

# Tabelas hash

## Mapas eficientes

Prof. Marcelo de Souza

45EST – Algoritmos e Estruturas de Dados  
Universidade do Estado de Santa Catarina



## Leitura principal:

- ▶ Capítulo 10 de [Goodrich et al. \(2014\)](#)<sup>1</sup> – Mapas, tabelas hash e skip lists.
- ▶ Capítulo 22 de [Carrano e Henry \(2018\)](#)<sup>2</sup> – *Introducing hashing*.

## Leitura complementar:

- ▶ Capítulo 8 de [Szwarcfiter e Markenzon \(2009\)](#)<sup>3</sup> – Tabelas de dispersão.

---

<sup>1</sup>Michael T Goodrich et al. (2014). *Data structures and algorithms in Java*. 6ª ed. John Wiley & Sons.

<sup>2</sup>Frank M. Carrano e Timothy M. Henry (2018). *Data Structures and Abstractions with Java (5th Edition)*. 5th. Pearson.

<sup>3</sup>Jayme Luiz Szwarcfiter e Lilian Markenzon (2009). *Estruturas de Dados e seus Algoritmos*. Vol. 2. Livros Técnicos e Científicos.



A eficiência das operações em um mapa simples (baseado em um arranjo ordenado) é:

- ▶  $\mathcal{O}(\log n)$  para a **consulta**, usando a busca binária;
- ▶  $\mathcal{O}(n)$  para **inserção** e **remoção**, devido à realocação de elementos no arranjo.



A eficiência das operações em um mapa simples (baseado em um arranjo ordenado) é:

- ▶  $\mathcal{O}(\log n)$  para a **consulta**, usando a busca binária;
- ▶  $\mathcal{O}(n)$  para **inserção** e **remoção**, devido à realocação de elementos no arranjo.

Ao usar **hashing**, podemos determinar o índice de cada entrada no mapa, com isso:

- ▶ Não precisamos buscar uma entrada desejada;
- ▶ A posição de uma entrada é definida pela chave e não há realocação;
- ▶ Resultado: mais **eficiência**!

# Hashing

## Conceitos básicos

A eficiência das operações em um mapa simples (baseado em um arranjo ordenado) é:

- ▶  $\mathcal{O}(\log n)$  para a **consulta**, usando a busca binária;
- ▶  $\mathcal{O}(n)$  para **inserção** e **remoção**, devido à realocação de elementos no arranjo.

Ao usar **hashing**, podemos determinar o índice de cada entrada no mapa, com isso:

- ▶ Não precisamos buscar uma entrada desejada;
- ▶ A posição de uma entrada é definida pela chave e não há realocação;
- ▶ Resultado: mais **eficiência**!

Mapas que usam *hashing* são chamados de **tabelas hash** (ou *hash tables*).



# Exemplo

## Base de dados de estudantes



Queremos armazenar os dados dos **estudantes** da universidade em um mapa.

- ▶ **Chave:** matrícula (String);
- ▶ **Valor:** objeto da classe Estudante contendo matrícula, nome, fase e média geral.

# Exemplo

## Base de dados de estudantes



Queremos armazenar os dados dos **estudantes** da universidade em um mapa.

- ▶ **Chave:** matrícula (String);
- ▶ **Valor:** objeto da classe Estudante contendo matrícula, nome, fase e média geral.

Um exemplo de **matrícula** é “523-1247”, onde:

- ▶ “523” é o código da universidade, comum a todos os estudantes;
- ▶ “1247” é o código de identificação, único para cada estudante.

# Exemplo

## Base de dados de estudantes



Queremos armazenar os dados dos **estudantes** da universidade em um mapa.

- ▶ **Chave:** matrícula (String);
- ▶ **Valor:** objeto da classe `Estudante` contendo matrícula, nome, fase e média geral.

Um exemplo de **matrícula** é “523-1247”, onde:

- ▶ “523” é o código da universidade, comum a todos os estudantes;
- ▶ “1247” é o código de identificação, único para cada estudante.

O código de identificação varia de “0000” a “9999”.

- ▶ **Ideia:** usar o código de identificação como posição (índice) da entrada no mapa!
- ▶ Esse é o princípio do *hashing*.



# Exemplo

Estudantes – tabela *hash*



Chaves

Valores

$\langle \text{"523-1247"}, \text{"Ross"} \rangle$

$\langle \text{"523-3761"}, \text{"Monica"} \rangle$

$\langle \text{"523-8147"}, \text{"Rachel"} \rangle$

$\langle \text{"523-0158"}, \text{"Joey"} \rangle$

$\langle \text{"523-6358"}, \text{"Chandler"} \rangle$

# Exemplo

Estudantes – tabela *hash*



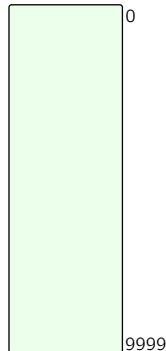
Chaves	Valores	Código <i>hash</i>
$\langle \text{"523-1247"}, \text{"Ross"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>1247</b>
$\langle \text{"523-3761"}, \text{"Monica"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>3761</b>
$\langle \text{"523-8147"}, \text{"Rachel"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>8147</b>
$\langle \text{"523-0158"}, \text{"Joey"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>158</b>
$\langle \text{"523-6358"}, \text{"Chandler"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>6358</b>

