Resumo Controle 1

Data	@17/08/2021
Disciplina	Controle 1
Semana	Resumo

Sumário

Funções de Transferência de Elementos Dinâmicos

$$a_2 d^2 \frac{\theta_0}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_0}{dt} + a_0\theta_0 = b_1\theta_i$$

- A **função de transferência** $G(s)$ de um sistema linear que descreve o comportamento dinâmico é definia como a ração da transformada de Laplace da variável de saída $\theta_0(s)$ pela transformada de Laplace da variável de entrada $\theta_i(s)$:

$$G(s) = \frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{b_1}{a_2 s + a_1 s + a_0}$$

Voltar ao Topo

Elementos de Primeira e Segunda Ordens

- **Ordem do sistema**: A mais alta potência da derivada na equação diferencial ou a mais alta potência de s no denominador
- **Forma Geral Sistema de Primeira Ordem no domínio** s:
- **Forma Geral Sistema de Segunda Ordem no domínio** s:

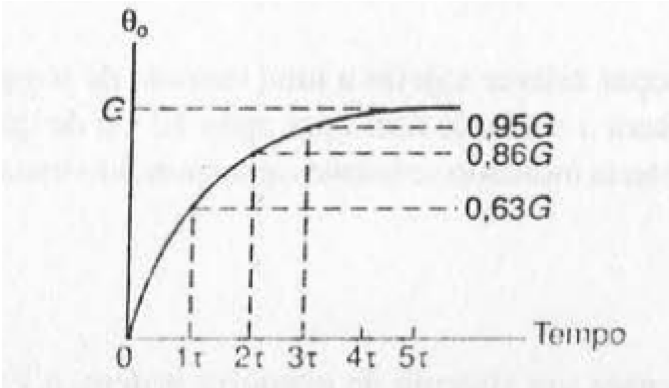
$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{(b_0/a_0)}{(a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1} = \frac{b_0\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sistemas de Primeira Ordem

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{b_0/a_0}{(a_1/a_0)+1} = \frac{G}{\tau s + 1}$$

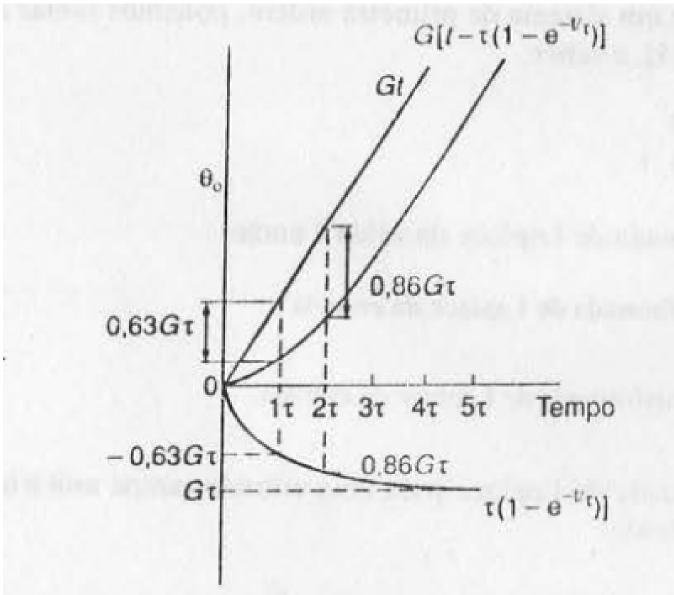
Entrada Degrau para Sistema de Primeira Ordem

- **Reposta**: $\theta_o = G[1 - e^{(-t/\tau)}]$



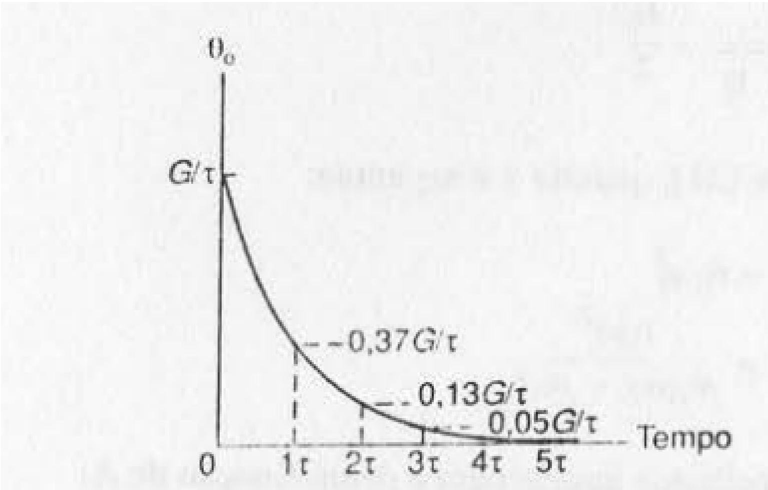
Entrada Rampa para Sistema de Primeira Ordem

- **Reposta**: $\theta_o = G[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})]$



Entrada Impulso para um Sistema de Primeira Ordem

- **Resposta:** $\theta_o = G(1/\tau)e^{-t/\tau}$



Sistemas de Segunda Ordem

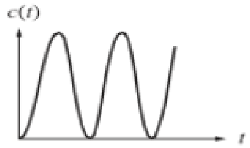
$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{(b_0/a_0)}{(a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1} = \frac{b_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Entrada Degrau para Sistema de Segunda Ordem

Característica da resposta de sistemas de 2ª ordem:

