Interpolação Polinomial de Lagrange

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2

Roteiro da Aula

Como obter o polinômio $p_n(x)$?

Pergunta: Sabemos que o polinômio interpolante $p_n(x)$ é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

Ideia central

Existem diferentes formas de determinar $p_n(x)$, todas levando ao mesmo resultado teórico:

(1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);

(2) Pela **forma de Lagrange**;

(3) Pela **forma de Newton**.

Observação: Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

Como obter o polinômio $p_n(x)$?

Pergunta: Sabemos que o polinômio interpolante $p_n(x)$ é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

Ideia central

Existem diferentes formas de determinar $p_n(x)$, todas levando ao mesmo resultado teórico:

(1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);

(2) Pela **forma de Lagrange**;

(3) Pela **forma de Newton**.

Observação: Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

Como obter o polinômio $p_n(x)$?

Pergunta: Sabemos que o polinômio interpolante $p_n(x)$ é **único**. Mas... **como podemos obtê-lo na prática?**

Ideia central

Existem diferentes formas de determinar $p_n(x)$, todas levando ao mesmo resultado teórico:

(1) Resolvendo o **sistema linear** associado (usando a matriz de Vandermonde);

(2) Pela **forma de Lagrange**;

(3) Pela **forma de Newton**.

Observação: Todas conduzem ao mesmo polinômio, mas diferem em aspectos como:

- estabilidade numérica;
- custo computacional;
- facilidade de atualização dos dados.

Roteiro da Aula

Motivação

Pergunta: Já vimos que podemos obter o polinômio interpolante $p_n(x)$ resolvendo um sistema linear. Mas... **será que existe uma forma direta de escrevê-lo, sem resolver o sistema?**

Ideia

A **Forma de Lagrange** fornece uma expressão explícita para o polinômio interpolante:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

onde cada $L_k(x)$ é um **polinômio de Lagrange** de grau n.

Essa forma evita resolver sistemas lineares e é **muito mais estável numericamente**.

Motivação

Pergunta: Já vimos que podemos obter o polinômio interpolante $p_n(x)$ resolvendo um sistema linear. Mas... **será que existe uma forma direta de escrevê-lo, sem resolver o sistema?**

Ideia

A **Forma de Lagrange** fornece uma expressão explícita para o polinômio interpolante:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

onde cada $L_k(x)$ é um **polinômio de Lagrange** de grau n.

Essa forma evita resolver sistemas lineares e é **muito mais estável numericamente**.

Motivação

Pergunta: Já vimos que podemos obter o polinômio interpolante $p_n(x)$ resolvendo um sistema linear. Mas... **será que existe uma forma direta de escrevê-lo, sem resolver o sistema?**

Ideia

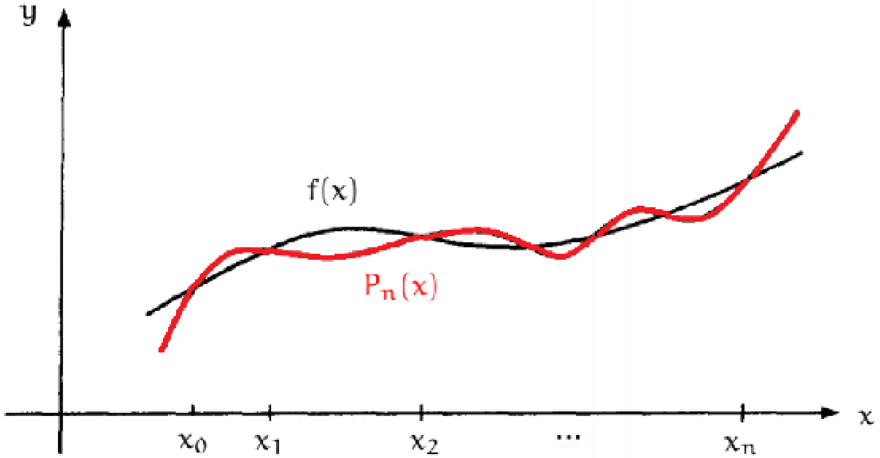
A **Forma de Lagrange** fornece uma expressão explícita para o polinômio interpolante:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

onde cada $L_k(x)$ é um **polinômio de Lagrange** de grau n.

