Interpolação Polinomial de Newton

Prof. Gabriel Souto

IME/UERJ

2025.2

Roteiro da Aula

Por que a forma de Newton para interpolar?

- **Problema**: dados $n+1$ pontos distintos $(x_i, f(x_i))$, queremos um polinômio p_n tal que $p_n(x_i) = f(x_i)$.
- **Limitação da forma de Lagrange**: ótima para dedução teórica, mas
  - é custosa para atualizar quando chega um novo ponto $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$;
- **Ideia de Newton**:
  - escrever p_n em *base incremental* $(x - x_0)(x - x_1)\cdots$ que permite **inserir novos pontos** sem recomputar tudo;
  - calcular coeficientes via **diferenças divididas**, obtidos em uma tabela simples e reutilizável;

Roteiro da Aula

Polinômio interpolador na forma de Newton

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos distintos (nós de interpolação). A forma de Newton para o polinômio interpolador $p_n(x)$ é dada por:

$$\boxed{p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),}$$

onde os coeficientes d_k são obtidos por **diferenças divididas** de ordem k.

No que segue, veremos:

1. o **operador de diferenças divididas** e suas propriedades;
2. a **dedução** da expressão de $p_n(x)$ acima.

Polinômio interpolador na forma de Newton

Sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontos distintos (nós de interpolação). A forma de Newton para o polinômio interpolador $p_n(x)$ é dada por:

$$\boxed{p_n(x) \;=\; d_0 \;+\; d_1(x - x_0) \;+\; d_2(x - x_0)(x - x_1) \;+\; \cdots \;+\; d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),}$$

onde os coeficientes d_k são obtidos por **diferenças divididas** de ordem k.

No que segue, veremos:

1. o **operador de diferenças divididas** e suas propriedades;
2. a **dedução** da expressão de $p_n(x)$ acima.

Roteiro da Aula

Operador de diferenças divididas

Seja $f(x)$ uma função tabelada em $n+1$ pontos distintos: $x_0, x_1, ..., x_n$.

Definimos o *operador de diferenças divididas* por:

Operador de diferenças divididas

$$
\begin{cases}
f[x_0] = f(x_0), & \text{(Ordem Zero)} \\[2ex]
f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, & \text{(Ordem 1)} \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, & \text{(Ordem 2)} \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}, & \text{(Ordem 3)} \\[2ex]
\vdots & \vdots \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & \text{(Ordem n)}
\end{cases}
$$

Operador de diferenças divididas

Dizemos que $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ é a **diferença dividida de ordem** k da função $f(x)$ sobre os $k+1$ pontos $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Dada uma função $f(x)$ e conhecidos os valores que f assume nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, podemos construir a seguinte **tabela de diferenças divididas**:

Tabela de diferenças divididas

x_i	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	$\cdots$ Ordem n
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\cdots$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$f[x_0, \ldots, x_n]$
		$f[x_3, x_4]$		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Forma de Newton - Polinômio Interpolador $P_n(x)$

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0] = d_0$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1] = d_1$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2] = d_2$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	(...)	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = d_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$\vdots$	$\vdots$	

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Forma de Newton - Polinômio Interpolador $P_n(x)$

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0] = d_0$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1] = d_1$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2] = d_2$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	(...)	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = d_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$\vdots$	$\vdots$	

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Roteiro da Aula

Exemplo 1: Enunciado

Considere a função $f(x)$ tabelada abaixo:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	-1	-2

Objetivo

A partir destes dados tabelados:

1. Construa a **tabela de diferenças divididas** de Newton, mostrando os cálculos passo a passo.
2. Determine o **polinômio interpolador** $P_4(x)$ na forma de Newton.

Dica

Lembre-se: cada nova ordem de diferenças é calculada com base nos resultados da ordem anterior!

Exemplo 1: Enunciado

Considere a função $f(x)$ tabelada abaixo:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	-1	-2

Objetivo

A partir destes dados tabelados:

1. Construa a **tabela de diferenças divididas** de Newton, mostrando os cálculos passo a passo.
2. Determine o **polinômio interpolador** $P_4(x)$ na forma de Newton.

Dica

Lembre-se: cada nova ordem de diferenças é calculada com base nos resultados da ordem anterior!

Exemplo 1: Enunciado

Considere a função $f(x)$ tabelada abaixo:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	-1	-2

Objetivo

A partir destes dados tabelados:

1. Construa a **tabela de diferenças divididas** de Newton, mostrando os cálculos passo a passo.
2. Determine o **polinômio interpolador** $P_4(x)$ na forma de Newton.

Dica

Lembre-se: cada nova ordem de diferenças é calculada com base nos resultados da ordem anterior!

