Lista de exercícios

1 Introdução

Exercício 1.1 (**Solução 1.1**)
Assista ao vídeo "*What's an algorithm?*" (David J. Malan).

⇒ https://youtu.be/6hfOvs8pY1k

Exercício 1.2 (**Solução 1.2**)
Assista ao vídeo "*Top 7 Data Structures for Interviews*".

⇒ https://youtu.be/cQWr9DFE1ww

2 Complexidade de algoritmos

Exercício 2.1 (**Solução 2.1**)
Desenhe o gráfico das funções $8n$, $4n \log n$, $2n^2$, n^3 e 2^n usando uma escala logarítmica para os eixos x e y, isto é, se o valor da função $f(x)$ é y, desenhe esse ponto com a coordenada x em $\log x$ e a coordenada y em $\log y$.

Exercício 2.2 (**Solução 2.2**)
O número de operações executadas por dois algoritmos `A` e `B` é $40n^2$ e $2n^3$, respectivamente. Determine n_0 tal que `A` seja melhor que `B` para $n \geq n_0$.

Exercício 2.3 (**Solução 2.3**)
O número de operações executadas por dois algoritmos `A` e `B` é $8n \log n$ e $2n^2$, respectivamente. Determine n_0 tal que `A` seja melhor que `B` para $n \geq n_0$.

Exercício 2.4 (**Solução 2.4**)
Ordene as funções a seguir por sua taxa assintótica de crescimento.

- $4n \log n + 2n$
- 2^{10}
- $3n + 100 \log n$
- $4n$
- 2^n
- $n^2 + 10n$
- n^3
- $n \log n$

Exercício 2.5 (**Solução 2.5**)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de $\mathcal{O}$) do algoritmo abaixo?

```
# Returns the sum of the integers in given array.
def alg1(arr):
  n = len(arr)
  total = 0
  for j in range(n):
    total += arr[j]
  return total
```

Exercício 2.6 (**Solução 2.6**)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de $\mathcal{O}$) do algoritmo abaixo?

```
# Returns the sum of the integers with even index in given array.
def alg2(arr):
  n = len(arr)
  total = 0
  for j in range(0, n, 2):
    total += arr[j]
  return total
```

Exercício 2.7 (**Solução 2.7**)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de $\mathcal{O}$) do algoritmo abaixo?

```
# Returns the sum of the prefix sums of given array.
def alg3(arr):
  n = len(arr)
  total = 0
  for j in range(n):
    for k in range(j + 1):
      total += arr[k]
  return total
```

Exercício 2.8 (**Solução 2.8**)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de $\mathcal{O}$) do algoritmo abaixo?

```
# Returns the sum of the prefix sums of given array.
def alg4(arr):
  n = len(arr)
  prefix = 0
  total = 0
  for j in range(n):
    prefix += arr[j]
    total += prefix
  return total
```

Exercício 2.9 (**Solução 2.9**)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de $\mathcal{O}$) do algoritmo abaixo?

```
# Returns the number of times second array stores sum of prefix sums from first.
def alg5(first, second):
  n = len(first)
  count = 0
  for i in range(n):
    total = 0
    for j in range(n):
      for k in range(j + 1):
        total += first[k]
    if second[i] == total:
      count += 1
  return count
```

Exercício 2.10 (**Solução 2.10**)
O algoritmo `A` executa uma computação em tempo $\mathcal{O}(\log n)$ para cada entrada de um arranjo de n elementos. Qual o pior caso em relação ao tempo de execução de `A`?

Exercício 2.11 (**Solução 2.11**)
Dado um arranjo `X` de n elementos, o algoritmo `B` escolhe $\log n$ elementos de `X`, aleatoriamente, e executa um cálculo em tempo $\mathcal{O}(n)$ para cada um. Qual o pior caso em relação ao tempo de execução de `B`?

Exercício 2.12 (**Solução 2.12**)
Dado um arranjo `X` de n elementos inteiros, o algoritmo `C` executa uma computação em tempo $\mathcal{O}(n)$ para cada número par de `X` e uma computação em tempo $\mathcal{O}(\log n)$ para cada elemento ímpar de `X`. Qual o melhor caso e o pior caso em relação ao tempo de execução de `C`?

Exercício 2.13 (**Solução 2.13**)
Dado um arranjo `X` de n elementos, o algoritmo `D` chama o algoritmo `E` para cada elemento `X[i]`. O algoritmo `E` executa em tempo $\mathcal{O}(i)$ quando é chamado sobre um elemento `X[i]`. Qual o pior caso em relação ao tempo de execução do algoritmo `D`?

Exercício 2.14 (**Solução 2.14**)
Implemente os algoritmos `disjoint1` e `disjoint2` (apresentados nos materiais de aula), e execute uma análise experimental dos seus tempos de execução. Visualize seus tempos de execução como uma função do tamanho da entrada usando um gráfico *di-log*.

Exercício 2.15 (**Solução 2.15**)
Execute uma análise experimental para testar a hipótese de que o método de ordenação do python (`sort` ou `sorted`) executa em um tempo médio $\mathcal{O}(n \log n)$.

Exercício 2.16 (**Solução 2.16**)
Execute uma análise experimental para determinar o maior valor de n para os algoritmos `unique1` e `unique2` (apresentados nos materiais de aula), de modo que o algoritmo execute em um minuto ou menos.

3 Estruturas fundamentais e listas

Exercício 3.1 (**Solução 3.1**)
Forneça uma implementação para o método `size()` da classe `LinkedList`, considerando que a mesma não mantenha o tamanho armazenado em uma variável. Qual a implicação dessa modificação na complexidade assintótica do método?

Exercício 3.2 (**Solução 3.2**)
Descreva um método para encontrar o nodo central de uma lista duplamente encadeada com nodos sentinelas, sem o uso de informações sobre o tamanho da lista. No caso de um número par de nodos, o método deve devolver o nodo à esquerda do ponto central. Qual a complexidade desse algoritmo?

Exercício 3.3 (**Solução 3.3**)
Descreva um algoritmo para concatenar duas listas duplamente encadeadas L e M com sentinelas, em uma lista única L'.

Exercício 3.4 (**Solução 3.4**)

Descreva em detalhes como trocar dois nodos x e y de posição (não apenas seu conteúdo) em uma lista simplesmente encadeada L, dadas as referências para x e y somente. Repita este exercício para o caso em que L é uma lista duplamente encadeada. Qual algoritmo possui maior complexidade?

Exercício 3.5 (**Solução 3.5**)

Implemente uma lista simplesmente encadeada que forneça operações de inserção e remoção nas duas extremidades, além dos métodos `size` e `is_empty`.

Exercício 3.6 (**Solução 3.6**)

Uma forma de melhorar o desempenho de uma lista duplamente encadeada é buscar pelo nodo desejado (para inserção ou remoção) "de trás para frente", quando conveniente. Como essa abordagem pode ser implementada? Qual o impacto na complexidade do procedimento de busca?

Exercício 3.7 (**Solução 3.7**)

Forneça uma representação de uma lista `L`, inicialmente vazia, após realizar as seguintes operações: `insert(0,4)`, `insert(0,3)`, `insert(0,2)`, `insert(2,1)`, `insert(1,5)`, `insert(1,6)`, `insert(3,7)`, `insert(0,8)`.

Exercício 3.8 (**Solução 3.8**)

Supondo que estamos mantendo uma coleção `C` de elementos de tal modo que, cada vez que adicionamos um novo elemento na coleção, copiamos o conteúdo de `C` em uma nova lista baseada em arranjo do tamanho exato ao necessário. Qual o tempo de processamento da adição de n elementos em uma coleção `C` inicialmente vazia?

