# Complexidade de Algoritmos

## Análise e notação assintótica

Prof. Marcelo de Souza

45RPE – Resolução de Problemas com Estruturas de Dados
Universidade do Estado de Santa Catarina

# Conceitos básicos

Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.

# Conceitos básicos

Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.

Exemplo:

**Problema da ordenação (não decrescente)**

**Entrada:** uma sequência $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de $n$ números.

**Saída:** uma permutação dos números $\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \rangle$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$.

# Conceitos básicos

Um **problema** é caracterizado pela descrição da sua **entrada** e **saída**.

Exemplo:

**Problema da ordenação (não decrescente)**

**Entrada:** uma sequência $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de $n$ números.

**Saída:** uma permutação dos números $\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \rangle$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$.

**Exemplo concreto do problema da ordenação**

**Entrada:** 7 8 1 4 6 3 9 → **instância**

**Saída:** 1 3 4 6 7 8 9 → **solução**/**resultado**

# Conceitos básicos

Dado um problema:

- Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?

# Conceitos básicos

Dado um problema:

- Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?

Qual medida usar para definir **bom** ou **melhor**?

- Correção;
- Simplicidade;
- Facilidade em codificar;
- Facilidade em manter;
- Tempo de processamento;
- Consumo de memória.

# Conceitos básicos

Dado um problema:

- Como saber se um algoritmo é bom para resolvê-lo?
- Como saber qual é o melhor algoritmo entre duas opções?

Qual medida usar para definir **bom** ou **melhor**?

- Correção;
- Simplicidade;
- Facilidade em codificar;
- Facilidade em manter;
- **Tempo de processamento**;
- **Consumo de memória**.

Análise de algoritmos (complexidade)

Como medir a complexidade de um algoritmo?

# Análise de algoritmos

## Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- Comparação prejudicada;
- Necessário implementar e executar todos os algoritmos.

# Análise de algoritmos

## Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- Comparação prejudicada;
- Necessário implementar e executar todos os algoritmos.

**Solução**: métodos analíticos.

- Definem a complexidade como uma função $f(n)$ do tamanho $n$ da entrada.

# Análise de algoritmos

## Como medir a complexidade?

Podemos executar o(s) algoritmo(s) e medir/plotar os resultados. Problemas:

- Sensível às entradas escolhidas, ao *software* e ao *hardware* usados;
- Comparação prejudicada;
- Necessário implementar e executar todos os algoritmos.

**Solução**: métodos analíticos.

- Definem a complexidade como uma função $f(n)$ do tamanho $n$ da entrada.

**Ideia geral** (complexidade de tempo):

- Contar o número de operações primitivas executadas pelo algoritmo;
- Cada operação primitiva executa em um tempo constante;
- Quanto menor o número de operações, mais eficiente é o algoritmo.

| **Operações primitivas são passos básicos do algoritmo** | **Exemplos** |
| --- | --- |
| ▶ Atribuição de valores; | `int a = 10;` |
| ▶ Operações aritméticas ou lógicas; | `int b = a - 7` |
| ▶ Comparação de valores; | `if (b < 5)` |
| ▶ Acesso a um elemento de um vetor; | `int c = v[3];` |
| ▶ Recuperar a referência de um objeto; | `Object x = this;` |
| ▶ Chamada de um método; | `this.compute();` |
| ▶ Retorno de um método. | `return result;` |

# Análise de algoritmos

## Exemplo

Algoritmo `arrayMax(A, n)`:

```
# Entrada: um vetor A com n ≥ 1 elementos inteiros.
# Saída: o maior elemento de A.

currentMax ← A[0]
for i ← 1 to n - 1 do
  if currentMax < A[i] then
    currentMax ← A[i]

return currentMax
```

# Análise de algoritmos

## Exemplo

Algoritmo `arrayMax(A, n)`:

```
1 # Entrada: um vetor A com n ≥ 1 elementos inteiros.
2 # Saída: o maior elemento de A.
3
4 currentMax ← A[0]
5 for i ← 1 to n - 1 do
6   if currentMax < A[i] then
7     currentMax ← A[i]
8
9 return currentMax
```

| Linha | Operações | |
|---|---|---|
| 4 | 1 acesso ao vetor + 1 atribuição | 2 |
| 5 | 1 inicialização + $n$ comparações + $2(n-1)$ incrementos | $3n-1$ |
| 6 | 1 acesso ao vetor + 1 comparação, repetidos $n-1$ vezes $\to 2(n-1)$ | $2n-2$ |
| 7 | 0 [cond. nunca satisfeito] a $2(n-1)$ [cond. sempre satisfeito] | $[0, 2n-2]$ |
| 9 | 1 retorno | 1 |