Exemplo 1: Tabela de Diferenças Divididas (construção)

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 1$				
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$				
$x_2 = 1$	$f[x_2] = 0$				
$x_3 = 2$	$f[x_3] = -1$				
$x_4 = 3$	$f[x_4] = -2$				

Exemplo 1: Tabela de Diferenças Divididas (construção)

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 1$				
		$f[x_0, x1] = \dfrac{1-1}{0-(-1)} = 0$			
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$				
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{0-1}{1-0} = -1$			
$x_2 = 1$	$f[x_2] = 0$				
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{-1-0}{2-1} = -1$			
$x_3 = 2$	$f[x_3] = -1$				
		$f[x_3, x4] = \dfrac{-2-(-1)}{3-2} = -1$			
$x_4 = 3$	$f[x_4] = -2$				

Exemplo 1: Tabela de Diferenças Divididas (construção)

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 1$				
		$f[x_0, x1] = \frac{1-1}{0-(-1)} = 0$			
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$				
		$f[x_1, x_2] = \frac{0-1}{1-0} = -1$	$f[x_0, x_1, x2] = \frac{(-1)-0}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}$		
$x_2 = 1$	$f[x_2] = 0$				
		$f[x_2, x_3] = \frac{-1-0}{2-1} = -1$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{(-1)-(-1)}{2-0} = 0$		
$x_3 = 2$	$f[x_3] = -1$				
		$f[x_3, x4] = \frac{-2-(-1)}{3-2} = -1$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{(-1)-(-1)}{3-1} = 0$		
$x_4 = 3$	$f[x_4] = -2$				

Exemplo 1: Tabela de Diferenças Divididas (construção)

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 1$				
		$f[x_0, x1] = \dfrac{1-1}{0-(-1)} = 0$			
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$				
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{0-1}{1-0} = -1$	$f[x_0, x_1, x2] = \dfrac{(-1)-0}{1-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$		
$x_2 = 1$	$f[x_2] = 0$				
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{-1-0}{2-1} = -1$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{(-1)-(-1)}{2-0} = 0$	$\dfrac{0-(-\frac{1}{2})}{2-(-1)} = \dfrac{1}{6}$	
$x_3 = 2$	$f[x_3] = -1$			$\dfrac{0-0}{3-0} = 0$	
		$f[x_3, x4] = \dfrac{-2-(-1)}{3-2} = -1$	$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{(-1)-(-1)}{3-1} = 0$		
$x_4 = 3$	$f[x_4] = -2$				

Exemplo 1: Tabela de Diferenças Divididas (construção)

	Ordem 0	**Ordem 1**	**Ordem 2**	**Ordem 3**	**Ordem 4**
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 1$				
		$f[x_0, x1] = \dfrac{1-1}{0-(-1)} = 0$			
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$				
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{0-1}{1-0} = -1$	$f[x_0, x_1, x2] = \dfrac{(-1)-0}{1-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$		
$x_2 = 1$	$f[x_2] = 0$				
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{-1-0}{2-1} = -1$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{(-1)-(-1)}{2-0} = 0$	$\dfrac{0-(-\frac{1}{2})}{2-(-1)} = \dfrac{1}{6}$	
$x_3 = 2$	$f[x_3] = -1$			$\dfrac{0-0}{3-0} = 0$	
		$f[x_3, x4] = \dfrac{-2-(-1)}{3-2} = -1$	$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{(-1)-(-1)}{3-1} = 0$		$\dfrac{0-\frac{1}{6}}{3-(-1)} = -\dfrac{1}{24}$
$x_4 = 3$	$f[x_4] = -2$				

Exemplo 1: Tabela completa

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	1				
$x_1 = 0$	1	0			
$x_2 = 1$	0	-1	$-\frac{1}{2}$		
$x_4 = 2$	-1	-1	0	$\frac{1}{6}$	
$x_4 = 3$	-2	-1	0	0	$-\frac{1}{24}$

Exemplo 1: Tabela completa (Coeficientes d_k)

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$1 = d_0$				
$x_1 = 0$	1	$0 = d_1$			
$x_2 = 1$	0	-1	$-\frac{1}{2} = d_2$		
$x_3 = 2$	-1	-1	0	$\frac{1}{6} = d_3$	
$x_4 = 3$	-2	-1	0	0	$-\frac{1}{24} = d_4$

Exemplo 1: Polinômio interpolador de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$1 = d_0$				
$x_1 = 0$	1	$0 = d_1$			
$x_2 = 1$	0	-1	$-\frac{1}{2} = d_2$		
$x_3 = 2$	-1	-1	0	$\frac{1}{6} = d_3$	
$x_4 = 3$	-2	-1	0	0	$-\frac{1}{24} = d_4$

Forma de Newton:

$$P_4(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+ d_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Substituindo:

$$\boxed{P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1)x + \frac{1}{6}(x+1)x(x-1) - \frac{1}{24}(x+1)x(x-1)(x-2)}$$