Exercício 3.9 (**Solução 3.9**)

Considere a implementação de uma lista duplamente encadeada fornecida pela classe `LinkedList`. Implemente a função `toArray` que retorna uma lista baseada em arranjo com os elementos da lista encadeada.

Exercício 3.10 (**Solução 3.10**)

A lista baseada em arranjo fornece uma função `index(e)`, que retorna o índice onde o elemento e está armazenado, e dispara uma exceção, caso o elemento não é encontrado na estrutura. Implemente essa função na classe `LinkedList`.

Exercício 3.11 (**Solução 3.11**)

A lista baseada em arranjo fornece uma função `clear()`, que remove todos os elementos da coleção. Implemente essa função na classe `LinkedList`.

Exercício 3.12 (**Solução 3.12**)

Desenvolva um experimento para testar a eficiência de n chamadas sucessivas à função `insert` de uma lista baseada em arranjo para vários n diferentes, e analise os resultados empíricos sob os seguintes cenários:

a. Cada `insert` acontece no índice 0.

b. Cada `insert` acontece no índice `size()/2`.

c. Cada `insert` acontece no índice `size()`.

4 Buscas em estruturas lineares

Exercício 4.1 (**Solução 4.1**)
Implemente uma versão recursiva do algoritmo de busca binária, conforme as ideias do Capítulo 4 (Recursão) de Goodrich et al. (2013) – *Data Structures and Algorithms in Python*.

Exercício 4.2 (**Solução 4.2**)
Simule o algoritmo de busca binária para os seguintes casos:

a) `x = 15`, `v = {15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90}`.

b) `x = 33`, `v = {15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90}`.

c) `x = 63`, `v = {15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90}`.

d) `x = 81`, `v = {15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90}`.

e) `x = 22`, `v = {15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90}`.

Compare o número de avaliações realizadas pelas buscas binária e sequencial.

Exercício 4.3 (**Solução 4.3**)
Quando o vetor está ordenado, a busca sequencial não precisa percorrer toda a lista para saber que o elemento buscado não existe. Ela pode parar quando o elemento analisado for maior que o buscado. Implemente as modificações necessárias para essa estratégia. Qual o impacto na complexidade assintótica do novo algoritmo?

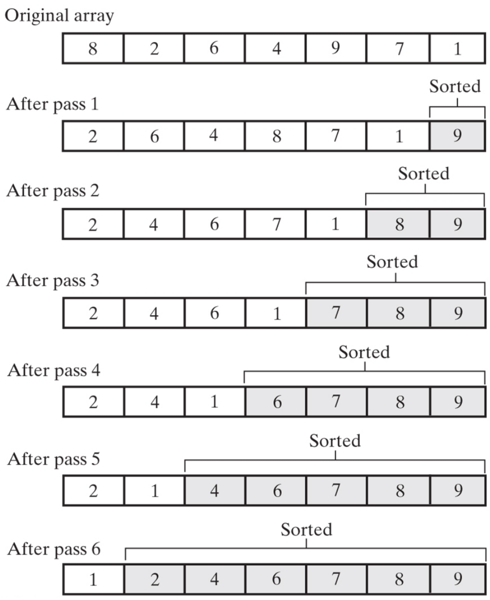
Exercício 4.4 (**Solução 4.4**)
Veja as demonstrações das buscas sequencial e binária disponíveis em https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Search.html.

5 Ordenação de estruturas lineares

Exercício 5.1 (**Solução 5.1**)
Mostre o conteúdo do *array* de inteiros $(5, 7, 4, 9, 8, 5, 6, 3)$ para cada vez que o algoritmo insertion sort o modifica durante o processo de ordenação.

Exercício 5.2 (**Solução 5.2**)
Qual modificação é necessária para que o algoritmo insertion sort ordene os elementos de forma decrescente?

Exercício 5.3 (**Solução 5.3**)
O algoritmo bubble sort ordena um *array* de n elementos em ordem crescente, executando $n-1$ passagens pelo *array*. Em cada passagem, ele compara elementos adjacentes e os troca se estiverem fora de ordem. Por exemplo, na primeira passagem ele compara o primeiro e o segundo elementos, depois o segundo e o terceiro elementos, e assim por diante. No final da primeira passagem, o maior elemento está em sua posição adequada no final do *array*. Cada passagem subsequente ignora os elementos no final do *array*, pois eles estão ordenados e são maiores que qualquer um dos elementos restantes. Assim, cada passagem faz uma comparação a menos que a passagem anterior. A figura abaixo ilustra seu funcionamento.



Implemente o bubble sort para ordenar um *array*.

Exercício 5.4 (**Solução 5.4**)
Qual a complexidade assintótica de tempo do bubble sort?

Exercício 5.5 (**Solução 5.5**)
Implemente um algoritmo para verificar se um *array* está em ordem não-decrescente. Você pode usar esse método para verificar se um algoritmo de ordenação executou corretamente.

Exercício 5.6 (**Solução 5.6**)
No algoritmo insertion sort, podemos usar uma busca binária para encontrar a posição de inserção de cada elemento. Qual o impacto na complexidade assintótica do algoritmo?

Exercício 5.7 (**Solução 5.7**)
Estude os seguintes algoritmos de ordenação:

- Merge sort;
- Quick sort;
- Radix sort.

Exercício 5.8 (**Solução 5.8**)
Veja as demonstrações dos diferentes algoritmos de ordenação estudados em https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Algorithms.html e https://visualgo.net/en/sorting.

6 Pilhas, Filas e Deques

Exercício 6.1 (**Solução 6.1**)
Considere uma lista dinâmica `L`, uma pilha `P` e uma fila `F`, inicialmente vazias. As seguintes operações são executadas, nesta ordem: `P.push(1)`, `P.push(2)`, `F.enqueue(3)`, `F.enqueue(4)`,

`F.enqueue(5)`, `L.insert(0,6)`, `L.insert(0,7)`, `L.insert(1,8)`, `P.push(9)`, `L.insert(1, P.top())`, `L.insert(2, F.dequeue())`, `L.insert(0, P.pop())`, `P.push(F.dequeue())`, `P.push(L.get(3))`, `F.enqueue(L.remove(2))`, `L.set(2, F.first())`. Apresente a configuração final das estruturas `L`, `P` e `F`, após a execução dessas operações.

Exercício 6.2 (**Solução 6.2**)

Suponha que inicialmente uma pilha vazia `S` tenha realizado um total de 25 operações `push`, 12 operações `top` e 10 operações `pop`, 3 das quais retornaram `null`, indicando uma pilha vazia. Qual é o tamanho atual de `S`?

Exercício 6.3 (**Solução 6.3**)

Sendo a pilha do exercício anterior implementada usando um arranjo seguindo as ideias estudadas em sala de aula, qual o valor final da variável `t`?

Exercício 6.4 (**Solução 6.4**)

Quais valores são retornados durante as seguintes operações, se executadas em uma pilha inicialmente vazia? `push(5)`, `push(3)`, `pop()`, `push(2)`, `push(8)`, `pop()`, `pop()`, `push(9)`, `push(1)`, `pop()`, `push(7)`, `push(6)`, `pop()`, `pop()`, `push(4)`, `pop()`, `pop()`.

Exercício 6.5 (**Solução 6.5**)

Implemente uma função com a assinatura `transfer(S, T)` que transfere todos os elementos da pilha `S` para a pilha `T`, de modo que o elemento que iniciou no topo de `S` é o primeiro elemento a ser inserido em T, e o último elemento de S termina no topo de T.

Exercício 6.6 (**Solução 6.6**)

Apresente um método recursivo que remove todos os elementos de uma pilha.