# Análise de algoritmos

## Exemplo

Complexidade de tempo no **melhor caso** (`A[0]` é o maior elemento):

- $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 1 = 5n.$

Complexidade de tempo no **pior caso** (`A[n - 1]` é o maior elemento):

- $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 2n - 2 + 1 = 7n - 2.$

Complexidade de tempo no **caso médio**:

- Depende da distribuição das entradas e do uso de teoria de probabilidades.

# Análise de algoritmos

## Exemplo

Complexidade de tempo no **melhor caso** (`A[0]` é o maior elemento):

- $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 1 = 5n$.

Complexidade de tempo no **pior caso** (`A[n - 1]` é o maior elemento):

- $T(n) = 2 + 3n - 1 + 2n - 2 + 2n - 2 + 1 = 7n - 2$.

Complexidade de tempo no **caso médio**:

- Depende da distribuição das entradas e do uso de teoria de probabilidades.

Normalmente se considera a complexidade no **pior caso**, pois fornece um limite superior do tempo de execução. Logo:

- O algoritmo `arrayMax` executará no máximo $7n - 2$ operações para cumprir sua tarefa;
- Seja $a$ o tempo gasto na operação primitiva mais complexa sob determinados *hardware* e *software*, o tempo de execução do algoritmo `arrayMax` será de, no máximo, $a(7n - 2)$.

# Análise de algoritmos

## Taxa de crescimento

Note que $T(n) = 7n - 2$ é uma função linear.

- O tempo de processamento cresce na mesma proporção do tamanho da entrada ($n$);
- A complexidade tempo desse algoritmo é **linear**.

# Análise de algoritmos

## Taxa de crescimento

Note que $T(n) = 7n - 2$ é uma função linear.

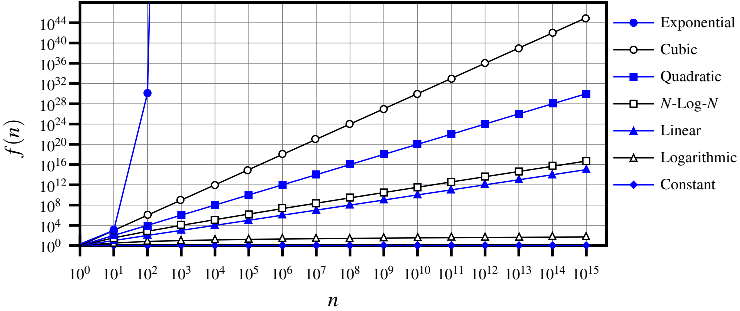
- O tempo de processamento cresce na mesma proporção do tamanho da entrada ($n$);
- A complexidade tempo desse algoritmo é **linear**.

A complexidade $T(n)$ pode ser definida por funções com diferentes taxas de crescimento:

- constante $\approx 1$
- logarítmica $\approx \log n$
- linear $\approx n$
- n-log-n $\approx n \log n$
- quadrática $\approx n^2$
- cúbica $\approx n^3$
- polinomial $\approx n^k$
- exponencial $\approx a^n \quad (a > 1)$

