

Questão 1

April 21, 2023

Dada uma árvore AVL de altura h , qual seria o menor número possível de nós desta árvore?

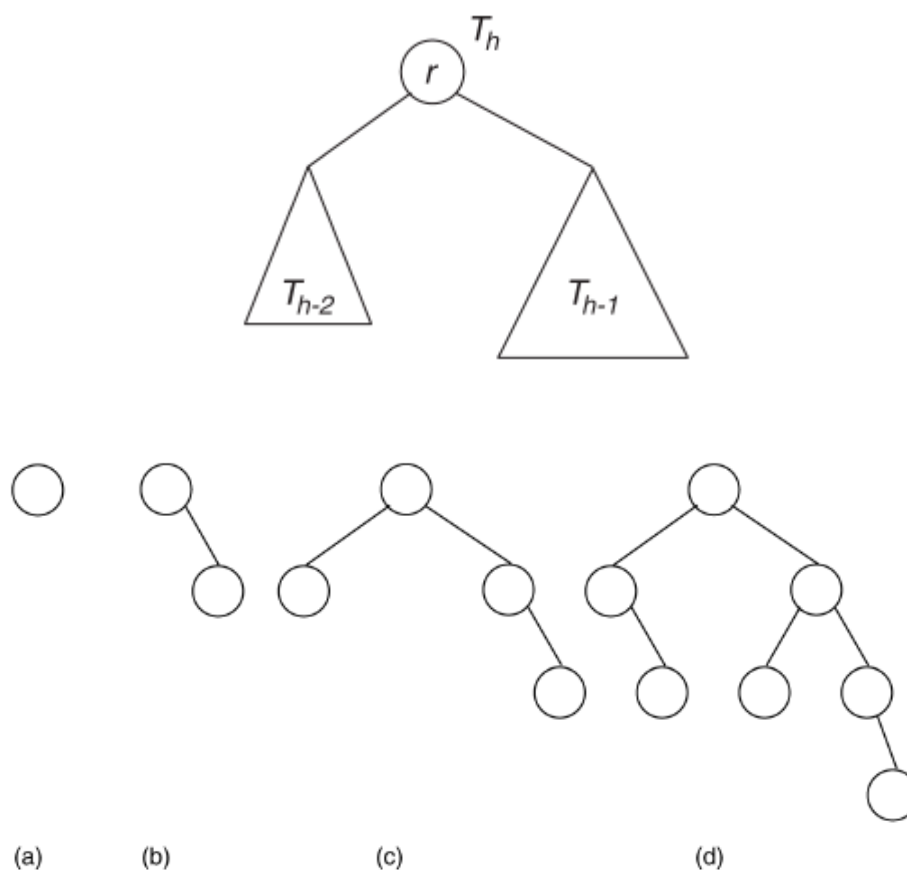
1 Árvores de Fibonacci

Ao analisarmos uma árvore AVL de altura h observamos inicialmente que uma de suas subárvores da raiz possui obrigatoriamente altura $h - 1$. Para manter-se AVL, a altura da outra subárvore se restringe a $h - 1$ ou $h - 2$. Como buscamos o número mínimo de nós, adotamos $h - 2$ como altura da segunda subárvore.

Essa observação permite que a árvore procurada seja construída recursivamente. Para encontrarmos o número mínimo de nós em T_h , devemos considerar 3 casos: Se $h = 0$, então T é vazia. Se $h = 1$, então T é constituída de um único nó. Caso contrário, adotamos um nó v como raiz e teremos $T(h - 1)$ e $T(h - 2)$ como subárvores de v . Agora basta aplicarmos este raciocínio recursivamente para $T(h - 1)$ e $T(h - 2)$. Abaixo temos a descrição do algoritmo:

$$\begin{cases} |T_b| = 0, & \text{para } b = 0 \\ |T_b| = 1, & b = 1 \\ |T_b| = 1 + |T_{b-1}| + |T_{b-2}|, & b > 1 \end{cases}$$

A figura abaixo ilustra o processo de construção:



Note que as árvores a e b seguem os casos descritos anteriormente ($h = 0$ e $h = 1$). Já quando $h > 1$, as árvores são formadas a partir das duas anteriores. Por exemplo, a árvore c é formada a partir de um nó raiz, e suas subárvores são a e b .

2 Resolução da questão 1

Conforme apresentado na sessão anterior, fica evidente como construir recursivamente árvores AVL de altura h , com o mínimo de nós. Note que, quando $h > 2$, há a ocorrência um nó que, caso removido, provoca $O(\log n)$ operações de rotação, isto é, torna-se necessário a regulagem de todos os seus ancestrais, com a rotação apropriada.

A partir dessa observação, fica evidente que, seja uma árvore AVL T de altura $h > 2$ e número mínimo de nós, a remoção de um nó p específico provoca $O(\log n)$ operações de rotação.

Exemplo: Na árvore a seguir deseja-se excluir o nó d . Após a exclusão, o nó c deve ser regulado, por meio de rotação dupla direta, tornando e desregulado. Aplica-se então mais uma rotação, e o processo é terminado.

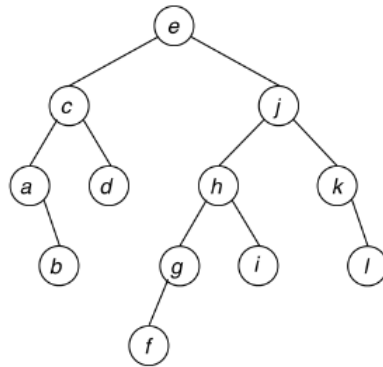


Figure 1: deseja-se remover d

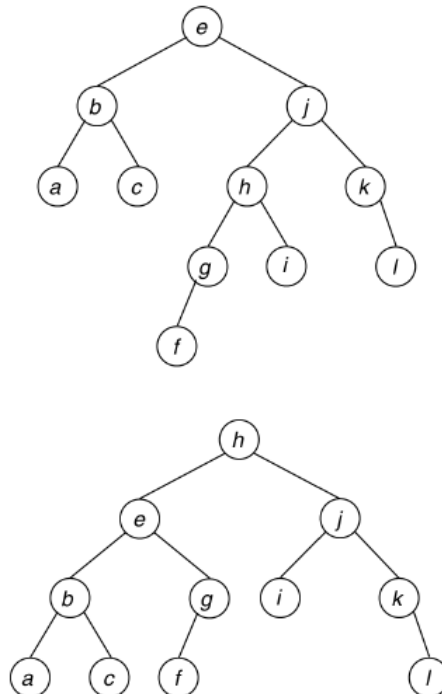


Figure 2: Árvore final

Resposta final: Árvores AVL de altura $h > 2$ com número mínimo de nós. Os nós que se removidos provocam $O(\log n)$ operações de rotação, são aqueles mais externos da menor subárvore ou alguma folha que seja a única no menor nível possível, também pertencente a menor subárvore.