

# Lista de exercícios

## 1 Introdução

### Exercício 1.1

(Solução 1.1)

Assista ao vídeo “*What’s an algorithm?*” (David J. Malan).

⇒ <https://youtu.be/6hfOvs8pY1k>

### Exercício 1.2

(Solução 1.2)

Assista ao vídeo “*Top 7 Data Structures for Interviews*”.

⇒ <https://youtu.be/cQWr9DFE1ww>

## 2 Complexidade de algoritmos

### Exercício 2.1

(Solução 2.1)

Desenhe o gráfico das funções  $8n$ ,  $4n \log n$ ,  $2n^2$ ,  $n^3$  e  $2^n$  usando uma escala logarítmica para os eixos  $x$  e  $y$ , isto é, se o valor da função  $f(x)$  é  $y$ , desenhe esse ponto com a coordenada  $x$  em  $\log x$  e a coordenada  $y$  em  $\log y$ .

### Exercício 2.2

(Solução 2.2)

O número de operações executadas por dois algoritmos A e B é  $40n^2$  e  $2n^3$ , respectivamente. Determine  $n_0$  tal que A seja melhor que B para  $n \geq n_0$ .

### Exercício 2.3

(Solução 2.3)

O número de operações executadas por dois algoritmos A e B é  $8n \log n$  e  $2n^2$ , respectivamente. Determine  $n_0$  tal que A seja melhor que B para  $n \geq n_0$ .

### Exercício 2.4

(Solução 2.4)

Ordene as funções a seguir por sua taxa assintótica de crescimento.

- $4n \log n + 2n$
- $2^{10}$
- $3n + 100 \log n$
- $4n$
- $2^n$
- $n^2 + 10n$
- $n^3$
- $n \log n$

### Exercício 2.5

(Solução 2.5)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de  $\mathcal{O}$ ) do algoritmo abaixo?

```
1  # Returns the sum of the integers in given array.
2  def alg1(arr):
3      n = len(arr)
4      total = 0
5      for j in range(n):
6          total += arr[j]
7      return total
```

### Exercício 2.6

(Solução 2.6)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de  $\mathcal{O}$ ) do algoritmo abaixo?

```
1  # Returns the sum of the integers with even index in given array.
2  def alg2(arr):
3      n = len(arr)
4      total = 0
5      for j in range(0, n, 2):
6          total += arr[j]
7      return total
```

### Exercício 2.7

(Solução 2.7)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de  $\mathcal{O}$ ) do algoritmo abaixo?

```
1  # Returns the sum of the prefix sums of given array.
2  def alg3(arr):
3      n = len(arr)
4      total = 0
5      for j in range(n):
6          for k in range(j + 1):
7              total += arr[k]
8      return total
```

### Exercício 2.8

(Solução 2.8)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de  $\mathcal{O}$ ) do algoritmo abaixo?

```
1  # Returns the sum of the prefix sums of given array.
2  def alg4(arr):
3      n = len(arr)
4      prefix = 0
5      total = 0
6      for j in range(n):
7          prefix += arr[j]
8          total += prefix
9      return total
```

### Exercício 2.9

(Solução 2.9)

Qual a complexidade assintótica no pior caso (em termos de  $\mathcal{O}$ ) do algoritmo abaixo?

```
1  # Returns the number of times second array stores sum of prefix sums from first.
2  def alg5(first, second):
3      n = len(first)
4      count = 0
5      for i in range(n):
6          total = 0
7          for j in range(n):
8              for k in range(j + 1):
9                  total += first[k]
10             if second[i] == total:
11                 count += 1
12      return count
```

#### Exercício 2.10

(Solução 2.10)

O algoritmo A executa uma computação em tempo  $\mathcal{O}(\log n)$  para cada entrada de um arranjo de  $n$  elementos. Qual o pior caso em relação ao tempo de execução de A?

#### Exercício 2.11

(Solução 2.11)

Dado um arranjo X de  $n$  elementos, o algoritmo B escolhe  $\log n$  elementos de X, aleatoriamente, e executa um cálculo em tempo  $\mathcal{O}(n)$  para cada um. Qual o pior caso em relação ao tempo de execução de B?

#### Exercício 2.12

(Solução 2.12)

Dado um arranjo X de  $n$  elementos inteiros, o algoritmo C executa uma computação em tempo  $\mathcal{O}(n)$  para cada número par de X e uma computação em tempo  $\mathcal{O}(\log n)$  para cada elemento ímpar de X. Qual o melhor caso e o pior caso em relação ao tempo de execução de C?

#### Exercício 2.13

(Solução 2.13)

Dado um arranjo X de  $n$  elementos, o algoritmo D chama o algoritmo E para cada elemento  $X[i]$ . O algoritmo E executa em tempo  $\mathcal{O}(i)$  quando é chamado sobre um elemento  $X[i]$ . Qual o pior caso em relação ao tempo de execução do algoritmo D?

#### Exercício 2.14

(Solução 2.14)

Implemente os algoritmos `disjoint1` e `disjoint2` (apresentados nos materiais de aula), e execute uma análise experimental dos seus tempos de execução. Visualize seus tempos de execução como uma função do tamanho da entrada usando um gráfico *di-log*.

#### Exercício 2.15

(Solução 2.15)

Execute uma análise experimental para testar a hipótese de que o método de ordenação do python (`sort` ou `sorted`) executa em um tempo médio  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

#### Exercício 2.16

(Solução 2.16)

Execute uma análise experimental para determinar o maior valor de  $n$  para os algoritmos `unique1` e `unique2` (apresentados nos materiais de aula), de modo que o algoritmo execute em um minuto ou menos.

## 3 Estruturas fundamentais e listas

#### Exercício 3.1

(Solução 3.1)

Forneça uma implementação para o método `size()` da classe `LinkedList`, considerando que a mesma não mantenha o tamanho armazenado em uma variável. Qual a implicação dessa modificação na complexidade assintótica do método?

#### Exercício 3.2

(Solução 3.2)

Descreva um método para encontrar o nodo central de uma lista duplamente encadeada com nodos sentinelas, sem o uso de informações sobre o tamanho da lista. No caso de um número par de nodos, o método deve devolver o nodo à esquerda do ponto central. Qual a complexidade desse algoritmo?

#### Exercício 3.3

(Solução 3.3)

Descreva um algoritmo para concatenar duas listas duplamente encadeadas  $L$  e  $M$  com sentinelas, em uma lista única  $L'$ .

#### Exercício 3.4

(Solução 3.4)

Descreva em detalhes como trocar dois nodos  $x$  e  $y$  de posição (não apenas seu conteúdo) em uma lista simplesmente encadeada  $L$ , dadas as referências para  $x$  e  $y$  somente. Repita este exercício para o caso em que  $L$  é uma lista duplamente encadeada. Qual algoritmo possui maior complexidade?

#### Exercício 3.5

(Solução 3.5)

Implemente uma lista simplesmente encadeada que forneça operações de inserção e remoção nas duas extremidades, além dos métodos `size` e `is_empty`.

#### Exercício 3.6

(Solução 3.6)

Uma forma de melhorar o desempenho de uma lista duplamente encadeada é buscar pelo nodo desejado (para inserção ou remoção) “de trás para frente”, quando conveniente. Como essa abordagem pode ser implementada? Qual o impacto na complexidade do procedimento de busca?

#### Exercício 3.7

(Solução 3.7)

Forneça uma representação de uma lista  $L$ , inicialmente vazia, após realizar as seguintes operações: `insert(0, 4)`, `insert(0, 3)`, `insert(0, 2)`, `insert(2, 1)`, `insert(1, 5)`, `insert(1, 6)`, `insert(3, 7)`, `insert(0, 8)`.