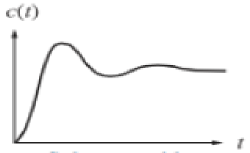
Amortecimento	**Classificação**	**Raízes**
$\zeta > 1$	Super amortecida	2, Reais
$\zeta = 1$	Criticamente Amortecida	1, Reais iguais
$0 < \zeta < 1$	Sub amortecida	2, Complexas
$\zeta = 0$	Não Amortecida	2, Complexas Puras

Resposta	
	$\theta_o = b_0[1 - \sin \omega_n t]$
	$\theta_o = b_0[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} e^{-(\zeta\omega_n)t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \phi)]$, $\cos\phi = \zeta$
	$\theta_o = b_0[1 - e^{(-\omega_n)t} - \omega_n t e^{(-\omega_n)t}]$

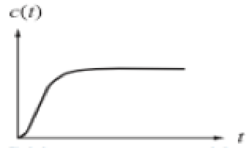


Não amortecida

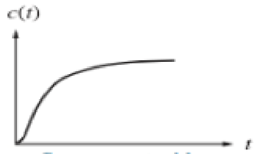
$$\theta_0 = 1 + [\mp \frac{b_0 \zeta}{2\sqrt{(\zeta^2-1)}} - \frac{b_0}{2}]e^{(-\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{(\zeta^2-1)})t}$$



Subamortecida



Criticamente amortecida



Superamortecida

Medidas de Desempenho Para Sistemas de Segunda Ordem

- **Tempo de pico** $\omega t_P = \pi$: Tempo gasto para a resposta ir de 0 ao primeiro valor de pico. Tempo para a resposta oscilatória completar um meio ciclo, π
- **Sobre Sinal**: Quantidade máxima na qual a reposta ultrapassa o valor em regime permanente. Amplitude do primeiro pico.
- **Sobre Sinal Percentual** $\exp(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}) \times 100\%$: Porcentagem do valor em regime permanente
- **Primeiro Sobre Sinal**: $\theta_{ss} \exp(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}})$
- **Segundo Sobre Sinal**: $\theta_{ss} \exp(\frac{-2\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}})$
- **Razão de Decaimento:** $\exp|\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}|$ **:** Indica a velocidade de decaimento, razão entre a amplitude do segundo sobre sinal e amplitude do primeiro sobre sinal
- **Tempo de Estabilização** t_s : Tempo gasto para que as oscilações desapareçam, resposta diminuir e ficar dentro de um percentual
- **Tempo de Estabilização** t_s **2% do valor final:** $t_s = 4/\zeta\omega_n$
- **Tempo de Estabilização** t_s **5% do valor final:** $t_s = 3/\zeta\omega_n$

- **Período**: 2π / ω_n
- **Número de Oscilações** = tempo de estabilização / período : $2/\pi \sqrt{(\frac{1}{\zeta^2} - 1)}$

Classificação dos Sistemas

- O sistema em malha fechada é considerado tendo realimentação unitária
- Os sistemas são classificados com base na função de transferência do ramo direto com realimentação unitária, a **função de transferência de malha aberta** de um sistema em malha fechada
- A **função de transferência de malha aberta** de um sistema com função de transferência do ramo direto $G(s)$ e de realimentação $H(s)$ é calculada por:

$$G_o(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]}$$

- A função de transferência de malha aberta de sistemas tem a **forma geral**:

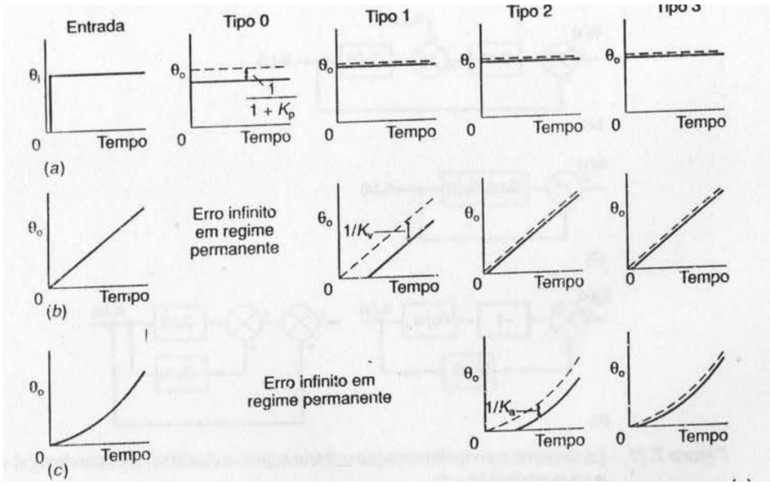
$$\frac{K(s^m+a_{m-1}s^{m-1}+a_{m-2}s^{m-2}+...+a_1s+a_0)}{s^q(s^n+b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+...+b_1s+b_0)}$$

- q é o valor chamado **tipo** ou **classe do sistema.** Identifica o número de fatores $1/s$ na , ou número de integradores função de transferência de malha aberta

Erro em Regime Permanente

- **Erro**: A diferença entre o sinal de saída de saída, a referência, e o sinal de saída real que ocorre no sistema:

$$E(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s)$$



Classificação dos Sistemas

- A **função de transferência de malha aberta** de um sistema com função de transferência do ramo direto $G(s)$ e de realimentação $H(s)$ é calculada por:

$$G_o(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]}$$

- A função de transferência de malha aberta de sistemas tem a **forma geral**:

$$\frac{K(s^m+a_{m-1}s^{m-1}+a_{m-2}s^{m-2}+...+a_1s+a_0)}{s^q(s^n+b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+...+b_1s+b_0)}$$