Essa forma evita resolver sistemas lineares e é **muito mais estável numericamente**.

Interpolação por Polinômio de grau n



Forma de Lagrange — Definição

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Queremos: encontrar o polinômio $p_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ nesses pontos.

Representação geral

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x),$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n.

Condição de interpolação:

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$

Forma de Lagrange — Definição

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.
Queremos: encontrar o polinômio $p_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ nesses pontos.

Representação geral

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x),$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n.

Condição de interpolação:

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$

Forma de Lagrange — Definição

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.
Queremos: encontrar o polinômio $p_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ nesses pontos.

Representação geral

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x),$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n.

Condição de interpolação:

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$

Forma de Lagrange — Definição

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.
Queremos: encontrar o polinômio $p_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ nesses pontos.

Representação geral

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x),$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n.

Condição de interpolação:

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$

Condição sobre os polinômios base $L_k(x)$

Para que $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, queremos que cada $L_k(x)$ satisfaça:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Ideia fundamental

Cada $L_k(x)$ é um polinômio que "isola" o ponto x_k, sendo nulo em todos os demais pontos da interpolação.

A forma mais simples de garantir essa propriedade é definir:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$

Condição sobre os polinômios base $L_k(x)$

Para que $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, queremos que cada $L_k(x)$ satisfaça:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Ideia fundamental

Cada $L_k(x)$ é um polinômio que "isola" o ponto x_k, sendo nulo em todos os demais pontos da interpolação.

A forma mais simples de garantir essa propriedade é definir:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

Condição sobre os polinômios base $L_k(x)$

Para que $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, queremos que cada $L_k(x)$ satisfaça:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Ideia fundamental

Cada $L_k(x)$ é um polinômio que "isola" o ponto x_k, sendo nulo em todos os demais pontos da interpolação.

A forma mais simples de garantir essa propriedade é definir:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$

Forma geral de Lagrange

É fácil verificar que:

$$L_k(x_k) = 1 \quad \text{e} \quad L_k(x_i) = 0 \text{ se } i \neq k.$$

Podemos reescrever $L_k(x)$, de modo que:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

1) Verificar $L_k(x_k) = 1$:

$$L_k(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} 1 = 1.$$

Forma geral de Lagrange

É fácil verificar que:

$$L_k(x_k) = 1 \quad \text{e} \quad L_k(x_i) = 0 \text{ se } i \neq k.$$

2) Verificar $L_k(x_i) = 0$ se $i \neq k$:

$$L_k(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}.$$

Como $i \neq k$, um dos fatores do numerador é $\dfrac{x_i - x_i}{x_k - x_i} = 0$, logo o produto todo é 0:

$$L_k(x_i) = 0 \quad (i \neq k).$$

Forma geral de Lagrange

Assim, o polinômio interpolante pode ser escrito de forma explícita como:

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \quad \text{com} \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.}$$

Interpretação

Cada termo $y_k L_k(x)$ "atua" apenas no ponto x_k, garantindo que $p_n(x_i) = y_i$ para todos os pontos da tabela.

Forma geral de Lagrange

Assim, o polinômio interpolante pode ser escrito de forma explícita como:

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \quad \text{com} \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.}$$

Interpretação

Cada termo $y_k L_k(x)$ "atua" apenas no ponto x_k, garantindo que $p_n(x_i) = y_i$ para todos os pontos da tabela.

Forma geral de Lagrange

Assim, o polinômio interpolante pode ser escrito de forma explícita como:

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \quad \text{com} \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.}$$

Interpretação

Cada termo $y_k L_k(x)$ "atua" apenas no ponto x_k, garantindo que $p_n(x_i) = y_i$ para todos os pontos da tabela.

Roteiro da Aula

Interpolação Linear (grau 1)

Faremos um exemplo teórico para interpolação em **dois** pontos distintos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Como $n = 1$, a interpolação por dois pontos é chamada de **interpolação linear**.