Exercício 6.7 (**Solução 6.7**)

Suponha que uma fila vazia `Q` realizou um total de 32 operações de `enqueue`, 10 operações *first* e 15 operações `dequeue`, 5 das quais retornaram `null`, indicando uma fila vazia. Qual é o tamanho atual de `Q`?

Exercício 6.8 (**Solução 6.8**)

Sendo a fila do exercício anterior implementada seguindo as ideias estudadas em sala de aula e usando um arranjo com uma capacidade de 30 elementos nunca excedida, qual o valor final da variável `f`?

Exercício 6.9 (**Solução 6.9**)

Quais são os valores retornados após as seguintes operações, se executadas em uma fila inicialmente vazia? `enqueue(5)`, `enqueue(3)`, `dequeue()`, `enqueue(2)`, `enqueue(8)`, `dequeue()`, `dequeue()`, `enqueue(9)`, `enqueue(1)`, `dequeue()`, `enqueue(7)`, `enqueue(6)`, `dequeue()`, `dequeue()`, `enqueue(4)`, `dequeue()`, `dequeue()`.

Exercício 6.10 (**Solução 6.10**)

Faça um adaptador simples (classe) que implemente uma pilha usando um deque para armazenamento. Use a implementação de deque fornecido pelo módulo `collections.deque`.

Exercício 6.11 (**Solução 6.11**)

Faça um adaptador simples (classe) que implemente uma fila usando uma instância de deque para armazenamento. Use a implementação de deque fornecido pelo módulo `collections.deque`.

Exercício 6.12 (**Solução 6.12**)
Quais são os valores retornados após as seguintes operações, se executadas em um deque inicialmente vazio? `add_first(3)`, `add_last(8)`, `add_last(9)`, `add_first(1)`, `last()`, `is_empty()`, `add_first(2)`, `remove_last()`, `add_last(7)`, `first()`, `last()`, `add_last(4)`, `size()`, `remove_first()`, `remove_first()`.

Exercício 6.13 (**Solução 6.13**)
Suponha que você tenha um deque `D` contendo os números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), nessa ordem. Supondo que além disso você tenha uma fila `Q` incialmente vazia. Apresente um pseudocódigo que utilize somente `D` e `Q` (mais nenhuma variável) e resulte em `D` armazenando os elementos na ordem (1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8).

Exercício 6.14 (**Solução 6.14**)
Repita o exercício anterior usando o deque `D` e uma pilha `S`, inicialmente vazia.

7 Filas de prioridade

Exercício 7.1 (**Solução 7.1**)
O que cada uma das chamadas `get` retorna, dentre a seguinte sequências de operações em uma fila de prioridade: `put(5)`, `put(4)`, `put(7)`, `put(1)`, `get()`, `put(3)`, `put(6)`, `get()`, `get()`, `put(8)`, `get()`, `put(2)`, `get()`, `get()`?

Exercício 7.2 (**Solução 7.2**)
Um aeroporto está desenvolvendo uma simulação computacional de controle de tráfego aéreo para lidar com eventos como aterrissagens e decolagens. Cada evento tem um *timestamp* que simboliza o tempo em que o evento ocorrerá. A simulação necessita realizar eficientemente duas operações fundamentais:

- Inserir um evento com um *timestamp* (isto é, adicionar um evento futuro).
- Retornar o evento com o *timestamp* mais próximo (i.e., determinar o próximo evento para processar).
- Qual estrutura de dados deverá ser usada para realizar essas operações? Por quê?

Exercício 7.3 (**Solução 7.3**)
O método `min` de uma fila de prioridade não-ordenada executa em tempo $\mathcal{O}(n)$. Proponha uma alteração nessa estrutura para que o método `min` execute em tempo $\mathcal{O}(1)$. Explique qualquer modificação necessária em outros métodos da estrutura.

Exercício 7.4 (**Solução 7.4**)
Você pode adaptar sua solução do exercício anterior para fazer o método `get` de uma fila de prioridade não-ordenada executar em tempo $\mathcal{O}(1)$? Justifique sua resposta.

Exercício 7.5 (**Solução 7.5**)
Considere uma fila de prioridade que armazena nomes de pessoas. Informe a sequência de nomes retornados e a configuração final de uma fila de prioridade ordenada ao executar esta sequência de comandos: `put((6, "Phoebe"))`, `put((4, "Joey"))`, `put((4, "Ross"))`, `min()`, `put((6, "Rachel"))`, `get()`, `get()`, `min()`, `put((6, "Monica"))`, `get()`.

Exercício 7.6 (**Solução 7.6**)
Considere agora que armazenaremos somente os nomes na fila de prioridade do exercício anterior (isto é,

sem definir valores de prioridade). Qual a nova sequência de elementos retornados e a nova configuração final da fila de prioridade ao executar a mesma sequência de comandos?

8 Mapas

Exercício 8.1 (Solução 8.1)
Qual a complexidade de tempo no pior caso de inserir n pares chave-valor em um mapa inicialmente vazio, implementado pela classe `UnsortedArrayMap`?

Exercício 8.2 (Solução 8.2)
O uso de valores `null` em um mapa é problemático, uma vez que não é possível diferenciar se um retorno `null` do método `get(k)` representa um valor legítimo de uma entrada `(k, null)`, ou representa que a chave `k` não foi encontrada. A interface `java.util.Map` inclui um método booleano `containsKey(k)` que resolve essa ambiguidade. Implemente este método na classe `UnsortedArrayMap`.

Exercício 8.3 (Solução 8.3)
Qual a complexidade de tempo no pior caso de realizar n remoções de uma instância de `SortedArrayMap` que contém inicialmente $2n$ entradas?

Exercício 8.4 (Solução 8.4)
Implemente o método `containsKey(k)` para a classe `SortedArrayMap`.

Exercício 8.5 (Solução 8.5)
Considere o objetivo de adicionar uma entrada `(k, v)` em um mapa somente se não existir outra entrada com a mesma chave `k`. Para um mapa M sem valores `null`, isso pode ser feito da seguinte forma:

```
if(M.get(k) == null)
  M.put(k, v);
```

Apesar de atingir o objetivo, essa estratégia é ineficiente, uma vez que gasta tempo para verificar que não existe entrada com a chave `k`, e novamente para buscar a posição de inserção da nova entrada. Para evitar isso, algumas implementações de mapas suportam um método `pullAbsent(k, v)`, que realiza a inserção assim que identifica a não existência de entrada com a chave `k`. Forneça a implementação deste método para a classe `UnsortedArrayMap`.

9 Tabelas hash

Exercício 9.1 (Solução 9.1)
Qual a complexidade assintótica de tempo no pior caso de inserir n entradas em uma tabela *hash* inicialmente vazia, com as colisões resolvidas por encadeamento? E qual a complexidade no melhor caso?

Exercício 9.2 (Solução 9.2)
Considere a classe `Name` definida abaixo, e proponha uma implementação para o método `hashCode`.

```java
public class Name {
  private String first;
  private String last;

  public void setName(String first, String last) {
    this.first = first;
    this.last = last;
  }

  public String getName() {
    return toString();
  }

  public String toString() {
    return first + " " + last;
  }

  // ...
}
```

Exercício 9.3 (**Solução 9.3**)

Suponha que o tamanho da sua tabela *hash* seja 31, que você use o código *hash* padrão do Java para *strings* (descrito abaixo), e que você use encadeamento para resolver colisões. Liste cinco nomes distintos que serão armazenados na mesma posição da tabela, gerando colisões.