#### Exercício 3.8

(Solução 3.8)

Supondo que estamos mantendo uma coleção  $C$  de elementos de tal modo que, cada vez que adicionamos um novo elemento na coleção, copiamos o conteúdo de  $C$  em uma nova lista baseada em arranjo do tamanho exato ao necessário. Qual o tempo de processamento da adição de  $n$  elementos em uma coleção  $C$  inicialmente vazia?

#### Exercício 3.9

(Solução 3.9)

Considere a implementação de uma lista duplamente encadeada fornecida pela classe `LinkedList`. Implemente a função `toArray` que retorna uma lista baseada em arranjo com os elementos da lista encadeada.

#### Exercício 3.10

(Solução 3.10)

A lista baseada em arranjo fornece uma função `index(e)`, que retorna o índice onde o elemento  $e$  está armazenado, e dispara uma exceção, caso o elemento não é encontrado na estrutura. Implemente essa função na classe `LinkedList`.

#### Exercício 3.11

(Solução 3.11)

A lista baseada em arranjo fornece uma função `clear()`, que remove todos os elementos da coleção. Implemente essa função na classe `LinkedList`.

#### Exercício 3.12

(Solução 3.12)

Desenvolva um experimento para testar a eficiência de  $n$  chamadas sucessivas à função `insert` de uma lista baseada em arranjo para vários  $n$  diferentes, e analise os resultados empíricos sob os seguintes cenários:

- Cada `insert` acontece no índice 0.
- Cada `insert` acontece no índice `size()/2`.
- Cada `insert` acontece no índice `size()`.

## 4 Buscas em estruturas lineares

### Exercício 4.1

(Solução 4.1)

Implemente uma versão recursiva do algoritmo de busca binária, conforme as ideias do Capítulo 4 (Recursão) de Goodrich et al. (2013) – *Data Structures and Algorithms in Python*.

### Exercício 4.2

(Solução 4.2)

Simule o algoritmo de busca binária para os seguintes casos:

- a)  $x = 15$ ,  $v = \{15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90\}$ .
- b)  $x = 33$ ,  $v = \{15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90\}$ .
- c)  $x = 63$ ,  $v = \{15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90\}$ .
- d)  $x = 81$ ,  $v = \{15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90\}$ .
- e)  $x = 22$ ,  $v = \{15, 27, 33, 46, 51, 63, 71, 82, 90\}$ .

Compare o número de avaliações realizadas pelas buscas binária e sequencial.

### Exercício 4.3

(Solução 4.3)

Quando o vetor está ordenado, a busca sequencial não precisa percorrer toda a lista para saber que o elemento buscado não existe. Ela pode parar quando o elemento analisado for maior que o buscado. Implemente as modificações necessárias para essa estratégia. Qual o impacto na complexidade assintótica do novo algoritmo?

### Exercício 4.4

(Solução 4.4)

Veja as demonstrações das buscas sequencial e binária disponíveis em <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Search.html>.

## 5 Ordenação de estruturas lineares

### Exercício 5.1

(Solução 5.1)

Mostre o conteúdo do *array* de inteiros (5, 7, 4, 9, 8, 5, 6, 3) para cada vez que o algoritmo insertion sort o modifica durante o processo de ordenação.

### Exercício 5.2

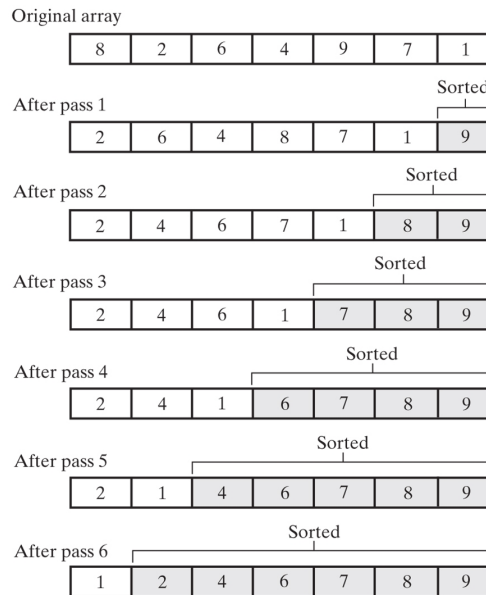
(Solução 5.2)

Qual modificação é necessária para que o algoritmo insertion sort ordene os elementos de forma decrescente?

### Exercício 5.3

(Solução 5.3)

O algoritmo bubble sort ordena um *array* de  $n$  elementos em ordem crescente, executando  $n - 1$  passagens pelo *array*. Em cada passagem, ele compara elementos adjacentes e os troca se estiverem fora de ordem. Por exemplo, na primeira passagem ele compara o primeiro e o segundo elementos, depois o segundo e o terceiro elementos, e assim por diante. No final da primeira passagem, o maior elemento está em sua posição adequada no final do *array*. Cada passagem subsequente ignora os elementos no final do *array*, pois eles estão ordenados e são maiores que qualquer um dos elementos restantes. Assim, cada passagem faz uma comparação a menos que a passagem anterior. A figura abaixo ilustra seu funcionamento.



Implemente o bubble sort para ordenar um *array*.

#### Exercício 5.4

(Solução 5.4)

Qual a complexidade assintótica de tempo do bubble sort?

#### Exercício 5.5

(Solução 5.5)

Implemente um algoritmo para verificar se um *array* está em ordem não-decrescente. Você pode usar esse método para verificar se um algoritmo de ordenação executou corretamente.

#### Exercício 5.6

(Solução 5.6)

No algoritmo insertion sort, podemos usar uma busca binária para encontrar a posição de inserção de cada elemento. Qual o impacto na complexidade assintótica do algoritmo?

#### Exercício 5.7

(Solução 5.7)

Estude os seguintes algoritmos de ordenação:

- Merge sort;
- Quick sort;
- Radix sort.

#### Exercício 5.8

(Solução 5.8)

Veja as demonstrações dos diferentes algoritmos de ordenação estudados em <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Algorithms.html> e <https://visualgo.net/en/sorting>.

## 6 Pilhas, Filas e Deques

#### Exercício 6.1

(Solução 6.1)

Suponha que inicialmente uma pilha vazia *S* tenha realizado um total de 25 operações *push*, 12 operações

`top` e 10 operações `pop`, 3 das quais retornaram `null`, indicando uma pilha vazia. Qual é o tamanho atual de `S`?

#### Exercício 6.2

(Solução 6.2)

Sendo a pilha do exercício anterior uma instância da classe `ArrayStack`, qual o valor final da variável `t`?

#### Exercício 6.3

(Solução 6.3)

Quais valores são retornados durante as seguintes operações, se executadas em uma pilha inicialmente vazia? `push(5)`, `push(3)`, `pop()`, `push(2)`, `push(8)`, `pop()`, `pop()`, `push(9)`, `push(1)`, `pop()`, `push(7)`, `push(6)`, `pop()`, `pop()`, `push(4)`, `pop()`, `pop()`.

#### Exercício 6.4

(Solução 6.4)

Implemente um método com a assinatura `transfer(S, T)` que transfere todos os elementos da pilha `S` para a pilha `T`, de modo que o elemento que iniciou no topo de `S` é o primeiro elemento a ser inserido em `T`, e o último elemento de `S` termina no topo de `T`.

#### Exercício 6.5

(Solução 6.5)

Apresente um método recursivo que remove todos os elementos de uma pilha.

#### Exercício 6.6

(Solução 6.6)

Suponha que uma fila vazia `Q` realizou um total de 32 operações de `enqueue`, 10 operações *first* e 15 operações `dequeue`, 5 das quais retornaram `null`, indicando uma fila vazia. Qual é o tamanho atual de `Q`?

#### Exercício 6.7

(Solução 6.7)

Sendo a fila do exercício anterior uma instância da classe `ArrayQueue` com uma capacidade de 30 elementos nunca excedida, qual o valor final da variável `f`?