Polinômio de grau 1

Vamos interpolar $f(x)$ por uma reta $P_1(x) = ax + b$ tal que:

$$P_1(x_0) = f(x_0), \qquad P_1(x_1) = f(x_1).$$

Interpolação Linear (grau 1)

Faremos um exemplo teórico para interpolação em **dois** pontos distintos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.
Como $n = 1$, a interpolação por dois pontos é chamada de **interpolação linear**.

Polinômio de grau 1

Vamos interpolar $f(x)$ por uma reta $P_1(x) = ax + b$ tal que:

$$P_1(x_0) = f(x_0), \qquad P_1(x_1) = f(x_1).$$

Interpolação Linear (grau 1)

Faremos um exemplo teórico para interpolação em **dois** pontos distintos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.
Como $n = 1$, a interpolação por dois pontos é chamada de **interpolação linear**.

Polinômio de grau 1

Vamos interpolar $f(x)$ por uma reta $P_1(x) = ax + b$ tal que:

$$P_1(x_0) = f(x_0), \qquad P_1(x_1) = f(x_1).$$

Determinando os coeficientes a e b

Das condições:

$$(1)\quad f(x_0) = ax_0 + b,$$
$$(2)\quad f(x_1) = ax_1 + b.$$

Subtraindo (2) de (1):

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}.$$

De (1), isolando b e substituindo a:

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x_0.$$

Colocando $f(x_0)$ e $f(x_1)$ em evidência:

$$\boxed{b = \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1)}.$$

Determinando os coeficientes a e b

Das condições:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x_0) &= ax_0 + b, \\ (2) \quad f(x_1) &= ax_1 + b. \end{aligned}$$

Subtraindo (2) de (1):

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}.$$

De (1), isolando b e substituindo a:

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x_0.$$

Colocando $f(x_0)$ e $f(x_1)$ em evidência:

$$\boxed{b = \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1)}.$$

Determinando os coeficientes a e b

Das condições:

$$\begin{aligned} (1)\quad f(x_0) &= ax_0 + b, \\ (2)\quad f(x_1) &= ax_1 + b. \end{aligned}$$

Subtraindo (2) de (1):

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}.$$

De (1), isolando b e substituindo a:

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x_0.$$

Colocando $f(x_0)$ e $f(x_1)$ em evidência:

$$\boxed{b = \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1)}.$$

Determinando os coeficientes a e b

Das condições:

$$\begin{aligned}(1)\quad f(x_0) &= ax_0 + b,\\ (2)\quad f(x_1) &= ax_1 + b.\end{aligned}$$

Subtraindo (2) de (1):

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0 - x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}.$$

De (1), isolando b e substituindo a:

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\,x_0.$$

Colocando $f(x_0)$ e $f(x_1)$ em evidência:

$$\boxed{b = \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1)}.$$

Expressão de $P_1(x)$

Substituindo a e b em $P_1(x) = ax + b$:

$$P_1(x) = \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right) x + \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1).$$

Agrupando termos com $f(x_0)$ e $f(x_1)$:

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1).$$

Forma de Lagrange para $n = 1$

$$\boxed{P_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)} \quad \text{com} \quad \begin{cases} L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \\ L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \end{cases}$$

Expressão de $P_1(x)$

Substituindo a e b em $P_1(x) = ax + b$:

$$P_1(x) = \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right) x + \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1).$$

Agrupando termos com $f(x_0)$ e $f(x_1)$:

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1).$$

Forma de Lagrange para $n = 1$

$$\boxed{P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)} \quad \text{com} \quad \begin{cases} L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \\ L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \end{cases}$$

Expressão de $P_1(x)$

Substituindo a e b em $P_1(x) = ax + b$:

$$P_1(x) = \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right) x + \left(\frac{-x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x_0}{x_0 - x_1}\right) f(x_1).$$

Agrupando termos com $f(x_0)$ e $f(x_1)$:

$$P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1).$$

Forma de Lagrange para $n = 1$

$$\boxed{P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)} \quad \text{com} \quad \begin{cases} L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \\ L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \end{cases}$$

Propriedade dos polinômios base L_0, L_1

$$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0 \qquad \text{e} \qquad L_1(x_0) = 0,\ L_1(x_1) = 1.$$

Conseqüência

Como $P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$, então

$$P_1(x_0) = f(x_0) \quad \text{e} \quad P_1(x_1) = f(x_1).$$

Logo, P_1 é exatamente a **reta** que passa pelos dois pontos dados.