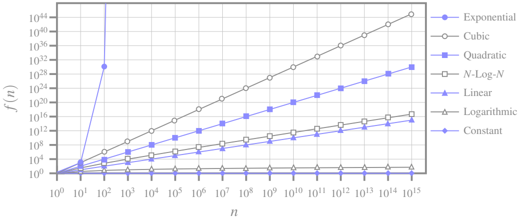
# Análise de algoritmos

## Taxa de crescimento das funções de complexidade



# Análise de algoritmos

## Taxa de crescimento das funções de complexidade

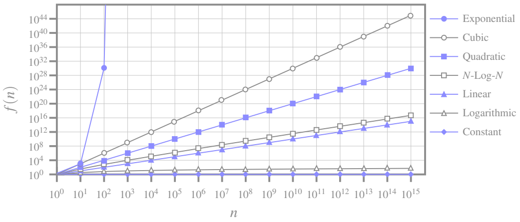



Número de operações

| $n$ | $\log n$ | $n$ | $n \log n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | 8 | 24 | 64 | 512 | 256 |
| 16 | 4 | 16 | 64 | 256 | 4 096 | 65 536 |
| 32 | 5 | 32 | 160 | 1 024 | 32 768 | $4{,}3 \times 10^9$ |
| 64 | 6 | 64 | 384 | 4 096 | 262 144 | $1{,}8 \times 10^{19}$ |
| 128 | 7 | 128 | 896 | 16384 | $2{,}1 \times 10^6$ | $3{,}4 \times 10^{38}$ |
| 256 | 8 | 256 | 2 048 | 65 536 | $1{,}7 \times 10^7$ | $1{,}2 \times 10^{77}$ |
| 512 | 9 | 512 | 4 608 | 262 144 | $1{,}3 \times 10^8$ | $1{,}3 \times 10^{154}$ |

# Análise de algoritmos

## Taxa de crescimento das funções de complexidade




**Número de operações**

| $n$ | $\log n$ | $n$ | $n \log n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | 8 | 24 | 64 | 512 | 256 |
| 16 | 4 | 16 | 64 | 256 | 4 096 | 65 536 |
| 32 | 5 | 32 | 160 | 1 024 | 32 768 | $4,3 \times 10^9$ |
| 64 | 6 | 64 | 384 | 4 096 | 262 144 | $1,8 \times 10^{19}$ |
| 128 | 7 | 128 | 896 | 16384 | $2,1 \times 10^6$ | $3,4 \times 10^{38}$ |
| 256 | 8 | 256 | 2 048 | 65 536 | $1,7 \times 10^7$ | $1,2 \times 10^{77}$ |
| 512 | 9 | 512 | 4 608 | 262 144 | $1,3 \times 10^8$ | $1,3 \times 10^{154}$ |

**Tempo de processamento**

| $n$ | $\log n$ | $n$ | $n \log n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | < 1s | < 1s | < 1s | < 1s | < 1s | $10^{13}$ anos |
| 1000 | < 1s | < 1s | < 1s | < 1s | 1s | $10^{284}$ anos |
| 10000 | < 1s | < 1s | < 1s | < 1s | 16 min | $10^{2993}$ anos |
| 100000 | < 1s | < 1s | < 1s | 10 s | 12 dias | – |
| 1000000 | < 1s | < 1s | < 1s | 16 min | 32 anos | – |

**Exemplo:** em um jogo existem 70 itens para compra (e.g., materiais, poderes e armas). Cada item tem um custo e fornece algum benefício. Itens combinados fornecem benefícios diferenciados. A fim de tomar a melhor decisão possível, queremos avaliar toda combinação possível de compra de itens, verificando o custo total e os benefícios esperados.

- Podemos representar uma compra usando um vetor binário $V \in \{0, 1\}^{70}$, onde o valor de uma posição $i \in [0, 70]$ indica se o item $i$ será comprado ou não.
- Devemos avaliar toda combinação possível de valores a $V$.

**Exemplo:** em um jogo existem 70 itens para compra (e.g., materiais, poderes e armas). Cada item tem um custo e fornece algum benefício. Itens combinados fornecem benefícios diferenciados. A fim de tomar a melhor decisão possível, queremos avaliar toda combinação possível de compra de itens, verificando o custo total e os benefícios esperados.

- Podemos representar uma compra usando um vetor binário $V \in \{0,1\}^{70}$, onde o valor de uma posição $i \in [0,70]$ indica se o item $i$ será comprado ou não.
- Devemos avaliar toda combinação possível de valores a $V$.

**Resultado:** o algoritmo de avaliação terá complexidade de tempo **exponencial** $\rightarrow 2^n$.

# Análise de algoritmos

## Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade $2^n$, para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar $10^9$ operações por segundo, demoraria 37 436 anos para terminar sua execução!

# Análise de algoritmos

## Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade $2^n$, para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar $10^9$ operações por segundo, demoraria 37 436 anos para terminar sua execução!

**E se usarmos um computador mais rápido?**

- $100\times$ mais rápido $\rightarrow$ 374 anos;
- $1\,000\times$ mais rápido $\rightarrow$ 37 anos;
- $1\,000\,000\times$ mais rápido $\rightarrow$ 136 dias;
- $100\,000\,000\times$ mais rápido $\rightarrow$ 1 dia.
    - Para $n = 80$, demoraria 140 dias;
    - Para $n = 100$, demoraria 401 969 anos.