Exemplo 1: Polinômio interpolador de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$1 = d_0$				
$x_1 = 0$	1	$0 = d_1$			
$x_2 = 1$	0	-1	$-\frac{1}{2} = d_2$		
$x_3 = 2$	-1	-1	0	$\frac{1}{6} = d_3$	
$x_4 = 3$	-2	-1	0	0	$-\frac{1}{24} = d_4$

Forma de Newton:

$$P_4(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + d_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Substituindo:

$$\boxed{P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1)x + \frac{1}{6}(x+1)x(x-1) - \frac{1}{24}(x+1)x(x-1)(x-2)}$$

Exemplo 1: Polinômio interpolador de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$1 = d_0$				
$x_1 = 0$	1	$0 = d_1$			
$x_2 = 1$	0	-1	$-\frac{1}{2} = d_2$		
$x_3 = 2$	-1	-1	0	$\frac{1}{6} = d_3$	
$x_4 = 3$	-2	-1	0	0	$-\frac{1}{24} = d_4$

Forma de Newton:

$$P_4(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + d_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Substituindo:

$$\boxed{P_4(x) = 1 - \tfrac{1}{2}(x+1)x + \tfrac{1}{6}(x+1)x(x-1) - \tfrac{1}{24}(x+1)x(x-1)(x-2)}$$

Exemplo 2 — Exercício

Usando a forma de Newton, determine o polinômio $P_2(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos dados abaixo:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Construa a tabela de diferenças divididas e escreva o polinômio final.

Exemplo 2 — Gabarito

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-1	4		
0	1	-3	
2	-1	-1	$\frac{2}{3}$

Diferenças divididas:

$$f[x_0] = 4, \qquad f[x_0, x_1] = -3, \qquad f[x_1, x_2] = -1, \qquad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2}{3}.$$

Polinômio interpolador:

$$\boxed{P_2(x) = 4 + (-3)(x - (-1)) + \left(\frac{2}{3}\right)(x - (-1))(x - 0)}$$

Roteiro da Aula

Estudo do Erro na Interpolação

Como já observamos, ao se aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau $\leq n$, comete-se um erro. Assim, definimos o **erro de interpolação** como:

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - p_n(x)} \quad \forall x \in [x_0, x_n].$$

Importância do Estudo do Erro

O estudo do erro é fundamental para avaliarmos o quão próximo o polinômio interpolador $p_n(x)$ está da função original $f(x)$.

Em particular, conhecer o erro permite:

- Estimar a **precisão** da aproximação numérica;
- Determinar a **necessidade de mais pontos** na interpolação;
- Identificar possíveis **oscilações** ou instabilidades do polinômio.

Estudo do Erro na Interpolação

Como já observamos, ao se aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau $\leq n$, comete-se um erro. Assim, definimos o **erro de interpolação** como:

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - p_n(x)} \quad \forall x \in [x_0, x_n].$$

Importância do Estudo do Erro

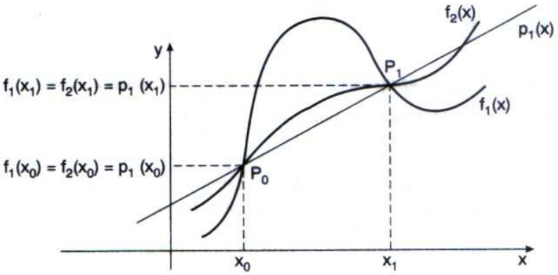
O estudo do erro é fundamental para avaliarmos o quão próximo o polinômio interpolador $p_n(x)$ está da função original $f(x)$.

Em particular, conhecer o erro permite:

- Estimar a **precisão** da aproximação numérica;
- Determinar a **necessidade de mais pontos** na interpolação;
- Identificar possíveis **oscilações** ou instabilidades do polinômio.

Interpolação linear: mesmo $p_1(x)$

Este exemplo ilustra que o mesmo polinômio linear $p_1(x)$ pode interpolar duas funções diferentes $f_1(x)$ e $f_2(x)$ nos mesmos pontos x_0 e x_1.



No gráfico, temos:

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) = p_1(x_0), \qquad f_1(x_1) = f_2(x_1) = p_1(x_1).$$

Erro e concavidade no caso linear

Contudo, o erro $E_1^{(1)}(x) = f_1(x) - p_1(x)$ é maior do que $E_1^{(2)}(x) = f_2(x) - p_1(x)$ para $x \in (x_0, x_1)$.

Observa-se que o erro depende da **concavidade** das funções, ou seja, de $f_1''(x)$ e $f_2''(x)$:

$$E_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \qquad \xi \in (x_0, x_1).$$

Mais adiante veremos o **Teorema do Erro da Interpolação**, que fornece a expressão geral para $E_n(x)$ quando aproximamos $f(x)$ por $p_n(x)$.

Teorema do Erro da Interpolação

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, um conjunto de $(n+1)$ pontos distintos.

Seja $f(x)$ uma função com derivadas até a ordem $(n+1)$, $\forall\ x \in [x_0, x_n]$.

