Cálculo Numérico

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2

Sumário

Motivação: uma melhoria sobre o método de Jacobi

No método de Jacobi, todas as componentes de $x^{(k)}$ são calculadas a partir dos valores de $x^{(k-1)}$.

Ideia de melhoria

Durante o cálculo de $x^{(k)}$, algumas componentes $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)})$ já foram atualizadas e são, portanto, aproximações melhores para a solução verdadeira.

Logo, é mais razoável utilizar essas **novas estimativas** ao calcular $x_i^{(k)}$.

Motivação: uma melhoria sobre o método de Jacobi

No método de Jacobi, todas as componentes de $x^{(k)}$ são calculadas a partir dos valores de $x^{(k-1)}$.

Ideia de melhoria

Durante o cálculo de $x^{(k)}$, algumas componentes $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)})$ já foram atualizadas e são, portanto, aproximações melhores para a solução verdadeira.

Logo, é mais razoável utilizar essas **novas estimativas** ao calcular $x_i^{(k)}$.

Sumário

Método de Gauss-Seidel

Sistema Linear

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Isolando x_1 da primeira equação

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n\right)}{a_{11}}$$

Método de Gauss-Seidel

Sistema Linear

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Isolando x_1 da primeira equação

$$
x_1^{(k)} = \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n\right)}{a_{11}}
$$

Método de Gauss–Seidel

Diferença para o método de Jacobi

No Gauss–Seidel, ao calcular $x_i^{(k)}$, já dispomos das componentes $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ — que foram atualizadas nesta iteração.

Ideia principal

Em vez de utilizar apenas os valores antigos $x^{(k-1)}$, o método de Gauss-Seidel utiliza os **valores mais recentes disponíveis** a cada passo.

Método de Gauss–Seidel

Diferença para o método de Jacobi

No Gauss–Seidel, ao calcular $x_i^{(k)}$, já dispomos das componentes $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ — que foram atualizadas nesta iteração.

Ideia principal

Em vez de utilizar apenas os valores antigos $x^{(k-1)}$, o método de Gauss-Seidel utiliza os **valores mais recentes disponíveis** a cada passo.

Método de Gauss–Seidel — componente a componente

Da mesma forma, isolando o elemento x_i na i-ésima equação ($i = 1, \ldots, n$):

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right), \\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right), \\
&\vdots \\
x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right).
\end{aligned}
$$

Ideia-chave

Cada componente $x_i^{(k)}$ é calculada utilizando as componentes *mais recentes* disponíveis.

Método de Gauss–Seidel — componente a componente

Da mesma forma, isolando o elemento x_i na i-ésima equação ($i = 1, \ldots, n$):

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right),$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right),$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right).$$

Ideia-chave

Cada componente $x_i^{(k)}$ é calculada utilizando as componentes *mais recentes* disponíveis.

Fórmula iterativa de Gauss–Seidel

A partir dessa ideia, obtemos a forma geral:

$$\boxed{x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right]}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

- $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ já foram atualizados na iteração atual.
- O método usa sempre os valores mais recentes disponíveis.
- Essa modificação define a **técnica iterativa de Gauss–Seidel**.

Sumário

Critério de Parada

Além do número máximo de iterações, usamos a diferença entre duas iterações consecutivas como critério de parada do método de Jacobi.

Ideia

Paramos as iterações quando a solução não muda mais significativamente de uma iteração para a outra.

Critério de Parada

Além do número máximo de iterações, usamos a diferença entre duas iterações consecutivas como critério de parada do método de Jacobi.

Ideia

Paramos as iterações quando a solução não muda mais significativamente de uma iteração para a outra.

Critério de Parada — Definição Formal

Formalmente, paramos as iterações quando a diferença relativa de duas iterações consecutivas satisfaz:

$$D_r = \frac{\max\{|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|,\ i = 1, \dots, n\}}{\max\{|x_i^{(k)}|,\ i = 1, \dots, n\}} \ \leq \ \tau,$$

em que $\tau > 0$ é uma **tolerância pré-estabelecida**.