# Análise de algoritmos

## Taxa de crescimento das funções de complexidade

Um algoritmo com complexidade $2^n$, para $n = 70$, executando em um computador capaz de processar $10^9$ operações por segundo, demoraria 37 436 anos para terminar sua execução!

**E se usarmos um computador mais rápido?**

- $100\times$ mais rápido $\rightarrow$ 374 anos;
- $1\,000\times$ mais rápido $\rightarrow$ 37 anos;
- $1\,000\,000\times$ mais rápido $\rightarrow$ 136 dias;
- $100\,000\,000\times$ mais rápido $\rightarrow$ 1 dia.
    - Para $n = 80$, demoraria 140 dias;
    - Para $n = 100$, demoraria 401 969 anos.

**Moral da história**

Um algoritmo melhor executando em um computador mais lento **ganhará sempre** de um algoritmo pior em um computador mais rápido, para instâncias suficientemente grandes.

# Análise assintótica

A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

# Análise assintótica

A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!

# Análise assintótica

A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!

A **análise assintótica** foca em descrever a taxa de crescimento da complexidade de um algoritmo em função do tamanho $n$ da entrada.

# Análise assintótica

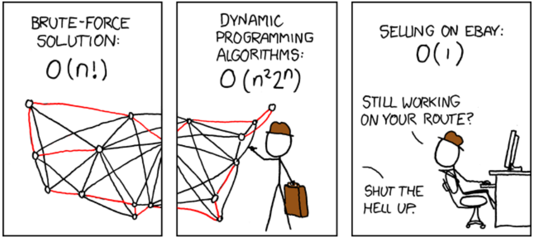
A análise completa (contagem de operações) é muito detalhada e onerosa.

Além disso, o que importa na prática é a **taxa de crescimento** da função de complexidade!

A **análise assintótica** foca em descrever a taxa de crescimento da complexidade de um algoritmo em função do tamanho $n$ da entrada.

Para isso, usaremos a notação $\mathcal{O}$ (*big-oh*).

- Bem como as notações $\Theta$ e $\Omega$.



# Análise assintótica

## Exemplo concreto

Qual a complexidade assintótica do algoritmo `arrayMax`?

```
# Entrada: um vetor A com n ≥ 1 elementos inteiros.
# Saída: o maior elemento de A.

currentMax ← A[0]
for i ← 1 to n - 1 do
  if currentMax < A[i] then
    currentMax ← A[i]

return currentMax
```

# Análise assintótica

## Exemplo concreto

Qual a complexidade assintótica do algoritmo `arrayMax`?

```
# Entrada: um vetor A com n ≥ 1 elementos inteiros.
# Saída: o maior elemento de A.

currentMax ← A[0]
for i ← 1 to n - 1 do
  if currentMax < A[i] then
    currentMax ← A[i]

return currentMax
```

Sabemos que, no pior caso, são executadas $7n - 2$ operações. Logo, esse algoritmo tem complexidade $\mathcal{O}(n)$. Isto é, complexidade linear.

- Não precisamos contar todas as operações. Basta identificarmos o termo de maior complexidade (neste caso, $n$), pois é quem define a taxa de crescimento da função!

# Análise assintótica

## Exemplo I

Algoritmo `sum_numbers(n1, n2)`:

```
# Soma dois números inteiros.
def sum_numbers(n1, n2):
  result = n1 + n2
  return result
}
```

# Análise assintótica

## Exemplo I

Algoritmo `sum_numbers(n1, n2)`:

```
1 # Soma dois números inteiros.
2 def sum_numbers(n1, n2):
3   result = n1 + n2
4   return result
5 }
```

**Análise:**

- Linhas 3 e 4 executam operações de tempo constante;
- Complexidade **constante**: $\mathcal{O}(1)$;
- Algoritmo de tempo constante.