# Exemplo

Estudantes – tabela *hash*

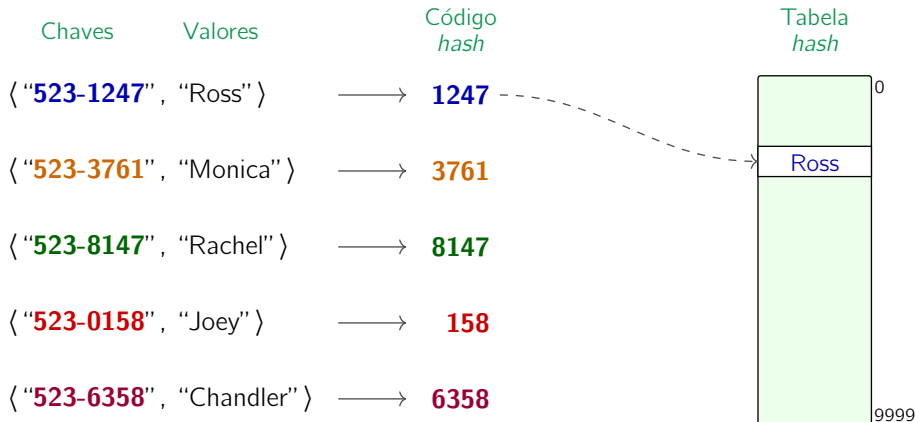
Chaves	Valores	Código <i>hash</i>
$\langle \text{"523-1247"}, \text{"Ross"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>1247</b>
$\langle \text{"523-3761"}, \text{"Monica"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>3761</b>
$\langle \text{"523-8147"}, \text{"Rachel"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>8147</b>
$\langle \text{"523-0158"}, \text{"Joey"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>158</b>
$\langle \text{"523-6358"}, \text{"Chandler"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>6358</b>

Tabela  
*hash*



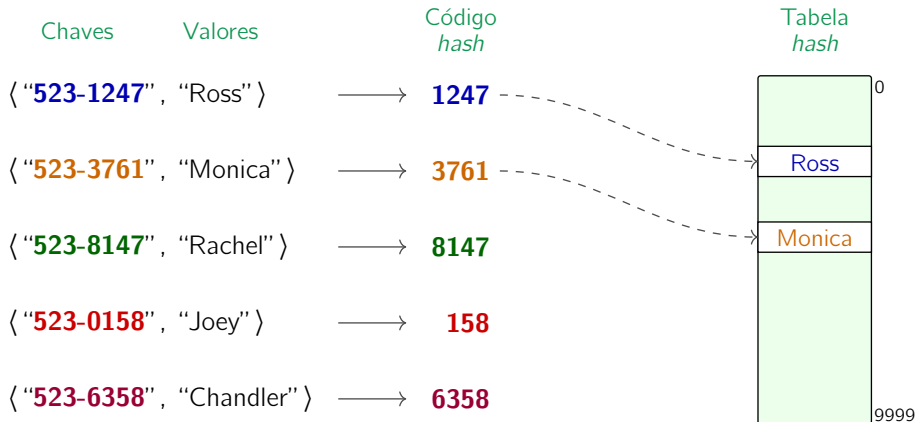
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash*



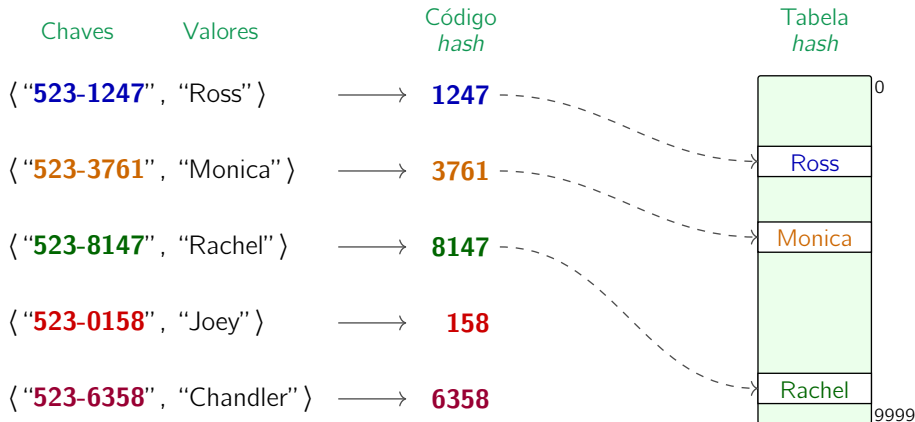
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash*



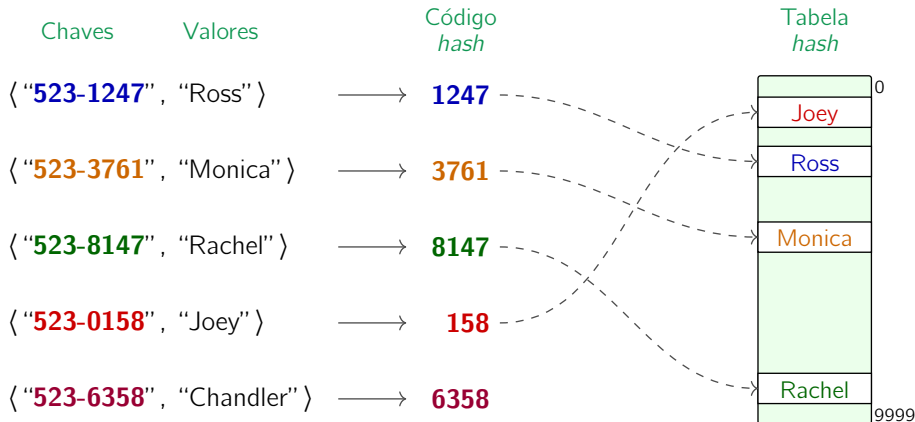
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash*