#### Exercício 6.8

(Solução 6.8)

Quais são os valores retornados após as seguintes operações, se executadas em uma fila inicialmente vazia? `enqueue(5)`, `enqueue(3)`, `dequeue()`, `enqueue(2)`, `enqueue(8)`, `dequeue()`, `dequeue()`, `enqueue(9)`, `enqueue(1)`, `dequeue()`, `enqueue(7)`, `enqueue(6)`, `dequeue()`, `dequeue()`, `enqueue(4)`, `dequeue()`, `dequeue()`.

#### Exercício 6.9

(Solução 6.9)

Faça um adaptador simples (classe) que implemente uma pilha usando uma instância de deque para armazenamento.

#### Exercício 6.10

(Solução 6.10)

Faça um adaptador simples (classe) que implemente uma fila usando uma instância de deque para armazenamento.

#### Exercício 6.11

(Solução 6.11)

Quais são os valores retornados após as seguintes operações, se executadas em um deque inicialmente vazio? `addFirst(3)`, `addLast(8)`, `addLast(9)`, `addFirst(1)`, `last()`, `isEmpty()`, `addFirst(2)`, `removeLast()`, `addLast(7)`, `first()`, `last()`, `addLast(4)`, `size()`, `removeFirst()`, `removeFirst()`.

### Exercício 6.12

(Solução 6.12)

Suponha que você tenha um deque *D* contendo os números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), nessa ordem. Supondo que além disso você tenha uma fila *Q* inicialmente vazia. Apresente um pseudocódigo que utilize somente *D* e *Q* (mais nenhuma variável) e resulte em *D* armazenando os elementos na ordem (1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8).

### Exercício 6.13

(Solução 6.13)

Repita o exercício anterior usando o deque *D* e uma pilha *S*, inicialmente vazia.

## 7 Filas de prioridade

### Exercício 7.1

(Solução 7.1)

O que cada uma das chamadas `removeMin` retorna, dentre a seguinte sequência de operações em uma fila de prioridade: `insert(5)`, `insert(4)`, `insert(7)`, `insert(1)`, `removeMin()`, `insert(3)`, `insert(6)`, `removeMin()`, `removeMin()`, `insert(8)`, `removeMin()`, `insert(2)`, `removeMin()`, `removeMin()`?

### Exercício 7.2

(Solução 7.2)

Um aeroporto está desenvolvendo uma simulação computacional de controle de tráfego aéreo para lidar com eventos como aterrissagens e decolagens. Cada evento tem um *timestamp* que simboliza o tempo em que o evento ocorrerá. A simulação necessita realizar eficientemente duas operações fundamentais:

- Inserir um evento com um *timestamp* (isto é, adicionar um evento futuro).
- Retornar o evento com o *timestamp* mais próximo (i.e., determinar o próximo evento para processar).
- Qual estrutura de dados deverá ser usada para realizar essas operações? Por quê?

### Exercício 7.3

(Solução 7.3)

O método `min` de uma fila de prioridade não-ordenada executa em tempo  $\mathcal{O}(n)$ . Proponha uma alteração nessa estrutura para que o método `min` execute em tempo  $\mathcal{O}(1)$ . Explique qualquer modificação necessária em outros métodos da estrutura.

### Exercício 7.4

(Solução 7.4)

Você pode adaptar sua solução do exercício anterior para fazer o método `removeMin` de uma fila de prioridade não-ordenada executar em tempo  $\mathcal{O}(1)$ ? Justifique sua resposta.

### Exercício 7.5

(Solução 7.5)

Considere uma fila de prioridade que armazena nomes de pessoas, modelados pela classe `Name`, apresentada abaixo.

```
1 public class Name implements Comparable<Name> {
2     public String value;
3
4     public Name(String value) {
5         this.value = value;
6     }
7
8     @Override
9     public int compareTo(Name o) {
10         return this.value.length() - o.value.length();
11     }
12 }
```



Informe a sequência de elementos retornados e a configuração final de uma fila de prioridade ordenada ao executar esta sequência de comandos: `insert(new Name("Phoebe"))`, `insert(new Name("Joey"))`, `insert(new Name("Ross"))`, `min()`, `insert(new Name("Rachel"))`, `removeMin()`, `removeMin()`, `min()`, `insert(new Name("Monica"))`, `removeMin()`.

### Exercício 7.6

(Solução 7.6)

Considere a implementação alternativa abaixo do método `compareTo` para a classe `Name`, do exercício anterior.

```
1  @Override
2  public int compareTo(Name o) {
3      return this.value.compareTo(o.value);
4  }
```

Qual a nova sequência de elementos retornados e a nova configuração final da fila de prioridade ao executar a mesma sequência de comandos?

## 8 Mapas

### Exercício 8.1

(Solução 8.1)

Qual a complexidade de tempo no pior caso de inserir  $n$  pares chave-valor em um mapa inicialmente vazio, implementado pela classe `UnsortedArrayMap`?

### Exercício 8.2

(Solução 8.2)

O uso de valores `null` em um mapa é problemático, uma vez que não é possível diferenciar se um retorno `null` do método `get(k)` representa um valor legítimo de uma entrada (`k`, `null`), ou representa que a chave `k` não foi encontrada. A interface `java.util.Map` inclui um método booleano `containsKey(k)` que resolve essa ambiguidade. Implemente este método na classe `UnsortedArrayMap`.

### Exercício 8.3

(Solução 8.3)

Qual a complexidade de tempo no pior caso de realizar  $n$  remoções de uma instância de `SortedArrayMap` que contém inicialmente  $2n$  entradas?

### Exercício 8.4

(Solução 8.4)

Implemente o método `containsKey(k)` para a classe `SortedArrayMap`.

### Exercício 8.5

(Solução 8.5)

Considere o objetivo de adicionar uma entrada (`k`, `v`) em um mapa somente se não existir outra entrada com a mesma chave `k`. Para um mapa  $M$  sem valores `null`, isso pode ser feito da seguinte forma:

```
1  if (M.get(k) == null)
2      M.put(k, v);
```

Apesar de atingir o objetivo, essa estratégia é ineficiente, uma vez que gasta tempo para verificar que não existe entrada com a chave `k`, e novamente para buscar a posição de inserção da nova entrada. Para evitar isso, algumas implementações de mapas suportam um método `putIfAbsent(k, v)`, que realiza a inserção assim que identifica a não existência de entrada com a chave `k`. Forneça a implementação deste método para a classe `UnsortedArrayMap`.

## 9 Tabelas hash

### Exercício 9.1

(Solução 9.1)

Qual a complexidade assintótica de tempo no pior caso de inserir  $n$  entradas em uma tabela *hash* inicialmente vazia, com as colisões resolvidas por encadeamento? E qual a complexidade no melhor caso?

### Exercício 9.2

(Solução 9.2)

Considere a classe `Name` definida abaixo, e proponha uma implementação para o método `hashCode`.

```
1 public class Name {
2     private String first;
3     private String last;
4
5     public void setName(String first, String last) {
6         this.first = first;
7         this.last = last;
8     }
9
10    public String getName() {
11        return toString();
12    }
13
14    public String toString() {
15        return first + " " + last;
16    }
17
18    // ...
19 }
```

### Exercício 9.3

(Solução 9.3)

Suponha que o tamanho da sua tabela *hash* seja 31, que você use o código *hash* padrão do Java para *strings* (descrito abaixo), e que você use encadeamento para resolver colisões. Liste cinco nomes distintos que serão armazenados na mesma posição da tabela, gerando colisões.