- q é o valor chamado **tipo** ou **classe do sistema**
- Identifica o **número de integradores** ou termos independentes s no denominador ($1/s$) na **função de transferência de malha aberta**

Erro em Regime Permanente para uma Entrada Degrau

- K_P é chamado **constante de erro de posição**, sem unidades:

$$K_P = \lim_{s \to 0} G_0(s)$$

- O erro em regime permanente para um **sistema tipo 0** é:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_P}$$

- Para sistemas de tipo maiores o **erro em regime permanente** é 0

Erro em Regime Permanente para uma Entrada Rampa

- K_V é chamado **constante de erro de erro de velocidade**, e tem unidade s^{-1}:

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG_0(s)$$

- Para um entrada rampa com uma razão de variação com o tempo de uma constante A, o erro em regime permanente para o **sistema tipo 1** é:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_V}$$

- Para sistemas de tipo maiores o **erro em regime permanente** é 0
- Para sistemas de tipo 1 o **erro em regime permanente** é ∞

Erro em Regime Permanente para uma Entrada Parabólica

- K_A é chamado **constante de erro de erro de aceleração**, e tem unidade s^{-2}:

$$K_A = \lim_{s \to 0} s^2 G_0(s)$$

- Se a entrada é parabólica da forma $\frac{A}{s^3}$, onde A é uma constante, o erro em regime permanente para o **sistema tipo 2** é:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_A}$$

- Para sistemas de tipo maiores o **erro em regime permanente** é 0
- Para sistemas de tipo menores o **erro em regime permanente** é ∞

Erro em Regime Permanente para Entradas Diferentes

- Pelo principio da superposição, o erro em regime permanente é igual a soma dos erros de cada segmento do sinal de entrada

Pólos e Zeros

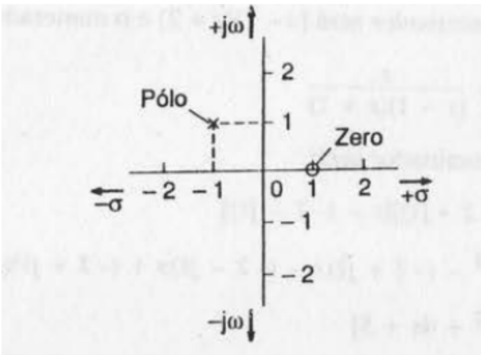
- A função de transferência em malha fechada pode ser representada como:

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}$$

- Os **zeros** são as raízes $-z_1, -z_2, ..., -z_m$ do numerador e os valores de s para os quais a função de transferência é zero
- Os **pólos** são as raízes $-p_1, -p_2, ..., -p_n$ do denominador e os valores de s para os quais a função de transferência é infinita

Diagrama de Pólos e Zeros

- Forma de representar os pólos e zeros de uma função de transferência
- O eixo x é a parte real e o eixo y é a parte imaginária
- A posição de um **pólo** é marcada por um X
- A posição de um **zero** é marcada por um O
- O gráfico bidimensional é chamado plano s



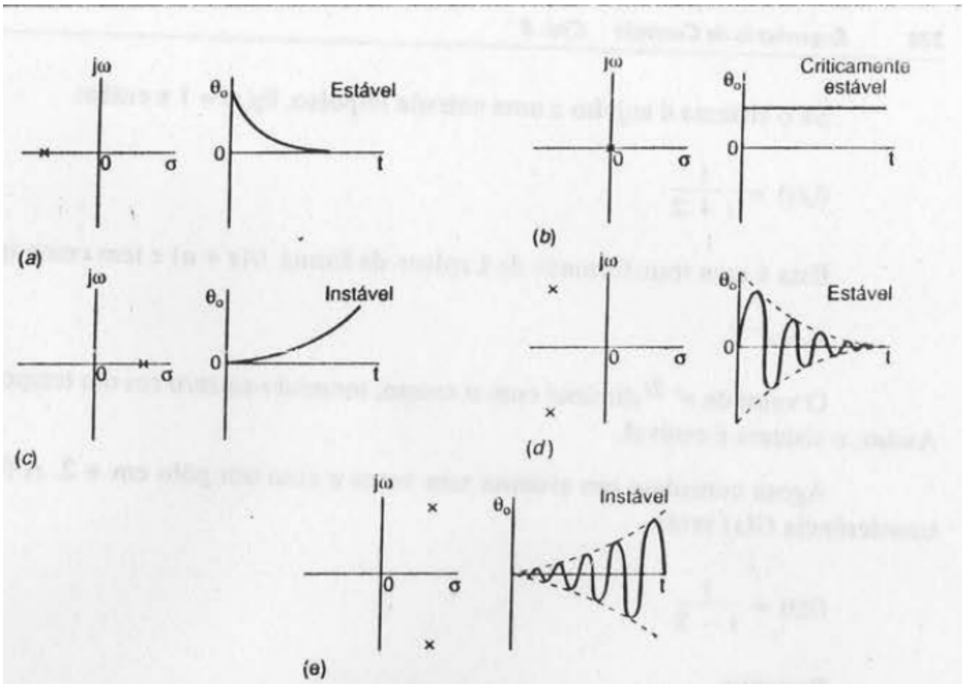
Estabilidade

- Um sistema é **estável** se para entradas finitas (limitadas) ele produz saídas limitadas (limite, saídas que tendem a algum valor)
- Um sistema é **instável** se para entradas finitas (limitadas) ele **não** produz saídas limitadas