Critério de Parada — Forma Alternativa

De forma equivalente, podemos escrever:

$$D_r = \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} \leq \tau,$$

onde

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$$

é a **norma infinito** (máximo valor absoluto dos componentes).

Critério de Parada — Interpretação

- τ controla a **precisão desejada**: quanto menor τ, mais iterações serão necessárias.
- Esse critério garante que a aproximação $x^{(k)}$ estabilizou.
- Além disso, sempre definimos um **número máximo de iterações** $k_{\max}$ para evitar laços infinitos.

Resumo

$$\text{Parar se } D_r \leq \tau \quad \text{ou} \quad k \geq k_{\max}.$$

Critério de Parada — Interpretação

- τ controla a **precisão desejada**: quanto menor τ, mais iterações serão necessárias.
- Esse critério garante que a aproximação $x^{(k)}$ estabilizou.
- Além disso, sempre definimos um **número máximo de iterações** k_{max} para evitar laços infinitos.

Resumo

$$\text{Parar se } D_r \leq \tau \quad \text{ou} \quad k \geq k_{\text{max}}.$$

Sumário

Exemplo 1 (Enunciado)

Resolver

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1, \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau = 10^{-4}.$$

No Gauss–Seidel, atualizamos sequencialmente:

$$\boxed{x_1^{(k)} = \frac{1 - x_2^{(k-1)}}{2}, \qquad x_2^{(k)} = \frac{-1 - 3x_1^{(k)}}{4}}$$

Critério de parada:

$$D_r^{(k)} = \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < \tau.$$

Exemplo 1 (Enunciado)

Resolver

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1, \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau = 10^{-4}.$$

No Gauss–Seidel, atualizamos sequencialmente:

$$\boxed{x_1^{(k)} = \frac{1 - x_2^{(k-1)}}{2}, \qquad x_2^{(k)} = \frac{-1 - 3x_1^{(k)}}{4}}$$

Critério de parada:

$$D_r^{(k)} = \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < \tau.$$

Exemplo — Primeiras iterações

$$\textbf{k=0}: \quad x_1^{(1)} = \frac{1-0}{2} = 0.5000, \; x_2^{(1)} = \frac{-1-3(0.5000)}{4} = -0.6250$$

$$D_r^{(1)} = \frac{\max\{0.5000, 0.6250\}}{\max\{0.5000, 0.6250\}} = 1.0000$$

$$\textbf{k=1}: \quad x_1^{(2)} = \frac{1-(-0.6250)}{2} = 0.8125, \; x_2^{(2)} = \frac{-1-3(0.8125)}{4} = -0.8594$$

$$D_r^{(2)} = \frac{\max\{0.3125, 0.2344\}}{\max\{0.8125, 0.8594\}} \approx 0.3636$$

$$\textbf{k=2}: \quad x_1^{(3)} = 0.9297, \; x_2^{(3)} = -0.9473, \; D_r^{(3)} \approx 0.1237$$

Observação: cada $x_i^{(k)}$ usa o valor *mais recente* disponível.

Exemplo 1 - Tabela de iterações e parada

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$D_r^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	–
1	0.5000	-0.6250	1.0000
2	0.8125	-0.8594	0.3636
3	0.9297	-0.9473	0.1237
4	0.9736	-0.9802	0.0448
5	0.9901	-0.9926	0.0166
6	0.9963	-0.9972	0.0062
7	0.9986	-0.9990	0.0023
8	0.9995	-0.9996	0.00087
9	0.9998	-0.9999	0.00033
10	0.9999	-0.9999	0.00012
11	**1.0000**	**-1.0000**	**0.000046**

Como $D_r^{(11)} \approx 4.6 \times 10^{-5} < 10^{-4}$, **paramos em** $k = 11$.