O Java implementa o método de Horner para gerar códigos *hash* para *strings*. Dado  $g = 31$  (valor padrão para essa variável), o código *hash* é dado por  $u_0g^{n-1} + u_1g^{n-2} + \dots + u_{n-2}g + u_{n-1}$ , onde  $u_i$  é o  $i$ -ésimo caractere da string. Abaixo é fornecida uma implementação da função *hash* usando o método de Horner para gerar o código *hash*. Note que ao somar um caractere a um inteiro (linha 5), o caractere é convertido ao seu código ASCII (inteiro).

```
1 public int hashFunction(String s, int size) {
2     int hash = 0;
3     int n = s.length();
4     for (int i = 0; i < n; i++)
5         hash = g * hash + s.charAt(i);
6     return hash % size;
7 }
```

### Exercício 9.4

(Solução 9.4)

Considere um tipo de dado cuja chave de busca consiste em três valores de ponto flutuante (latitude, longitude e altitude, por exemplo). Sugira pelo menos duas possíveis funções *hash* para esse tipo de dado.

### Exercício 9.5

(Solução 9.5)

Você tem aproximadamente 1000 imagens de *thumbnail* e quer armazená-las em um mapa que usa *hashing*. Cada imagem possui 20 pixels de largura e 20 pixels de altura, e cada pixel é uma entre 256 cores. Sugira algumas funções *hash* que poderiam ser usadas.

### Exercício 9.6

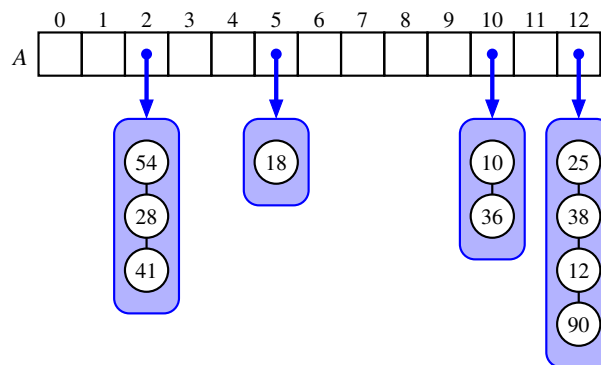
(Solução 9.6)

Desenhe a tabela *hash* de tamanho 11 resultante do uso da função *hash*  $h(i) = (3i + 5) \% 11$  ao armazenar as chaves 12, 44, 13, 88, 23, 94, 11, 39, 20, 16 e 5, assumindo que as colisões são tratadas com encadeamento.

### Exercício 9.7

(Solução 9.7)

A operação de *rehashing* consiste em aumentar a capacidade de uma tabela *hash* e realocar suas entradas. Mostre o resultado do *rehashing* da tabela *hash* ilustrada abaixo para uma tabela de tamanho 19 usando a nova função *hash*  $h(k) = 3k \% 19$ .



### Exercício 9.8

(Solução 9.8)

Considere a classe *Pair* definida abaixo e proponha implementações para os métodos *equals* e *hashCode*.

```

1 public class Pair<A,B> {
2     A first;
3     B second;
4
5     public Pair(A a, B b) {
6         first = a;
7         second = b;
8     }
9
10    public A getFirst() { return first; }
11    public B getSecond() { return second; }
12 }

```

### Exercício 9.9

(Solução 9.9)

Considere um tipo de dado para registrar pacientes em uma centro de assistência médica. Cada registro contém um identificador inteiro para o paciente, e strings para a data, motivo da visita e tratamento prescrito. Projete e implemente a classe *PatientRecord*, sobrescrevendo o método *hashCode*. Escreva um programa para testar essa classe.

### Exercício 9.10

(Solução 9.10)

Projete a classe *PatientDataBase* que armazena instâncias de *PatientRecord*, conforme descrito no exercício anterior. Essa classe deve prover duas operações de consulta. Dada a identificação de um paciente e uma data, a primeira operação deve retornar o motivo da visita, e a segunda operação deve retornar o tratamento prescrito.

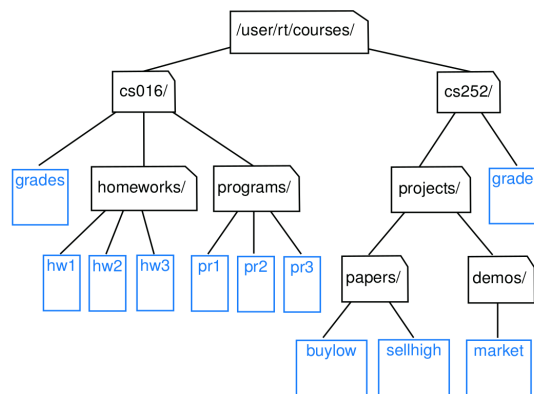
## 10 Árvores

### Exercício 10.1

(Solução 10.1)

Considere a árvore abaixo e informe:

- Qual nodo é a raiz?
- Quais são os nodos internos?
- Quantos descendentes tem o nodo `cs016/`?
- Quantos ancestrais tem o nodo `cs016/`?
- Quais são os irmãos do nodo `homeworks/`?
- Quais nodos estão na sub-árvore cuja raiz é o nodo `projects/`?
- Qual o nível do nodo `papers/`?
- Qual a altura da árvore?



### Exercício 10.2

(Solução 10.2)

Qual a altura da menor (mais baixa) árvore binária que contém 21 nodos? Essa árvore é cheia? É balanceada?

### Exercício 10.3

(Solução 10.3)

Considere uma árvore binária com três níveis.

- Qual o número máximo de nodos da árvore?
- Qual o número máximo de folhas da árvore?
- Responda às questões acima considerando uma árvore binária com dez níveis.

### Exercício 10.4

(Solução 10.4)

Escreva um algoritmo recursivo que conta os nodos de uma árvore binária.

### Exercício 10.5

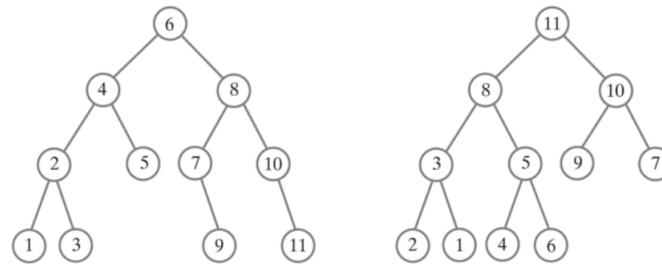
(Solução 10.5)

Considere a travessia de uma árvore binária. Suponha que a visitação de um nodo consiste em apresentar em tela seu elemento. Qual o resultado das travessias em pré-ordem e level-ordem nas árvore abaixo?

### Exercício 10.6

(Solução 10.6)

Considere as árvores do exercício anterior, contendo os elementos inteiros identificados nos nodos.



- A primeira árvore é uma árvore binária de busca? Justifique.
- A segunda árvore é uma *max-heap*? Justifique.

### Exercício 10.7

(Solução 10.7)

Uma árvore binária de busca pode ser também uma *max-heap* (i.e. ao mesmo tempo)? Explique.

### Exercício 10.8

(Solução 10.8)

Represente (desenhe) a menor árvore binária de busca possível (menor altura) que armazene as seguintes strings: *Ann*, *Ben*, *Chad*, *Deepak*, *Ella*, *Jada*, *Jazmin*, *Kip*, *Luis*, *Pat*, *Rico*, *Scott*, *Tracy*, *Zak*.

### Exercício 10.9

(Solução 10.9)

Represente (desenhe) uma *max-heap* que armazene as strings do exercício anterior. A *max-heap* é única?