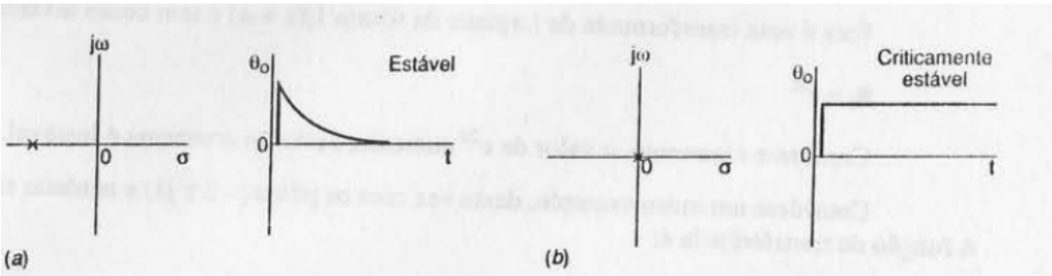
Por Análise de Pólos:

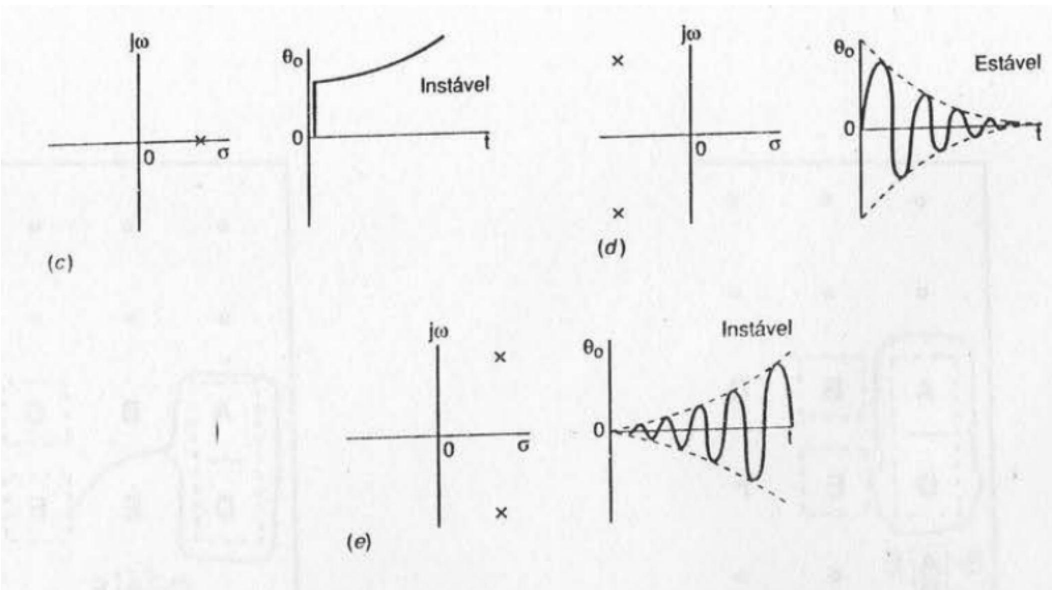
- **Estabilidade**: Todos os pólos devem ter parte real negativa
- **Criticamente Estável**: Um ou mais pólos tem parte real zero e nenhuma pode ser positiva
- **Instabilidade**: Um ou mais pólos tem parte real positiva

Saídas para diferentes Pólos a uma Entrada Impulso



Saídas para diferentes Pólos a uma Entrada Degrau



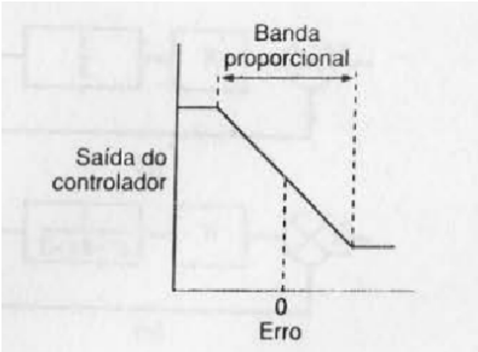


Controle Proporcional

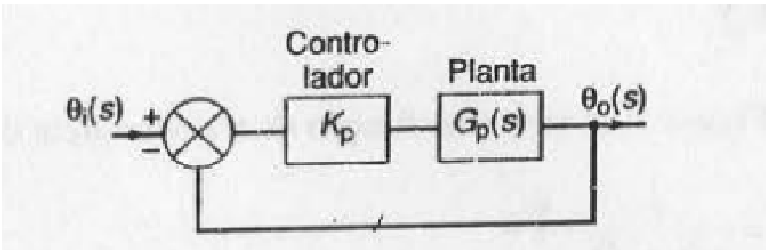
- A saída do controlador é proporcional ao erro e a **constante de ganho proporcional, K_P.** Depende apenas da amplitude do erro no instante de tempo

$$\text{Saída} = K_P e$$

- **Função de Transferência do Controlador**: $G_C(s) = K_P$
- O controlador é um amplificador com ganho constante
- Um ganho constante tende a existir somente para uma certa faixa de erros, chamada **banda proporcional**



- **Sistema com Controle Proporcional**:



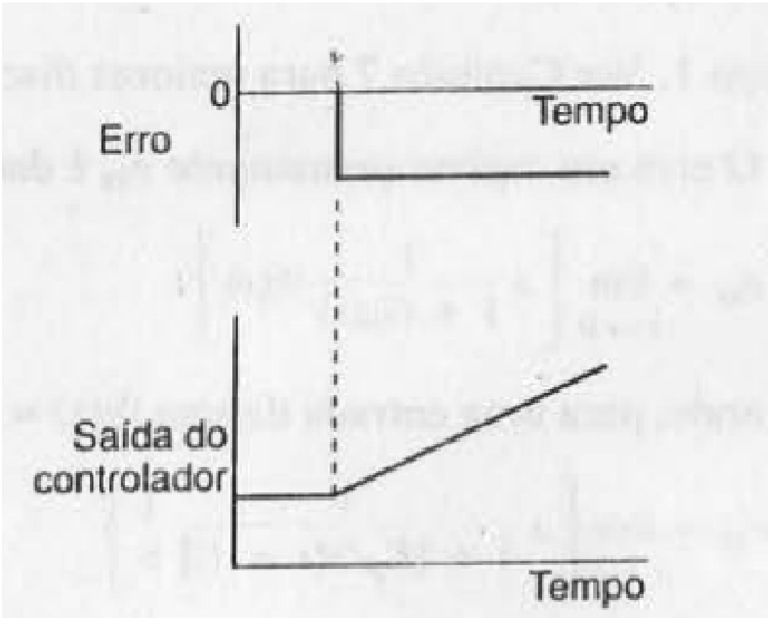
- **Função de Transferência**: $G_o(s) = K_P G_P(s)$
- Altera os pólos da função
- **Desvantagem**: O controlador não introduz o termo $1/s$ no ramo direto → Se o sistema é do tipo 0, continua sendo do tipo 0 → Continua com erro em regime permanente

Controle Integral

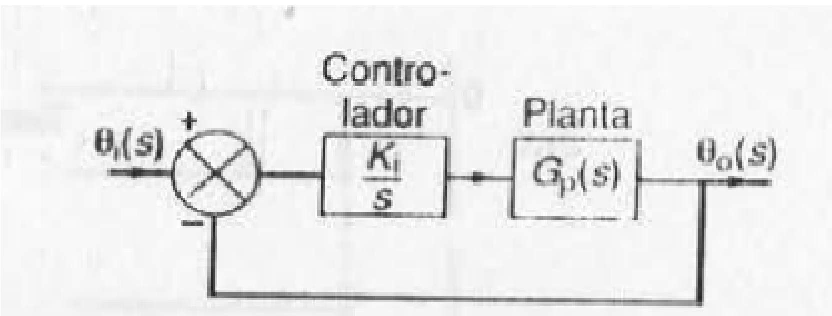
- A saída do controlador é proporcional à integral do sinal do erro e a **constante de ganho integral, K_I.** Tem unidade s^{-1}

$$\text{Saída} = K_I \int_0^1 e\, dt$$

- **Função de Transferência do Controlador**: $G_C(s) = \frac{K_I}{s}$
- A integral é a área da curva do sinal do erro e aumenta de maneira regular a medida que o erro aumenta
- A saída é proporcional ao acúmulo de efeitos de erros em momentos anteriores



- **Sistema com Controle Integral**:



- **Função de Transferência**: $G_o(s) = (\frac{K_I}{s})G_P(s)$
- **Vantagem**: O controlador introduz o termo $1/s$ no ramo direto → Aumenta o tipo do sistema em 1 → Se o sistema é do tipo 0, o erro em regime permanente desaparece para uma entrada degrau

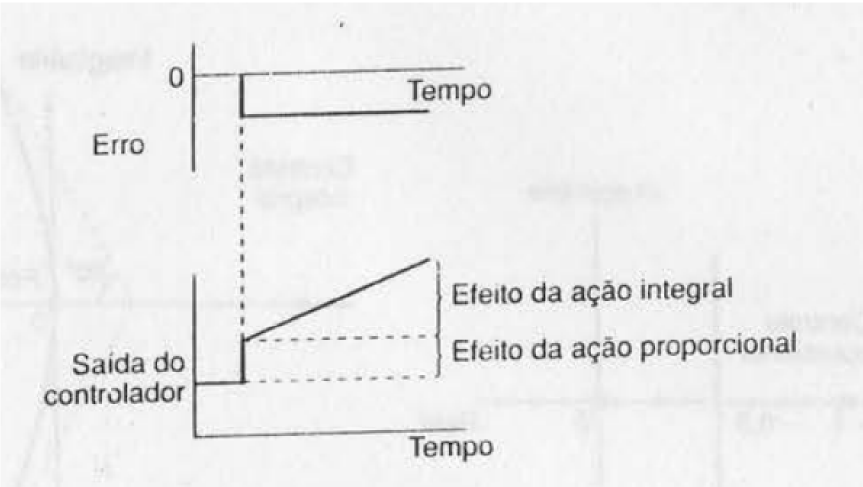
- **Desvantagem**: Introdução de um pólo na origem, a assíntotas da raízes apontam mais em direção ao semi plano direito to plano s, ou seja, a **estabilidade** relativa fica **reduzida**