# Análise assintótica

## Exemplo II

Algoritmo `disjoint1(vA, vB, vC)`:

```
# Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
# Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
def disjoint1(vA, vB, vC):
  for a in vA:
    for b in vB:
      for c in vC:
        if a == b and b == c:
          return False
  return True
}
```

# Análise assintótica

## Exemplo II

Algoritmo `disjoint1(vA, vB, vC)`:

```
1  # Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2  # Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3  def disjoint1(vA, vB, vC):
4    for a in vA:
5      for b in vB:
6        for c in vC:
7          if a == b and b == c:
8            return False
9    return True
10 }
```

**Análise:**

- A operação constante da linha 7 é repetida $n \times n \times n = n^3$ vezes;
- Complexidade **cúbica**: $\mathcal{O}(n^3)$;
- Algoritmo de tempo cúbico.

# Análise assintótica

## Exemplo III

Algoritmo `disjoint2(vA, vB, vC)`:

```
# Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
# Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
def disjoint2(vA, vB, vC) {
  for a in vA:
    for b in vB:
      if a == b:
        for c in vC:
          if a == c:
            return False
  return True
}
```

# Análise assintótica

## Exemplo III

Algoritmo `disjoint2(vA, vB, vC)`:

```
1  # Retorna true se não existe nenhum elemento comum nos três grupos.
2  # Cada vetor possui elementos distintos dentro de si.
3  def disjoint2(vA, vB, vC) {
4    for a in vA:
5      for b in vB:
6        if a == b:
7          for c in vC:
8            if a == c:
9              return False
10   return True
11 }
```

**Análise:**

- Os laços das linhas 4 e 5 sempre são executados – $\mathcal{O}(n^2)$;
- No máximo $n$ pares são iguais (lin. 6), então o laço da linha 7 executa no máximo $n$ vezes;
- Complexidade **quadrática**: $\mathcal{O}(n^2)$.

# Análise assintótica

## Exemplo IV

Algoritmo `repeat(c, n)`:

```
# Compõe uma string com o caractere c repetido n vezes.
def repeat(c, n):
  answer = ''
  for i in range(n):
    answer += c
  return answer
}
```

# Análise assintótica

## Exemplo IV

Algoritmo `repeat(c, n)`:

```
1 # Compõe uma string com o caractere c repetido n vezes.
2 def repeat(c, n):
3   answer = ''
4   for i in range(n):
5     answer += c
6   return answer
7 }
```

**Análise:**

- Strings são imutáveis em Python: o comando `answer += c` implica em criar uma nova string, copiar cada caractere da string antiga para ela, e acrescentar o caractere `c`;
- A linha 5 executa operações conforme o tamanho de `answer`: $1 + 2 + \cdots + n - 1$;
- Logo, sua complexidade é $\sum_{i=0}^{n-1} i = n(n+1)/2$;
- Complexidade **quadrática**: $\mathcal{O}(n^2)$.

# Análise assintótica

## Exemplo V

Algoritmo `unique1(data)`:

```python
# Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
def unique1(data):
  n = len(data)
  for i in range(n - 1):
    for j in range(i + 1, n):
      if data[i] == data[j]:
        return False
  return True
```

# Análise assintótica

## Exemplo V

Algoritmo `unique1(data)`:

```python
# Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
def unique1(data):
  n = len(data)
  for i in range(n - 1):
    for j in range(i + 1, n):
      if data[i] == data[j]:
        return False
  return True
```

**Análise:**

- O laço interno é executado $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$ vezes;
- Complexidade **quadrática**: $\mathcal{O}(n^2)$.

# Análise assintótica

## Exemplo VI

Algoritmo `unique2(int[] data)`:

```
# Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
# O vetor é ordenado para verificar apenas elementos subsequentes.
def unique2(data):
  n = len(data)
  data.sort() # Operação em O(n log n)
  for i in range(n - 1):
    if data[i] == data[i + 1]:
      return False
  return True
```

# Análise assintótica

## Exemplo VI

Algoritmo `unique2(int[] data)`:

```
# Retorna true se não existe elemento duplicado no vetor.
# O vetor é ordenado para verificar apenas elementos subsequentes.
def unique2(data):
  n = len(data)
  data.sort() # Operação em O(n log n)
  for i in range(n - 1):
    if data[i] == data[i + 1]:
      return False
  return True
```

**Análise:**

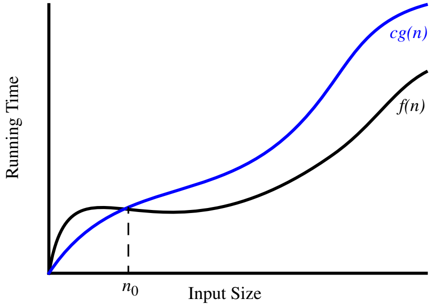
- A ordenação custa $n \log n$ e percorrer o vetor custa $n$;
- Complexidade **n log n**: $n \log n + n \iff \mathcal{O}(n \log n)$.