### Exercício 10.10

(Solução 10.10)

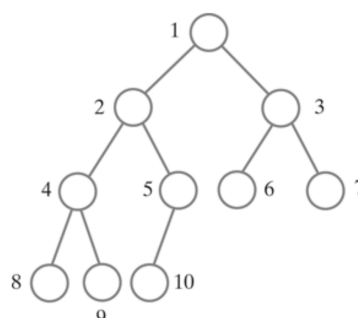
Considere que a ordem de uma visitação em largura de uma árvore binária completa seja 11, 8, 10, 3, 5, 9, 7, 2, 1, 4, 6. Qual a ordem de visitação em profundidade dessa mesma árvore? Qual a configuração da árvore?

### Exercício 10.11

(Solução 10.11)

Suponha que os nodos de uma árvore binária completa sejam numerados conforme a ordem de visitação de uma travessia em largura. A raiz da árvore é o nodo 1, e assim por diante. Abaixo é mostrada uma árvore com essas características. Dado um nodo  $i$ , como podemos computar:

- O irmão de  $i$ , se existente.
- O filho esquerdo de  $i$ , se existente.
- O filho direito de  $i$ , se existente.
- O pai de  $i$ , se existente.



**Exercício 10.12**

([Solução 10.12](#))

Apresente o pseudocódigo de um algoritmo que conta o número de folhas em uma árvore binária que são filhas esquerdas dos seus respectivos pais.

**Exercício 10.13**

([Solução 10.13](#))

Quantas árvores binárias de busca diferentes podem armazenar os valores  $\{1, 2, 3\}$ ?

**Exercício 10.14**

([Solução 10.14](#))

Represente (desenhe) uma árvore binária  $T$  que satisfaça todas as seguintes condições:

- Cada nodo interno armazena um caractere.
- O percurso em pré-ordem de  $T$  gera a sequência EXAMFUN.
- O percurso em level-ordem de  $T$  gera a sequência EXNAUMF.

**Exercício 10.15**

([Solução 10.15](#))

Insira, em uma árvore binária de busca inicialmente vazia, os elementos 30, 40, 24, 58, 48, 26, 11, 13 (nessa ordem). Desenhe a árvore após cada inserção.

# Soluções dos exercícios

## 1 Introdução

### Solução 1.1

([Exercício 1.1](#))

Assista ao vídeo sugerido.

### Solução 1.2

([Exercício 1.2](#))

Assista ao vídeo sugerido.

## 2 Complexidade de algoritmos

### Solução 2.1

([Exercício 2.1](#))

Gráfico disponível [aqui](#).

### Solução 2.2

([Exercício 2.2](#))

Igualando as equações, temos que  $40n^2 = 2n^3$  para  $n' = 0$  e  $n'' = 20$ . Logo,  $40n^2 \leq 2n^3$  para  $n \geq 20$ .  
Veja a representação gráfica [aqui](#).

### Solução 2.3

([Exercício 2.3](#))

Por inspeção, assumindo  $n_0 = 10$ , temos que  $8n \log n \leq 2n^2$  para todo  $n \geq n_0$ . Veja a representação gráfica [aqui](#).

### Solução 2.4

([Exercício 2.4](#))

$2^{10} \ll 3n + 100 \log n = 4n \ll n \log n = 4n \log n + 2n \ll n^2 + 10n \ll n^3 \ll 2^n$ .

### Solução 2.5

([Exercício 2.5](#))

$\mathcal{O}(n)$ .

### Solução 2.6

([Exercício 2.6](#))

$\mathcal{O}(n)$ .

### Solução 2.7

([Exercício 2.7](#))

$\mathcal{O}(n^2)$ .

### Solução 2.8

([Exercício 2.8](#))

$\mathcal{O}(n)$ .

### Solução 2.9

([Exercício 2.9](#))

$\mathcal{O}(n^3)$ .

### Solução 2.10

([Exercício 2.10](#))

$\mathcal{O}(n \log n)$ .

### Solução 2.11

(Exercício 2.11)

$\mathcal{O}(n \log n)$ .

### Solução 2.12

(Exercício 2.12)

Melhor caso:  $\mathcal{O}(n \log n)$ , quando todos os elementos são ímpares. Pior caso:  $\mathcal{O}(n^2)$ , quando todos os elementos são pares.

### Solução 2.13

(Exercício 2.13)

O tempo de execução é proporcional a  $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2 = \mathcal{O}(n^2)$ .

### Solução 2.14

(Exercício 2.14)

Exercício de análise experimental.

### Solução 2.15

(Exercício 2.15)

Exercício de análise experimental.

### Solução 2.16

(Exercício 2.16)

Exercício de análise experimental.

## 3 Estruturas fundamentais e listas

### Solução 3.1

(Exercício 3.1)

Uma possível solução é percorrer a estrutura, contando a quantidade de nodos. Isso implica em um aumento na complexidade assintótica de constante para linear, i.e.  $\mathcal{O}(1)$  para  $\mathcal{O}(n)$ .

```
1 def size(self):
2     count = -1
3     walk = self._header
4     while walk != self._trailer:
5         count += 1
6         walk = walk._next
7     return count
```

### Solução 3.2

(Exercício 3.2)

Considere uma busca combinada de ambas extremidades. Lembre-se que um *link hop* é uma atribuição do formato `p = p.getNext()`; ou `p = p.getPrev()`; O método a seguir executa em tempo  $\mathcal{O}(n)$ .

```
1 def middle(self):
2     if self.is_empty():
3         raise Exception("List is empty")
4     mid = self.header.next
5     partner = self.trailer.prev
6     while mid != partner and mid.next != partner:
7         mid = mid.next
8         partner = partner.prev
9     return mid
```

### Solução 3.3

(Exercício 3.3)

Junte o final de  $L$  no começo de  $M$ . Use dois nodos temporários, `temp1` e `temp2`. Inicialize `temp1` como o



**trailer** de  $L$  e **temp2** como o **header** de  $M$ . Atribua **temp2** como o próximo elemento de **temp1** e **temp1** como o elemento anterior de **temp2**. Faça  $L' \leftarrow L$  e atribua o **trailer** de  $M$  como **trailer** de  $L'$ .

### Solução 3.4

(Exercício 3.4)

Realizar uma troca (*swap*) em uma lista simplesmente encadeada levará mais tempo do que em uma lista duplamente encadeada. Essa implementação requer muito cuidado, especialmente quando  $x$  e  $y$  são vizinhos um do outro. A dificuldade na eficiência ocorre porque para trocar  $x$  e  $y$  em uma lista simplesmente encadeada devemos localizar os nodos imediatamente anteriores a  $x$  e  $y$  percorrendo a estrutura, e não tem uma maneira rápida de fazer isso. A complexidade assintótica dessa operação no pior caso, quando todos os elementos devem ser percorridos, é  $\mathcal{O}(n)$ . Em uma lista duplamente encadeada, não é necessário percurso na lista, pois cada nodo já possui apontamentos para seus antecessores e sucessores, reduzindo a complexidade assintótica para  $\mathcal{O}(1)$  no pior caso.

### Solução 3.5

(Exercício 3.5)

Exercício de implementação.

### Solução 3.6

(Exercício 3.6)

Basta verificar se o índice buscado é menor ou maior que  $\text{size}/2$ , para saber em qual metade da estrutura o índice se encontra. Caso se trate da primeira metade, a busca deve ser realizada a partir do primeiro elemento. Caso contrário, a busca inicia pelo último elemento. Com isso, apenas metade dos elementos precisará ser varrido no pior caso. Logo, a complexidade cai para  $n/2$ , o que é mais eficiente na prática, mas não altera a complexidade assintótica  $\mathcal{O}(n)$ .

### Solução 3.7

(Exercício 3.7)

Desenhe a lista, mostrando os estados antes e depois de cada operação. A configuração final da lista deve ser (8, 2, 6, 5, 7, 3, 1, 4).

### Solução 3.8

(Exercício 3.8)

O tempo de execução para inserir um novo elemento é  $\mathcal{O}(n)$ . Como  $n$  elementos são incluídos, o tempo de execução total é  $\mathcal{O}(n^2)$ .