Controle Proporcional + Integral

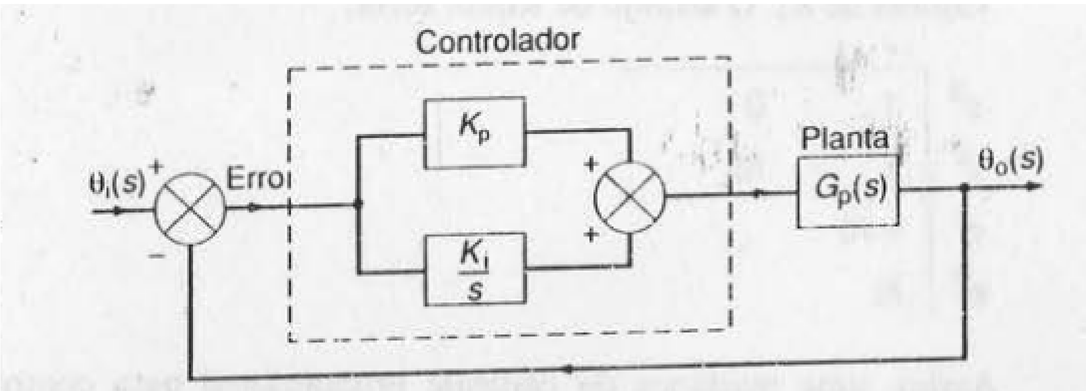
- A redução na estabilidade relativa resultante do controle integral pode ser resolvida pela ação de controle proporcional mais integral

$$\text{Saída} = K_P e + K_I \int_0^t e dt$$

- **Função de Transferência do Controlador**: $G_C(s) = \frac{K_P[s+(K_I/K_P)]}{s}$
- $\tau_I = K_P/K_I$ é a **constante de tempo integral**
- A saída do controlador quando existe um erro em degrau



Sistema com Controle Integral + Proporcional:



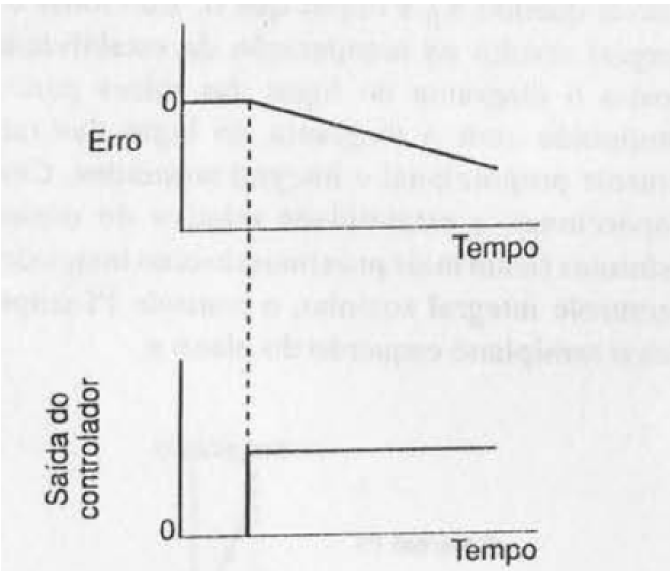
- **Função de Transferência**: $G_o(s) = (\frac{K_P[s+(1/\tau_I)]}{s})G_P(s)$
- **Vantagem**: O fator $1/s$ aumenta o tipo do sistema para 1 e remove a possibilidade de um erro em regime permanente para uma entrada degrau
- **Desvantagem**: Redução da estabilidade relativa, mas não é tão grande no caso do controle integral sozinho

Controle Derivativo

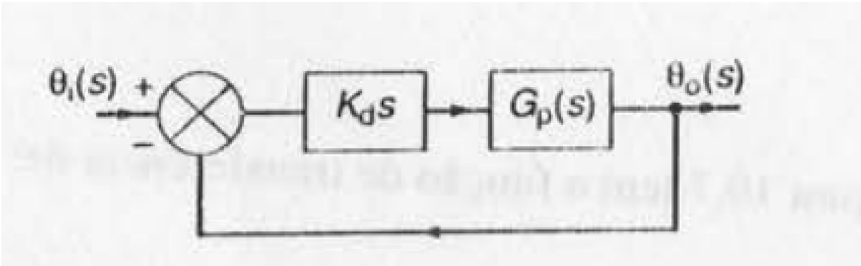
- A saída do controlador é proporcional à taxa de variação do sinal do erro e a **constante de ganho derivativo, K_D.** Tem unidade s

$$\text{Saída} = K_I \int_0^1 e \; dt$$

- **Função de Transferência do Controlador**: $G_C(s) = K_D s$
- O controle derivativo é insensível a sinais de erro constantes ou de variação lenta, é usado em combinação com outras formas de controle
- A saída é proporcional à taxa de variação do erro



- **Sistema com Controle Derivativo**:

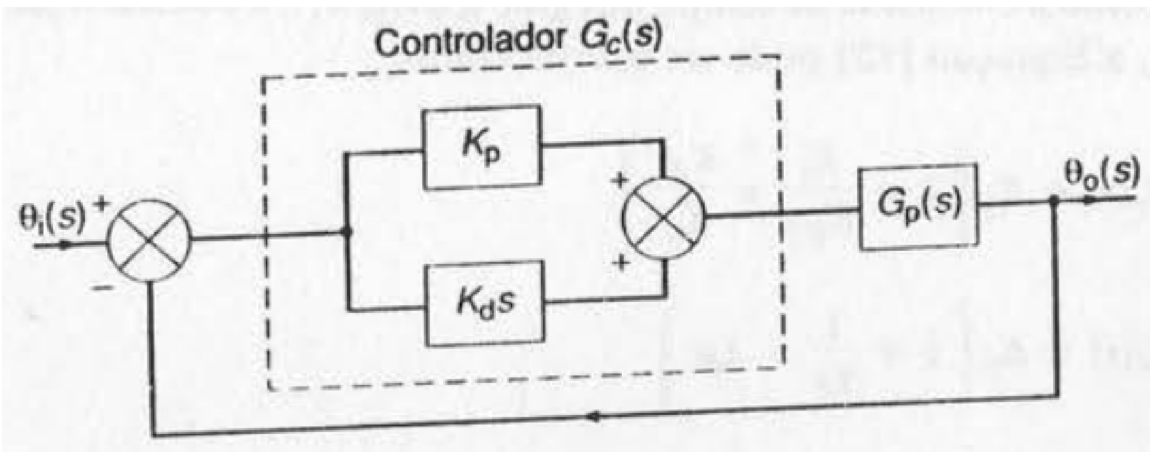


- **Função de Transferência**: $G_o(s) = \frac{K_D G_P(s)}{1+K_D s G_P(s)}$
- **Vantagem**: Usado com outras formas de controle, aumenta a velocidade de correção da resposta de um sistema ao erro
- **Desvantagem**: Cancela um termo $1/s$ e reduz a ordem do sistema em 1

- Na prática, um controle derivativo é obtido usando um **compensador em avanço**. O controlador tem função de transferência: $K(s+z)/(s+p), \text{com } p > z$

Controle Proporcional + Derivativo

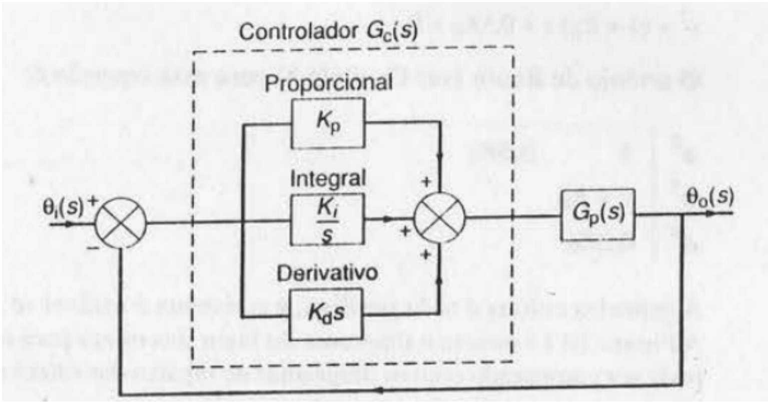
- **Função de Transferência**: $G_O(s) = (K_P + K_D s) G_P(s) = K_D[(1/\tau_D) + s] G_P(s)$
- $\tau_D = K_P/K_D$ é a **constante de tempo derivativo**
- Um zero é introduzido em $s = -1\tau_D$
- Sem mudanças no tipo do sistemas e no erro permanente
- **Sistema com Controle Proporcional + Derivativo:**



Voltar ao Topo

Controle PID

- Um controlador proporcionai mais derivativo mais integrativo (PID), ou controlador de três termos, em um sistema da forma:



Tem saída: $K_P e + K_I \int_0^1 edt + K_D \frac{de}{dt}$

- **Função de Transferência do Controlador**: $G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$

Como a constante de tempo integral τ_i é K_P/K_I e a constante de tempo derivatia τ_D é K_P/K_D, então:

- **Função de Transferência do Controlador**: $G_C(s) = K_P(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_D s$
- **Função de Transferência de Malha Aberta**: $G_O(s) = \frac{K_P(\tau_i S + 1 + \tau_i \tau_d s^2))G_P(s)}{\tau_i s}$

- O controlador PID aumenta em 2 o número de zeros e de 1 o número de pólos.
- O fator $1/s$ aumenta o tipo de 1
- Na prática, é utilizado um compensador em avanço e não um controlador PID ideal