Seja $p_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Então

Em qualquer ponto $x \in [x_0, x_n]$, o erro da interpolação é dado por:

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},}$$

onde $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Teorema do Erro da Interpolação

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, um conjunto de $(n+1)$ pontos distintos.

Seja $f(x)$ uma função com derivadas até a ordem $(n+1)$, $\forall\ x \in [x_0, x_n]$.

Seja $p_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Então

Em qualquer ponto $x \in [x_0, x_n]$, o erro da interpolação é dado por:

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},}$$

onde $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Exemplo 3: Interpolação Linear de $\ln(x)$

Seja o problema de obter ln(3,7) por **interpolação linear**, sabendo que $\ln(x)$ está tabelada como:

x	1	2	3	4
ln(**x**)	0	0.6931	1.0986	1.3863

Como $x = 3{,}7 \in (3, 4)$, escolhemos $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$.

Pela **forma de Newton**, temos:

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1], \quad \text{com} \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.3863 - 1.0986}{4 - 3} = 0.2877.$$

Logo:

$$p_1(x) = 1.0986 + (0.2877)(x - 3), \qquad p_1(3.7) = 1.0986 + (0.2877)0.7 = 1.300.$$

Sabendo que $\ln(3.7) = 1.3083$, o erro é:

$$E_1(3.7) = \ln(3.7) - p_1(3.7) = 1.3083 - 1.300 = 8.3 \times 10^{-3}.$$

Exemplo 3: Interpolação Linear de $\ln(x)$

Seja o problema de obter ln(3,7) por **interpolação linear**, sabendo que $\ln(x)$ está tabelada como:

x	1	2	3	4
$\ln(\mathbf{x})$	0	0.6931	1.0986	1.3863

Como $x = 3{,}7 \in (3, 4)$, escolhemos $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$.

Pela **forma de Newton**, temos:

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1], \quad \text{com} \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.3863 - 1.0986}{4 - 3} = 0.2877.$$

Logo:

$$p_1(x) = 1.0986 + (0.2877)(x - 3), \qquad p_1(3.7) = 1.0986 + (0.2877)0.7 = 1.300.$$

Sabendo que $\ln(3.7) = 1.3083$, o erro é:

$$E_1(3.7) = \ln(3.7) - p_1(3.7) = 1.3083 - 1.300 = 8.3 \times 10^{-3}.$$

Exemplo 3: Interpolação Linear de $\ln(x)$

Seja o problema de obter ln(3,7) por **interpolação linear**, sabendo que $\ln(x)$ está tabelada como:

x	1	2	3	4
ln(**x**)	0	0.6931	1.0986	1.3863

Como $x = 3{,}7 \in (3, 4)$, escolhemos $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$.

Pela **forma de Newton**, temos:

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1], \quad \text{com} \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.3863 - 1.0986}{4 - 3} = 0.2877.$$

Logo:

$$p_1(x) = 1.0986 + (0.2877)(x - 3), \qquad p_1(3.7) = 1.0986 + (0.2877)0.7 = 1.300.$$

Sabendo que $\ln(3.7) = 1.3083$, o erro é:

$$E_1(3.7) = \ln(3.7) - p_1(3.7) = 1.3083 - 1.300 = 8.3 \times 10^{-3}.$$

Exemplo 3: Verificação pelo Teorema do Erro

Pelo Teorema 2, o erro é dado por:

$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}, \qquad \xi_x \in (x_0, x_1).$$

Para $f(x) = \ln(x)$, temos $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Substituindo $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ e $x = 3.7$:

$$E_1(3.7) = (3.7 - 3)(3.7 - 4)\frac{f''(\xi_{3.7})}{2} = (0.7)(-0.3)\frac{-1}{2\xi_{3.7}^2} = 8.3 \times 10^{-3}.$$

Resolvendo para $\xi_{3.7}$:

$$0.0083 = \frac{0.21}{2\xi_{3.7}^2} \quad \Rightarrow \quad \xi_{3.7} = 3.5578.$$

Conclusão

O ponto ξ_x realmente pertence ao intervalo $(3, 4)$, confirmando o Teorema do Erro. Assim, ξ_x é uma **função de** x que depende da forma local da função.

Exemplo 3: Verificação pelo Teorema do Erro

Pelo Teorema 2, o erro é dado por:

$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}, \qquad \xi_x \in (x_0, x_1).$$

Para $f(x) = \ln(x)$, temos $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Substituindo $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ e $x = 3.7$:

$$E_1(3.7) = (3.7 - 3)(3.7 - 4)\frac{f''(\xi_{3.7})}{2} = (0.7)(-0.3)\frac{-1}{2\xi_{3.7}^2} = 8.3 \times 10^{-3}.$$

Resolvendo para $\xi_{3.7}$:

$$0.0083 = \frac{0.21}{2\xi_{3.7}^2} \quad \Rightarrow \quad \xi_{3.7} = 3.5578.$$

Conclusão

O ponto ξ_x realmente pertence ao intervalo $(3, 4)$, confirmando o Teorema do Erro. Assim, ξ_x é uma **função de** x que depende da forma local da função.