O Java implementa o método de Horner para gerar códigos *hash* para *strings*. Dado $g = 31$ (valor padrão para essa variável), o código *hash* é dado por $u_0 g^{n-1} + u_1 g^{n-2} + \cdots + u_{n-2} g + u_{n-1}$, onde u_i é o i-ésimo caractere da string. Abaixo é fornecida uma implementação da função *hash* usando o método de Horner para gerar o código *hash*. Note que ao somar um caractere a um inteiro (linha 5), o caractere é convertido ao seu código ASCII (inteiro).

```java
1 public int hashFunction(String s, int size) {
2   int hash = 0;
3   int n = s.length();
4   for (int i = 0; i < n; i++)
5     hash = g * hash + s.charAt(i);
6   return hash % size;
7 }
```

Exercício 9.4 (**Solução 9.4**)

Considere um tipo de dado cuja chave de busca consiste em três valores de ponto flutuante (latitude, longitude e altitude, por exemplo). Sugira pelo menos duas possíveis funções *hash* para esse tipo de dado.

Exercício 9.5 (**Solução 9.5**)

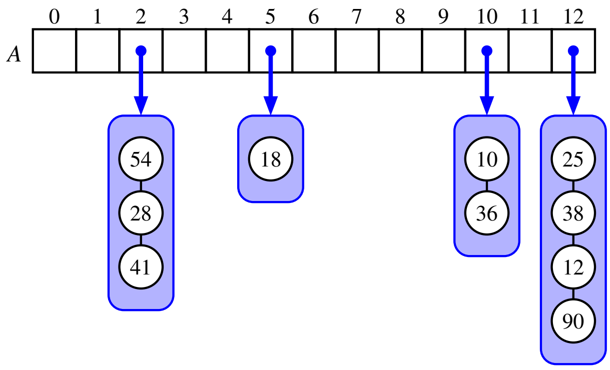
Você tem aproximadamente 1000 imagens de *thumbnail* e quer armazená-las em um mapa que usa *hashing*. Cada imagem possui 20 pixels de largura e 20 pixels de altura, e cada pixel é uma entre 256 cores. Sugira algumas funções *hash* que poderiam ser usadas.

Exercício 9.6 (**Solução 9.6**)

Desenhe a tabela *hash* de tamanho 11 resultante do uso da função *hash* $h(i) = (3i + 5)\ \%\ 11$ ao armazenar as chaves 12, 44, 13, 88, 23, 94, 11, 39, 20, 16 e 5, assumindo que as colisões são tratadas com encadeamento.

Exercício 9.7 (**Solução 9.7**)

A operação de *rehashing* consiste em aumentar a capacidade de uma tabela *hash* e realocar suas entradas.



Mostre o resultado do *rehashing* da tabela *hash* ilustrada abaixo para uma tabela de tamanho 19 usando a nova função *hash* $h(k) = 3k \,\%\, 19$.

Exercício 9.8 (**Solução 9.8**)

Considere a classe `Pair` definida abaixo e proponha implementações para os métodos `equals` e `hashCode`.

```java
public class Pair<A,B> {
  A first;
  B second;

  public Pair(A a, B b) {
    first = a;
    second = b;
  }

  public A getFirst() { return first; }
  public B getSecond() { return second; }
}
```

Exercício 9.9 (**Solução 9.9**)

Considere um tipo de dado para registrar pacientes em uma centro de assistência médica. Cada registro contém um identificador inteiro para o paciente, e strings para a data, motivo da visita e tratamento prescrito. Projete e implemente a classe `PatientRecord`, sobrescrevendo o método `hashCode`. Escreva um programa para testar essa classe.

Exercício 9.10 (**Solução 9.10**)

Projete a classe `PatientDataBase` que armazena instâncias de `PatientRecord`, conforme descrito no exercício anterior. Essa classe deve prover duas operações de consulta. Dada a identificação de um paciente e uma data, a primeira operação deve retornar o motivo da visita, e a segunda operação deve retornar o tratamento prescrito.

10 Árvores

Exercício 10.1 (**Solução 10.1**)

Considere a árvore abaixo e informe:

a) Qual nodo é a raiz?

b) Quais são os nodos internos?

c) Quantos descendentes tem o nodo `cs016`/?

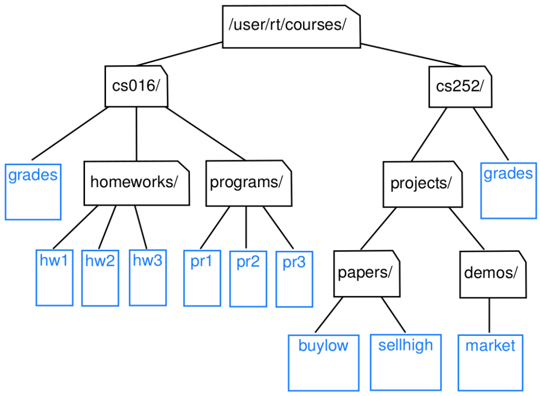
d) Quantos ancestrais tem o nodo cs016/?

e) Quais são os irmãos do nodo homeworks/?

f) Quais nodos estão na sub-árvore cuja raiz é o nodo projects/?

g) Qual o nível do nodo papers/?

h) Qual a altura da árvore?



Exercício 10.2 (**Solução 10.2**)

Qual a altura da menor (mais baixa) árvore binária que contém 21 nodos? Essa árvore é cheia? É balanceada?

Exercício 10.3 (**Solução 10.3**)

Considere uma árvore binária com três níveis.

a) Qual o número máximo de nodos da árvore?

b) Qual o número máximo de folhas da árvore?

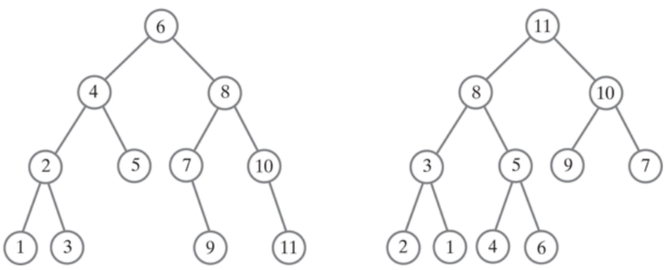
c) Responda às questões acima considerando uma árvore binária com dez níveis.

Exercício 10.4 (**Solução 10.4**)

Escreva um algoritmo recursivo que conta os nodos de uma árvore binária.

Exercício 10.5 (**Solução 10.5**)

Considere a travessia de uma árvore binária. Suponha que a visitação de um nodo consiste em apresentar em tela seu elemento. Qual o resultado das travessias em pré-ordem e level-ordem nas árvore abaixo?



Exercício 10.6 (**Solução 10.6**)

Considere as árvores do exercício anterior, contendo os elementos inteiros identificados nos nodos.

a) A primeira árvore é uma árvore binária de busca? Justifique.

b) A segunda árvore é uma *max-heap*? Justifique.

Exercício 10.7 (**Solução 10.7**)
Uma árvore binária de busca pode ser também uma *max-heap* (i.e. ao mesmo tempo)? Explique.

Exercício 10.8 (**Solução 10.8**)
Represente (desenhe) a menor árvore binária de busca possível (menor altura) que armazene as seguintes strings: *Ann*, *Ben*, *Chad*, *Deepak*, *Ella*, *Jada*, *Jazmin*, *Kip*, *Luis*, *Pat*, *Rico*, *Scott*, *Tracy*, *Zak*.

Exercício 10.9 (**Solução 10.9**)
Represente (desenhe) uma *max-heap* que armazene as strings do exercício anterior. A *max-heap* é única?

Exercício 10.10 (**Solução 10.10**)
Considere que a ordem de uma visitação em largura de uma árvore binária completa seja 11, 8, 10, 3, 5, 9, 7, 2, 1, 4, 6. Qual a ordem de visitação em profundidade dessa mesma árvore? Qual a configuração da árvore?