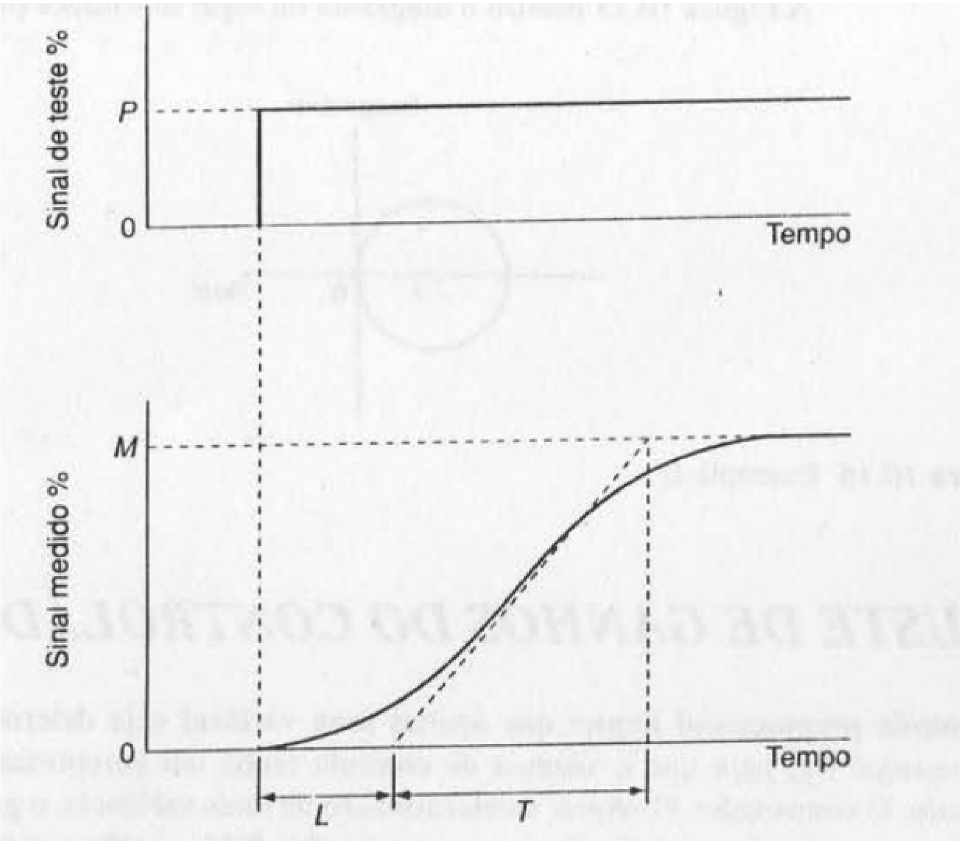
Ajustes de Ganho de Controlador

- **Sintonização:** Processo de selecionar a melhor regulação para o controlador

Método da Curva de Reação do Processo

- Abrir a malha de controle tal que nenhuma ação de controle ocorra

- Aplicar um sinal de entrada de teste e obter um valor de erro
- O sinal de teste deve ser o menor possível
- A curva do sinal medido é chamada **curva de reação do processo**



- O sinal de teste P é expresso como variação na porcentagem de correção
- A variável medida é expressa como a porcentagem da faixa de escala total
- A tangente exibe o gradiente máximo da curva
- O tempo que o sinal de teste começa e a tangente intercepta o eixo do tempo é chamado **tempo de atraso** L

Tabela 10.1 Critério da curva de reação do processo de Ziegler-Nichols.

Modo de controle	K_p	K_i	K_d
Proporcional	P/RL		
Proporcional + Integral	$0{,}9P/RL$	$1/3{,}33L$	
Proporcional + Integral + Derivativo	$1{,}2P/RL$	$1/2L$	$0{,}5L$

Método do Ciclo Máximo

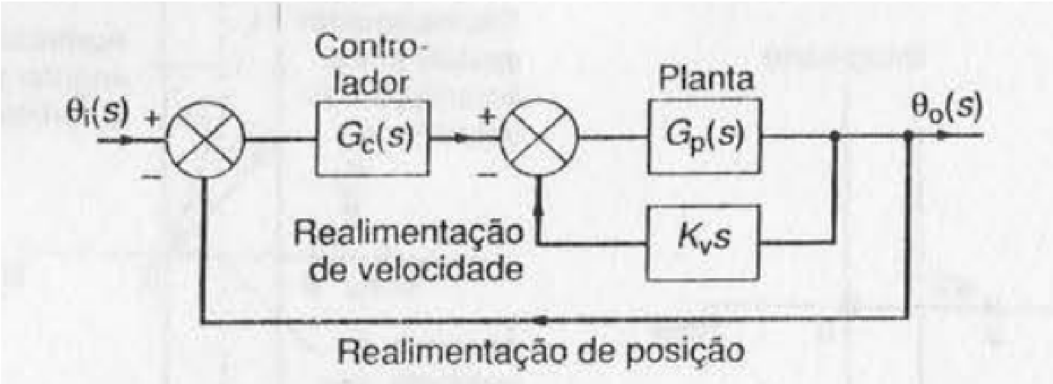
- As ações derivativas e integrativas são reduzidas para seus valores mínimos
- K_P é ajustada para um valor baixo e então é gradualmente aumentada
- Pequenos são distúrbios são aplicados enquanto isso, até gerar oscilações
- O valor crítico da constante K_{PC} é o observado e o período T_C das oscilações

Modo de controle	K_p	K_i	K_d
Proporcional	$0{,}5\ K_{pc}$		
Proporcional + Integral	$0{,}45\ K_{pc}$	$1{,}2/T_c$	
Proporcional + Integral + Derivativo	$0{,}6\ K_{pc}$	$2{,}0/T_c$	$T_c/8$

Realimentação de Velocidade

- Sistemas envolvendo o posicionamento de algum objeto, por exemplo, o braço de um robô, uma característica importante é o sistema responder rapidamente a erros e não produzir oscilações excessivas ou sobre-sinais
- Isso pode ser obtido inserindo um ramo de realimentação dentro do ramo de realimentação principal, a chama realimentação de velocidade
- A saída do ramo de realimentação está ligado é relacionada com a entrada por: $\text{Saída} = K_V \frac{d\theta_o}{dt}$
- **Função de Transferência de Realimentação**: $H(s) = K_V s$
- K_V é uma constante, o ganho da realimentação
- **Realimentação de Posição** é usada para designar realimentação do valor da saída, os termos aparecem de denominações anteriores para sistemas de controle de posição de

objetos



- A **realimentação de velocidade** introduz um termo $G_P(s)K_V s$ no denominador, e portanto, na equação característica. A estabilidade relativa aumenta, o amortecimento aumentou para a mesma frequência angular natural, e esta aumentou para o mesmo amortecimento
- O **sobre sinal percentual** é: $\exp\left(\frac{-\cos\phi}{\sqrt{1-\cos^2\phi}}\right) \times 100\% = \exp\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\phi}\right) \times 100\%$
- Incluir a realimentação de velocidade reduz ϕ para um valor particular de frequência angular natural → Uma redução na $\operatorname{tg}\phi$ e no sobre sinal

Parâmetros

Effects of *increasing* a parameter independently[22][23]

Parameter	Rise time	Overshoot	Settling time	Steady-state error	Stability
K_p	Decrease	Increase	Small change	Decrease	Degrade
K_i	Decrease	Increase	Increase	Eliminate	Degrade
K_d	Minor change	Decrease	Decrease	No effect in theory	Improve if K_d small