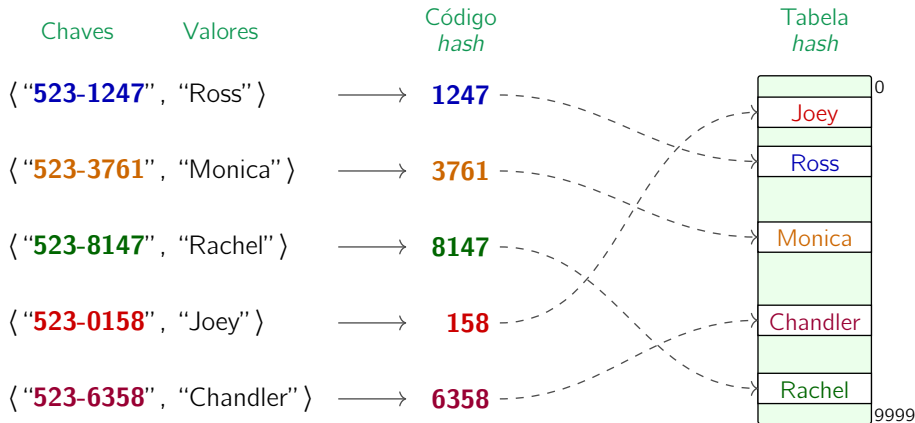
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash*



# Exemplo

Estudantes – tabela *hash*





# Função *hash*

Função *hash* perfeita



**Função hash:** dada a chave, “calcula” o índice onde a entrada está (ou será) armazenada.

► Exemplo:  $h(\text{"523-1247"}) \rightarrow 1247$ .

# Função *hash*

## Função *hash* perfeita



**Função hash:** dada a chave, “calcula” o índice onde a entrada está (ou será) armazenada.

▶ Exemplo:  $h(\text{"523-1247"}) \rightarrow 1247$ .

**Função hash perfeita:** mapeia cada chave para um índice diferente do vetor.

▶ Com isso, temos acesso à entrada em  $\mathcal{O}(1)$ , i.e. tempo constante!

# Função *hash*

## Função *hash* perfeita



**Função *hash*:** dada a chave, “calcula” o índice onde a entrada está (ou será) armazenada.

- ▶ Exemplo:  $h(\text{"523-1247"}) \rightarrow 1247$ .

**Função *hash* perfeita:** mapeia cada chave para um índice diferente do vetor.

- ▶ Com isso, temos acesso à entrada em  $\mathcal{O}(1)$ , i.e. tempo constante!

Na prática, nem sempre conseguimos projetar uma função *hash* perfeita.

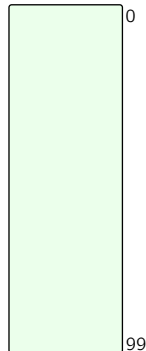
- ▶ Não conhecemos todos os possíveis valores de chave;
- ▶ A tabela possui capacidade menor que o número de entradas possíveis.

# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas


Chaves	Valores	Código <i>hash</i>
$\langle \text{"523-1247"}, \text{"Ross"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>1247</b>
$\langle \text{"523-3761"}, \text{"Monica"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>3761</b>
$\langle \text{"523-8147"}, \text{"Rachel"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>8147</b>
$\langle \text{"523-0158"}, \text{"Joey"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>158</b>
$\langle \text{"523-6358"}, \text{"Chandler"} \rangle$	$\longrightarrow$	<b>6358</b>

Tabela  
*hash*



# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas

Chaves	Valores	Código <i>hash</i>	Índice (% 100)	Tabela <i>hash</i>
⟨ “523-1247”, “Ross” ⟩	→	1247	→ 47	
⟨ “523-3761”, “Monica” ⟩	→	3761	→ 61	
⟨ “523-8147”, “Rachel” ⟩	→	8147	→ 47	
⟨ “523-0158”, “Joey” ⟩	→	158	→ 58	
⟨ “523-6358”, “Chandler” ⟩	→	6358	→ 58	

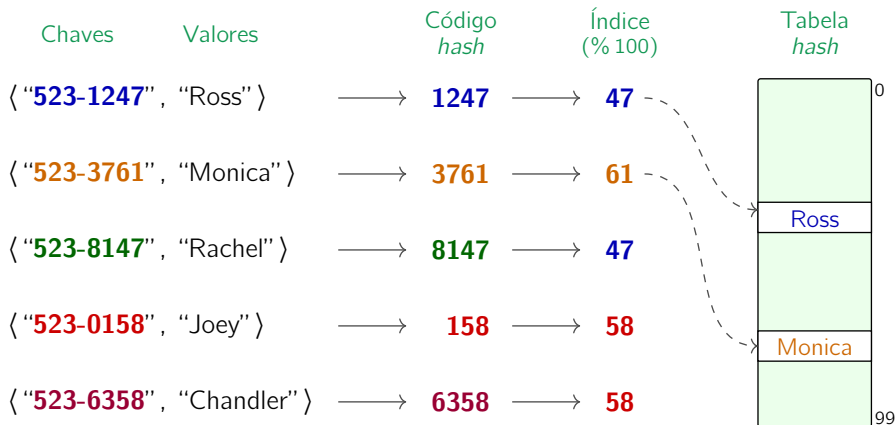
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas

Chaves	Valores	Código <i>hash</i>	Índice (% 100)	Tabela <i>hash</i>
⟨ “523-1247”, “Ross” ⟩	→	1247	→ 47	<div>0</div> <div>Ross</div> <div>99</div>
⟨ “523-3761”, “Monica” ⟩	→	3761	→ 61	
⟨ “523-8147”, “Rachel” ⟩	→	8147	→ 47	
⟨ “523-0158”, “Joey” ⟩	→	158	→ 58	
⟨ “523-6358”, “Chandler” ⟩	→	6358	→ 58	