Limitante para o Erro e Corolário

A expressão exata do erro:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \qquad \xi_x \in (x_0, x_n)$$

tem **uso limitado na prática**, pois:

- o ponto ξ_x é **desconhecido**;
- e raramente conhecemos a derivada de ordem $(n+1)$ da função.

Ideia: mesmo sem conhecer ξ_x, podemos **estimar um limite superior para o erro**, se soubermos um valor máximo de $|f^{(n+1)}(x)|$ no intervalo.

Chamando:

$$M_{n+1} = \max_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

temos o **Corolário**:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|\,\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Limitante para o Erro e Corolário

A expressão exata do erro:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \qquad \xi_x \in (x_0, x_n)$$

tem **uso limitado na prática**, pois:

- o ponto ξ_x é **desconhecido**;
- e raramente conhecemos a derivada de ordem $(n+1)$ da função.

Ideia: mesmo sem conhecer ξ_x, podemos **estimar um limite superior para o erro**, se soubermos um valor máximo de $|f^{(n+1)}(x)|$ no intervalo.

Chamando:

$$M_{n+1} = \max_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

temos o **Corolário**:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|\,\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Importância do Limitante para o Erro

Por que o limitante é importante?

- Ele fornece uma **estimativa prática** do erro, sem precisar conhecer o ponto ξ_x.
- Permite avaliar o **grau de precisão** de uma interpolação.
- É utilizado para derivar estimativas de erro em outros métodos numéricos:
  - fórmulas de **diferenciação numérica**;
  - fórmulas de **integração numérica**.
- Mostra como o erro depende de dois fatores:
  1. o comportamento de $f^{(n+1)}(x)$ (curvatura da função);
  2. a distância entre os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada conforme:

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	0.0	1.1487	2.7183	4.9811	8.3890

Queremos estimar $f(0.7)$ por interpolação linear.
Como $0.7 \in (0.5, 1)$, escolhemos:

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = 1.$$

Aplicando a forma de Newton:

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1],$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{2.7183 - 1.1487}{1 - 0.5} = 3.1392,$$

$$\Rightarrow \; p_1(x) = 1.1487 + (x - 0.5)(3.1392).$$

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada conforme:

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	0.0	1.1487	2.7183	4.9811	8.3890

Queremos estimar $f(0.7)$ por interpolação linear.
Como $0.7 \in (0.5, 1)$, escolhemos:

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = 1.$$

Aplicando a forma de Newton:

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1],$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{2.7183 - 1.1487}{1 - 0.5} = 3.1392,$$

$$\Rightarrow \quad p_1(x) = 1.1487 + (x - 0.5)(3.1392).$$

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada conforme:

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	0.0	1.1487	2.7183	4.9811	8.3890

Queremos estimar $f(0.7)$ por interpolação linear.
Como $0.7 \in (0.5, 1)$, escolhemos:

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = 1.$$

Aplicando a forma de Newton:

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1],$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{2.7183 - 1.1487}{1 - 0.5} = 3.1392,$$

$$\Rightarrow \; p_1(x) = 1.1487 + (x - 0.5)(3.1392).$$

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Para $x = 0.7$:

$$p_1(0.7) = 1.1487 + (0.2)(3.1392) = 1.7765.$$

Sabendo que $f(0.7) = e^{0.7} + 0.7 - 1 = 1.7137$, temos:

$$|E_1(0.7)| = |f(0.7) - p_1(0.7)| = |1.7137 - 1.7765| = 0.0628.$$

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Para $x = 0.7$:

$$p_1(0.7) = 1.1487 + (0.2)(3.1392) = 1.7765.$$

Sabendo que $f(0.7) = e^{0.7} + 0.7 - 1 = 1.7137$, temos:

$$|E_1(0.7)| = |f(0.7) - p_1(0.7)| = |1.7137 - 1.7765| = 0.0628.$$

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Para $x = 0.7$:

$$p_1(0.7) = 1.1487 + (0.2)(3.1392) = 1.7765.$$

Sabendo que $f(0.7) = e^{0.7} + 0.7 - 1 = 1.7137$, temos:

$$|E_1(0.7)| = |f(0.7) - p_1(0.7)| = |1.7137 - 1.7765| = 0.0628.$$

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Usando o Corolário:

$$|E_1(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)|\frac{M_2}{2}, \quad \text{onde} \quad M_2 = \max_{x\in[0.5,1]} |f''(x)|.$$