Propriedade dos polinômios base L_0, L_1

$$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0 \qquad \text{e} \qquad L_1(x_0) = 0,\ L_1(x_1) = 1.$$

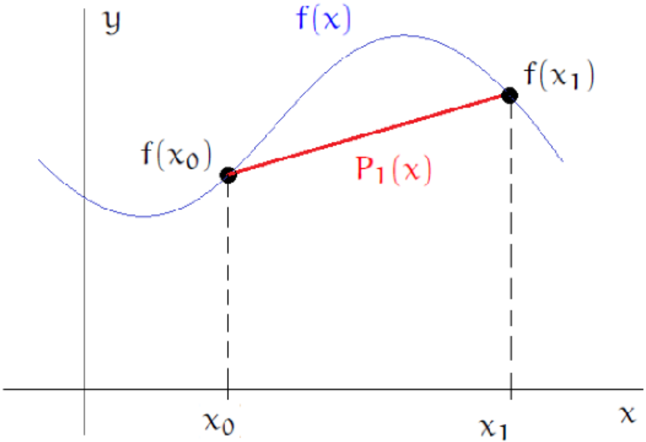
Conseqüência

Como $P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$, então

$$P_1(x_0) = f(x_0) \quad \text{e} \quad P_1(x_1) = f(x_1).$$

Logo, P_1 é exatamente a **reta** que passa pelos dois pontos dados.

Interpolação por Polinômio de grau 1 (reta)



Forma final

Interpolação linear de Lagrange

$$\boxed{P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1)}$$

- É a **equação da reta** que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Forma final

Interpolação linear de Lagrange

$$\boxed{P_1(x) = \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{L_1(x)} f(x_1)}$$

- É a **equação da reta** que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Exemplo Numérico — Interpolação Linear

Queremos o polinômio interpolador linear que passa por:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (4, 5).$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \; L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo:

$$L_0(x) = -\frac{x-4}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x-1}{3}.$$

$$P_1(x) = 2\left(-\frac{x-4}{3}\right) + 5\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{-2x + 8 + 5x - 5}{3} = x + 1.$$

$$\boxed{P_1(x) = x + 1} \quad \Rightarrow \quad P_1(1) = 2, \; P_1(4) = 5.$$

Exemplo Numérico — Interpolação Linear

Queremos o polinômio interpolador linear que passa por:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (4, 5).$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \; L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo:

$$L_0(x) = -\frac{x-4}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x-1}{3}.$$

$$P_1(x) = 2\left(-\frac{x-4}{3}\right) + 5\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{-2x + 8 + 5x - 5}{3} = x + 1.$$

$$\boxed{P_1(x) = x + 1} \quad \Rightarrow \quad P_1(1) = 2, \; P_1(4) = 5.$$

Exemplo Numérico — Interpolação Linear

Queremos o polinômio interpolador linear que passa por:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (4, 5).$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \; L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo:

$$L_0(x) = -\frac{x - 4}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x - 1}{3}.$$

$$P_1(x) = 2\left(-\frac{x - 4}{3}\right) + 5\left(\frac{x - 1}{3}\right) = \frac{-2x + 8 + 5x - 5}{3} = x + 1.$$

$$\boxed{P_1(x) = x + 1} \quad \Rightarrow \quad P_1(1) = 2, \; P_1(4) = 5.$$

Exemplo Numérico — Interpolação Linear

Queremos o polinômio interpolador linear que passa por:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (4, 5).$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x), \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \; L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo:

$$L_0(x) = -\frac{x-4}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x-1}{3}.$$

$$P_1(x) = 2\left(-\frac{x-4}{3}\right) + 5\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{-2x + 8 + 5x - 5}{3} = x + 1.$$

$$\boxed{P_1(x) = x + 1} \quad \Rightarrow \quad P_1(1) = 2, \; P_1(4) = 5.$$

Roteiro da Aula

Interpolação Quadrática (grau 2)

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau 2, denotado por $P_2(x)$.
Neste caso, precisamos de três pontos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \qquad P_2(x_1) = f(x_1), \qquad P_2(x_2) = f(x_2).$$

Ideia

O polinômio $P_2(x)$ será uma **parábola** que passa exatamente pelos três pontos dados.