# Apêndices

# Apêndice I

## Definição formal da notação $\mathcal{O}$

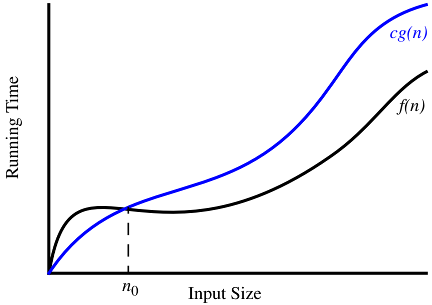
Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.



# Apêndice I

## Definição formal da notação $\mathcal{O}$

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.



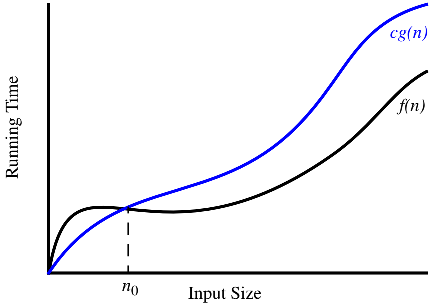

**Na prática**:

- Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $f(n)$ é "menor ou igual" a $g(n)$ a medida que $n$ cresce.
- Com isso, $g(n)$ é um limite superior para $f(n)$.
- Ou seja, $f(n)$ é tão boa quando $g(n)$.

# Apêndice I

## Definição formal da notação $\mathcal{O}$

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções que mapeiam o tamanho da entrada no tempo de processamento, dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se existe uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tais que $f(n) \leq cg(n)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.




**Na prática**:

- Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $f(n)$ é "menor ou igual" a $g(n)$ a medida que $n$ cresce.
- Com isso, $g(n)$ é um limite superior para $f(n)$.
- Ou seja, $f(n)$ é tão boa quando $g(n)$.

**Exemplo**: a função $T(n) = 7n - 2$ é $\mathcal{O}(n)$.

- Para $c = 7$ e $n_0 = 1$, temos que $7n - 2 \leq cn$, para todo $n \geq n_0$. Logo $T(n)$ é $\mathcal{O}(n)$.

**Notação $\mathcal{O}$ (majorante)**

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

**Notação $\mathcal{O}$ (majorante)**

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

**Notação $\Omega$ (minorante)**

Se $f(n)$ é $\Omega(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é melhor** que $cg(n)$.

### Notação $\mathcal{O}$ (majorante)

Se $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é pior** que $cg(n)$.

### Notação $\Omega$ (minorante)

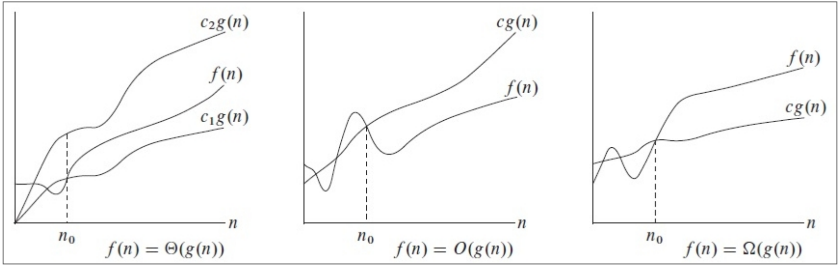
Se $f(n)$ é $\Omega(g(n))$, então $cg(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **não é melhor** que $cg(n)$.

### Notação $\Theta$ (limite "apertado" – majorante e minorante)

Se $f(n)$ é $\Theta(g(n))$, então $c_1 g(n)$ é um **limite inferior** para $f(n)$ e $c_2 g(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$. Ou seja, $f(n)$ **é igual** a $cg(n)$.

# Apêndice III

## Notações e suas relações




**Detalhes:**

- $f(n)$ é $\Theta(g(n)) \iff f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ e $f(n)$ é $\Omega(g(n))$.
- $f(n)$ é $\Theta(g(n)) \iff g(n)$ é $\Theta(f(n))$.
- $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n)) \iff g(n)$ é $\Omega(f(n))$.

45RPE – Resolução de Problemas com Estruturas de Dados
Prof. Marcelo de Souza