### Solução 3.9

(Exercício 3.9)

A função deve criar uma lista alternativa, atribuir os elementos a ela e retornar a estrutura criada. A implementação pode devolver uma lista com as mesmas referências ou com cópias dos elementos.

### Solução 3.10

(Exercício 3.10)

Você deve percorrer a estrutura em busca do elemento. A implementação abaixo retorna  $-1$ , caso não encontra o elemento.

```
1 def index(self, e):
2     if self.is_empty(): return -1
3     count = -1
4     walk = self.header.next
5     while walk != self.trailer:
6         count += 1
7         if walk.element == e:
8             return count
9         walk = walk.next
10    return -1
```

### Solução 3.11

(Exercício 3.11)

Basta atualizar as referências **next** e **prev** dos nodos sentinelas para que um referencie o outro, e atualizar **size** para 0.

```
1 def clear(self):
2     self.header.next = self.trailer
3     self.trailer.prev = self.header
4     self.size = 0
```

### Solução 3.12

(Exercício 3.12)

Exercício de análise experimental.

## 4 Buscas em estruturas lineares

### Solução 4.1

(Exercício 4.1)

Uma possível implementação é apresentada na Seção 4.1.3 (Busca Binária) de Goodrich et al. (2013) – *Data Structures and Algorithms in Python*.

### Solução 4.2

(Exercício 4.2)

Com uma caneta, marque as referências para início e fim da sub-estrutura considerada em cada iteração da busca. Caso essas referências se cruzem, o elemento não foi encontrado. Caso a referência para o meio da lista aponte para o elemento buscado, seu índice é encontrado.

- a) Busca binária: 3 avaliações (51, 27, 15). Busca sequencial: 1 avaliação (15).
- b) Busca binária: 3 avaliações (51, 27, 33). Busca sequencial: 3 avaliações (15, 27, 33).
- c) Busca binária: 3 avaliações (51, 71, 63). Busca sequencial: 6 avaliações (15, 27, 33, 46, 51, 63).
- d) Busca binária: 3 avaliações (51, 71, 82). Busca sequencial: 9 avaliações (todos os elementos).
- e) Busca binária: 3 avaliações (51, 27, 15). Busca sequencial: 9 avaliações (todos os elementos).

### Solução 4.3

(Exercício 4.3)

Para implementar essa modificação, você deve parar a busca com sucesso quando o elemento buscado é igual ao elemento analisado. A busca continua se o elemento buscado for menor que o elemento analisado, e pára sem sucesso, caso contrário. Na prática, essa modificação torna o algoritmo mais eficiente nos casos em que ele pára antes de percorrer toda a lista. Porém, no pior caso o elemento buscado não está na lista e é maior que qualquer elemento dela, implicando na necessidade da lista ser totalmente percorrida. Logo, a complexidade continua sendo  $\mathcal{O}(n)$  no pior caso.

Busca sequencial modificada para um *array*:

```
1 def index(array, value):
2     for i in range(len(array)):
3         if array[i] == value:
4             return i
5         if array[i] < value:
6             return -1
7     return -1
```

Busca sequencial modificada para uma lista encadeada:

```
1 def index(self, e):
2     if self.is_empty(): return -1
3     count = -1
4     walk = self.header.next
5     while walk != self.trailer:
6         count += 1
```

```
7     if walk.element == e:
8         return count
9     if walk.element < e:
10        return -1
11    walk = walk.next
12    return -1
```

#### Solução 4.4

(Exercício 4.4)

Analise as demonstrações para entender os dois tipos de busca.

## 5 Ordenação de estruturas lineares

#### Solução 5.1

(Exercício 5.1)

Array inicial:

(5, 7, 4, 9, 8, 5, 6, 3)

Array após cada inserção:

(5, 7, 4, 9, 8, 5, 6, 3)  
(5, 7, 4, 9, 8, 5, 6, 3)  
(4, 5, 7, 9, 8, 5, 6, 3)  
(4, 5, 7, 9, 8, 5, 6, 3)  
(4, 5, 7, 8, 9, 5, 6, 3)  
(4, 5, 5, 7, 8, 9, 6, 3)  
(4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 3)  
(3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9)

#### Solução 5.2

(Exercício 5.2)

Basta inverter o operador relacional na comparação dos elementos. Ou seja, em vez de usar `key < array[j]`, usamos `key > array[j]`. Com isso, é fácil implementar um método de ordenação que recebe a ordem desejada (“normal” ou “inversa”) como um parâmetro e executa a ordenação correspondente.

#### Solução 5.3

(Exercício 5.3)

Algoritmo bubble sort:

```
1 def bubble_sort(array):
2     for last_index in range(len(array) - 1, 0, -1):
3         for index in range(last_index):
4             if array[index] > array[index + 1]:
5                 # Operação de swap/troca
6                 array[index], array[index + 1] = array[index + 1], array[index]
```

#### Solução 5.4

(Exercício 5.4)

O bubble sort tem complexidade assintótica de tempo  $\mathcal{O}(n^2)$  no pior, médio e melhor casos. É possível interromper o algoritmo quando uma passagem não faz nenhuma modificação, indicando que o *array* já está ordenado. Neste caso, a complexidade assintótica no melhor caso é reduzida para  $\mathcal{O}(n)$ .

#### Solução 5.5

(Exercício 5.5)

```
1 def is_sorted(array):
2     for index in range(len(array) - 1):
3         if array[index] > array[index + 1]:
4             return False
5     return True
```

### Solução 5.6

(Exercício 5.6)

Ao usar uma busca binária, reduzimos a complexidade assintótica da busca pela posição de inserção do elemento de  $\mathcal{O}(n)$  para  $\mathcal{O}(\log n)$  no pior caso. Apesar dessa redução, o algoritmo ainda precisa deslocar elementos pela estrutura para efetivar a inserção, o que faz com que sua complexidade assintótica se mantenha em  $\mathcal{O}(n^2)$  no pior caso. Além disso, a busca binária ainda executaria em  $\mathcal{O}(\log n)$  no melhor caso (quando a estrutura já está ordenada), enquanto a busca sequencial executa em  $\mathcal{O}(1)$ . Portanto, a modificação proposta aumenta a complexidade do algoritmo de  $\mathcal{O}(n)$  para  $\mathcal{O}(n \log n)$  no melhor caso.

### Solução 5.7

(Exercício 5.7)

As obras listadas na bibliografia da disciplina apresentam esses algoritmos.

### Solução 5.8

(Exercício 5.8)

Análise as demonstrações para entender os diferentes algoritmos.

## 6 Pilhas, filas e dequeues

### Solução 6.1

(Exercício 6.1)

Se a pilha está vazia quando pop é chamado, seu tamanho não muda. Logo, o tamanho da pilha é  $25 - 10 + 3 = 18$ .

### Solução 6.2

(Exercício 6.2)

É uma posição menor que o tamanho. Logo,  $t = 17$ .

### Solução 6.3

(Exercício 6.3)

Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: 3, 8, 2, 1, 6, 7, 4, 9.

### Solução 6.4

(Exercício 6.4)

Você deve transferir um item de cada vez.

```
1 static <E> void transfer(Stack<E> S, Stack<E> T) {
2     while (!S.isEmpty()) {
3         T.push(S.pop());
4     }
5 }
```

### Solução 6.5

(Exercício 6.5)

Se a pilha está vazia, retorne “pilha vazia”. Caso contrário, remova o elemento do topo da pilha e chame a operação recursivamente com a pilha atualizada.

### Solução 6.6

(Exercício 6.6)

Se a pilha está vazia quando dequeue é chamado, seu tamanho não é modificado. Logo, o tamanho da fila é  $32 - 15 + 5 = 22$ .