Interpolação Quadrática (grau 2)

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau 2, denotado por $P_2(x)$.
Neste caso, precisamos de três pontos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \qquad P_2(x_1) = f(x_1), \qquad P_2(x_2) = f(x_2).$$

Ideia

O polinômio $P_2(x)$ será uma **parábola** que passa exatamente pelos três pontos dados.

Interpolação Quadrática (grau 2)

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau 2, denotado por $P_2(x)$.
Neste caso, precisamos de três pontos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \qquad P_2(x_1) = f(x_1), \qquad P_2(x_2) = f(x_2).$$

Ideia

O polinômio $P_2(x)$ será uma **parábola** que passa exatamente pelos três pontos dados.

Interpolação Quadrática (grau 2)

Agora, queremos interpolar $f(x)$ por um polinômio de grau 2, denotado por $P_2(x)$.
Neste caso, precisamos de três pontos distintos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)).$$

Ou seja:

$$P_2(x_0) = f(x_0), \qquad P_2(x_1) = f(x_1), \qquad P_2(x_2) = f(x_2).$$

Ideia

O polinômio $P_2(x)$ será uma **parábola** que passa exatamente pelos três pontos dados.

Construção pela Forma de Lagrange

Aplicando o mesmo raciocínio feito na interpolação linear:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ formam a **base de Lagrange de grau 2**.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Construção pela Forma de Lagrange

Aplicando o mesmo raciocínio feito na interpolação linear:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ formam a **base de Lagrange de grau 2**.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Determinando os coeficientes a, b e c

Seja $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Das condições de interpolação:

$$(1)\ f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c,$$
$$(2)\ f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c,$$
$$(3)\ f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Eliminando c por subtração par a par:

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = (x_0 - x_1)\left[a(x_0 + x_1) + b\right],$$
$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0^2 - x_2^2) + b(x_0 - x_2) = (x_0 - x_2)\left[a(x_0 + x_2) + b\right].$$

Defina os *coeficientes angulares*:

$$s_{01} := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \qquad s_{02} := \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}.$$

Então

$$s_{01} = a(x_0 + x_1) + b, \qquad s_{02} = a(x_0 + x_2) + b$$

Determinando os coeficientes a, b e c

Seja $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Das condições de interpolação:

$$\begin{aligned}(1)\ f(x_0) &= ax_0^2 + bx_0 + c,\\ (2)\ f(x_1) &= ax_1^2 + bx_1 + c,\\ (3)\ f(x_2) &= ax_2^2 + bx_2 + c.\end{aligned}$$

Eliminando c por subtração par a par:

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = (x_0 - x_1)\big[a(x_0 + x_1) + b\big],$$

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0^2 - x_2^2) + b(x_0 - x_2) = (x_0 - x_2)\big[a(x_0 + x_2) + b\big].$$

Defina os *coeficientes angulares*:

$$s_{01} := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \qquad s_{02} := \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}.$$

Então

$$s_{01} = a(x_0 + x_1) + b, \qquad s_{02} = a(x_0 + x_2) + b$$

Determinando os coeficientes a, b e c

Seja $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Das condições de interpolação:

$$
\begin{aligned}
(1)\ f(x_0) &= ax_0^2 + bx_0 + c,\\
(2)\ f(x_1) &= ax_1^2 + bx_1 + c,\\
(3)\ f(x_2) &= ax_2^2 + bx_2 + c.
\end{aligned}
$$

Eliminando c por subtração par a par:

$$f(x_0) - f(x_1) = a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = (x_0 - x_1)\big[a(x_0 + x_1) + b\big],$$