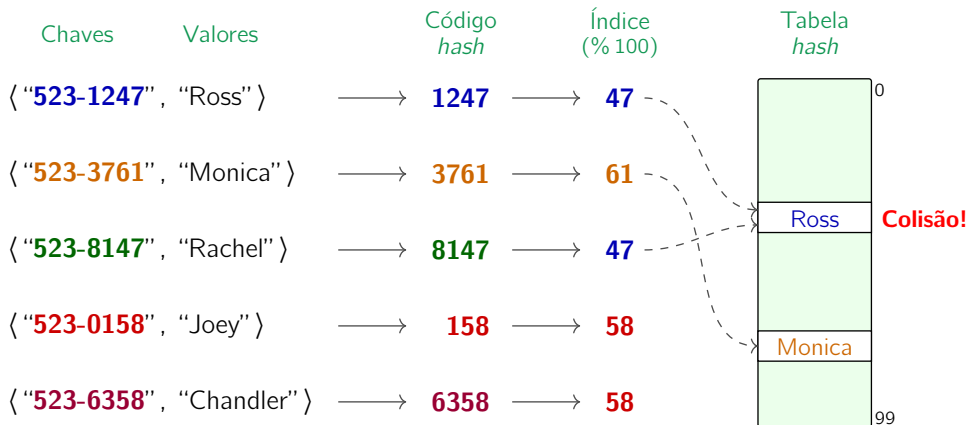
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas



# Exemplo

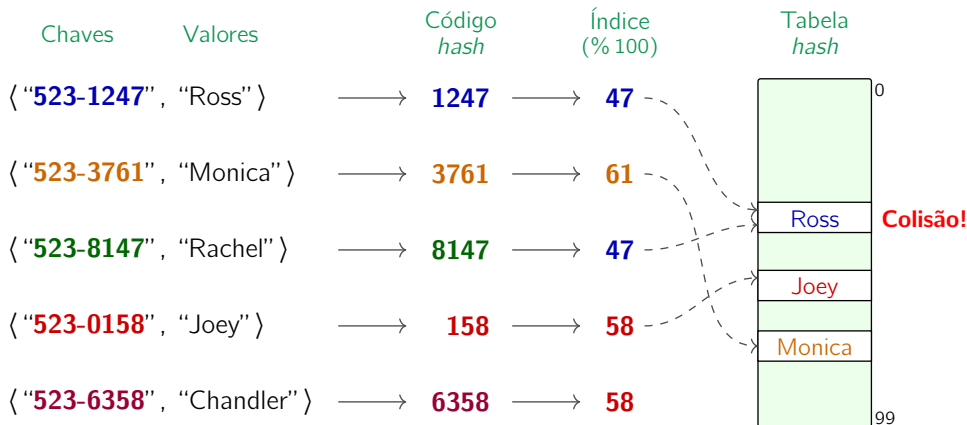
Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas





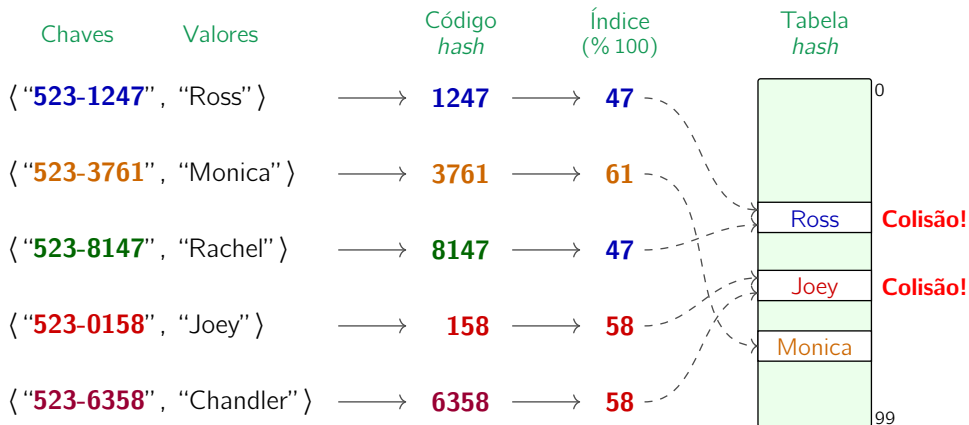
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas



# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas



# Função *hash*

Função *hash* não perfeita



Em resumo, uma função *hash* típica possui duas etapas:

1. Converter a chave para um valor inteiro, chamado **código hash** (ou *hash code*).
2. Comprimir o código *hash* para o intervalo de índices da tabela *hash* (operação **módulo**).

# Função *hash*

Função *hash* não perfeita

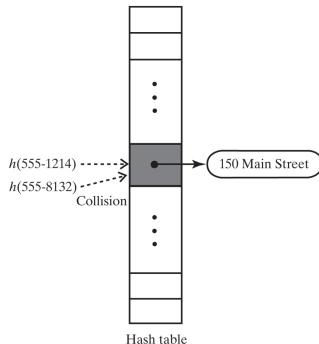


Em resumo, uma função *hash* típica possui duas etapas:

1. Converter a chave para um valor inteiro, chamado **código hash** (ou *hash code*).
2. Comprimir o código *hash* para o intervalo de índices da tabela *hash* (operação **módulo**).

Uma boa função *hash* deve apresentar duas características:

- ▶ Ser **eficiente** para computar.
- ▶ Minimizar a ocorrência de **colisões**.
  - ▶ i.e., distribuir as chaves de maneira uniforme.