Sabemos que $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in (0.5, 1)$, portanto é crescente e o máximo ocorre em $x = 1$. Como $f''(x) = e^x$, então $M_2 = e^1 = 2.7183$. Sabemos que

$$|E_1(0.7)| \leq |(0.7-0.5)(0.7-1)|\frac{2.7183}{2} = 0.0815.$$

$$\boxed{|E_1(0.7)|_{\text{real}} = 0.0628 \quad < \quad 0.0815 = |E_1(0.7)|_{\text{máx.}}}$$

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Usando o Corolário:

$$|E_1(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)| \frac{M_2}{2}, \quad \text{onde} \quad M_2 = \max_{x \in [0.5, 1]} |f''(x)|.$$

Sabemos que $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in (0.5, 1)$, portanto é crescente e o máximo ocorre em $x = 1$. Como $f''(x) = e^x$, então $M_2 = e^1 = 2.7183$. Sabemos que

$$|E_1(0.7)| \leq |(0.7 - 0.5)(0.7 - 1)| \frac{2.7183}{2} = 0.0815.$$

$$\boxed{|E_1(0.7)|_{\text{real}} = 0.0628 \quad < \quad 0.0815 = |E_1(0.7)|_{\text{máx.}}}$$

Exemplo 4: Interpolação Linear e Erro Real

Usando o Corolário:

$$|E_1(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)| \frac{M_2}{2}, \quad \text{onde} \quad M_2 = \max_{x \in [0.5,1]} |f''(x)|.$$

Sabemos que $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in (0.5, 1)$, portanto é crescente e o máximo ocorre em $x = 1$. Como $f''(x) = e^x$, então $M_2 = e^1 = 2.7183$. Sabemos que

$$|E_1(0.7)| \leq |(0.7 - 0.5)(0.7 - 1)| \frac{2.7183}{2} = 0.0815.$$

$$\boxed{|E_1(0.7)|_{\text{real}} = 0.0628 \quad < \quad 0.0815 = |E_1(0.7)|_{\text{máx.}}}$$

Exemplo 4: Interpretação

- Neste exemplo, conhecemos $f(x)$ e pudemos calcular o erro real.
- Na prática, $f(x)$ é desconhecida, o limitante **garante** que o erro não ultrapasse o valor estimado.
- Assim, o Corolário fornece uma **margem de segurança ou limite superior** para o erro de interpolação.

Estimativa para o Erro de Interpolação

Sabemos, pelo Teorema do Erro:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \xi_x \in (x_0, x_n).$$

Quando a função $f(x)$ é conhecida analiticamente, podemos calcular:

$$M_{n+1} = \max_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

e obter um **limitante superior** para o erro:

$$|E_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mas e se $f(x)$ for dada apenas por valores tabelados?

- Não é possível calcular M_{n+1}, pois não conhecemos $f^{(n+1)}(x)$;
- Ainda assim, podemos **estimar** o erro a partir das informações numéricas.

Estimativa para o Erro de Interpolação

Sabemos, pelo Teorema do Erro:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \xi_x \in (x_0, x_n).$$

Quando a função $f(x)$ é conhecida analiticamente, podemos calcular:

$$M_{n+1} = \max_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

e obter um **limitante superior** para o erro:

$$|E_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mas e se $f(x)$ for dada apenas por valores tabelados?

- Não é possível calcular M_{n+1}, pois não conhecemos $f^{(n+1)}(x)$;
- Ainda assim, podemos **estimar** o erro a partir das informações numéricas.

Estimativa para o Erro de Interpolação

Sabemos, pelo Teorema do Erro:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \xi_x \in (x_0, x_n).$$

Quando a função $f(x)$ é conhecida analiticamente, podemos calcular:

$$M_{n+1} = \max_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

e obter um **limitante superior** para o erro:

$$|E_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mas e se $f(x)$ for dada apenas por valores tabelados?

- Não é possível calcular M_{n+1}, pois não conhecemos $f^{(n+1)}(x)$;
- Ainda assim, podemos **estimar** o erro a partir das informações numéricas.

Estimando o Erro a partir de Diferenças Divididas

Ideia: As diferenças divididas de ordem $n+1$ têm papel análogo à derivada $f^{(n+1)}(x)$.
Se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem $n+1$, podemos usar o **maior valor (em módulo)** dessas diferenças como uma aproximação para o termo:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Assim, obtemos uma **estimativa prática do erro**:

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \times (\max\{|\text{diferenças divididas de ordem } n+1|\}).$$

Estimando o Erro a partir de Diferenças Divididas

Ideia: As diferenças divididas de ordem $n+1$ têm papel análogo à derivada $f^{(n+1)}(x)$.
Se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem $n+1$, podemos usar o **maior valor (em módulo)** dessas diferenças como uma aproximação para o termo:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Assim, obtemos uma **estimativa prática do erro**:

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \times (\max\{|\text{diferenças divididas de ordem } n+1|\}).$$

Estimando o Erro a partir de Diferenças Divididas

Ideia: As diferenças divididas de ordem $n+1$ têm papel análogo à derivada $f^{(n+1)}(x)$.
Se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem $n+1$, podemos usar o **maior valor (em módulo)** dessas diferenças como uma aproximação para o termo:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Assim, obtemos uma **estimativa prática do erro**:

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \times (\max\{|\text{diferenças divididas de ordem } n+1|\}).$$

Exemplo 5

Seja $f(x)$ dada na forma:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

A) Obter $f(0.47)$ usando um polinômio de grau 2.