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0^2 - x_2^2) + b(x_0 - x_2) = (x_0 - x_2)\big[a(x_0 + x_2) + b\big].$$

Defina os *coeficientes angulares*:

$$s_{01} := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \qquad s_{02} := \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}.$$

Então

$$s_{01} = a(x_0 + x_1) + b, \qquad s_{02} = a(x_0 + x_2) + b.$$

Obtendo a e b

Subtraindo as duas expressões:

$$s_{01} - s_{02} = a\left[(x_0 + x_1) - (x_0 + x_2)\right] = a(x_1 - x_2).$$

$$\boxed{a = \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \dfrac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}}{x_1 - x_2}}.$$

De $s_{01} = a(x_0 + x_1) + b$, obtemos:

$$\boxed{b = s_{01} - a(x_0 + x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2}(x_0 + x_1)}.$$

Obtendo a e b

Subtraindo as duas expressões:

$$s_{01} - s_{02} = a\Big[(x_0 + x_1) - (x_0 + x_2)\Big] = a(x_1 - x_2).$$

$$\boxed{a = \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \dfrac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}}{x_1 - x_2}}.$$

De $s_{01} = a(x_0 + x_1) + b$, obtemos:

$$\boxed{b = s_{01} - a(x_0 + x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2}(x_0 + x_1)}.$$

Obtendo a e b

Subtraindo as duas expressões:

$$s_{01} - s_{02} = a\big[(x_0 + x_1) - (x_0 + x_2)\big] = a(x_1 - x_2).$$

$$\boxed{a = \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \dfrac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2}}{x_1 - x_2}}.$$

De $s_{01} = a(x_0 + x_1) + b$, obtemos:

$$\boxed{b = s_{01} - a(x_0 + x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{s_{01} - s_{02}}{x_1 - x_2}(x_0 + x_1)}.$$

Obtendo c e a expressão de $P_2(x)$

De (1):

$$\boxed{c = f(x_0) - ax_0^2 - bx_0}.$$

Logo,

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) + f(x_0).$$

Substituindo as expressões de a e b e **organizando** os termos com $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ em evidência, obtemos:

$$\boxed{P_2(x) = A_0(x)\,f(x_0) + A_1(x)\,f(x_1) + A_2(x)\,f(x_2)},$$

onde A_0, A_1, A_2 dependem apenas de x, x_0, x_1, x_2.

Obtendo c e a expressão de $P_2(x)$

De (1):

$$\boxed{c = f(x_0) - ax_0^2 - bx_0}.$$

Logo,

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) + f(x_0).$$

Substituindo as expressões de a e b e **organizando** os termos com $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ em evidência, obtemos:

$$\boxed{P_2(x) = A_0(x)\, f(x_0) + A_1(x)\, f(x_1) + A_2(x)\, f(x_2)},$$

onde A_0, A_1, A_2 dependem apenas de x, x_0, x_1, x_2.

Obtendo c e a expressão de $P_2(x)$

De (1):

$$\boxed{c = f(x_0) - ax_0^2 - bx_0}.$$

Logo,

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) + f(x_0).$$

Substituindo as expressões de a e b e **organizando** os termos com $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ em evidência, obtemos:

$$\boxed{P_2(x) = A_0(x)\, f(x_0) + A_1(x)\, f(x_1) + A_2(x)\, f(x_2)},$$

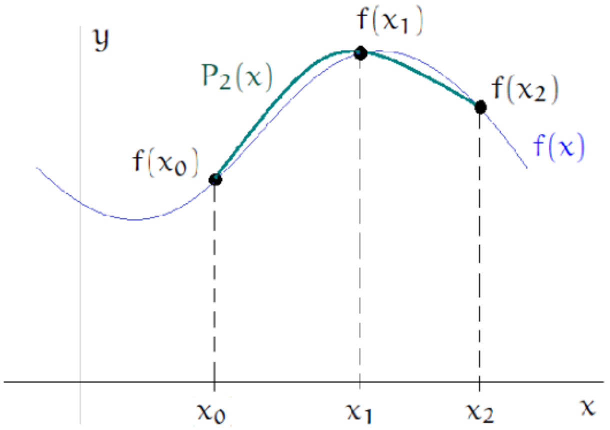
onde A_0, A_1, A_2 dependem apenas de x, x_0, x_1, x_2.