**Colisão:** a função *hash* calcula um índice da tabela *hash* já ocupado por outro objeto.



**Colisão:** a função *hash* calcula um índice da tabela *hash* já ocupado por outro objeto.

Neste caso, precisamos **resolver a colisão**. Para isso, temos duas estratégias:

1. Encontrar outra posição (livre) na estrutura. —→ **endereçamento aberto** (*probing*)
2. Armazenar mais de uma entrada no mesmo índice. —→ **encadeamento** (*chaining*)



**Colisão:** a função *hash* calcula um índice da tabela *hash* já ocupado por outro objeto.

Neste caso, precisamos **resolver a colisão**. Para isso, temos duas estratégias:

1. Encontrar outra posição (livre) na estrutura. —→ **endereçamento aberto** (*probing*)
2. Armazenar mais de uma entrada no mesmo índice. —→ **encadeamento** (*chaining*)

Resolução de colisões com **encadeamento**:

1. A tabela *hash* armazena uma coleção de entradas (*bucket*) em cada posição/índice.
2. Essa coleção pode ser implementada por outro arranjo ou por uma lista encadeada.

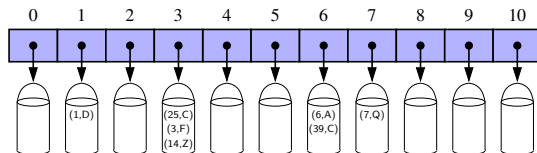
**Colisão:** a função *hash* calcula um índice da tabela *hash* já ocupado por outro objeto.

Neste caso, precisamos **resolver a colisão**. Para isso, temos duas estratégias:

1. Encontrar outra posição (livre) na estrutura. → **endereçamento aberto** (*probing*)
2. Armazenar mais de uma entrada no mesmo índice. → **encadeamento** (*chaining*)

Resolução de colisões com **encadeamento**:

1. A tabela *hash* armazena uma coleção de entradas (*bucket*) em cada posição/índice.
2. Essa coleção pode ser implementada por outro arranjo ou por uma lista encadeada.





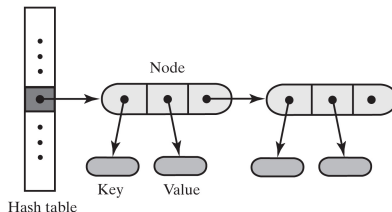
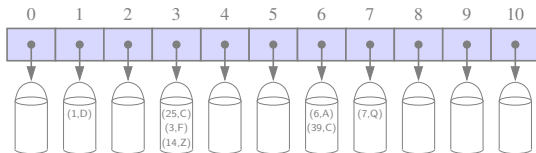
**Colisão:** a função *hash* calcula um índice da tabela *hash* já ocupado por outro objeto.

Neste caso, precisamos **resolver a colisão**. Para isso, temos duas estratégias:

1. Encontrar outra posição (livre) na estrutura. → **endereçamento aberto** (*probing*)
2. Armazenar mais de uma entrada no mesmo índice. → **encadeamento** (*chaining*)

Resolução de colisões com **encadeamento**:

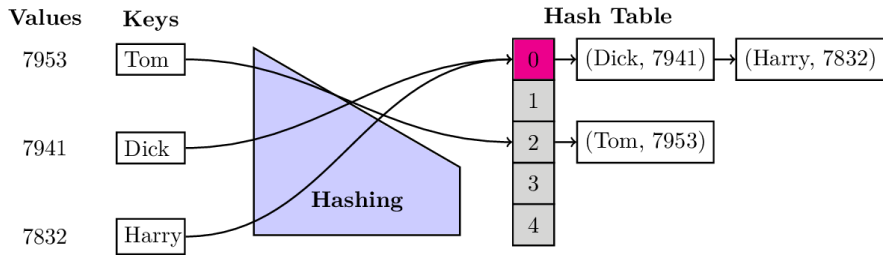
1. A tabela *hash* armazena uma coleção de entradas (*bucket*) em cada posição/índice.
2. Essa coleção pode ser implementada por outro arranjo ou por uma lista encadeada.



# Tabelas hash

## Definição


Uma **tabela hash** é composta por um **arranjo**, onde cada posição armazena uma coleção de entradas (chave e valor). Essa coleção é usualmente implementada por uma **lista encadeada**. A **função hash** é responsável por mapear chaves para posições do arranjo.





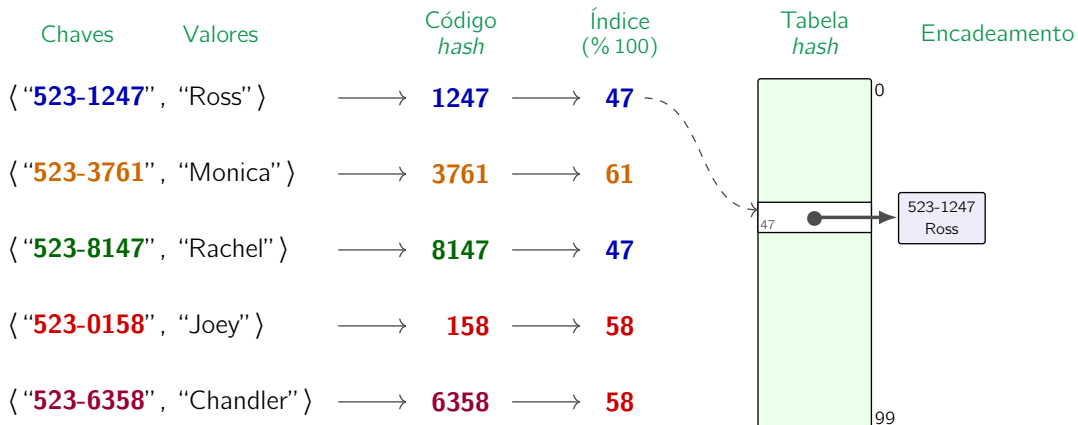
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões

Chaves	Valores	Código <i>hash</i>	Índice (% 100)	Tabela <i>hash</i>
⟨ “523-1247”, “Ross” ⟩	→	1247	→ 47	 0 99
⟨ “523-3761”, “Monica” ⟩	→	3761	→ 61	
⟨ “523-8147”, “Rachel” ⟩	→	8147	→ 47	
⟨ “523-0158”, “Joey” ⟩	→	158	→ 58	
⟨ “523-6358”, “Chandler” ⟩	→	6358	→ 58	

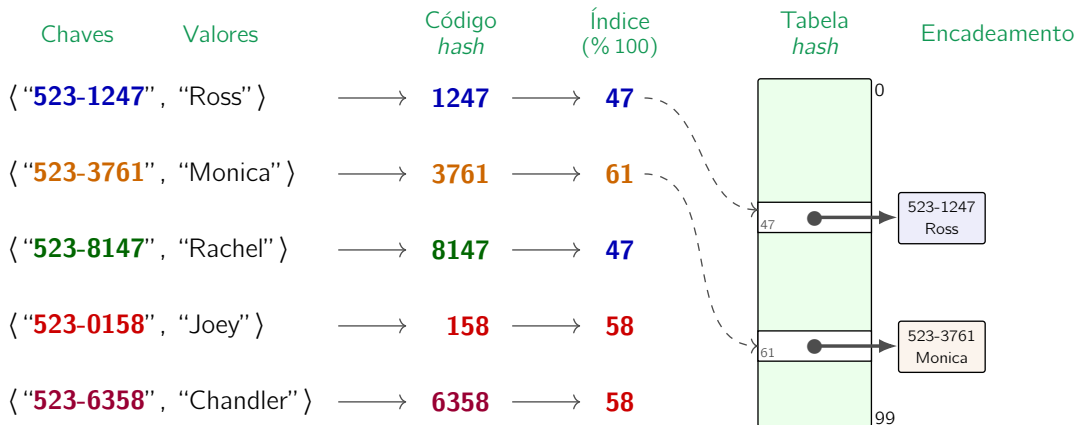
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões



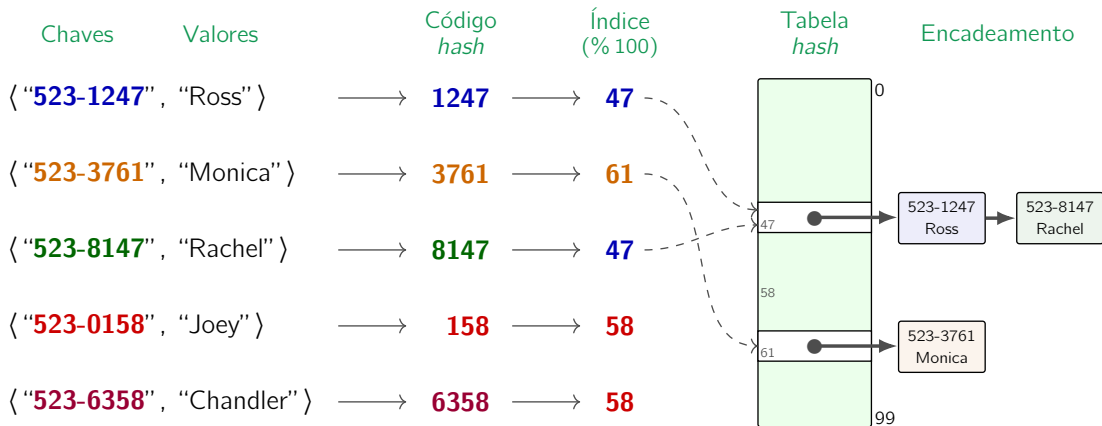
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões



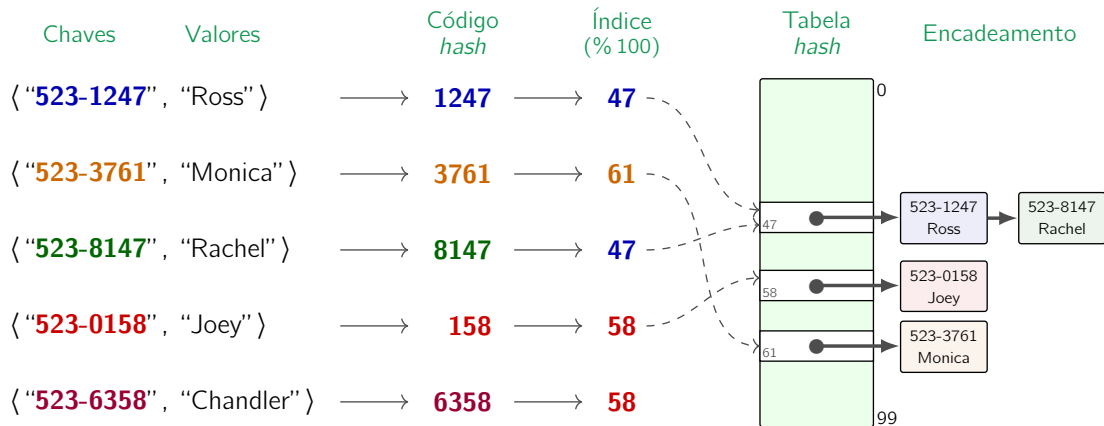
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões



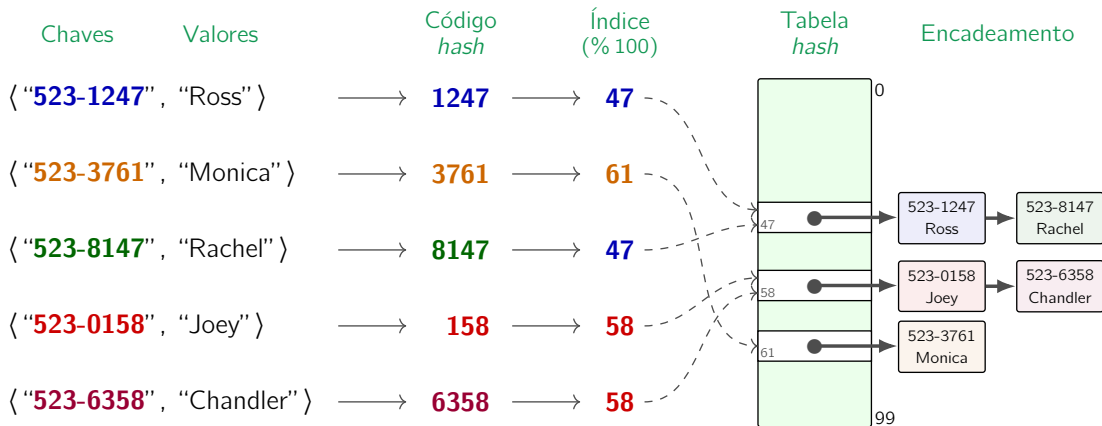
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões



# Exemplo

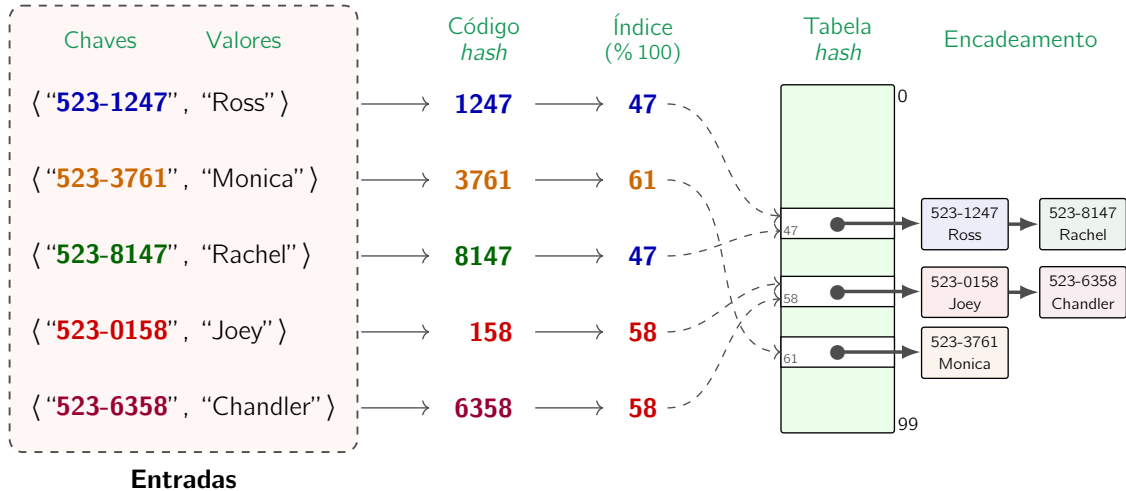
Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões





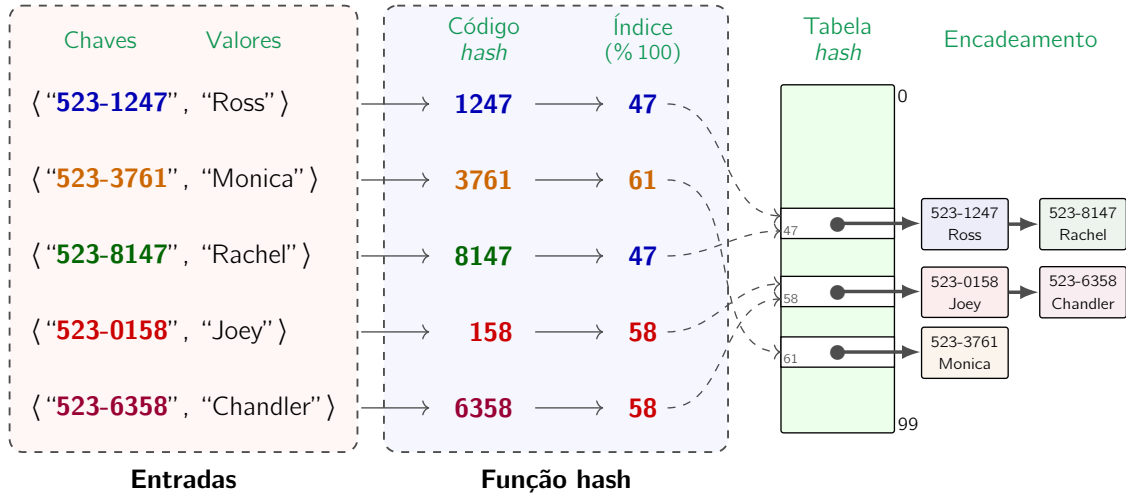
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões



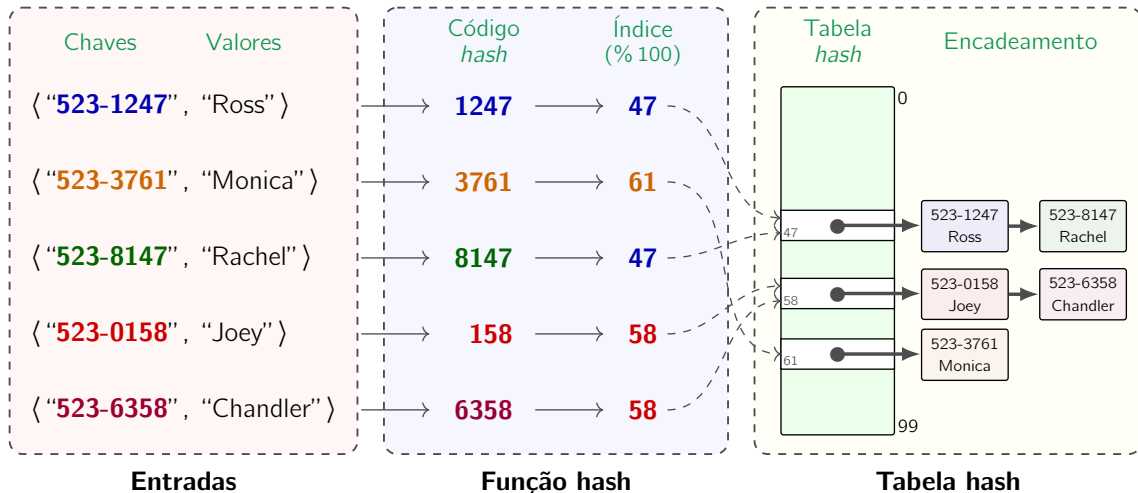
# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões



# Exemplo

Estudantes – tabela *hash* com 100 entradas e resolução de colisões





O Java fornece a conversão de qualquer tipo em um valor inteiro pelo método `hashCode`.

- ▶ Todos os tipos herdam esse método de `Object`.



O Java fornece a conversão de qualquer tipo em um valor inteiro pelo método `hashCode`.

- ▶ Todos os tipos herdam esse método de `Object`.

Para tipos primitivos (inteiro, string), o Java fornece implementações específicas do `hashCode`.

- ▶ Pode ser usado diretamente pelas funções *hash*.



O Java fornece a conversão de qualquer tipo em um valor inteiro pelo método `hashCode`.

- ▶ Todos os tipos herdam esse método de `Object`.

Para tipos primitivos (inteiro, `string`), o Java fornece implementações específicas do `hashCode`.

- ▶ Pode ser usado diretamente pelas funções *hash*.

Para outros tipos (classes), o Java usa o endereço de memória do objeto para o `hashCode`.

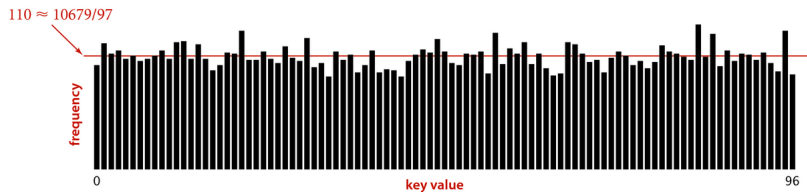
- ▶ Neste caso, objetos com os mesmos valores, mas armazenados em locais diferentes recebem códigos *hash* distintos, o que não é desejado.
- ▶ Recomenda-se sobrescrever `hashCode` e implementar a geração do código *hash*.

# Exemplo

Distribuição da função *hash* para strings



Valores *hash* (i.e. índices) calculados a partir do hashCode padrão para o conjunto de palavras (excluídas as repetidas) do livro “*A Tale of Two Cities*”, para um arranjo com 97 posições.



Hash value frequencies for words in *Tale of Two Cities* (10,679 keys,  $M = 97$ )



A complexidade das operações está diretamente relacionada à qualidade da função *hash*.

- ▶ Uma **função hash perfeita** mapeia cada chave para um índice distinto (**melhor caso**). Logo, o acesso à estrutura (para consulta, inserção e remoção) ocorre em  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ Uma **função hash não perfeita** pode mapear todas as chaves para um mesmo índice, no **pior caso**, gerando máxima colisão. Neste caso, as operações custarão  $\mathcal{O}(n)$ .





A complexidade das operações está diretamente relacionada à qualidade da função *hash*.

- ▶ Uma **função hash perfeita** mapeia cada chave para um índice distinto (**melhor caso**). Logo, o acesso à estrutura (para consulta, inserção e remoção) ocorre em  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ Uma **função hash não perfeita** pode mapear todas as chaves para um mesmo índice, no **pior caso**, gerando máxima colisão. Neste caso, as operações custarão  $\mathcal{O}(n)$ .

Felizmente, implementações de tabelas *hash* usam técnicas para melhorar o desempenho, como:

- ▶ Controlar o fator de carga da estrutura, aumentando dinamicamente sua capacidade;
- ▶ Usar valores de capacidade que minimizam a ocorrência de colisões.



A complexidade das operações está diretamente relacionada à qualidade da função *hash*.

- ▶ Uma **função hash perfeita** mapeia cada chave para um índice distinto (**melhor caso**). Logo, o acesso à estrutura (para consulta, inserção e remoção) ocorre em  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ Uma **função hash não perfeita** pode mapear todas as chaves para um mesmo índice, no **pior caso**, gerando máxima colisão. Neste caso, as operações custarão  $\mathcal{O}(n)$ .

Felizmente, implementações de tabelas *hash* usam técnicas para melhorar o desempenho, como:

- ▶ Controlar o fator de carga da estrutura, aumentando dinamicamente sua capacidade;
- ▶ Usar valores de capacidade que minimizam a ocorrência de colisões.

Com isso, as operações de consulta, inserção e remoção de uma tabela *hash* possuem complexidade de tempo  $\mathcal{O}(1)$  no **caso médio**!