B) Dar uma estimativa para o erro.

Exemplo 5: Tabela de Diferenças divididas

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0.2	0.16			
		0.4286		
0.34	0.22		2.0235	
		0.8333		-17.8963
$x_0 = 0.4$	$\boxed{0.27}$		-3.7033	
		$\boxed{0.1667}$		$\boxed{18.2492}$
$x_1 = 0.52$	0.29		$\boxed{1.0415}$	
		0.375		-2.6031
$x_2 = 0.6$	0.32		0.2085	
		0.4167		
0.72	0.37			

Exemplo 5: Polinômio $p_2(x)$

Coeficientes de Newton:

$$d_0 = f[x_0] = \mathbf{0.27}, \qquad d_1 = f[x_0, x_1] = \mathbf{0.1667}, \qquad d_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \mathbf{1.0415}.$$

Polinômio (grau 2):

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) = 0.27 + 0.1667(x - 0.40) + 1.0415(x - 0.40)(x - 0.52).$$

Em $x = 0{,}47$**:** $\quad p_2(0.47) = \boxed{0.2780} \approx f(0.47).$

Exemplo 5 - Estimativa para o erro

Para $n = 2$, olhamos a coluna de Ordem 3. Os valores são: -17.8963, 18.2492 e -2.6031. Calculamos o máximo valor em módulo (valor absoluto):

$$\max(|-17.8963|, |18.2492|, |-2.6031|)$$

$$\max(17.8963, 18.2492, 2.6031) = 18.2492$$

Agora, aplicamos a fórmula para $x = 0.47$:

$$\begin{aligned}
|E_2(0.47)| &\approx |(0.47-0.4)(0.47-0.52)(0.47-0.6)| \cdot (18.2492) \\
&\approx |(0.07)(-0.05)(-0.13)| \cdot (18.2492) \\
&\approx |0.000455| \cdot (18.2492) \\
&\approx 0.008303386 \\
|E_2(0.47)| &\approx 8.303 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Roteiro da Aula

Exercício Proposto

Considere os seguintes valores de uma função $f(x)$:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x)	1.00	1.22	1.49	1.82	2.20	2.64

Pede-se:

A) Calcular $f(0.5)$ usando o **polinômio interpolador de Newton** de grau 2;

B) Construir a **tabela de diferenças divididas** correspondente;

C) Fornecer uma **estimativa para o erro** em $x = 0.5$, considerando o valor máximo (em módulo) das diferenças de ordem 3.

b) Tabela de Diferenças Divididas

x_i	Ord 0	Ord 1	Ord 2	Ord 3	Ord 4	Ord 5
0.0	**1.00**					
		1.1000				
0.2	**1.22**		**0.6250**			
		1.3500		**0.2083**		
0.4	**1.49**		**0.7500**		**-0.5208**	
		1.6500		**-0.2083**		**1.0416**
0.6	**1.82**		**0.6250**		**0.5208**	
		1.9000		**0.2083**		
0.8	**2.20**		**0.7500**			
		2.2000				
1.0	**2.64**					

a) Cálculo de $f(0.5)$ com Grau 2

Para estimar $f(0.5)$, usamos 3 pontos ($n = 2$) que "cercam" o valor 0.5.

- **Pontos escolhidos:** $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$.

O polinômio de Newton de grau 2 é:

$$P_2(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2)$$

Substituindo os valores da tabela:

- $f[x_1] = 1.22$
- $f[x_1, x_2] = 1.35$
- $f[x_1, x_2, x_3] = 0.750$

Cálculo para $x = 0.5$:

$$\begin{aligned} P_2(0.5) &= 1.22 + 1.35(0.5 - 0.2) + 0.75(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.4) \\ &= 1.22 + 1.35(0.3) + 0.75(0.3)(0.1) \\ &= 1.22 + 0.405 + 0.0225 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P_2(0.5) = 1.6475}$$

a) Cálculo de $f(0.5)$ com Grau 2

Para estimar $f(0.5)$, usamos 3 pontos ($n = 2$) que "cercam" o valor 0.5.

- **Pontos escolhidos:** $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$.