### Solução 6.7

(Exercício 6.7)

Cada operação `dequeue` de sucesso implica em mover o índice para a direita de maneira circular. Logo,  $f = 10$ .

### Solução 6.8

(Exercício 6.8)

Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: 5, 3, 2, 8, 9, 1, 7, 6.

### Solução 6.9

(Exercício 6.9)

Dica: basta usar as operações apropriadas nas extremidades do deque.

### Solução 6.10

(Exercício 6.10)

Dica: basta usar as operações apropriadas nas extremidades do deque.

### Solução 6.11

(Exercício 6.11)

Desenhe a estrutura para simular as operações e mudanças realizadas. Resultado: 9, `false`, 9, 2, 7, 6, 2, 1.

### Solução 6.12

(Exercício 6.12)

A solução consiste em usar o resultado dos métodos de remoção como argumentos para os métodos de inserção. Solução:

```
D.addLast(D.removeFirst())
D.addLast(D.removeFirst())
D.addLast(D.removeFirst())
Q.enqueue(D.removeFirst())
Q.enqueue(D.removeFirst())
D.addFirst(Q.dequeue())
D.addFirst(Q.dequeue())
D.addFirst(D.removeLast())
D.addFirst(D.removeLast())
D.addFirst(D.removeLast())
```

### Solução 6.13

(Exercício 6.13)

A solução consiste em usar o resultado dos métodos de remoção como argumentos para os métodos de inserção. Adicionalmente, você precisará usar mais de uma pilha para armazenamento temporário. Solução:

```
D.addLast(D.removeFirst())
D.addLast(D.removeFirst())
D.addLast(D.removeFirst())
S.push(D.removeFirst())
D.addLast(D.removeFirst())
D.addFirst(S.pop())
D.addFirst(D.removeLast())
D.addFirst(D.removeLast())
D.addFirst(D.removeLast())
D.addFirst(D.removeLast())
```

## 7 Filas de prioridade

### Solução 7.1

(Exercício 7.1)

1, 3, 4, 5, 2, 6.

### Solução 7.2

(Exercício 7.2)

A melhor estrutura de dados para uma simulação de controle de tráfego aéreo é uma fila de prioridade. Essa estrutura permite manipular os *timestamps* e manter os eventos em ordem, de tal forma que o evento com menor instante de tempo seja facilmente extraído.

### Solução 7.3

(Exercício 7.3)

Mantenha uma variável adicional que referencie a entrada mínima atual. Isso permite executar a operação `min` em tempo constante  $\mathcal{O}(1)$ . Para que isso funcione, o método `insert` deve ser alterado, atualizando a variável adicional sempre que o novo elemento sendo inserido seja menor que `min`, bem como ao inserir quando a estrutura está vazia. O método `removeMin` também deve ser alterado, pois ele será responsável por identificar o novo elemento mínimo e atualizar a referência da variável adicional, para então remover o `min`.

### Solução 7.4

(Exercício 7.4)

Não. A operação `removeMin` continua necessitando tempo linear  $\mathcal{O}(n)$ . Apesar do `min` atual ser facilmente encontrado e removido, tal método precisa percorrer todos os elementos restantes para identificar o novo mínimo.

### Solução 7.5

(Exercício 7.5)

Retornos: "Joey", "Joey", "Ross", "Phoebe", "Phoebe".

Configuração final: ("Monica", "Rachel")

### Solução 7.6

(Exercício 7.6)

Retornos: "Joey", "Joey", "Phoebe", "Rachel", "Monica".

Configuração final: ("Ross", "Rachel")

## 8 Mapas

### Solução 8.1

(Exercício 8.1)

A primeira inserção consome  $\mathcal{O}(1)$ , a segunda consome  $\mathcal{O}(2)$ , e assim por diante, com a última inserção consumindo  $\mathcal{O}(n)$ . A execução completa dessa operação consome  $\mathcal{O}(n^2)$ .

### Solução 8.2

(Exercício 8.2)

Para isso, use o método `findIndex`.

```
1 public boolean containsKey(K key) {  
2     return (findIndex(key) != -1);  
3 }
```

### Solução 8.3

(Exercício 8.3)

Dado que o mapa seguirá contendo  $n$  entradas no final do procedimento, você pode assumir que cada

operação `remove` consome o mesmo tempo assintótico  $\mathcal{O}(n)$ . Logo, a complexidade total no pior caso é  $\mathcal{O}(n^2)$ .

#### Solução 8.4

(Exercício 8.4)

Novamente, podemos utilizar o método `findIndex`.

```
1 public boolean containsKey(K key) {
2     int j = findIndex(key);
3     return (j < data.size() && compare(key, data.get(j)) == 0);
4 }
```

#### Solução 8.5

(Exercício 8.5)

A solução deve fazer uma única chamada ao método `findIndex`.

```
1 public V pullAbsent(K key, V value) {
2     int j = findIndex(key);
3     if (j == -1) {
4         data.add(new MapEntry<>(key, value));
5         return null;
6     } else {
7         return data.get(j).getValue();
8     }
9 }
```

## 9 Tabelas hash

#### Solução 9.1

(Exercício 9.1)

Pior caso: todas as entradas ocupam a mesma posição,  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Melhor caso: cada entrada ocupa uma posição diferente,  $\mathcal{O}(n)$ .

#### Solução 9.2

(Exercício 9.2)

Uma possibilidade é usar a implementação padrão do Java para o nome completo.

```
1 public int hashCode() {
2     return toString().hashCode();
3 }
```

Uma alternativa é computar os códigos *hash* separadamente (para o primeiro e último nomes) e então agregá-los.

```
1 public int hashCode() {
2     return first.hashCode() + last.hashCode();
3 }
```

#### Solução 9.3

(Exercício 9.3)

Neste exercício, o tamanho da tabela *hash* é igual ao valor de  $g$  (i.e., 31). Logo, a função *hash* vai considerar o último caractere da string para definir o índice do elemento na tabela (pela operação da linha 6). Uma possível resposta: **Jim**, **Tim**, **Tom**, **Sam** e **Kim**.

Exemplo para o nome *Jim*:

- Os valores dos caracteres  $J$ ,  $i$  e  $m$  são 74, 105 e 109, respectivamente.
- Logo, o código *hash* é  $74 \cdot 31^2 + 105 \cdot 31 + 109 = 74478$ .

- O índice é  $74478 \% 31 = 16$ .

### Solução 9.4

(Exercício 9.4)

Alternativas de código *hash*:

1. Converta cada um dos valores em string e os concatene, formando uma string única. Use então a função *hashCode* para strings.
2. Seja  $x$ ,  $y$  e  $z$  os três valores reais, compute o polinômio  $xd^2 + yd + z$ , para algum  $d > 0$ . Trunque então o resultado para um número inteiro.

Em ambos os casos, o código *hash* gerado deverá ser comprimido pela função *hash* usando a operação módulo (resto da divisão inteira) e o tamanho da tabela. Você também pode escalar e/ou arredondar os valores reais antes do processamento.

### Solução 9.5

(Exercício 9.5)

Alternativas de código *hash*:

1. Some os valores de todos os 400 pixels.
2. Usar a mesma técnica aplicada a strings (e a implementação pelo método de Horner), onde os valores de  $u$  são os pixels da imagem. [veja o Exercício 9.2 e a Solução 9.2]

**Nota:** as melhores práticas recomendam que todas as partes da chave contribuam para a função *hash*. No entanto, para fins de eficiência qualquer das abordagens poderia usar um subconjunto dos pixels da imagem. Se a abordagem 1 for usada com uma tabela de tamanho 2000, a distribuição de índices será sensível ao número de pixels usado. Qualquer número abaixo de 10 causará uma má distribuição. Em geral, usar mais pixels é melhor.