Exemplo 2 (enunciado)

Use Gauss–Seidel para aproximar a solução do sistema

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15, \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iterando até que

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < 10^{-3}.$$

Exemplo 2 - Reescrita nas formas de Gauss-Seidel

Isolando cada variável e usando os valores mais recentes:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{10}\left(6 + x_2^{(k-1)} - 2x_3^{(k-1)}\right) = \tfrac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \tfrac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \tfrac{3}{5},$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{11}\left(25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)} - 3x_4^{(k-1)}\right) = \tfrac{1}{11}x_1^{(k)} + \tfrac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \tfrac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \tfrac{25}{11},$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{10}\left(-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k-1)}\right) = -\tfrac{1}{5}x_1^{(k)} + \tfrac{1}{10}x_2^{(k)} + \tfrac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \tfrac{11}{10},$$

$$x_4^{(k)} = \frac{1}{8}\left(15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right) = -\tfrac{3}{8}x_2^{(k)} + \tfrac{1}{8}x_3^{(k)} + \tfrac{15}{8}.$$

Exemplo 2 - Primeira iteração a partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(6 + 0 - 0) = 0.6000,$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{11}(25 + 0.6000 + 0 - 0) = 2.3272,$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\Big(- 11 - 2 \cdot 0.6000 + 2.3272 + 0\Big) = -0.9873,$$
$$x_4^{(1)} = \frac{1}{8}\Big(15 - 3 \cdot 2.3272 + (-0.9873)\Big) = 0.8789.$$

Vetor após a 1ª iteração

$$x^{(1)} \approx \begin{bmatrix} 0.6000 \\ 2.3272 \\ -0.9873 \\ 0.8789 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 - Tabela de Iterações

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6000	2.3272	-0.9873	0.8789
2	1.0300	2.0370	-1.0140	0.9844
3	1.0065	2.0036	-1.0025	0.9983
4	1.0009	2.0003	-1.0003	0.9999
5	1.0001	2.0000	-1.0000	1.0000

Exemplo 2

Para $k = 5$:

$$\frac{\|x^{(5)} - x^{(4)}\|_\infty}{\|x^{(5)}\|_\infty} \approx \frac{0.0008}{2.0000} = 4 \times 10^{-4} < 10^{-3}.$$

Aproximação final (Gauss–Seidel)

$$x^{(5)} \approx \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 2.0000 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observação: para a mesma precisão, Gauss–Seidel tipicamente requer menos iterações do que Jacobi.

Sumário

Considerações Finais — Método de Gauss–Seidel

- O método de Gauss–Seidel é uma **técnica iterativa** para resolver sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, atualizando as variáveis de forma sequencial e usando **os valores mais recentes** disponíveis.
- Em comparação com o método de Jacobi:
  - Converge geralmente **mais rapidamente**, pois cada nova variável incorpora informações atualizadas.
- Critérios de parada:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} < \tau.$$

Considerações Finais — Método de Gauss–Seidel

- O método de Gauss–Seidel é uma **técnica iterativa** para resolver sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, atualizando as variáveis de forma sequencial e usando **os valores mais recentes** disponíveis.
- Em comparação com o método de Jacobi:
  - Converge geralmente **mais rapidamente**, pois cada nova variável incorpora informações atualizadas.
- Critérios de parada:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} < \tau.$$

Considerações Finais — Método de Gauss–Seidel

- O método de Gauss–Seidel é uma **técnica iterativa** para resolver sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, atualizando as variáveis de forma sequencial e usando **os valores mais recentes** disponíveis.
- Em comparação com o método de Jacobi:
  - Converge geralmente **mais rapidamente**, pois cada nova variável incorpora informações atualizadas.
- Critérios de parada:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} < \tau.$$

Considerações Finais — Método de Gauss–Seidel

- O método de Gauss–Seidel é uma **técnica iterativa** para resolver sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, atualizando as variáveis de forma sequencial e usando **os valores mais recentes** disponíveis.
- Em comparação com o método de Jacobi:
    - Converge geralmente **mais rapidamente**, pois cada nova variável incorpora informações atualizadas.
- Critérios de parada:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} < \tau.$$

Cálculo Numérico

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2