O polinômio de Newton de grau 2 é:

$$P_2(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2)$$

Substituindo os valores da tabela:

- $f[x_1] = 1.22$
- $f[x_1, x_2] = 1.35$
- $f[x_1, x_2, x_3] = 0.750$

Cálculo para $x = 0.5$:

$$\begin{aligned} P_2(0.5) &= 1.22 + 1.35(0.5 - 0.2) + 0.75(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.4) \\ &= 1.22 + 1.35(0.3) + 0.75(0.3)(0.1) \\ &= 1.22 + 0.405 + 0.0225 \end{aligned}$$

$\mathbf{P_2(0.5) = 1.6475}$

a) Cálculo de $f(0.5)$ com Grau 2

Para estimar $f(0.5)$, usamos 3 pontos ($n = 2$) que "cercam" o valor 0.5.

- **Pontos escolhidos:** $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$.

O polinômio de Newton de grau 2 é:

$$P_2(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2)$$

Substituindo os valores da tabela:

- $f[x_1] = 1.22$
- $f[x_1, x_2] = 1.35$
- $f[x_1, x_2, x_3] = 0.750$

Cálculo para $x = 0.5$:

$$\begin{aligned} P_2(0.5) &= 1.22 + 1.35(0.5 - 0.2) + 0.75(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.4) \\ &= 1.22 + 1.35(0.3) + 0.75(0.3)(0.1) \\ &= 1.22 + 0.405 + 0.0225 \end{aligned}$$

$\mathbf{P_2(0.5) = 1.6475}$

c) Estimativa do Erro em $x = 0.5$

A fórmula do termo do erro para $P_2(x)$ (baseado nos pontos x_1, x_2, x_3) é:

$$E_2(x) = f[x_1, x_2, x_3, x] \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

O enunciado pede para estimar o termo $f[x_1, x_2, x_3, x]$ usando o **valor máximo em módulo das diferenças de ordem 3**.

- Olhando a tabela (coluna "Ord 3"):
- $|f[x_0, x_1, x_2, x_3]| = |0.2083|$
- $|f[x_1, x_2, x_3, x_4]| = |-0.2083| = 0.2083$
- $|f[x_2, x_3, x_4, x_5]| = |0.2083|$

O valor máximo em módulo é $\mathbf{M_3} \approx \mathbf{0.2083}$ (ou, exatamente, 5/24).

Cálculo do erro estimado em $x = 0.5$:

$$\begin{aligned} |E_2(0.5)| &\approx M_3 \cdot |(0.5 - x_1)(0.5 - x_2)(0.5 - x_3)| \\ &\approx 0.2083 \cdot |(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.6)| \\ &\approx 0.2083 \cdot |(0.3)(0.1)(-0.1)| \end{aligned}$$

c) Estimativa do Erro em $x = 0.5$

A fórmula do termo do erro para $P_2(x)$ (baseado nos pontos x_1, x_2, x_3) é:

$$E_2(x) = f[x_1, x_2, x_3, x] \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

O enunciado pede para estimar o termo $f[x_1, x_2, x_3, x]$ usando o **valor máximo em módulo das diferenças de ordem 3**.

- Olhando a tabela (coluna "Ord 3"):
- $|f[x_0, x_1, x_2, x_3]| = |0.2083|$
- $|f[x_1, x_2, x_3, x_4]| = |-0.2083| = 0.2083$
- $|f[x_2, x_3, x_4, x_5]| = |0.2083|$

O valor máximo em módulo é $\mathbf{M_3} \approx \mathbf{0.2083}$ (ou, exatamente, $5/24$).

Cálculo do erro estimado em $x = 0.5$:

$$\begin{aligned} |E_2(0.5)| &\approx M_3 \cdot |(0.5 - x_1)(0.5 - x_2)(0.5 - x_3)| \\ &\approx 0.2083 \cdot |(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.6)| \\ &\approx 0.2083 \cdot |(0.3)(0.1)(-0.1)| \end{aligned}$$

c) Estimativa do Erro em $x = 0.5$

A fórmula do termo do erro para $P_2(x)$ (baseado nos pontos x_1, x_2, x_3) é:

$$E_2(x) = f[x_1, x_2, x_3, x] \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

O enunciado pede para estimar o termo $f[x_1, x_2, x_3, x]$ usando o **valor máximo em módulo das diferenças de ordem 3**.

- Olhando a tabela (coluna "Ord 3"):
- $|f[x_0, x_1, x_2, x_3]| = |0.2083|$
- $|f[x_1, x_2, x_3, x_4]| = |-0.2083| = 0.2083$
- $|f[x_2, x_3, x_4, x_5]| = |0.2083|$

O valor máximo em módulo é $\mathbf{M_3} \approx \mathbf{0.2083}$ (ou, exatamente, $5/24$).

Cálculo do erro estimado em $x = 0.5$:

$$\begin{aligned} |E_2(0.5)| &\approx M_3 \cdot |(0.5 - x_1)(0.5 - x_2)(0.5 - x_3)| \\ &\approx 0.2083 \cdot |(0.5 - 0.2)(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.6)| \\ &\approx 0.2083 \cdot |(0.3)(0.1)(-0.1)| \end{aligned}$$

Roteiro da Aula