Colocando na base de Lagrange (Forma Final)

Os coeficientes $A_k(x)$ obtidos acima coincidem com os **polinômios de Lagrange**:

$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2), \\ L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \end{aligned}}$$

Interpolação por Polinômio de grau 2 (Parábola)



Exemplo Numérico — Interpolação Quadrática

Queremos determinar o polinômio interpolador de grau 2 para:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (2, 3), \quad (x_2, y_2) = (4, 1).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}.$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 2L_0(x) + 3L_1(x) + 1L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}.$$

Exemplo Numérico — Interpolação Quadrática

Queremos determinar o polinômio interpolador de grau 2 para:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (2, 3), \quad (x_2, y_2) = (4, 1).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}.$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 2L_0(x) + 3L_1(x) + 1L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}.$$

Exemplo Numérico — Interpolação Quadrática

Queremos determinar o polinômio interpolador de grau 2 para:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (2, 3), \quad (x_2, y_2) = (4, 1).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}.$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 2L_0(x) + 3L_1(x) + 1L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}.$$

Verificação e interpretação

$$P_2(1) = 2, \quad P_2(2) = 3, \quad P_2(4) = 1.$$

Conclusão

O polinômio

$$\boxed{P_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}}$$

é a parábola que passa exatamente pelos três pontos dados.

Assim como no caso linear, a forma de Lagrange fornece uma expressão explícita, mas agora o polinômio é de grau 2 (parábola).

Verificação e interpretação

$$P_2(1) = 2, \quad P_2(2) = 3, \quad P_2(4) = 1.$$

Conclusão

O polinômio

$$\boxed{P_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}}$$

é a parábola que passa exatamente pelos três pontos dados.

Assim como no caso linear, a forma de Lagrange fornece uma expressão explícita, mas agora o polinômio é de grau 2 (parábola).

Verificação e interpretação

$$P_2(1) = 2, \quad P_2(2) = 3, \quad P_2(4) = 1.$$

Conclusão

O polinômio

$$\boxed{P_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}}$$

é a parábola que passa exatamente pelos três pontos dados.

Assim como no caso linear, a forma de Lagrange fornece uma expressão explícita, mas agora o polinômio é de grau 2 (parábola).

Roteiro da Aula

Exercício

Construa o polinômio interpolante pela **forma de Lagrange** para os pontos:

$$(0, 1), \quad (1, 3), \quad (2, 2)$$

Perguntas:

1. Determine $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$.
2. Encontre o polinômio $p_2(x)$.
3. Verifique se $p_2(x_i) = y_i$.

Exercício

Construa o polinômio interpolante pela **forma de Lagrange** para os pontos:

$$(0,1), \quad (1,3), \quad (2,2)$$

Perguntas:

1. Determine $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$.
2. Encontre o polinômio $p_2(x)$.
3. Verifique se $p_2(x_i) = y_i$.

Resolução (Gabarito)

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x)$$

$$p_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

Verificação:

$$p_2(0) = 1, \quad p_2(1) = 3, \quad p_2(2) = 2.$$

Resolução (Gabarito)

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x)$$

$$p_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

Verificação:

$$p_2(0) = 1, \quad p_2(1) = 3, \quad p_2(2) = 2.$$

Resolução (Gabarito)

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x)$$

$$p_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

Verificação:

$$p_2(0) = 1, \quad p_2(1) = 3, \quad p_2(2) = 2.$$

Roteiro da Aula

Próxima aula

Tema seguinte

Forma de Newton e Diferenças Divididas

- Vantagens em relação à forma de Lagrange;
- Atualização eficiente de novos pontos;
- Implementação prática e recursiva.

Próxima aula

Tema seguinte

Forma de Newton e Diferenças Divididas

- Vantagens em relação à forma de Lagrange;
- Atualização eficiente de novos pontos;
- Implementação prática e recursiva.

Interpolação Polinomial de Lagrange

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2