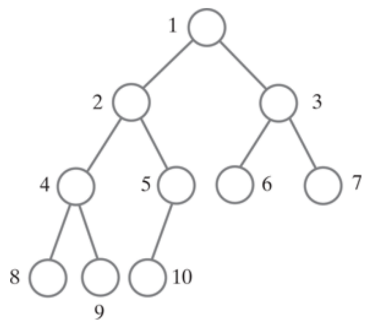
Exercício 10.11 (**Solução 10.11**)
Suponha que os nodos de uma árvore binária completa sejam numerados conforme a ordem de visitação de uma travessia em largura. A raiz da árvore é o nodo 1, e assim por diante. Abaixo é mostrada uma árvore com essas características. Dado um nodo i, como podemos computar:

a) O irmão de i, se existente.

b) O filho esquerdo de i, se existente.

c) O filho direito de i, se existente.

d) O pai de i, se existente.



Exercício 10.12 (**Solução 10.12**)
Apresente o pseudocódigo de um algoritmo que conta o número de folhas em uma árvore binária que são filhas esquerdas dos seus respectivos pais.

Exercício 10.13 (**Solução 10.13**)
Quantas árvores binárias de busca diferentes podem armazenar os valores $\{1, 2, 3\}$?

Exercício 10.14 (**Solução 10.14**)
Represente (desenhe) uma árvore binária T que satisfaça todas as seguintes condições:

- Cada nodo interno armazena um caractere.
- O percurso em pré-ordem de T gera a sequência EXAMFUN.
- O percurso em level-ordem de T gera a sequência EXNAUMF.

Exercício 10.15 (**Solução 10.15**)
Insira, em uma árvore binária de busca inicialmente vazia, os elementos 30, 40, 24, 58, 48, 26, 11, 13 (nessa ordem). Desenhe a árvore após cada inserção.

Soluções dos exercícios

1 Introdução

Solução 1.1 (**Exercício 1.1**)
Assista ao vídeo sugerido.

Solução 1.2 (**Exercício 1.2**)
Assista ao vídeo sugerido.

2 Complexidade de algoritmos

Solução 2.1 (**Exercício 2.1**)
Gráfico disponível aqui.

Solução 2.2 (**Exercício 2.2**)
Igualando as equações, temos que $40n^2 = 2n^3$ para $n' = 0$ e $n'' = 20$. Logo, $40n^2 \leq 2n^3$ para $n \geq 20$. Veja a representação gráfica aqui.

Solução 2.3 (**Exercício 2.3**)
Por inspeção, assumindo $n_0 = 10$, temos que $8n \log n \leq 2n^2$ para todo $n \geq n_0$. Veja a representação gráfica aqui.

Solução 2.4 (**Exercício 2.4**)
$2^{10} \ll 3n + 100 \log n = 4n \ll n \log n = 4n \log n + 2n \ll n^2 + 10n \ll n^3 \ll 2^n$.

Solução 2.5 (**Exercício 2.5**)
$\mathcal{O}(n)$.

Solução 2.6 (**Exercício 2.6**)
$\mathcal{O}(n)$.

Solução 2.7 (**Exercício 2.7**)
$\mathcal{O}(n^2)$.

Solução 2.8 (**Exercício 2.8**)
$\mathcal{O}(n)$.

Solução 2.9 (**Exercício 2.9**)
$\mathcal{O}(n^3)$.

Solução 2.10 (**Exercício 2.10**)
$\mathcal{O}(n \log n)$.

Solução 2.11 (**Exercício 2.11**)

$\mathcal{O}(n \log n)$.

Solução 2.12 (**Exercício 2.12**)

Melhor caso: $\mathcal{O}(n \log n)$, quando todos os elementos são ímpares. Pior caso: $\mathcal{O}(n^2)$, quando todos os elementos são pares.

Solução 2.13 (**Exercício 2.13**)

O tempo de execução é proporcional a $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 = O(n^2)$.

Solução 2.14 (**Exercício 2.14**)

Exercício de análise experimental.

Solução 2.15 (**Exercício 2.15**)

Exercício de análise experimental.

Solução 2.16 (**Exercício 2.16**)

Exercício de análise experimental.

3 Estruturas fundamentais e listas

Solução 3.1 (**Exercício 3.1**)

Uma possível solução é percorrer a estrutura, contando a quantidade de nodos. Isso implica em um aumento na complexidade assintótica de constante para linear, i.e. $\mathcal{O}(1)$ para $\mathcal{O}(n)$.

```
def size(self):
  count = -1
  walk = self._header
  while walk != self._trailer:
    count += 1
    walk = walk._next
  return count
```

Solução 3.2 (**Exercício 3.2**)

Considere uma busca combinada de ambas extremidades. Lembre-se que um *link hop* é uma atribuição do formato `p = p.getNext();` ou `p = p.getPrev();`. O método a seguir executa em tempo $O(n)$.

```
def middle(self):
  if self.is_empty():
    raise Exception("List is empty")
  mid = self.header.next
  partner = self.trailer.prev
  while mid != partner and mid.next != partner:
    mid = mid.next
    partner = partner.prev
  return mid
```

Solução 3.3 (**Exercício 3.3**)

Junte o final de L no começo de M. Use dois nodos temporários, `temp1` e `temp2`. Inicialize `temp1` como o `trailer` de L e `temp2` como o `header` de M. Atribua `temp2` como o próximo elemento de `temp1` e `temp1` como o elemento anterior de `temp2`. Faça $L' \leftarrow L$ e atribua o `trailer` de M como `trailer` de L'.

Solução 3.4 (**Exercício 3.4**)

Realizar uma troca (*swap*) em uma lista simplesmente encadeada levará mais tempo do que em uma lista duplamente encadeada. Essa implementação requer muito cuidado, especialmente quando x e y são vizinhos um do outro. A dificuldade na eficiência ocorre porque para trocar x e y em uma lista simplesmente encadeada devemos localizar os nodos imediatamente anteriores a x e y percorrendo a estrutura, e não tem uma maneira rápida de fazer isso. A complexidade assintótica dessa operação no pior caso, quando todos os elementos devem ser percorridos, é $\mathcal{O}(n)$. Em uma lista duplamente encadeada, não é necessário percurso na lista, pois cada nodo já possui apontamentos para seus antecessores e sucessores, reduzindo a complexidade assintótica para $\mathcal{O}(1)$ no pior caso.

Solução 3.5 (**Exercício 3.5**)

Exercício de implementação.

Solução 3.6 (**Exercício 3.6**)

Basta verificar se o índice buscado é menor ou maior que `size/2`, para saber em qual metade da estrutura o índice se encontra. Caso se trate da primeira metade, a busca deve ser realizada a partir do primeiro elemento. Caso contrário, a busca inicia pelo último elemento. Com isso, apenas metade dos elementos precisará ser varrido no pior caso. Logo, a complexidade cai para $n/2$, o que é mais eficiente na prática, mas não altera a complexidade assintótica $\mathcal{O}(n)$.

Solução 3.7 (**Exercício 3.7**)

Desenhe a lista, mostrando os estados antes e depois de cada operação. A configuração final da lista deve ser $(8, 2, 6, 5, 7, 3, 1, 4)$.

Solução 3.8 (**Exercício 3.8**)

O tempo de execução para inserir um novo elemento é $\mathcal{O}(n)$. Como n elementos são incluídos, o tempo de execução total é $\mathcal{O}(n^2)$.

