polinômios  $L_k(x)$  são de grau  $n$ .

Condição de interpolação:

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$

# FORMA DE LAGRANGE — DEFINIÇÃO

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $n+1$ ) pontos distintos e  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**Queremos:** encontrar o polinômio  $p_n(x)$  de grau  $\leq n$  que interpola  $f(x)$  nesses pontos.

## REPRESENTAÇÃO GERAL

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x),$$

onde os polinômios  $L_k(x)$  são de grau  $n$ .

## Condição de interpolação:

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$



# CONDIÇÃO SOBRE OS POLINÔMIOS BASE $L_k(x)$

Para que  $p_n(x_i) = y_i$  seja satisfeita, queremos que cada  $L_k(x)$  satisfaça:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

## IDEIA FUNDAMENTAL

Cada  $L_k(x)$  é um polinômio que “isola” o ponto  $x_k$ , sendo nulo em todos os demais pontos da interpolação.

A forma mais simples de garantir essa propriedade é definir:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

## CONDIÇÃO SOBRE OS POLINÔMIOS BASE $L_k(x)$

Para que  $p_n(x_i) = y_i$  seja satisfeita, queremos que cada  $L_k(x)$  satisfaça:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

### IDEIA FUNDAMENTAL

Cada  $L_k(x)$  é um polinômio que “isola” o ponto  $x_k$ , sendo nulo em todos os demais pontos da interpolação.

A forma mais simples de garantir essa propriedade é definir:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

## CONDIÇÃO SOBRE OS POLINÔMIOS BASE $L_k(x)$

Para que  $p_n(x_i) = y_i$  seja satisfeita, queremos que cada  $L_k(x)$  satisfaça:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

### IDEIA FUNDAMENTAL

Cada  $L_k(x)$  é um polinômio que “isola” o ponto  $x_k$ , sendo nulo em todos os demais pontos da interpolação.

A forma mais simples de garantir essa propriedade é definir:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

# FORMA GERAL DE LAGRANGE

É fácil verificar que:

$$L_k(x_k) = 1 \quad \text{e} \quad L_k(x_i) = 0 \text{ se } i \neq k.$$

Podemos reescrever  $L_k(x)$ , de modo que:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

**1) Verificar  $L_k(x_k) = 1$ :**

$$L_k(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n 1 = 1.$$

# FORMA GERAL DE LAGRANGE

É fácil verificar que:

$$L_k(x_k) = 1 \quad \text{e} \quad L_k(x_i) = 0 \text{ se } i \neq k.$$

**2) Verificar**  $L_k(x_i) = 0$  **se**  $i \neq k$ :

$$L_k(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}.$$

Como  $i \neq k$ , **um dos fatores do numerador** é  $\frac{x_i - x_i}{x_k - x_i} = 0$ , logo o produto todo é 0:

$$L_k(x_i) = 0 \quad (i \neq k).$$

# FORMA GERAL DE LAGRANGE

Assim, o polinômio interpolante pode ser escrito de forma explícita como:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x), \quad \text{com} \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

## INTERPRETAÇÃO

Cada termo  $y_k L_k(x)$  “atua” apenas no ponto  $x_k$ , garantindo que  $p_n(x_i) = y_i$  para todos os pontos da tabela.

# FORMA GERAL DE LAGRANGE

Assim, o polinômio interpolante pode ser escrito de forma explícita como:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x), \quad \text{com} \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

## INTERPRETAÇÃO

Cada termo  $y_k L_k(x)$  “atua” apenas no ponto  $x_k$ , garantindo que  $p_n(x_i) = y_i$  para todos os pontos da tabela.

# FORMA GERAL DE LAGRANGE

Assim, o polinômio interpolante pode ser escrito de forma explícita como:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x), \quad \text{com} \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

## INTERPRETAÇÃO

Cada termo  $y_k L_k(x)$  “atua” apenas no ponto  $x_k$ , garantindo que  $p_n(x_i) = y_i$  para todos os pontos da tabela.



# ROTEIRO DA AULA

- 1 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 2 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO LINEAR
- 3 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA
- 4 FORMA DE LAGRANGE - POLINÔMIO  $P_n$
- 5 EXERCÍCIO PROPOSTO
- 6 CONCLUSÃO

# EXERCÍCIO

Construa o polinômio interpolante pela **forma de Lagrange** para os pontos:

$$(0, 1), \quad (1, 3), \quad (2, 2)$$

## Perguntas:

- 1 Determine  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$  e  $L_2(x)$ .
- 2 Encontre o polinômio  $p_2(x)$ .
- 3 Verifique se  $p_2(x_i) = y_i$ .

# EXERCÍCIO

Construa o polinômio interpolante pela **forma de Lagrange** para os pontos:

$$(0, 1), \quad (1, 3), \quad (2, 2)$$

## Perguntas:

- 1 Determine  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$  e  $L_2(x)$ .
- 2 Encontre o polinômio  $p_2(x)$ .
- 3 Verifique se  $p_2(x_i) = y_i$ .

## RESOLUÇÃO (GABARITO)

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x)$$

$$p_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

Verificação:

$$p_2(0) = 1, \quad p_2(1) = 3, \quad p_2(2) = 2.$$

## RESOLUÇÃO (GABARITO)

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x)$$

$$p_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

Verificação:

$$p_2(0) = 1, \quad p_2(1) = 3, \quad p_2(2) = 2.$$

## RESOLUÇÃO (GABARITO)

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x)$$

$$p_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

**Verificação:**

$$p_2(0) = 1, \quad p_2(1) = 3, \quad p_2(2) = 2.$$

# ROTEIRO DA AULA

- 1 FORMAS DE SE OBTER O POLINÔMIO  $p_n(x)$
- 2 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO LINEAR
- 3 FORMA DE LAGRANGE - INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA
- 4 FORMA DE LAGRANGE - POLINÔMIO  $P_n$
- 5 EXERCÍCIO PROPOSTO
- 6 CONCLUSÃO

# PRÓXIMA AULA

## TEMA SEGUINTE

### Forma de Newton e Diferenças Divididas

- Vantagens em relação à forma de Lagrange;
- Atualização eficiente de novos pontos;
- Implementação prática e recursiva.



# PRÓXIMA AULA

## TEMA SEGUINTE

### Forma de Newton e Diferenças Divididas

- Vantagens em relação à forma de Lagrange;
- Atualização eficiente de novos pontos;
- Implementação prática e recursiva.

# INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2