### Solução 9.6

(Exercício 9.6)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	94				44			12	16	20
	39				88			23	56	
					11					

### Solução 9.7

(Exercício 9.7)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
38				90				28	41	54	10		36			18	12	25

### Solução 9.8

(Exercício 9.8)

Dica: combinar os códigos *hash* dos dois componentes.

```

1 public int hashCode() {
2     return a.hashCode() + b.hashCode();
3 }
4
5 public boolean equals(Object o) {
6     if(o == null) return false;
7     if(getClass() != o.getClass()) return false;
8     Pair other = (Pair) o;
9     return (a.equals(other.a) && b.equals(other.b));
10 }

```



### Solução 9.9

(Exercício 9.9)

Exercício de implementação.

### Solução 9.10

(Exercício 9.10)

Exercício de implementação.

## 10 Árvores

### Solução 10.1

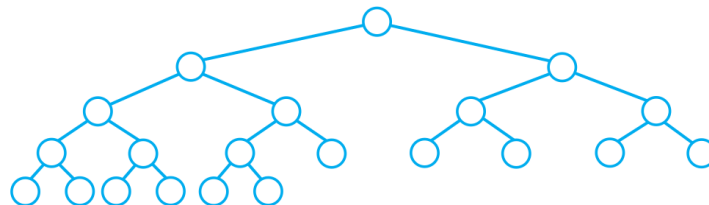
(Exercício 10.1)

- a) /user/rt/courses/.
- b) Aqueles representados na cor preta.
- c) 9.
- d) 1.
- e) grades e programs/.
- f) projects/, papers/, demos/, buylow, sellhigh, market.
- g) 4.
- h) 5.

### Solução 10.2

(Exercício 10.2)

A altura é 5. Ela não é cheia, mas é balanceada. A árvore abaixo é completa, mas se movermos alguma folha (no nível 5) para outro pai, ela mantém sua altura, mas deixa de ser completa.



### Solução 10.3

(Exercício 10.3)

- a)  $2^3 - 1 = 7$  nodos.
- b) 4 folhas.
- c)  $2^{10} - 1 = 1023$  nodos; 512 folhas.

### Solução 10.4

(Exercício 10.4)

```
1 count(root):  
2   IF root != null THEN  
3     RETURN 1 + count(root.left) + count(root.right)  
4   ELSE  
5     RETURN 0
```

### Solução 10.5

(Exercício 10.5)

Travessias para a primeira árvore:

- **Pré-ordem** (profundidade): 6, 4, 2, 1, 3, 5, 8, 7, 9, 10, 11.
- **Level-ordem** (largura): 6, 4, 8, 2, 5, 7, 10, 1, 3, 9, 11.

Travessias para a segunda árvore:

- **Pré-ordem** (profundidade): 11, 8, 3, 2, 1, 5, 4, 6, 10, 9, 7.
- **Level-ordem** (largura): 11, 8, 10, 3, 5, 9, 7, 2, 1, 4, 6.

### Solução 10.6

(Exercício 10.6)

- a) Não. O 9 está na sub-árvore do 8, quando deveria ser o filho esquerdo do 10.
- b) Não. O 5 e o 6 precisam ser trocados um com o outro para que a árvore seja um *max-heap*.

### Solução 10.7

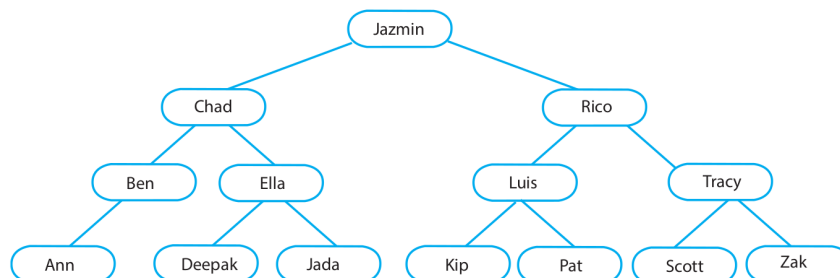
(Exercício 10.7)

Sim, uma árvore de busca binária pode ser uma *max-heap*. Considere uma árvore binária de busca com os valores 7 e 2, onde 7 é a raiz. A árvore é completa e satisfaz a propriedade da *heap*.

### Solução 10.8

(Exercício 10.8)

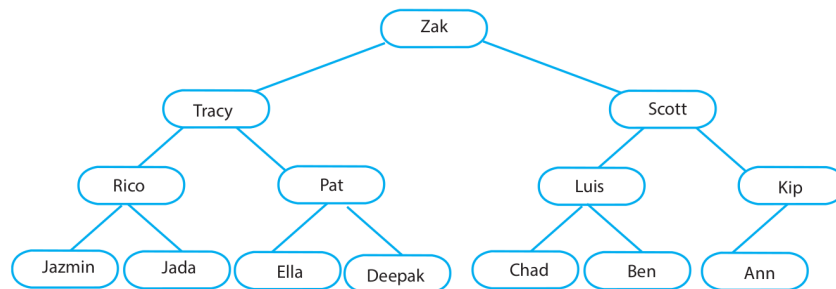
A árvore abaixo não é única. Uma segunda árvore binária de busca com a mesma altura poderia ser construída usando *Kip* como raiz.



### Solução 10.9

(Exercício 10.9)

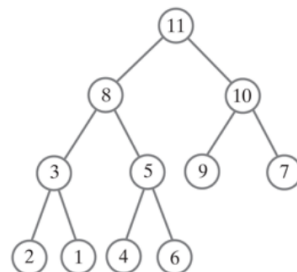
A *max-heap* abaixo não é única. Podemos trocar o conteúdo de quaisquer irmãos e manter o critério de ordenação da *max-heap*.



### Solução 10.10

(Exercício 10.10)

A ordem de visitação em profundidade será 11, 8, 3, 2, 1, 5, 4, 6, 10, 9, 7. A árvore é apresentada abaixo.



### Solução 10.11

(Exercício 10.11)

- Se  $i$  é par, o irmão de  $i$  é o nodo  $i + 1$ . Se  $i$  é ímpar e maior que 1, seu irmão é o nodo  $i - 1$  (quando  $i = 1$ , trata-se da raiz da árvore, que não tem irmão).
- $2i$ .
- $2i + 1$ .
- $i/2$ , para  $i > 1$  (quando  $i = 1$ , trata-se da raiz da árvore, que não tem pai).

### Solução 10.12

(Exercício 10.12)

```

1 count(root, leftChild):
2   IF root == null THEN
3     RETURN 0
4   IF root.left == null AND root.right == null THEN
5     IF leftChild THEN
6       RETURN 1
7     ELSE
8       RETURN 0
9   ELSE
10    RETURN 0 + count(root.left, true) + count(root.right, false)
  
```

### Solução 10.13

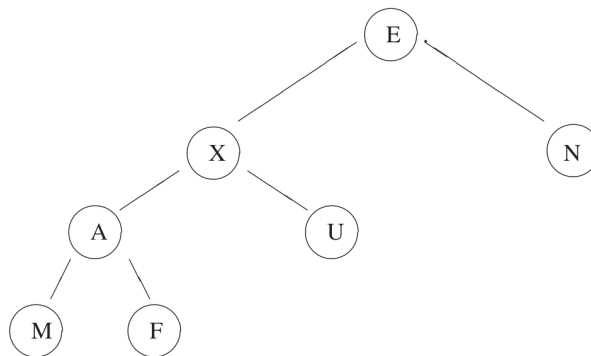
(Exercício 10.13)

Cinco (2 com raiz 1; 1 com raiz 2; 2 com raiz 3).

### Solução 10.14

(Exercício 10.14)

A árvore abaixo satisfaz as condições (mas não é a única).



### Solução 10.15

(Exercício 10.15)