Solução 3.9 (**Exercício 3.9**)

A função deve criar uma lista alternativa, atribuir os elementos a ela e retornar a estrutura criada. A implementação pode devolver uma lista com as mesmas referências ou com cópias dos elementos.

Solução 3.10 (**Exercício 3.10**)

Você deve percorrer a estrutura em busca do elemento. A implementação abaixo retorna -1, caso não encontra o elemento.

```python
def index(self, e):
  if self.is_empty(): return -1
  count = -1
  walk = self.header.next
  while walk != self.trailer:
    count += 1
      if walk.element == e:
        return count
    walk = walk.next
  return -1
```

Solução 3.11 (**Exercício 3.11**)

Basta atualizar as referências `next` e `prev` dos nodos sentinelas para que um referencie o outro, e atualizar `size` para 0.

```
def clear(self):
  self.header.next = self.trailer
  self.trailer.prev = self.header
  self.size = 0
```

Solução 3.12 (**Exercício 3.12**)
Exercício de análise experimental.

4 Buscas em estruturas lineares

Solução 4.1 (**Exercício 4.1**)
Uma possível implementação é apresentada na Seção 4.1.3 (Busca Binária) de Goodrich et al. (2013) – *Data Structures and Algorithms in Python*.

Solução 4.2 (**Exercício 4.2**)
Com uma caneta, marque as referências para início e fim da sub-estrutura considerada em cada iteração da busca. Caso essas referências se cruzem, o elemento não foi encontrado. Caso a referência para o meio da lista aponte para o elemento buscado, seu índice é encontrado.

a) Busca binária: 3 avaliações (51, 27, 15). Busca sequencial: 1 avaliação (15).
b) Busca binária: 3 avaliações (51, 27, 33). Busca sequencial: 3 avaliações (15, 27, 33).
c) Busca binária: 3 avaliações (51, 71, 63). Busca sequencial: 6 avaliações (15, 27, 33, 46, 51, 63).
d) Busca binária: 3 avaliações (51, 71, 82). Busca sequencial: 9 avaliações (todos os elementos).
e) Busca binária: 3 avaliações (51, 27, 15). Busca sequencial: 9 avaliações (todos os elementos).

Solução 4.3 (**Exercício 4.3**)
Para implementar essa modificação, você deve parar a busca com sucesso quando o elemento buscado é igual ao elemento analisado. A busca continua se o elemento buscado for menor que o elemento analisado, e pára sem sucesso, caso contrário. Na prática, essa modificação torna o algoritmo mais eficiente nos casos em que ele pára antes de percorrer toda a lista. Porém, no pior caso o elemento buscado não está na lista e é maior que qualquer elemento dela, implicando na necessidade aa lista ser totalmente percorrida. Log, a complexidade continua sendo $\mathcal{O}(n)$ no pior caso.

Busca sequencial modificada para um *array*:

```
def index(array, value):
  for i in range(len(array)):
    if array[i] == value:
      return i
    if array[i] < value:
      return -1
  return -1
```

Busca sequencial modificada para uma lista encadeada:

```
def index(self, e):
  if self.is_empty(): return -1
  count = -1
  walk = self.header.next
  while walk != self.trailer:
    count += 1
```

```
    if walk.element == e:
      return count
    if walk.element < e:
      return -1
    walk = walk.next
  return -1
```

Solução 4.4 (Exercício 4.4)

Analise as demostrações para entender os dois tipos de busca.

5 Ordenação de estruturas lineares

Solução 5.1 (Exercício 5.1)

Array inicial:

(5, 7, 4, 9, 8, 5, 6, 3)

Array após cada inserção:

(5, 7, 4, 9, 8, 5, 6, 3)
(**5**, 7, 4, 9, 8, 5, 6, 3)
(4, **5**, **7**, 9, 8, 5, 6, 3)
(**4**, **5**, **7**, 9, 8, 5, 6, 3)
(**4**, **5**, **7**, 8, **9**, 5, 6, 3)
(**4**, **5**, 5, **7**, **8**, **9**, 6, 3)
(**4**, **5**, **5**, 6, **7**, **8**, **9**, 3)
(3, **4**, **5**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**)

Solução 5.2 (Exercício 5.2)

Basta inverter o operador relacional na comparação dos elementos. Ou seja, em vez de usar `key < array[j]`, usamos `key > array[j]`. Com isso, é fácil implementar um método de ordenação que recebe a ordem desejada ("normal" ou "inversa") como um parâmetro e executa a ordenação correspondente.

Solução 5.3 (Exercício 5.3)

Algoritmo bubble sort:

```python
def bubble_sort(array):
  for last_index in range(len(array) - 1, 0, -1):
    for index in range(last_index):
      if array[index] > array[index + 1]:
        # Operação de swap/troca
        array[index], array[index + 1] = array[index + 1], array[index]
```

Solução 5.4 (Exercício 5.4)

O bubble sort tem complexidade assintótica de tempo $\mathcal{O}(n^2)$ no pior, médio e melhor casos. É possível interromper o algoritmo quando uma passagem não faz nenhuma modificação, indicando que o *array* já está ordenado. Neste caso, a complexidade assintótica no melhor caso é reduzida para $\mathcal{O}(n)$.

Solução 5.5 (Exercício 5.5)

```
def is_sorted(array):
  for index in range(len(array) - 1):
    if array[index] > array[index + 1]:
      return False
  return True
```

Solução 5.6 (**Exercício 5.6**)
Ao usar uma busca binária, reduzimos a complexidade assintótica da busca pela posição de inserção do elemento de $\mathcal{O}(n)$ para $\mathcal{O}(\log n)$ no pior caso. Apesar dessa redução, o algoritmo ainda precisa deslocar elementos pela estrutura para efetivar a inserção, o que faz com que sua complexidade assintótica se mantenha em $\mathcal{O}(n^2)$ no pior caso. Além disso, a busca binária ainda executaria em $\mathcal{O}(\log n)$ no melhor caso (quando a estrutura já está ordenada), enquanto a busca sequencial executa em $\mathcal{O}(1)$. Portanto, a modificação proposta aumenta a complexidade do algoritmo de $\mathcal{O}(n)$ para $\mathcal{O}(n \log n)$ no melhor caso.

Solução 5.7 (**Exercício 5.7**)
As obras listadas na bibliografia da disciplina apresentam esses algoritmos.

Solução 5.8 (**Exercício 5.8**)
Analise as demostrações para entender os diferentes algoritmos.

6 Pilhas, filas e deques

Exercício 6.1 (**Exercício 6.1**)
A configuração final das estruturas é:

L: $(9, 7, 5, 8, 6)$.

P: $(9, 5)$.

F: $(1, 2, 4, 3)$.

Solução 6.2 (**Exercício 6.2**)
Se a pilha está vazia quando `pop` é chamado, seu tamanho não muda. Logo, o tamanho da pilha é $25 - 10 + 3 = 18$.

Solução 6.3 (**Exercício 6.3**)
É uma posição menor que o tamanho. Logo, $t = 17$.

Solução 6.4 (**Exercício 6.4**)
Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: $3, 8, 2, 1, 6, 7, 4, 9$.

Solução 6.5 (**Exercício 6.5**)
Você deve transferir um item de cada vez.

```
def transfer(S, T) {
  while not S.is_empty():
    T.push(S.pop())
```

Solução 6.6 (**Exercício 6.6**)
Se a pilha está vazia, retorne "pilha vazia". Caso contrário, remova o elemento do topo da pilha e chame a operação recursivamente com a pilha atualizada.

Solução 6.7 (**Exercício 6.7**)
Se a pilha está vazia quando `dequeue` é chamado, seu tamanho não é modificado. Logo, o tamanho da fila é $32 - 15 + 5 = 22$.

Solução 6.8 (**Exercício 6.8**)
Cada operação `dequeue` de sucesso implica em mover o índice para a direita de maneira circular. Logo, $f = 10$.

Solução 6.9 (**Exercício 6.9**)
Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: $5, 3, 2, 8, 9, 1, 7, 6$.

Solução 6.10 (**Exercício 6.10**)
Dica: basta usar as operações apropriadas nas extremidades do deque.

Solução 6.11 (**Exercício 6.11**)
Dica: basta usar as operações apropriadas nas extremidades do deque.

Solução 6.12 (**Exercício 6.12**)
Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: 9, `false`, $9, 2, 7, 6, 2, 1$.

Solução 6.13 (**Exercício 6.13**)
A solução consiste em usar o resultado dos métodos de remoção como argumentos para os métodos de inserção. Solução:

```
D.add_last(D.remove_first())
D.add_last(D.remove_first())
D.add_last(D.remove_first())
Q.enqueue(D.remove_first())
Q.enqueue(D.remove_first())
D.add_first(Q.dequeue())
D.add_first(Q.dequeue())
D.add_first(D.remove_last())
D.add_first(D.remove_last())
D.add_first(D.remove_last())
```

Solução 6.14 (**Exercício 6.14**)
A solução consiste em usar o resultado dos métodos de remoção como argumentos para os métodos de inserção. Adicionalmente, você precisará usar mais de uma pilha para armazenamento temporário. Solução:

```
D.add_last(D.remove_first())
D.add_last(D.remove_first())
D.add_last(D.remove_first())
S.push(D.remove_first())
D.add_last(D.remove_first())
```

```
D.add_first(S.pop())
D.add_first(D.remove_last())
D.add_first(D.remove_last())
D.add_first(D.remove_last())
D.add_first(D.remove_last())
```

7 Filas de prioridade

Solução 7.1 (**Exercício 7.1**)
1, 3, 4, 5, 2, 6.

Solução 7.2 (**Exercício 7.2**)
A melhor estrutura de dados para uma simulação de controle de tráfego aéreo é uma fila de prioridade. Essa estrutura permite manipular os *timestamps* e manter os eventos em ordem, de tal forma que o evento com menor instante de tempo seja facilmente extraído.

Solução 7.3 (**Exercício 7.3**)
Mantenha uma variável adicional que referencie a entrada mínima atual. Isso permite executar a operação `min` em tempo constante $\mathcal{O}(1)$. Para que isso funcione, o método `put` deve ser alterado, atualizando a variável adicional sempre que o novo elemento sendo inserido seja menor que `min`, bem como ao inserir quando a estrutura está vazia. O método `get` também deve ser alterado, pois ele será responsável por identificar o novo elemento mínimo e atualizar a referência da variável adicional, para então remover o `min`.

Solução 7.4 (**Exercício 7.4**)
Não. A operação `get` continua necessitando tempo linear $\mathcal{O}(n)$. Apesar do `min` atual ser facilmente encontrado e removido, tal método precisa percorrer todos os elementos restantes para identificar o novo mínimo.

Solução 7.5 (**Exercício 7.5**)
Retornos: `"Joey"`, `"Joey"`, `"Ross"`, `"Phoebe"`, `"Phoebe"`.
Configuração final: `((6,"Monica"), (6,"Rachel"))`

Solução 7.6 (**Exercício 7.6**)
Retornos: `"Joey"`, `"Joey"`, `"Phoebe"`, `"Rachel"`, `"Monica"`.
Configuração final: `("Ross", "Rachel")`

8 Mapas

Solução 8.1 (**Exercício 8.1**)
A primeira inserção consome $\mathcal{O}(1)$, a segunda consome $\mathcal{O}(2)$, e assim por diante, com a última inserção consumindo $\mathcal{O}(n)$. A execução completa dessa operação consome $\mathcal{O}(n^2)$.

Solução 8.2 (**Exercício 8.2**)
Para isso, use o método `findIndex`.

```
public boolean containsKey(K key) {
  return (findIndex(key) != -1);
}
```

Solução 8.3 (**Exercício 8.3**)

Dado que o mapa seguirá contendo n entradas no final do procedimento, você pode assumir que cada operação `remove` consome o mesmo tempo assintótico $\mathcal{O}(n)$. Logo, a complexidade total no pior caso é $\mathcal{O}(n^2)$.

Solução 8.4 (**Exercício 8.4**)

Novamente, podemos utilizar o método `findIndex`.

```
public boolean containsKey(K key) {
  int j = findIndex(key);
  return (j < data.size() && compare(key, data.get(j)) == 0);
}
```

Solução 8.5 (**Exercício 8.5**)

A solução deve fazer uma única chamada ao método `findIndex`.

```
public V pullAbsent(K key, V value) {
  int j = findIndex(key);
  if (j == -1) {
    data.add(new MapEntry<>(key, value));
    return null;
  } else {
    return data.get(j).getValue();
  }
}
```

9 Tabelas hash

Solução 9.1 (**Exercício 9.1**)

Pior caso: todas as entradas ocupam a mesma posição, $\mathcal{O}(n^2)$.
Melhor caso: cada entrada ocupa uma posição diferente, $\mathcal{O}(n)$.

Solução 9.2 (**Exercício 9.2**)

Uma possibilidade é usar a implementação padrão do Java para o nome completo.

```
public int hashCode() {
  return toString().hashCode();
}
```

Uma alternativa é computar os códigos *hash* separadamente (para o primeiro e último nomes) e então agregá-los.

```
public int hashCode() {
  return first.hashCode() + last.hashCode();
}
```

Solução 9.3 (**Exercício 9.3**)

Neste exercício, o tamanho da tabela *hash* é igual ao valor de g (i.e., 31). Logo, a função *hash* vai considerar o último caractere da string para definir o índice do elemento na tabela (pela operação da linha 6). Uma possível resposta: **Jim**, **Tim**, **Tom**, **Sam** e **Kim**.

Exemplo para o nome *Jim*:

- Os valores dos caracteres J, i e m são 74, 105 e 109, respectivamente.
- Logo, o código *hash* é $74 \cdot 31^2 + 105 \cdot 31 + 109 = 74478$.
- O índice é $74478 \;\%\; 31 = 16$.

Solução 9.4 (**Exercício 9.4**)

Alternativas de código *hash*:

1. Converta cada um dos valores em string e os concatene, formando uma string única. Use então a função *hashCode* para strings.
2. Seja x, y e z os três valores reais, compute o polinômio $xd^2 + yd + z$, para algum $d > 0$. Trunque então o resultado para um número inteiro.

Em ambos os casos, o código *hash* gerado deverá ser comprimido pela função *hash* usando a operação módulo (resto da divisão inteira) e o tamanho da tabela. Você também pode escalar e/ou arredondar os valores reais antes do processamento.

Solução 9.5 (**Exercício 9.5**)

Alternativas de código *hash*:

1. Some os valores de todos os 400 pixels.
2. Usar a mesma técnica aplicada a strings (e a implementação pelo método de Horner), onde os valores de u são os pixels da imagem. [veja o Exercício 9.2 e a Solução 9.2]

Nota: as melhores práticas recomendam que todas as partes da chave contribuam para a função *hash*. No entanto, para fins de eficiência qualquer das abordagens poderia usar um subconjunto dos pixels da imagem. Se a abordagem 1 for usada com uma tabela de tamanho 2000, a distribuição de índices será sensível ao número de píxels usado. Qualquer número abaixo de 10 causará uma má distribuição. Em geral, usar mais pixels é melhor.

Solução 9.6 (**Exercício 9.6**)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	94				44			12	16	20
	39				88			23	56	
					11					

Solução 9.7 (**Exercício 9.7**)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
38				90				28	41	54	10		36			18	12	25

Solução 9.8 (**Exercício 9.8**)

Dica: combinar os códigos *hash* dos dois componentes.

```
public int hashCode() {
  return a.hashCode() + b.hashCode();
}

public boolean equals(Object o) {
  if(o == null) return false;
  if(getClass() != o.getClass()) return false;
  Pair other = (Pair) o;
  return (a.equals(other.a) && b.equals(other.b));
}
```

Solução 9.9 (**Exercício 9.9**)
Exercício de implementação.

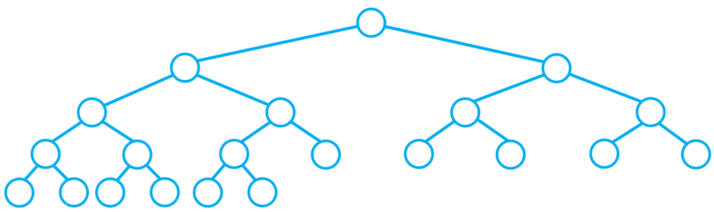
Solução 9.10 (**Exercício 9.10**)
Exercício de implementação.

10 Árvores

Solução 10.1 (**Exercício 10.1**)

a) /user/rt/courses/.
b) Aqueles representados na cor preta.
c) 9.
d) 1.
e) grades e programs/.
f) projects/, papers/, demos/, buylow, sellhigh, market.
g) 4.
h) 5.

Solução 10.2 (**Exercício 10.2**)
A altura é 5. Ela não é cheia, mas é balanceada. A árvore abaixo é completa, mas se movermos alguma folha (no nível 5) para outro pai, ela mantém sua altura, mas deixa de ser completa.



Solução 10.3 (**Exercício 10.3**)

a) $2^3 - 1 = 7$ nodos.
b) 4 folhas.

c) $2^{10} - 1 = 1023$ nodos; 512 folhas.

Solução 10.4

(**Exercício 10.4**)

```
count(root):
  IF root != null THEN
    RETURN 1 + count(root.left) + count(root.right)
  ELSE
    RETURN 0
```

Solução 10.5

(**Exercício 10.5**)

Travessias para a primeira árvore:

- **Pré-ordem** (profundidade): 6, 4, 2, 1, 3, 5, 8, 7, 9, 10, 11.
- **Level-ordem** (largura): 6, 4, 8, 2, 5, 7, 10, 1, 3, 9, 11.

Travessias para a segunda árvore:

- **Pré-ordem** (profundidade): 11, 8, 3, 2, 1, 5, 4, 6, 10, 9, 7.
- **Level-ordem** (largura): 11, 8, 10, 3, 5, 9, 7, 2, 1, 4, 6.

Solução 10.6

(**Exercício 10.6**)

a) Não. O 9 está na sub-árvore do 8, quando deveria ser o filho esquerdo do 10.

b) Não. O 5 e o 6 precisam ser trocados um com o outro para que a árvore seja um *max-heap*.

Solução 10.7

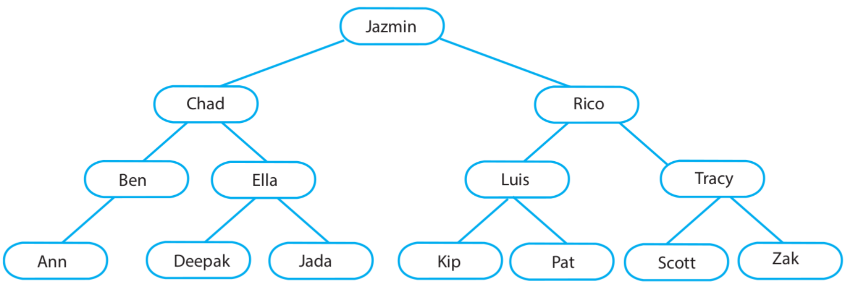
(**Exercício 10.7**)

Sim, uma árvore de busca binária pode ser uma *max-heap*. Considere uma árvore binária de busca com os valores 7 e 2, onde 7 é a raiz. A árvore é completa e satisfaz a propriedade da *heap*.

Solução 10.8

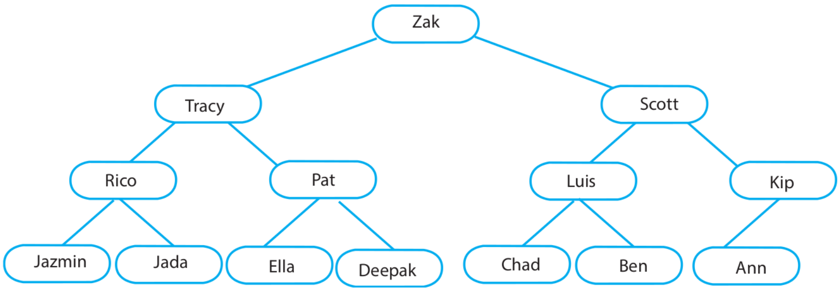
(**Exercício 10.8**)

A árvore abaixo não é única. Uma segunda árvore binária de busca com a mesma altura poderia ser construída usando *Kip* como raiz.



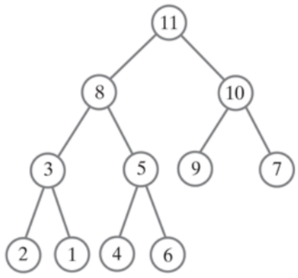
Solução 10.9 (**Exercício 10.9**)

A *max-heap* abaixo não é única. Podemos trocar o conteúdo de quaisquer irmãos e manter o critério de ordenação da *max-heap*.



Solução 10.10 (**Exercício 10.10**)

A ordem de visitação em profundidade será 11, 8, 3, 2, 1, 5, 4, 6, 10, 9, 7. A árvore é apresentada abaixo.



Solução 10.11 (**Exercício 10.11**)

a) Se i é par, o irmão de i é o nodo $i+1$. Se i é ímpar e maior que 1, seu irmão é o nodo $i-1$ (quando $i=1$, trata-se da raiz da árvore, que não tem irmão).

b) $2i$.

c) $2i+1$.

d) $i/2$, para $i>1$ (quando $i=1$, trata-se da raiz da árvore, que não tem pai).

Solução 10.12 (**Exercício 10.12**)

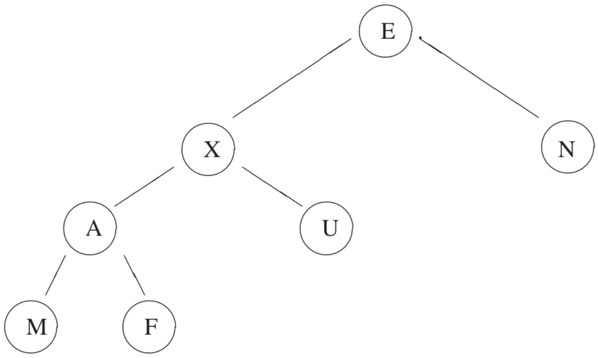
```
count(root, leftChild):
  IF root == null THEN
    RETURN 0
  IF root.left == null AND roof.right == null THEN
    IF leftChild THEN
      RETURN 1
    ELSE
      RETURN 0
  ELSE
    RETURN 0 + count(root.left, true) + count(root.right, false)
```

Solução 10.13 (**Exercício 10.13**)

Cinco (2 com raiz 1; 1 com raiz 2; 2 com raiz 3).

Solução 10.14 (Exercício 10.14)

A árvore abaixo satisfaz as condições (mas não é a única).



Solução 10.15 (Exercício 10.15)